Para esse exercício, precisamos calcular a integral:

$$\int_{1/4}^{3/4} \phi_i\left(x\right) f\left(x\right)\, dx$$ ∫1/43/4 ϕi(x)f(x) dx

através do método dos trapézios quando $n = 2$n = 2 e $n = 4$n = 4; e depois utilizar os resultados para refinar a solução através do método de Simpson.

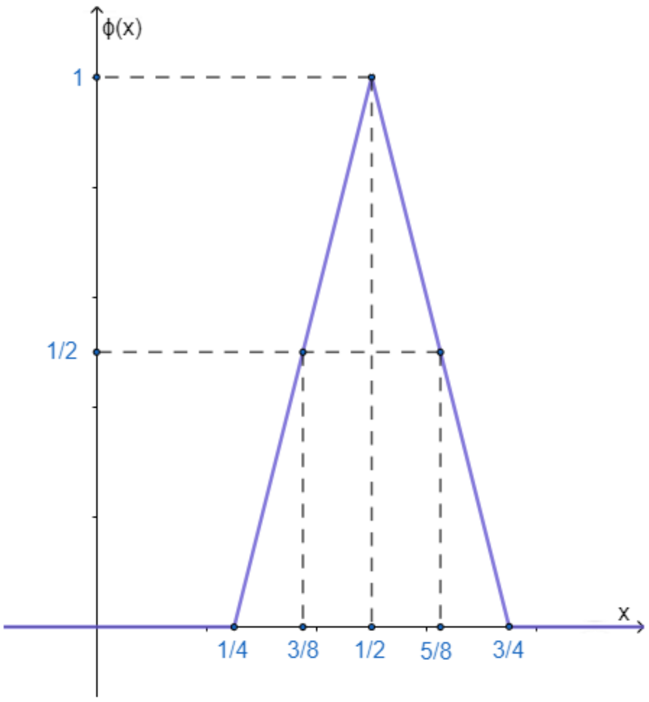
Para isso, precisamos **definir alguns pontos** da função a fim de aplicar os métodos.

Vamos começar descrevendo a função a ser integrada. Primeiro por $\phi_i(x)$ϕi(x), temos:

$$\phi_i\left(x\right) = \begin{cases} 4x - 1 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ 3 - 4x & \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4} \end{cases}$$ ϕi(x) = {4x − 13 − 4x41 ≤ x ≤ 2121 ≤ x ≤ 43

Como teremos que calcular a integral pelo método dos trapézios com $n = 4$n = 4, vamos dividir nosso intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$[41, 43] em 44 partes.

Podemos plotar um gráfico dessa função com o intervalo dividido e os respectivos valores de $\phi(x)$ϕ(x), e teremos:



Essa ainda não é a função que iremos integrar, pois falta **multiplicar** por $f(x) = x^3$ f(x) = x3. Assim, vamos chamar:

$g(x) = \phi_i(x) \cdot x^3$g(x) = ϕi(x) · x3

Vamos encontrar os valores de $g(x)$g(x) para os pontos do gráfico:

$g\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0$g (41) = 0 · (41)3 = 0

$g\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{27}{1024} = 0,02637$g (83) = 21 · (83)3 = 102427 = 0, 02637

$g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0,125$g (21) = 1 · (21)3 = 81 = 0, 125

$g\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{125}{1024} = 0,12207$g (85) = 21 · (85)3 = 1024125 = 0, 12207

$g\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0$g (43) = 0 · (43)3 = 0

Pra facilitar a visualização, podemos colocar todos os dados em uma tabela:

x	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4
$g(x)$	0	0,02637	0,125	0,12207	0

Agora o problema está bem mais simples, já que só basta aplicar os métodos numéricos.

Primeiro para 2 – 2–Trapézios:

$T_2(g) = \frac{b-a}{2n}\left(g\left(\frac{1}{4}\right) + 2g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right)\right)$T2(g) = 2nb − a (g (41) + 2g (21) + g (43))

Substituindo os valores:

$T_2\left(g\right) = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{2\cdot 2}(0 + 2 \cdot 0,125 + 0)$T2(g) = 2 · 243 − 41 (0 + 2 · 0, 125 + 0) ⇒⇒

⇒⇒ $T_2(g) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{32} = 0,03125$T2(g) = 81 · 82 = 321 = 0, 03125

Agora vamos realizar o processo de novo para 4 – 4–Trapézios:

$T_4(g) = \frac{b-a}{2n}\left(g\left(\frac{1}{4}\right) + 2g\left(\frac{3}{8}\right) + 2g\left(\frac{1}{2}\right) + 2g\left(\frac{5}{8}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right)\right)$T4(g) = 2nb − a (g (41) + 2g (83) + 2g (21) + 2g (85) + g (43))

Substituindo os valores:

$T_4\left(g\right) = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{2\cdot 4}\left(0 + 2\cdot\frac{27}{1024} + 2\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{125}{1024} + 0\right)$T4(g) = 2 · 443 − 41 (0 + 2 · 102427 + 2 · 81 + 2 · 1024125 + 0) ⇒⇒

⇒⇒ $T_4\left(g\right) = \frac{2}{16}\left(\frac{27+128+125}{1024}\right)$T4(g) = 162 (102427 + 128 + 125) ⇒⇒

⇒⇒ $T_4\left(g\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{280}{1024} = \frac{35}{1024} = 0,034179688$T4(g) = 81 · 1024280 = 102435 = 0, 034179688

O próximo passo é encontrar a integral a partir do método de 2 **–** 2−Simpson, mas o enunciado nos pede para **utilizar os valores obtidos** pelos metódos do trapézio para encontrar a integral.

Temos que:

$T_2\left(g\right) = \frac{b-a}{4}\left(g\left(\frac{1}{4}\right) + 2g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right)\right)$T2(g) = 4b − a (g (41) + 2g (21) + g (43))

$T_4\left(g\right) = \frac{b-a}{8}\left(g\left(\frac{1}{4}\right) + 2g\left(\frac{3}{8}\right) + 2g\left(\frac{1}{2}\right) + 2g\left(\frac{5}{8}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right)\right)$T4(g) = 8b − a (g (41) + 2g (83) + 2g (21) + 2g (85) + g (43))

Além disso, a fórmula do método de 2 **–** 2−Simpson é:

$S_2\left(g\right) = \frac{b-a}{3\cdot 4}\left(g\left(\frac{1}{4}\right) + 4g\left(\frac{3}{8}\right) + 2g\left(\frac{1}{2}\right) + 4g\left(\frac{5}{8}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right)\right)$S2(g) = 3 · 4b − a (g (41) + 4g (83) + 2g (21) + 4g (85) + g (43))

Precisamos de alguma combinação das duas primeiras equações que resulte na terceira:

$S_2(g) = x \cdot T_4(g) + y \cdot T_2(g)$S2(g) = x · T4(g) + y · T2(g)

Primeiramente, para igualar os denominadores (44 em T_2T2, 88 em T_4T4 e 1212 em S_2S2), podemos assumir que:

$x = \frac{2}{3}$x = 32 e $y = \frac{1}{3}$y = 31

Porém, as somas não seriam iguais, pois teríamos:

$\frac{2}{3} \cdot T_4\left(g\right) + \frac{1}{3} \cdot T_2\left(g\right) = \frac{b-a}{12}\left(3g\left(\frac{1}{4}\right) + 4g\left(\frac{3}{8}\right) + 6g\left(\frac{1}{2}\right) + 4g\left(\frac{5}{8}\right) + 3g\left(\frac{3}{4}\right)\right)/ = S_2\left(g\right)$32 · T4(g) + 31 · T2 (g) = 12b − a (3g (41) + 4g (83) + 6g (21) + 4g (85) + 3g (43)) = S2(g)

Assim, um dos dois termos precisa ser negativo. Esse deve ser yy, pois $T_4(g)$T4(g) possui termos que não serão cancelados por $T_2(g)$T2(g) e que precisam ser positivos. Outro chute, portanto é:

$x = \frac{2}{3}$x = 32 e $y = -\frac{1}{3}$y = −31

Novamente, essa não é a combinação correta, pois dessa vez cancelaremos $g\left(\frac{1}{4}\right)$g (41). Para impedir isso, dobramos xx, para termos:

$x = \frac{4}{3}$x = 34 e $y = -\frac{1}{3}$y = −31

Dessa vez a combinação resulta exatamente em $S_2(g)$S2(g). Logo:

$S_2\left(g\right) = \frac{4}{3}T_4\left(g\right) - \frac{1}{3}T_2\left(g\right)$S2(g) = 34T4(g) − 31T2(g)

Observação: A expressão acima representa o começo do método de Romberg.

Calculando o valor de $S_2(g)$S2(g):

$$S_2(g) = \frac{4}{3} \cdot 0,034179688 - \frac{1}{3} \cdot 0,03125 = 0,03515625$$S2(g) = 34 · 0, 034179688 − 31 · 0, 03125 = 0, 03515625

Conseguimos encontrar todas as integrais pedidas no enunciado. Vamos agora estimar o erro para as integrais por $4 -$4−Trapézios e $2 -$2−Simpson.

O enunciado nos dá as fórmulas do erro, que são:

$$E_{nT} = -f''(z)\frac{(b-a)h^2}{12}$$EnT = −f″(z)12(b − a)h2 para algum zz em $[a,b]$[a, b]

$$E_{nS} = \frac{-h^4 f^{(iv)}(z)(b-a)}{180}$$EnS = 180−h4f(iv)(z)(b − a) para algum zz em $[a,b]$[a, b]

Precisamos da **quarta derivada** da nossa função, lembrando que ela é dada por:

$$g(x) = \begin{cases} (4x-1)x^3 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ (3-4x)x^3 & \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4} \end{cases}$$g(x) = {(4x − 1)x3(3 − 4x)x341 ≤ x ≤ 2121 ≤ x ≤ 43

Realizando a multiplicação (para facilitar o cálculo das derivadas):

$$g(x) = \begin{cases} 4x^4 - 1x^3 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ 3x^3 - 4x^4 & \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4} \end{cases}$$g(x) = {4x4 − 1x33x3 − 4x441 ≤ x ≤ 2121 ≤ x ≤ 43

Realizando a primeira derivada:

$$g^{'}\left(x\right) = \begin{cases} 16x^3 - 3x^2 & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 9x^2 - 16x^3 & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

g′(x) = {16x3 − 3x29x2 − 16x341 ≤ x ≤ 2121 ≤ x ≤ 43

Derivando novamente:

$$g^{''}\left(x\right) = \begin{cases} 48x^2 - 6x & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 18x - 48x^2 & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

g′′(x) = {48x2 − 6x18x − 48x241 ≤ x ≤ 2121 ≤ x ≤ 43

Derivando pela terceira vez:

$$g^{'''}\left(x\right) = \begin{cases} 96x - 6 & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 18 - 96x & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

g′′′(x) = {96x − 618 − 96x41 ≤ x ≤ 2121 ≤ x ≤ 43

Por fim, para a quarta derivada temos:

$$g^{(iv)}\left(x\right) = \begin{cases} 96 & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -96 & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

g(iv)(x) = {96−9641 ≤ x ≤ 2121 ≤ x ≤ 43

Vamos começar calculando o erro do método $4 - 4$–Trapézios:

$$E_{nT} = -f^{''}\left(z\right)\frac{\left(b-a\right)h^2}{12}$$

EnT = −f′′(z)12(b − a)h2

Definindo hh:

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{8}$h = nb − a = 443 − 41 = 81

Mas nossa função é definida por partes, então precisamos analisar cada uma destas:

I. Lado esquerdo: $b - a = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$b − a = 21 − 41 = 41

II. Lado direito: $b - a = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$b − a = 43 − 21 = 41

Assim, o módulo do erro do método de $4 -$ 4−Trapézios é o módulo da **soma** dos erros ao se considerar os dois trapézios na **esquerda**, e dois na **direita**:

$| E_{4T} | = | E_{2T,esq} + E_{2T,dir} |$ | E4T | = | E2T,esq + E2T,dir |

Utilizando a fórmula e substituindo os valores conhecidos:

$| E_{4T} | = \left| -g''\left(z_{esq}\right) - g''\left(z_{dir}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{12}\right|$ | E4T | = | | | | |−g″(zesq) − g″(zdir) (41) · 12(81)2 | | | | |

⇒⇒ $| E_{4T} | = \left| -\left(g''\left(z_{esq}\right) + g''\left(z_{dir}\right)\right)\cdot\frac{1}{3072}\right|$ | E4T | = | | | | −(g″(zesq) + g″(zdir)) · 30721 | | | |

⇒⇒ $| E_{4T} | = \frac{\left| -\left(g''\left(z_{esq}\right)+g''\left(z_{dir}\right)\right)\right|}{3072}$ | E4T | = 3072 | − (g″(zesq) + g″(zdir)) |

$\Rightarrow\Rightarrow \ | \ E_{4T} \ | \ = \frac{|\left(g''\left(z_{esq}\right)+g''\left(z_{dir}\right)\right)|}{3072}$ | E4T | = 3072 | (g″(zesq) + g″(zdir)) |

Para escolher o valor de zz, precisamos verificar como se comporta a função $g''\left(x\right)$g″(x). Vamos derivá-la para analisar os intervalos de crescimento e decrescimento:

$$\left(g''\right)'\left(x\right) = \begin{cases} 96x - 6 & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -96x + 18 & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$
(g″)′(x) = ⎩⎨⎧96x − 6−96x + 1841 ≤ x ≤ 2121 ≤ x ≤ 43

Igualando cada termo a $0$0:

$96x - 6 = 0$96x − 6 = 0 $\Rightarrow\Rightarrow x = \frac{1}{16}$x = 161 $\notin \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$∈ [41, 21] $\Rightarrow\Rightarrow$ sempre crescente

$-96x + 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{16} \notin \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$−96x + 18 = 0 ⇒ x = 163 ∈ [21, 43] $\Rightarrow\Rightarrow$ sempre decrescente

Sabendo disso, vamos escolher os valores que resultem no maior valor possível. O primeiro intervalo tem segunda derivada **crescente e positiva**, então tomamos o extremo direito $(1/2)$(1/2):

$48\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right) = 9$48 (21)2 − 6 (21) = 9

Precisamos escolher o valor do segundo intervalo (decrescente). A segunda derivada, nesse trecho, é **sempre negativa e decrescente**. Por isso, precisamos do menor valor que o segundo intervalo pode assumir. Escolhendo o extremo esquerdo $(1/2)$(1/2):

$18\left(\frac{1}{2}\right) - 48\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -3$18 (21) − 48 (21)2 = −3

Substituindo na fórmula do erro:

$| \; E_{4T} \; | \; = \frac{|(9+(-3))|}{3072} = 0,001953$ | E4T | = 3072 | (9 + (−3)) | = 0, 001953

Agora vamos encontrar o erro para o método de $2-2$−Simpson, cuja fórmula é:

$E_{nS} = \frac{-h^4 f^{(iv)}\left(z\right)\left(b-a\right)}{180}$EnS = 180−h4f(iv)(z)(b − a)

Dessa vez hh é o valor de meia célula, então:

$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$h = 2nb − a = 2 ⋅ 243 − 41 = 81

Vamos separar novamente as partes esquerda e direita:

I. Lado esquerdo: $b - a = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$b − a = 21 − 41 = 41

II. Lado direito: $b - a = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$b − a = 43 − 21 = 41

E teremos:

$E_{nS} = \frac{-h^4 f^{(iv)}\left(z_{esq}\right)\left(b-a\right)}{180} + \frac{-h^4 f^{(iv)}\left(z_{dir}\right)\left(b-a\right)}{180}$EnS = 180−h4f(iv)(zesq)(b − a) + 180−h4f(iv)(zdir
)(b − a)

$$E_{nS} = -\left(f^{(iv)}\left(z_{esq}\right) + f^{(iv)}\left(z_{dir}\right)\right) \cdot \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^{4}\left(\frac{1}{4}\right)}{180}$$ EnS = −(f(iv)(zesq) + f(iv)(zdir)) · 180(81)4 (41)

Dessa vez está mais simples, já que a quarta derivada é uma constante, então:

$$E_{nS} = -\left(96 + \left(-96\right)\right)\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^{4}\left(\frac{1}{4}\right)}{180} = 0$$ EnS = −(96 + (−96))180(81)4 (41) = 0

Resposta esperada: 2 – 2–Trapézios: $0,03125$**0, 03125;** 4 **– 4–Trapézios:** $0,034179688$ **0, 034179688;** 2 **– 2–Simpson:** $0,03515625$**0, 03515625; Erro** 4 **– 4–Trapézios:** $0,001953$ **0, 001953; Erro** 2 – **2–Simpson:** 0**0.**