2018年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题考上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

**第I卷**

**注意事项：**

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2．本卷共8小题，每小题5分，共40分。

**参考公式：**

如果事件*A*，*B*互斥，那么 .

如果事件*A*，*B*相互独立，那么 .

棱柱的体积公式，其中表示棱柱的底面面积，表示棱柱的高.

棱锥的体积公式，其中表示棱锥的底面面积，表示棱锥的高.

**一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

(1)设全集为**R**，集合，，则

(A)  (B) 

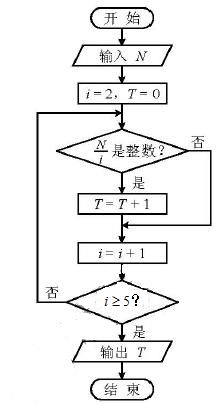
(C)  (D) 

(2)设变量*x*，*y*满足约束条件 则目标函数的最大值为

(A) 6 (B) 19 (C) 21 (D) 45

(3)阅读如图的程序框图，运行相应的程序，若输入*N*的值为20，则输出*T*的值为

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4



(4)设，则“”是“”的

(A)充分而不必要条件

(B)必要而不充分条件

(C)充要条件

(D)既不充分也不必要条件

(5)已知，，，则*a*，*b*，*c*的大小关系为

(A)  (B)  (C)  (D) 

(6)将函数的图象向右平移个单位长度，所得图象对应的函数

(A)在区间上单调递增 (B)在区间上单调递减

(C)在区间上单调递增 (D)在区间上单调递减

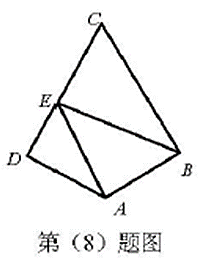
(7)已知双曲线的离心率为2，过右焦点且垂直于*x*轴的直线与双曲线交于*A*，*B*两点. 设*A*，*B*到双曲线同一条渐近线的距离分别为和，且，则双曲线的方程为

(A)  (B) 

(C)  (D) 

(8)如图，在平面四边形*ABCD*中，，，，. 若点*E*为边*CD*上的动点，则的最小值为

(A)  (B)  (C)  (D) 



**第Ⅱ卷**

**注意事项：**

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

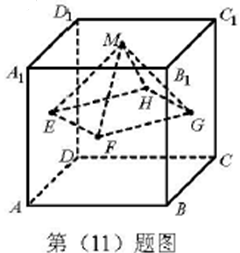
2. 本卷共12小题，共110分。

**二. 填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。**

(9) i是虚数单位，复数 .

(10) 在的展开式中，的系数为 .

(11) 已知正方体的棱长为1，除面外，该正方体其余各面的中心分别为点*E*，*F*，*G*，*H*，*M*(如图)，则四棱锥的体积为 .



(12)已知圆的圆心为*C*，直线(为参数)与该圆相交于*A*，*B*两点，则的面积为 .

(13)已知，且，则的最小值为 .

(14)已知，函数若关于的方程恰有2个互异的实数解，则的取值范围是 .

**三.解答题：本大题共6小题，共80分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.**

（15）**（本小题满分13分）**

在中，内角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c.*已知.

（I）求角*B*的大小；

（II）设*a*=2，*c*=3，求*b*和的值.

(16)**(本小题满分13分)**

已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为24，16，16. 现采用分层抽样的方法从中抽取7人，进行睡眠时间的调查.

（I）应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人？

（II）若抽出的7人中有4人睡眠不足，3人睡眠充足，现从这7人中随机抽取3人做进一步的身体检查.

（i）用*X*表示抽取的3人中睡眠不足的员工人数，求随机变量*X*的分布列与数学期望；

（ii）设*A*为事件“抽取的3人中，既有睡眠充足的员工，也有睡眠不足的员工”，求事件*A*发生的概率.

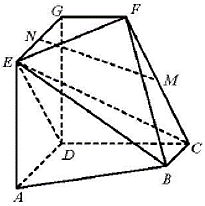
(17)(本小题满分13分)

如图，且*AD*=2*BC*，,且*EG*=*AD*，且*CD*=2*FG*，，*DA*=*DC*=*DG*=2.

（I）若*M*为*CF*的中点，*N*为*EG*的中点，求证：；

（II）求二面角的正弦值；

（III）若点*P*在线段*DG*上，且直线*BP*与平面*ADGE*所成的角为60°，求线段*DP*的长.



(18)**(本小题满分13分)**

设是等比数列，公比大于0，其前*n*项和为，是等差数列. 已知，，，.

（I）求和的通项公式；

（II）设数列的前n项和为，

（i）求；

（ii）证明.

(19)**(本小题满分14分)**

设椭圆(*a*>*b*>0)的左焦点为*F*，上顶点为*B*. 已知椭圆的离心率为，点*A*的坐标为，且.

（I）求椭圆的方程；

（II）设直线*l*：与椭圆在第一象限的交点为*P*，且*l*与直线*AB*交于点*Q*.

若(*O*为原点) ，求*k*的值.

(20)**(本小题满分14分)**

已知函数，，其中*a*>1.

（I）求函数的单调区间；

（II）若曲线在点处的切线与曲线在点 处的切线平行，证明；

（III）证明当时，存在直线*l*，使*l*是曲线的切线，也是曲线的切线.

**参考答案：**

**一、选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分40分．**

（1）B （2）C （3）B （4）A

（5）D （6）A （7）C （8）A

**二、填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分30分．**

（9）4–i （10） （11）

（12） （13） （14）

**三、解答题**

（15）本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角差的正弦与余弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识，考查运算求解能力．满分13分．

（Ⅰ）解：在△*ABC*中，由正弦定理，可得，又由，得，即，可得．又因为，可得*B*=．

（Ⅱ）解：在△*ABC*中，由余弦定理及*a*=2，*c*=3，*B*=，有，故*b*=．

由，可得．因为*a*<*c*，故．因此，

所以，

（16）本小题主要考查随机抽样、离散型随机变量的分布列与数学期望、互斥事件的概率加法公式等基础知识．考查运用概率知识解决简单实际问题的能力．满分13分．

（Ⅰ）解：由已知，甲、乙、丙三个部门的员工人数之比为3∶2∶2，由于采用分层抽样的方法从中抽取7人，因此应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取3人，2人，2人．

（Ⅱ）（i）解：随机变量*X*的所有可能取值为0，1，2，3．

*P*（*X*=*k*）=（*k*=0，1，2，3）．

所以，随机变量*X*的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *P* |  |  |  |  |

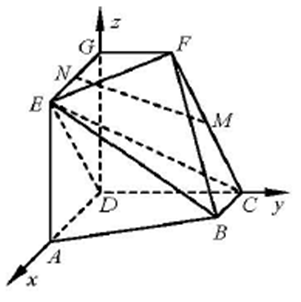
随机变量*X*的数学期望．

（ii）解：设事件*B*为“抽取的3人中，睡眠充足的员工有1人，睡眠不足的员工有2人”；事件*C*为“抽取的3人中，睡眠充足的员工有2人，睡眠不足的员工有1人”，则*A*=*B*∪*C*，且*B*与*C*互斥，由（i）知，*P*(*B*)=*P*(*X*=2)，*P*(*C*)=*P*(*X*=1)，故*P*(*A*)=*P*(*B*∪*C*)=*P*(*X*=2)+*P*(*X*=1)=．

所以，事件*A*发生的概率为．

（17）本小题主要考查直线与平面平行、二面角、直线与平面所成的角等基础知识．考查用空间向量解决立体几何问题的方法．考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力．满分13分．

依题意，可以建立以*D*为原点，分别以，，的方向为*x*轴，*y*轴，*z*轴的正方向的空间直角坐标系（如图），可得*D*（0，0，0），*A*（2，0，0），*B*（1，2，0），*C*（0，2，0），*E*（2，0，2），*F*（0，1，2），*G*（0，0，2），*M*（0，，1），*N*（1，0，2）．



（Ⅰ）证明：依题意=（0，2，0），=（2，0，2）．设***n***0=(*x*，*y*，*z*)为平面*CDE*的法向量，则 即 不妨令z=–1，可得***n***0=（1，0，–1）．又=（1，，1），可得，又因为直线*MN*平面*CDE*，所以*MN*∥平面*CDE*．

（Ⅱ）解：依题意，可得=（–1，0，0），，=（0，–1，2）．

设***n***=（*x*，*y*，*z*）为平面*BCE*的法向量，则 即 不妨令*z*=1，可得***n***=（0，1，1）．

设***m***=（*x*，*y*，*z*）为平面*BCF*的法向量，则 即 不妨令*z*=1，可得***m***=（0，2，1）．

因此有cos<***m*，*n***>=，于是sin<***m*，*n***>=．

所以，二面角*E*–*BC*–*F*的正弦值为．

（Ⅲ）解：设线段*DP*的长为*h*（*h*∈［0，2］），则点*P*的坐标为（0，0，*h*），可得．

易知，=（0，2，0）为平面*ADGE*的一个法向量，故

，

由题意，可得=sin60°=，解得*h*=∈［0，2］．

所以线段的长为.

（18）本小题主要考查等差数列的通项公式，等比数列的通项公式及前*n*项和公式等基础知识.考查等差数列求和的基本方法和运算求解能力.满分13分.

（I）解：设等比数列的公比为*q.*由可得.

因为，可得，故.

设等差数列的公差为*d*，由，可得由，

可得 从而 故

所以数列的通项公式为，数列的通项公式为

（II）（i）由（I），有，故

.

（ii）证明：因为

，

所以，.

（19）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识．考查用代数方法研究圆锥曲线的性质．考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力．满分14分．

（Ⅰ）解：设椭圆的焦距为2*c*，由已知知，又由*a*2=*b*2+*c*2，可得2*a*=3*b*．由已知可得，，，由，可得*ab*=6，从而*a*=3，*b*=2．

所以，椭圆的方程为．

（Ⅱ）解：设点*P*的坐标为（*x*1，*y*1），点*Q*的坐标为（*x*2，*y*2）．由已知有*y*1>*y*2>0，故．又因为，而∠*OAB*=，故．由，可得5*y*1=9*y*2．

由方程组消去*x*，可得．易知直线*AB*的方程为*x*+*y*–2=0，由方程组

消去*x*，可得．由5*y*1=9*y*2，可得5（*k*+1）=，两边平方，整理得，解得，或．

所以，*k*的值为

（20）本小题主要考查导数的运算、导数的几何意义、运用导数研究指数函数与对数函数的性质等基础知识和方法.考查函数与方程思想、化归思想.考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力.满分14分.

（I）解：由已知，，有.

令，解得*x*=0.

由*a*>1，可知当*x*变化时，，的变化情况如下表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* |  | 0 |  |
|  |  | 0 | + |
|  |  | 极小值 |  |

所以函数的单调递减区间，单调递增区间为.

（II**）证明：**由，可得曲线在点处的切线斜率为.

由，可得曲线在点处的切线斜率为.

因为这两条切线平行，故有，即.

两边取以*a*为底的对数，得，所以.

（III）**证明：**曲线在点处的切线*l*1：.

曲线在点处的切线*l*2：.

要证明当时，存在直线*l*，使*l*是曲线的切线，也是曲线的切线，只需证明当时，存在，，使得*l*1和*l*2重合.

即只需证明当时，方程组有解，

由①得，代入②，得. ③

因此，只需证明当时，关于*x*1的方程③有实数解.

设函数，即要证明当时，函数存在零点.

，可知时，；时，单调递减，又

，，故存在唯一的*x*0，且*x*0>0，使得，即

.

由此可得在上单调递增，在上单调递减. 在处取得极大值.

因为，故，

所以.

下面证明存在实数*t*，使得.

由（I）可得，

当时，

有，

所以存在实数*t*，使得

因此，当时，存在，使得.

所以，当时，存在直线*l*，使*l*是曲线的切线，也是曲线的切线.#