



# **Análise de Sistemas no Domínio da Frequência**

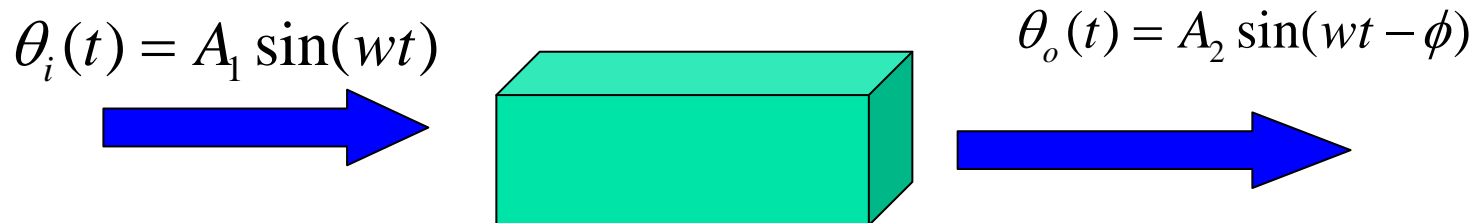
---

## **Diagrama de Bode**



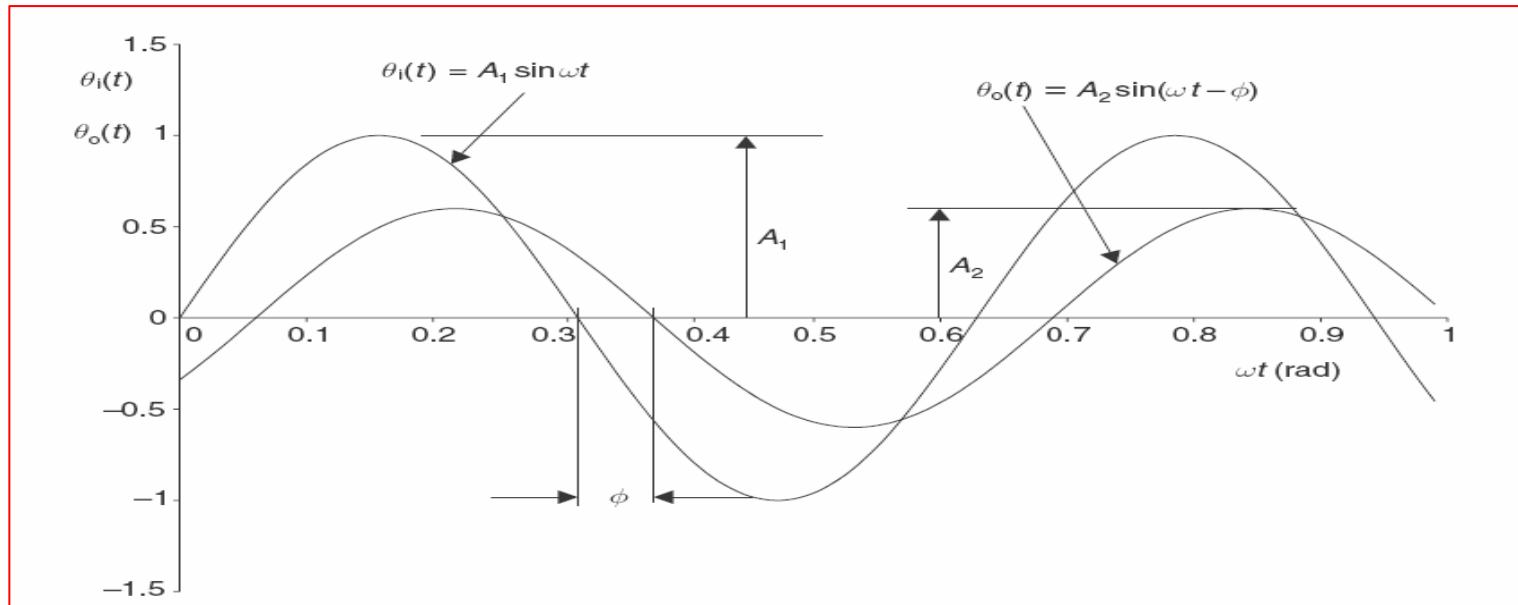
# Análise na Frequência

**A análise da resposta em frequência** compreende o estudo do comportamento de um sistema dinâmico em regime permanente, quando sujeito a uma entrada senoidal com amplitude constante e frequência variável !

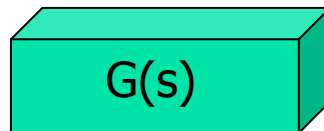


$$\left. \begin{aligned} \theta_i(t) &= A_1 \sin(\omega t) = A_1 e^{j(\omega t)} \\ \theta_o(t) &= A_2 \sin(\omega t - \phi) = A_2 e^{j(\omega t - \phi)} \end{aligned} \right\} \frac{\theta_o(t)}{\theta_i(t)} = \frac{A_2 e^{j(\omega t - \phi)}}{A_1 e^{j(\omega t)}} = \frac{A_2}{A_1} e^{j(-\phi)}$$

# Análise na Frequência



$$u(t) = A_1 \sin(\omega t)$$

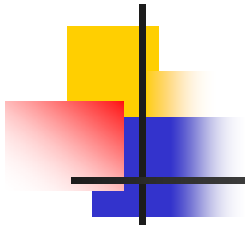


$$y(t) = A_2 \sin(\omega t - \phi)$$

Vamos demonstrar que:

Em  $\omega$  :

- $A_2 = A_1 |G(i\omega)|$
- $\phi$  é  $\arg(G(i\omega))$



## Relação entre o operador **s** de Laplace e **iω**

Seja:

$$u(t) = A \sin(\omega t) \Rightarrow U(s) = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{a saída é: } Y(s) = G(s) * U(s) = G(s) * \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

supondo que  $G(s)$  seja dado por:

$$G(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad \text{então } Y(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} * \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\text{ou } Y(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \frac{A\omega}{(s + i\omega)(s - i\omega)}, \quad \text{em frações parciais tem-se:}$$

$$Y(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \frac{C_3}{s - p_3} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n} + \frac{C_{n+1}}{s + i\omega} + \frac{C_{n+2}}{s - i\omega},$$



## Relação entre o operador **s** de Laplace e **iω**

$$Y(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \frac{C_3}{s - p_3} + \dots + \frac{C_{n+1}}{s + i\omega} + \frac{C_{n+2}}{s - i\omega} \quad \text{ora:}$$

$$C_{n+1} = \lim_{s \rightarrow -i\omega} (s + i\omega)Y(s) = \lim_{s \rightarrow -i\omega} (s + i\omega)G(s)U(s) = -\frac{A}{2i}G(-i\omega)$$

$$C_{n+2} = \lim_{s \rightarrow i\omega} (s - i\omega)Y(s) = \lim_{s \rightarrow i\omega} (s - i\omega)G(s)U(s) = \frac{A}{2i}G(i\omega)$$

$$C_k = \lim_{s \rightarrow p_k} (s - p_k)Y(s), k = 1, 2, \dots, n. \quad \text{Assim:}$$

$$y(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + C_3 e^{p_3 t} + \dots + \left[ \frac{-A}{2i} G(-i\omega) \right] e^{-i\omega t} + \left[ \frac{A}{2i} G(i\omega) \right] e^{i\omega t}, \text{ admitindo } p_k < 0 \text{ (sist. estável)}$$

$$y(t)_{\text{regime}} = \left[ \frac{-A}{2i} G(-i\omega) \right] e^{-i\omega t} + \left[ \frac{A}{2i} G(i\omega) \right] e^{i\omega t}$$



## Relação entre o operador **s** de Laplace e **iω**

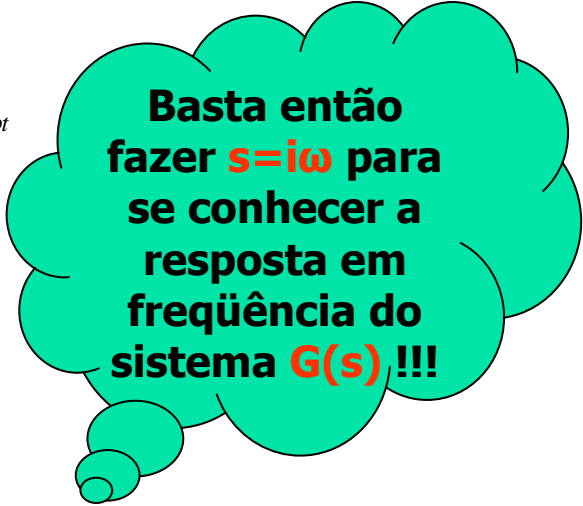
$$y(t)_{\text{regime}} = \left[ \frac{-A}{2i} G(-i\omega) \right] e^{-i\omega t} + \left[ \frac{A}{2i} G(i\omega) \right] e^{i\omega t} \quad \text{ora como } G(i\omega) \text{ é complexo então:}$$

$$G(i\omega) = |G(i\omega)| e^{i \arg(G(i\omega))} \quad \text{e} \quad G(-i\omega) = |G(i\omega)| e^{-i \arg(G(i\omega))} \quad \text{assim:}$$


$$y(t)_{\text{regime}} = \left[ \frac{-A}{2i} |G(i\omega)| e^{-i \arg(G(i\omega))} \right] e^{-i\omega t} + \left[ \frac{A}{2i} |G(i\omega)| e^{i \arg(G(i\omega))} \right] e^{i\omega t}$$

$$y(t)_{\text{regime}} = A |G(i\omega)| \left[ \frac{-e^{-i\omega t - i \arg(G(i\omega))} + e^{i\omega t + i \arg(G(i\omega))}}{2i} \right] \quad \text{portanto:}$$

$$y(t)_{\text{regime}} = |G(i\omega)| A \sin(\omega t + \arg(G(i\omega)))$$



Basta então  
fazer **s=iω** para  
se conhecer a  
resposta em  
frequência do  
sistema **G(s)** !!!

- 
- a magnitude da saída é a magnitude da entrada **A** multiplicada por **|G(iω)|**
  - a fase da saída é a fase da entrada **ωt** somada ao **arg(G(iω))**



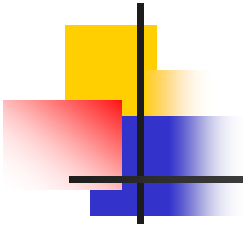
## Relação entre o operador **s** de Laplace e **jω**

Outra formulação para se encontrar a relação entre o operador de Laplace **s** e a frequência **ω**. Dado que:

$$\theta(t) = Ae^{j(\omega t)} \Rightarrow \frac{d\theta(t)}{dt} = (j\omega)Ae^{j(\omega t)} \Rightarrow \frac{d\theta(t)}{dt} = (j\omega)\theta(t)$$

Aplicando Laplace dos dois lados tem-se:

$$s\Theta(s) = (j\omega)\Theta(s) \Rightarrow s = j\omega \quad \text{!!!!}$$



## Diagrama de Bode: Exemplo

Seja um sistema de primeira ordem:  $\frac{\theta_o}{\theta_i}(s) = G(s) = \frac{K}{1 + Ts}$

Quando sujeito a uma entrada senoidal unitária na frequência  $\omega$ , a magnitude da saída  $y(t)$  e a diferença de fase (em regime) serão:

$$|y(t)_r| = |G(s)_{s=i\omega}| \quad \text{e} \quad \varphi = \angle G(s)_{s=i\omega}$$

Ou:

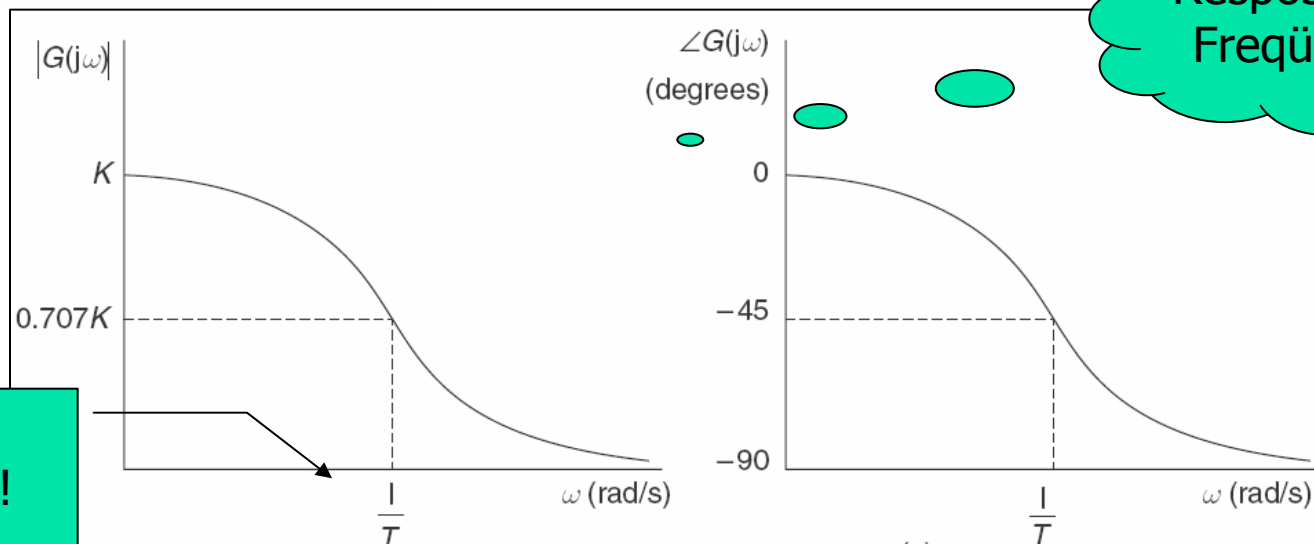
$$|G(i\omega)| = \frac{|K|}{|1 + Ti\omega|} \quad \text{e} \quad \varphi = \angle K - \angle 1 + Ti\omega$$



## Diagrama de Bode: Exemplo

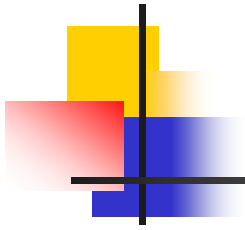
No exemplo:  $|G(i\omega)| = \frac{|K|}{|1 + T\omega i|}$  e  $\angle G(i\omega) = \angle K - \angle 1 + T\omega i$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad \text{e} \quad \angle G(j\omega) = \tan^{-1}(-\omega T)$$



Resposta em  
Frequência

Banda  
Passante !  
 $K/\sqrt{2}$



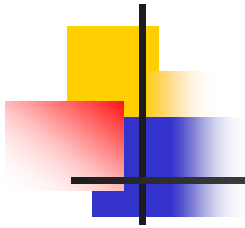
## Diagrama de Bode: Exemplo

O diagrama de bode é uma versão logarítmica dos gráficos de resposta em frequência onde:

- Log do módulo x log da frequência (gráfico da magnitude)
- Linear da fase x log da frequência (gráfico da fase)

O módulo é plotado no eixo y numa escala linear cujos valores são dados por:

$$|G(j\omega)| \text{ dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$



# Diagrama de Bode: magnitude

Idéia Geral do Diagrama (construção e interpretação):

Seja um sistema governado por  $G(s)$  na forma:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad \text{então} \quad \begin{cases} 20\log_{10} |G(s)| = 20\log_{10} |P(s)| - 20\log_{10} |Q(s)| \\ \underline{|G(s)|} = \underline{|P(s)|} - \underline{|Q(s)|} \end{cases}$$

Exemplo:

$$G(s) = \frac{K(s+a)}{(s+b)}$$

$$20\log_{10} |G(s)| = 20\log_{10} |K(s+a)| - 20\log_{10} |(s+b)|$$

$\therefore$

$$20\log_{10} |G(s)| = 20\log_{10} (|k|) + 20\log_{10} (|wi+a|) - 20\log_{10} (|wi+b|)$$



# Diagrama de Bode: magnitude

$$20\log_{10}|G(s)| = 20\log_{10}(|k|) + 20\log_{10}(|\omega i + a|) - 20\log_{10}(|\omega i + b|)$$

ou

$$20\log_{10}|G(s)| = \underline{20\log_{10}(|k|)} + \underline{20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + a^2})} - \underline{20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + b^2})}$$

Termo independente  
da frequência

Termo dependente da frequência:

para  $\omega \ll a$  vale  $20\log_{10}(a)$   
para  $\omega \gg a$  vale  $20\log_{10}(\omega)$

Termo dependente da frequência:

para  $\omega \ll b$  vale  $-20\log_{10}(b)$   
para  $\omega \gg b$  vale  $-20\log_{10}(\omega)$



## Diagrama de Bode: magnitude

$$20\log_{10}|G(s)| = 20\log_{10}(|k|) + 20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + a^2}) - 20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + b^2})$$

Então a expressão acima para  $\omega \gg a$  e  $\omega \gg b$ :

$$20\log_{10}|G(s)| = 20\log_{10}(|k|) + 20\log_{10}(\omega) - 20\log_{10}(\omega)$$

Num gráfico onde a escala do eixo x é logarítmica, ou seja  $\log_{10}(\omega) = x$

$$20\log_{10}|G(s)| = \text{constante} + 20x - 20x \quad (\text{soma de três parcelas})$$

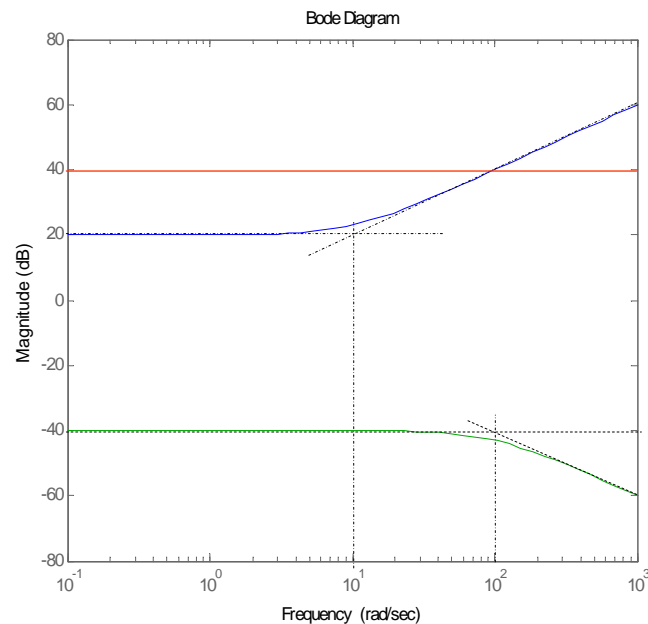
Termo  
independente

Reta com inclinação de  
+20db/década p/  $\omega \gg a$

Reta com inclinação de  
-20db/década p/  $\omega \gg b$

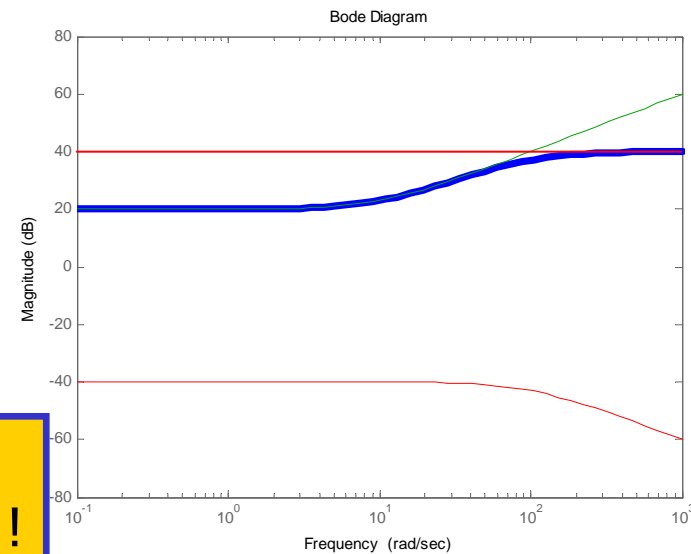
# Diagrama de Bode: magnitude

$$20\log_{10} |G(s)| = \textcolor{red}{20\log_{10}(|k|)} + \textcolor{blue}{20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + a^2})} - \textcolor{green}{20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + b^2})}$$

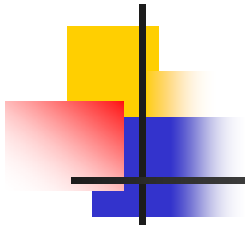


$$G(s) = \frac{K(s+a)}{(s+b)}$$

$$G(s) = \frac{100(s+10)}{(s+100)}$$



ao encontrar um zero sobe +20dB/dec e  
ao encontrar um pólo desce -20dB/déc !!



## Diagrama de Bode: magnitude

$$G(s) = \frac{K(s+a)}{(s+b)^2} \Rightarrow G(s) = \frac{100(s+10)}{(s+100)^2} \Rightarrow G(s) = \frac{100(s+10)}{(s+100)(s+100)}$$

$$20\log_{10}|G(s)| = 20\log_{10}(|k|) + 20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + a^2}) - 20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + b^2}) - 20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + b^2})$$

∴

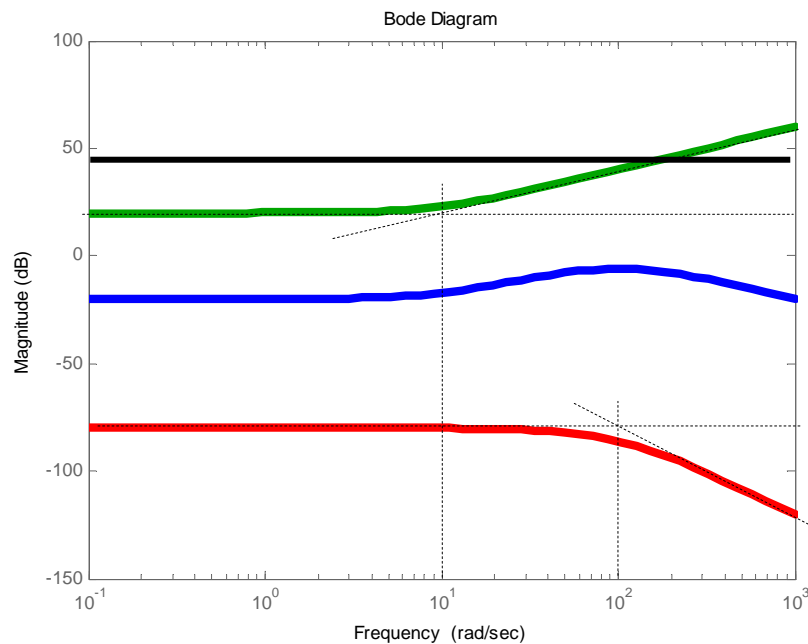
$$20\log_{10}|G(s)| = 20\log_{10}(k) + 20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + a^2}) - 2 * 20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + b^2})$$

logo:

$$20\log_{10}|G(s)| = 20\log_{10}(|100|) + 20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + 10^2}) - 40\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + 100^2})$$

# Diagrama de Bode: magnitude

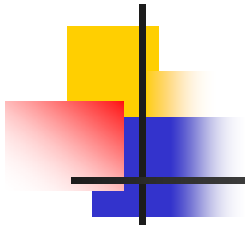
$$20\log_{10}|G(s)| = 20\log_{10}(|100|) + 20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + 10^2}) - 40\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + 100^2})$$



ao encontrar um zero  
duplo sobe +40dB/déc. e

ao encontrar um pólo  
duplo desce -40dB/déc. !!





# Diagrama de Bode: magnitude

Dicas: Ganho DC  $\Rightarrow G(s)|_{s=0}$

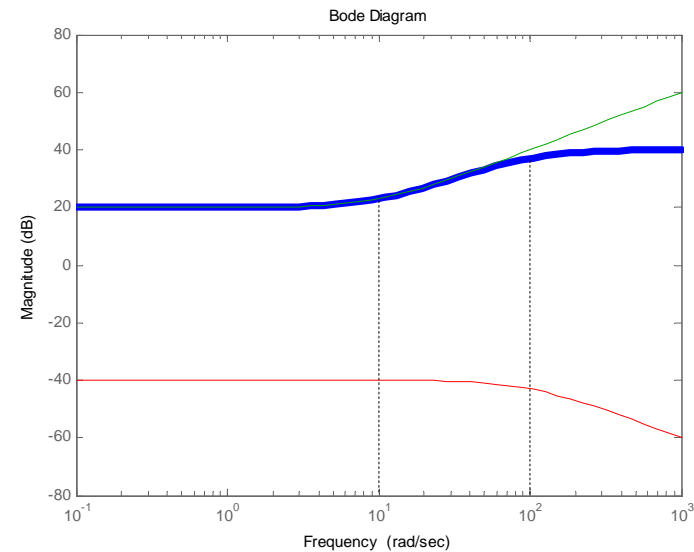
Ganho no infinito  $G(s)|_{s=\infty}$

$$G(s) = \frac{100(s+10)}{(s+100)}$$

$$G(0) = 10 \Rightarrow 20 * \log_{10}(10) = 20dB$$

e

$$G(\infty) = 100 \Rightarrow 20 * \log_{10}(100) = 40dB$$





# Diagrama de Bode: magnitude

**Caso Especial:** zeros ou pólos na origem.

(Ganho DC  $\Rightarrow G(s)|_{s=0} = \infty$   
Ganho no infinito  $G(s)|_{s=\infty} = 0$ )

O pólo(zero) fornece uma reta com inclinação negativa (positiva). O valor da inclinação depende do número de pólos (zeros). Cada pólo(zero) contribui com -20dB(+20dB)

$$G(s) = \frac{100(s+10)}{s(s+100)} \Rightarrow G(s)|_{s \rightarrow 0} = \infty$$

$$20\log_{10}(|G(s)|) = 20\log_{10}(100) + 20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + 10^2}) - 20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + 100^2}) - 20\log_{10}(\omega)$$

Reta com inclinação -20dB e que em  $\omega=1$  vale zero dB!  
(em  $\omega = 10$  vale -20dB)

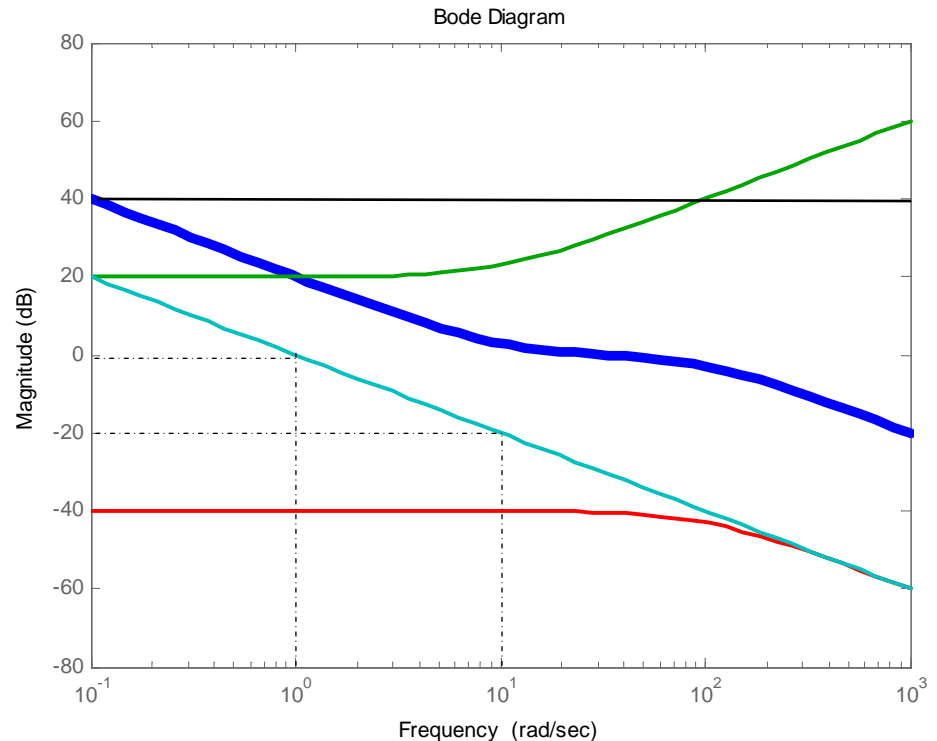
# Diagrama de Bode: magnitude

**Caso Especial:** zeros ou pólos na origem.

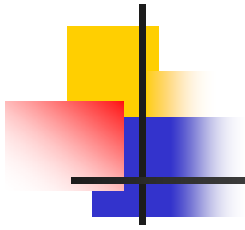
Ganho DC:  $G(s)|_{s=0} = \infty$

Ganho no infinito:  $G(s)|_{s=\infty} = 0$

$$G(s) = \frac{100(s+10)}{s(s+100)} \Rightarrow |G(s)|_{s \rightarrow 0} \rightarrow \infty$$



$$20\log_{10}(|G(s)|) = 20\log_{10}(100) + 20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + 10^2}) - 20\log_{10}(\sqrt{\omega^2 + 100^2}) - 20\log_{10}(\omega)$$



# Diagrama de Bode: Fase

Idéia Geral do Diagrama da Fase (construção e interpretação):

Seja um sistema governado por  $G(s)$  na forma:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad \text{então} \quad \begin{cases} 20\log_{10} |G(s)| = 20\log_{10} |P(s)| - 20\log_{10} |Q(s)| \\ \underline{|G(s)|} = \underline{|P(s)|} - \underline{|Q(s)|} \end{cases}$$

Exemplo:

$$G(s) = \frac{K(s+a)}{(s+b)}$$

$$\underline{|G(s)|} = \underline{|K(s+a)|} - \underline{|(s+b)|}$$

$\therefore$

$$\underline{|G(s)|} = \underline{|K|} + \underline{|(s+a)|} - \underline{|(s+b)|}$$



## Diagrama de Bode: Fase

$$\underline{G(s)} = \underline{K} + \underline{s+a} - \underline{s+b}$$

ou

$$\underline{G(s)} = \underline{K} + \underline{i\omega + a} - \underline{i\omega + b} \quad \text{ou} \quad \underline{G(s)} = \underline{0} + \underline{\text{artan}\left(\frac{\omega}{a}\right)} - \underline{\text{artan}\left(\frac{\omega}{b}\right)}$$

Termo independente  
da frequência

Termo dependente da frequência:

para  $\omega \ll a$  fase é nula  
para  $\omega \gg a$  fase é  $90^\circ$

Termo dependente da frequência:

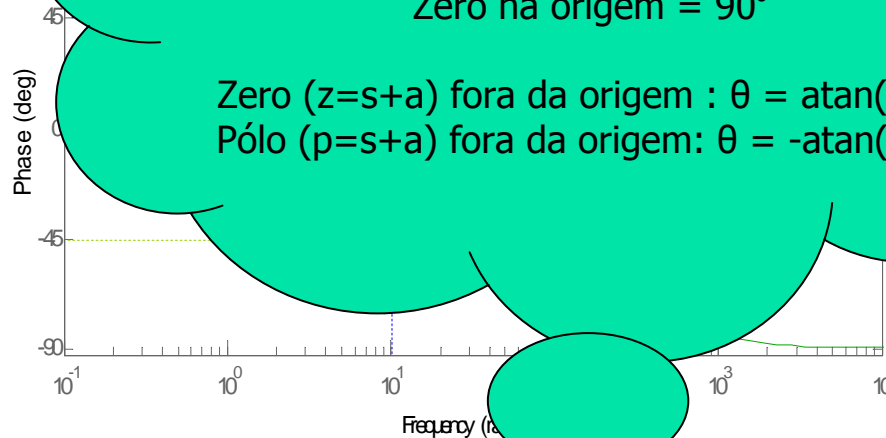
para  $\omega \ll b$  fase é nula  
para  $\omega \gg b$  fase é  $-90^\circ$

# Diagrama de Bode: Fase

## CONTRIBUIÇÃO NA FASE

Termos constantes positivos =  $0^\circ$   
 Termos constantes negativos =  $\pm 180^\circ$   
 Pólo na origem =  $-90^\circ$   
 Zero na origem =  $90^\circ$

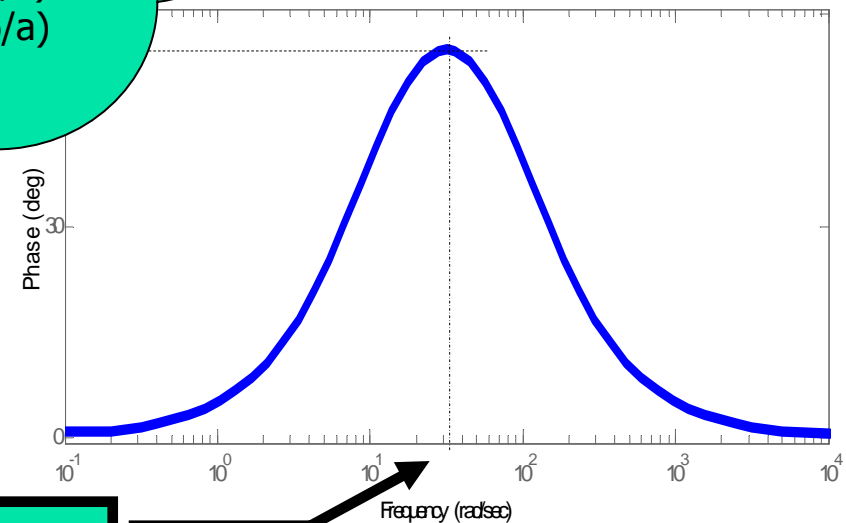
Zero ( $z=s+a$ ) fora da origem :  $\theta = \text{atan}(\omega/a)$   
 Pólo ( $p=s+a$ ) fora da origem:  $\theta = -\text{atan}(\omega/a)$



$$\text{atan}\left(\frac{\omega}{a}\right) - \text{atan}\left(\frac{\omega}{b}\right)$$

$$\frac{s+a}{s+b} \Rightarrow G(s) = \frac{100(s+10)}{(s+100)}$$

$$\text{avanço } \theta \Rightarrow \tan(\theta) = 0.5 \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} \right)$$



Média Geométrica das frequências:  $\omega_c = \text{sqrt}(10 \cdot 100)$

# Diagrama de Bode: Sistema de 2ª Ordem

$$G(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

Substituindo s por jω

$$G(j\omega) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}(j\omega) + 1}$$

ou

$$G(j\omega) = \frac{K}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\} + j\left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right\}}$$

Cuja magnitude e fase resultam em:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left\{ \frac{-2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right\}$$

ω (rad/s)	G(jω)	∠G(jω) (degrees)
0	K	-0
ω <sub>n</sub>	K/2ζ	-90
∞	0	-180



# Diagrama de Bode: Sistema de 2ª Ordem

**Frequência de ressonância  $\omega_r$  e valor de Pico  $M_r$**

Dado que 
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

O valor de pico de  $|G(j\omega)|$  ocorre na frequência ressonante  $\omega_r$  dada por:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad \text{for } 0 \leq \xi \leq 0.707$$

$$M_r = |G(j\omega)|_{\max} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

A fase é:

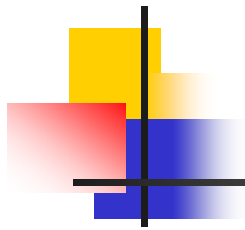
$$\angle G(j\omega_r) = -\tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - 2\xi^2}}{\xi} = -90^\circ + \sin^{-1} \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Obs.

a) Para  $\xi > 0.707$  não ocorre ressonância e  $M_r = 1$ .

b) A magnitude decai monotonicamente com o crescimento da frequência.

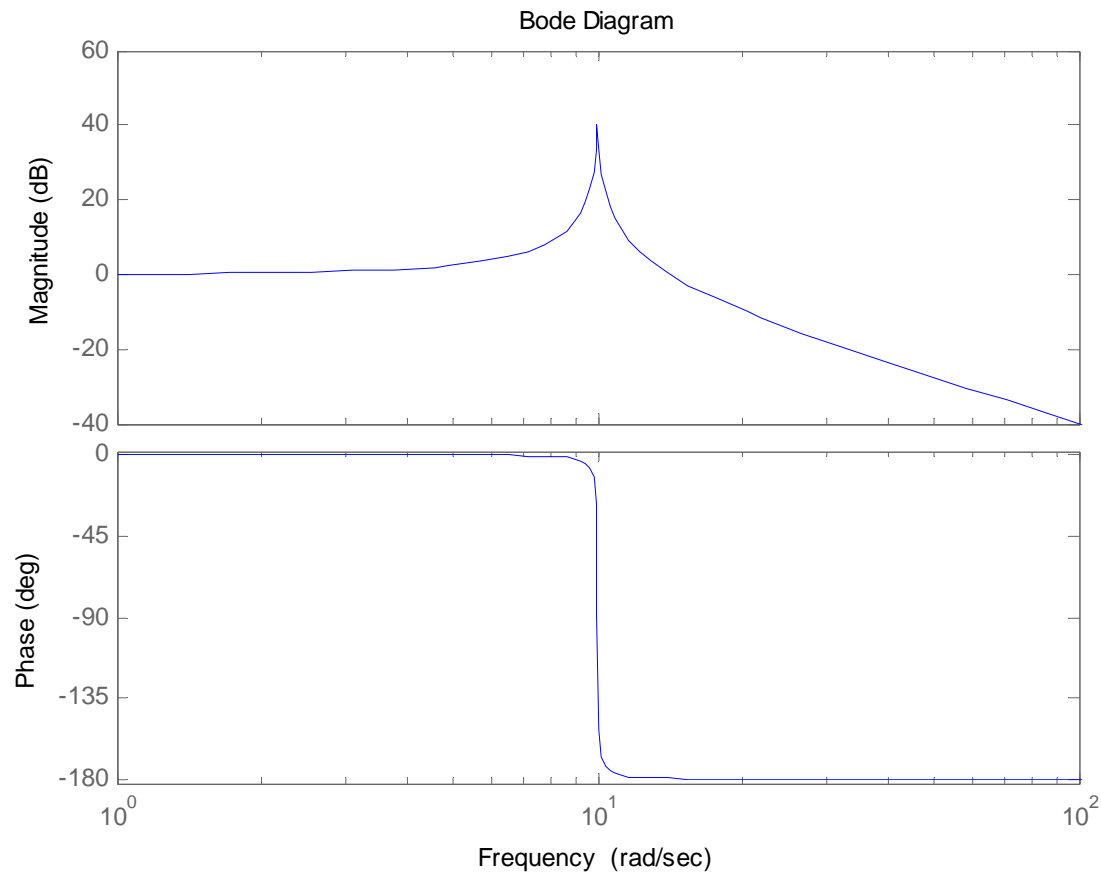




# Diagrama de Bode: Sistema de 2ª Ordem

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 2(0.005)(10)s + 100}$$

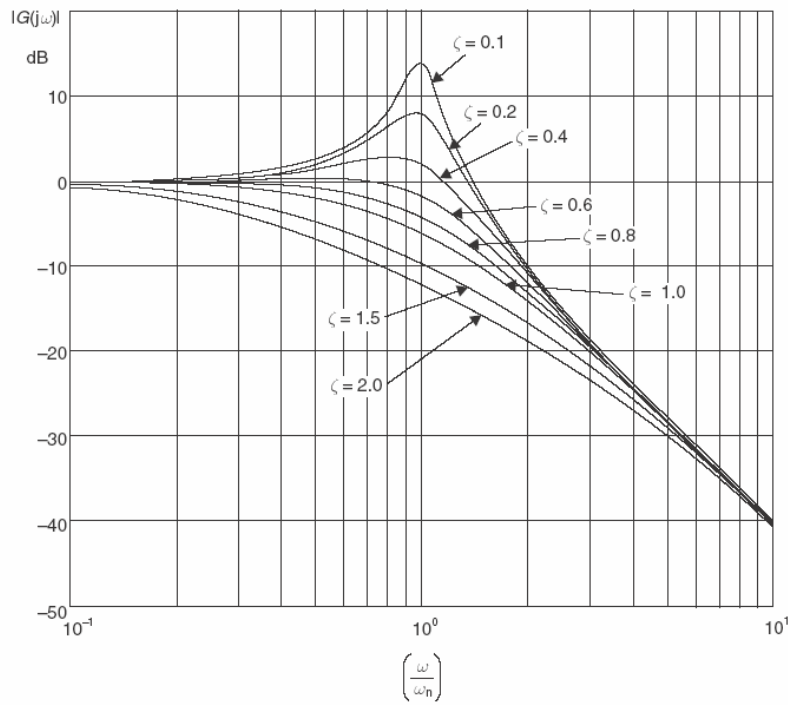
$\omega$ (rad/s)	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$ (degrees)
0	$K$	-0
$\omega_n$	$K/2\zeta$	-90
$\infty$	0	-180



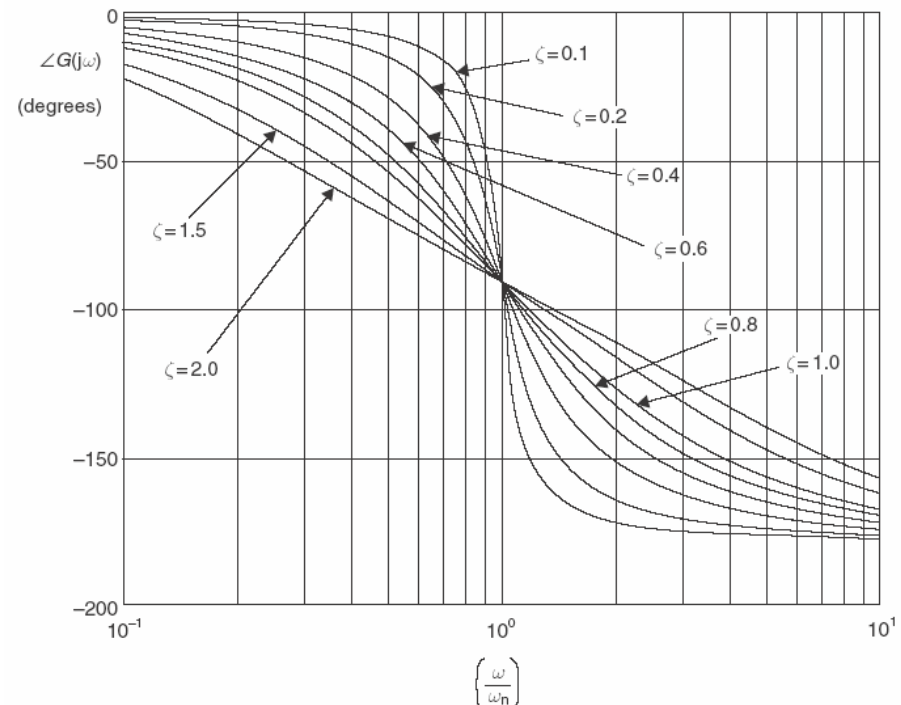
# Diagrama de Bode: Sistema de 2ª Ordem

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1}$$

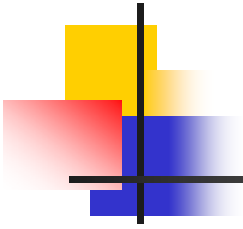
$\omega$ (rad/s)	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$ (degrees)
0	$K$	-0
$\omega_n$	$K/2\zeta$	-90
$\infty$	0	-180



(a) Log modulus



(b) Phase



## Diagrama de Bode: Fase

Exemplos:

$$a) G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

$$b) G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

$$c) G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$d) G(s) = \frac{2}{s^2(s+2)}$$

$$e) G(s) = \frac{8s}{(s+1)^2}$$

$$f) G(s) = \frac{s-1}{s(s+1)}$$

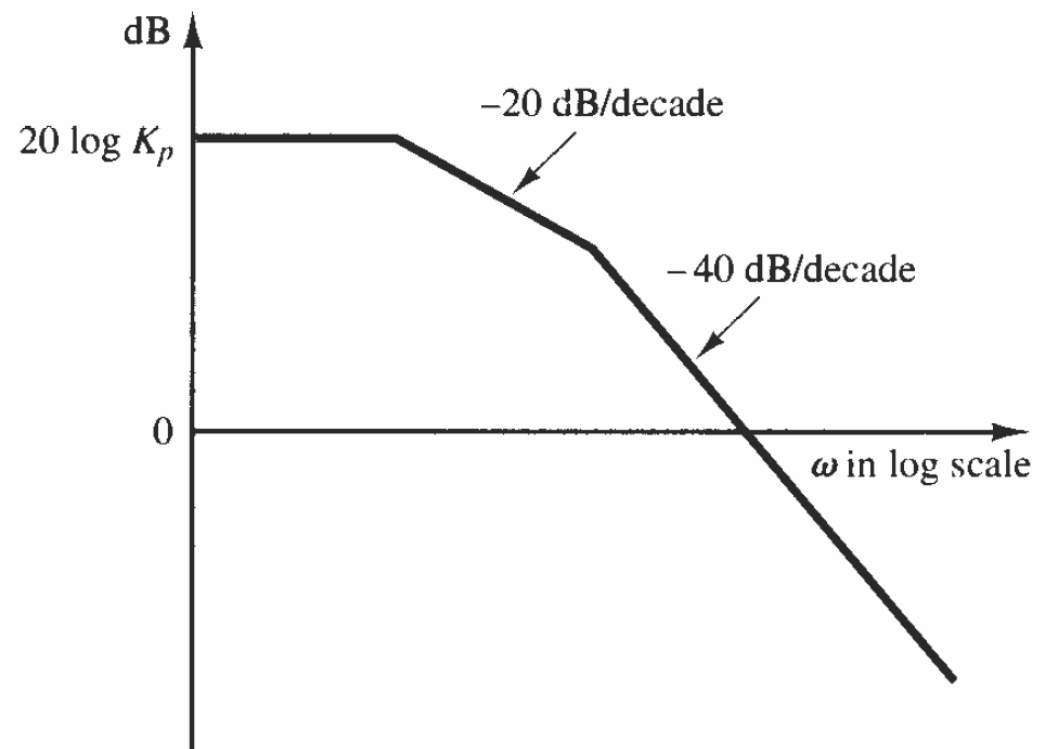
# Constante de erro de posição

A partir do diagrama de bode é possível encontrar o erro de posição  $K_p$

Sistema tipo zero

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = K_p$$



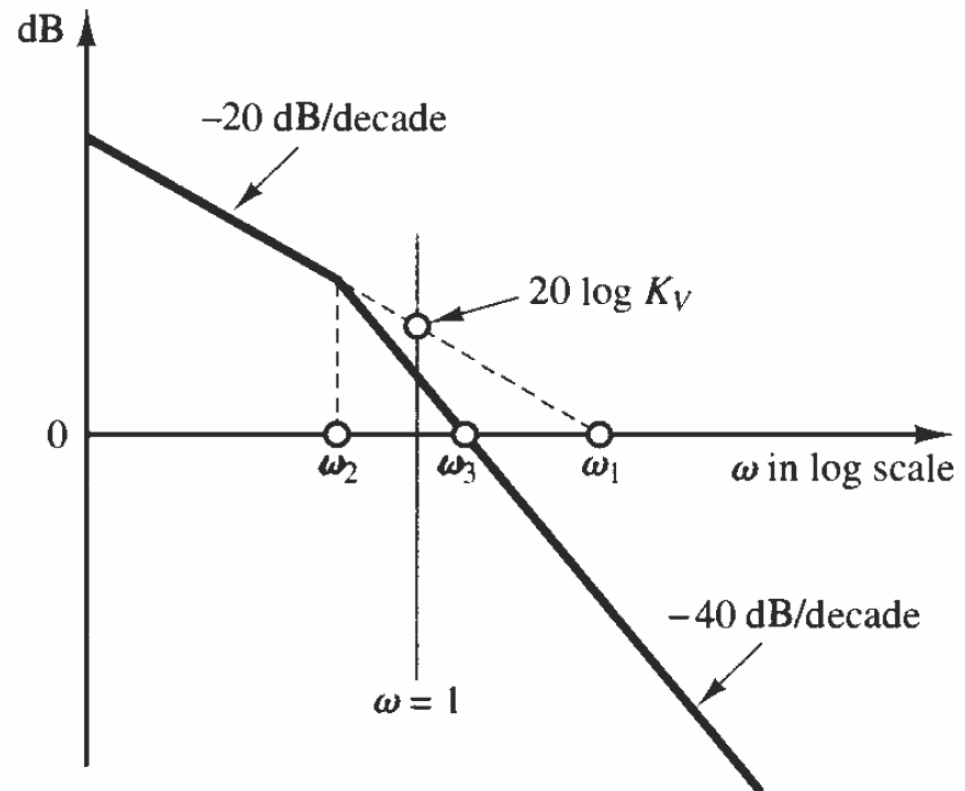
# Constante de erro de velocidade

A partir do diagrama de bode é possível encontrar o erro de velocidade  $K_v$

Sistema do tipo 1

$$G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega},$$

for  $\omega \ll 1$



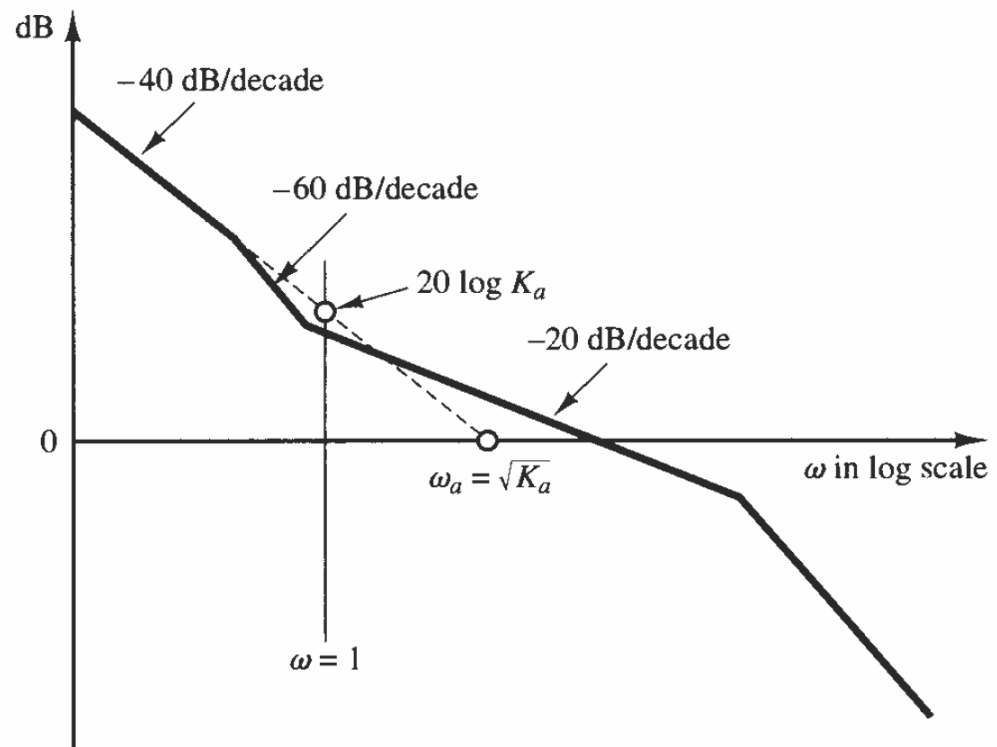
# Constante de erro de aceleração

A partir do diagrama de bode é possível encontrar o erro de aceleração  $K_a$

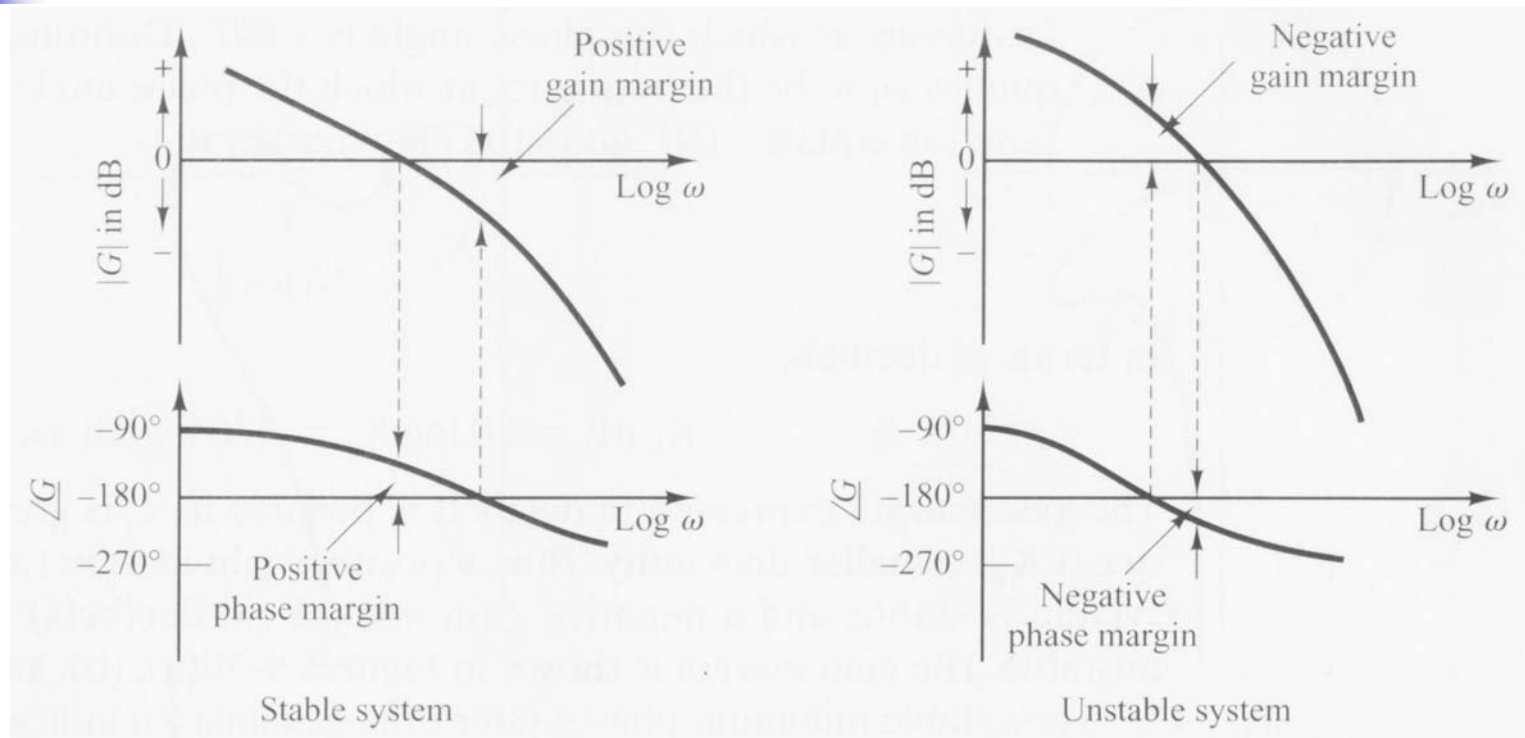
Sistema do tipo 2

$$G(j\omega) = \frac{K_a}{(j\omega)^2}$$

for  $\omega \ll 1$



# Margem de ganho e margem de fase



## Formas alternativas de apresentar dados

Gráfico polar ou  
Diagrama de Nyquist:

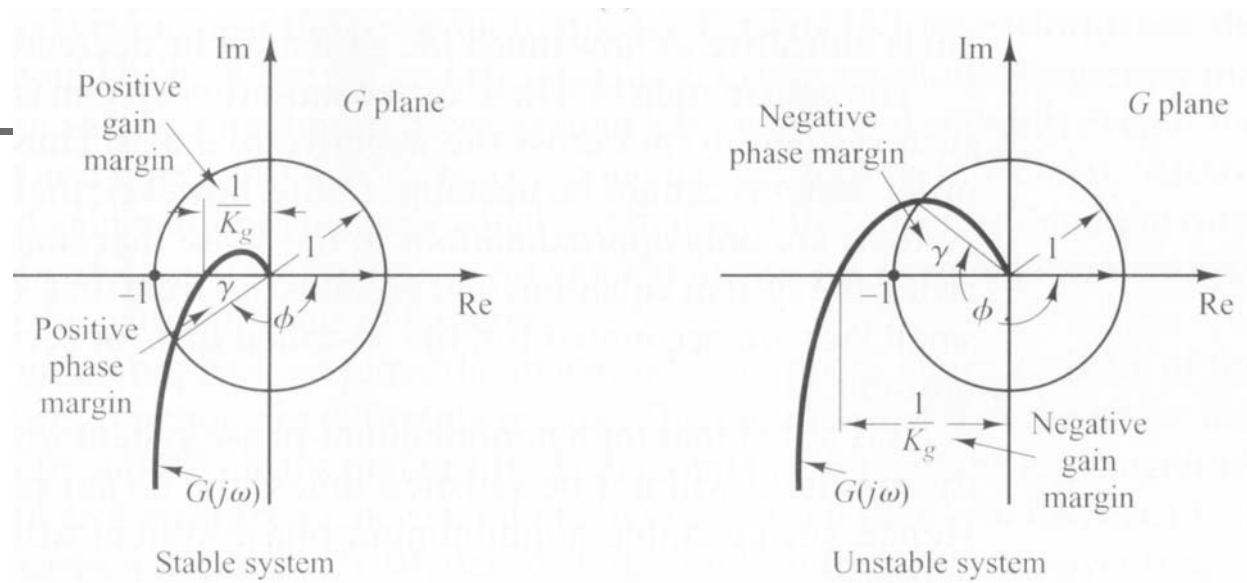
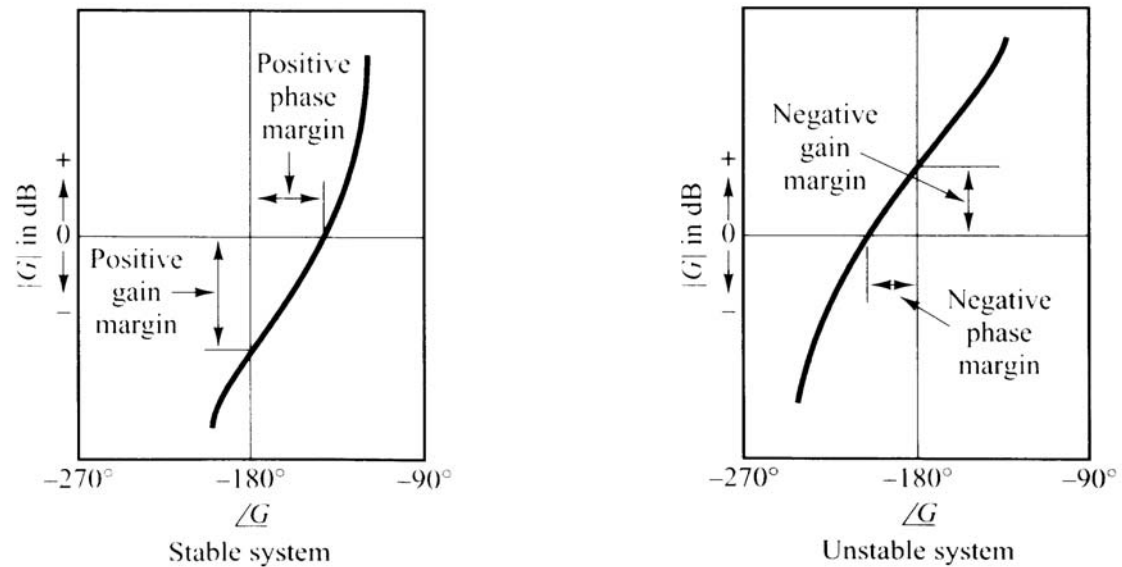
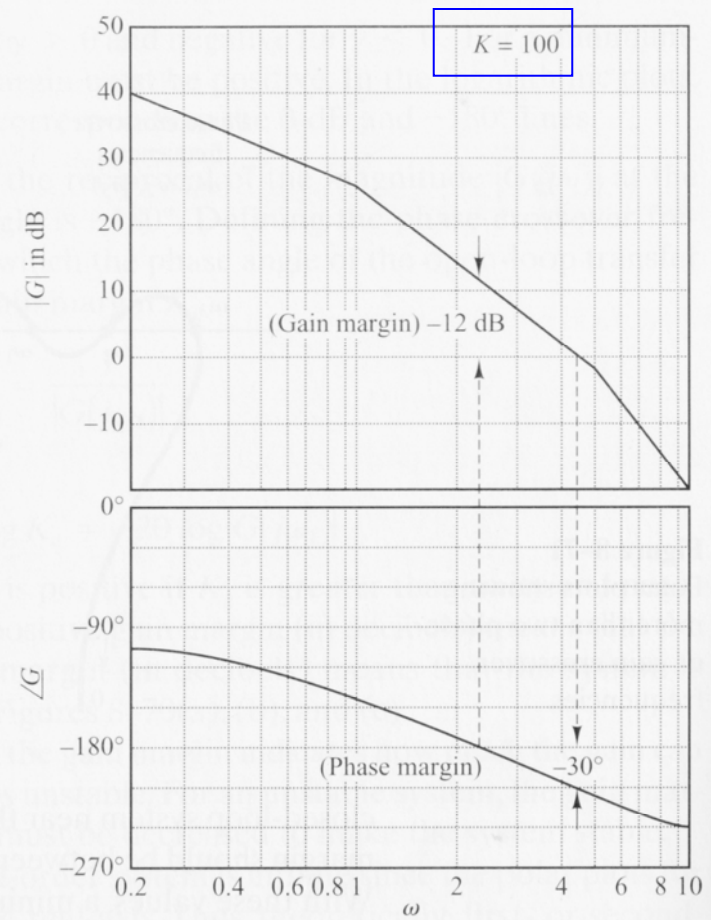
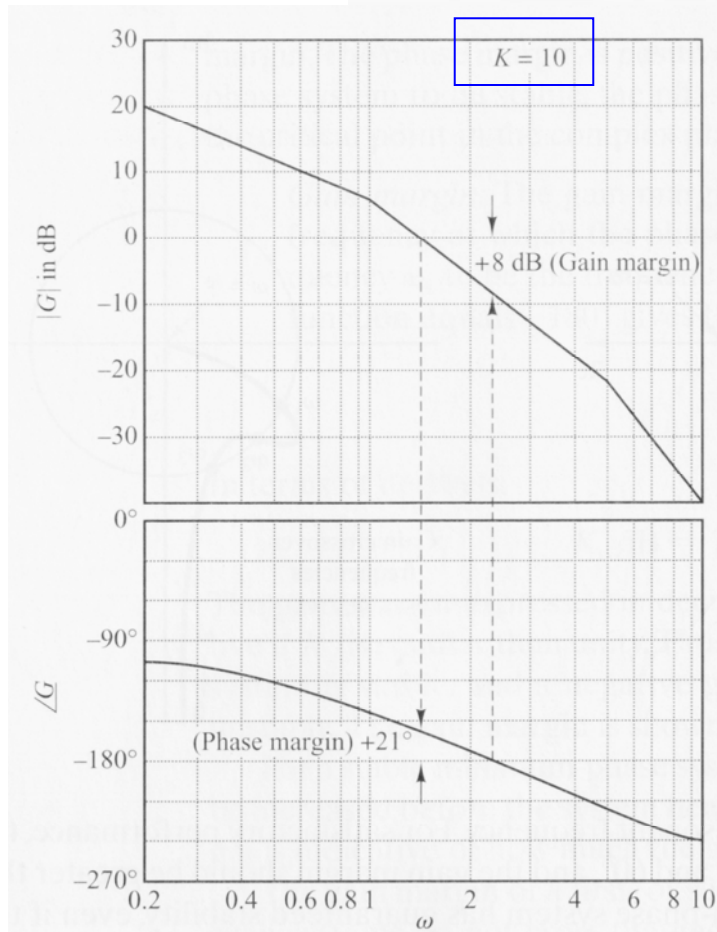
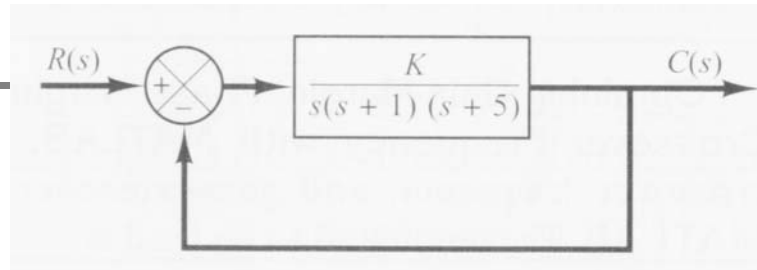


Gráfico log-  
magnitude x fase ou  
Gráfico de Nichols

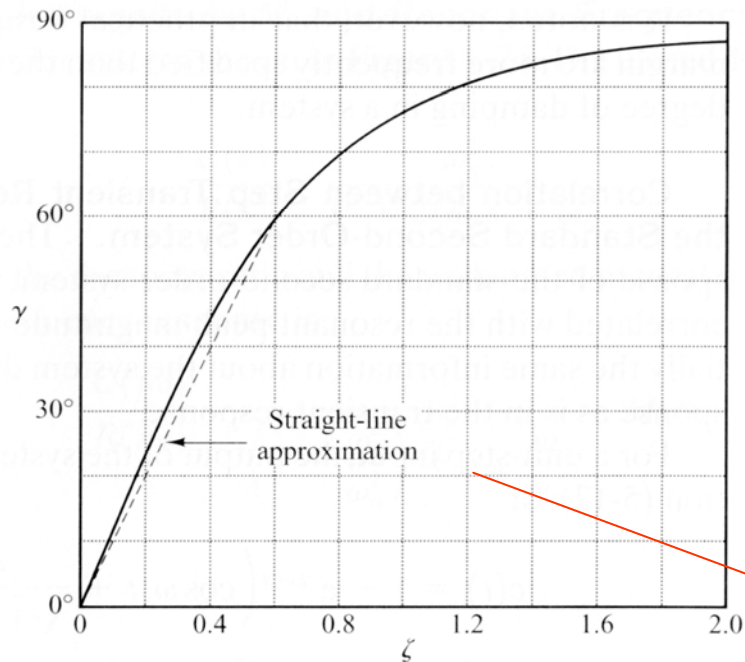




**Exemplo:** obtenha as margens de ganho e de fase para o sistema, nos casos em que  $K=10$  e  $K=100$ .



## Curva margem de fase ( $\gamma$ ) x fator de amortecimento ( $\xi$ ) para um sistema de 2ª ordem



$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s.(s + 2.\xi.\omega_n)}$$

$$\xi = \frac{\gamma}{100}$$

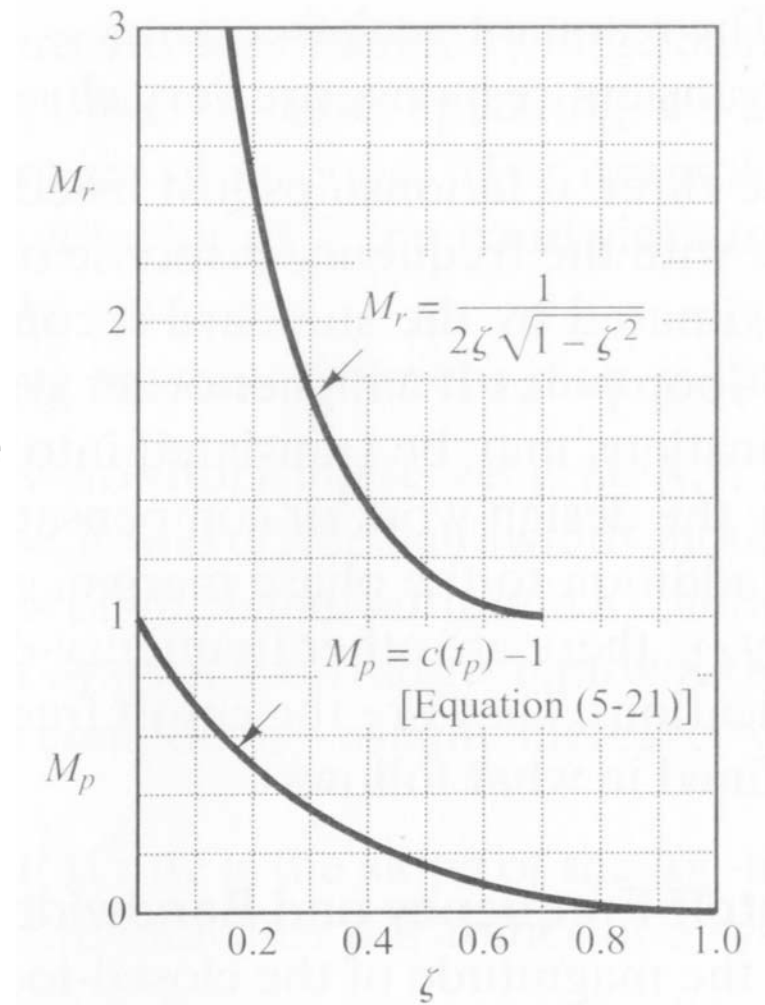
## Curvas $M_r$ x $\xi$ e $M_p$ x $\xi$ para um sistema de 2ª ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s.(s + 2.\xi.\omega_n)}$$

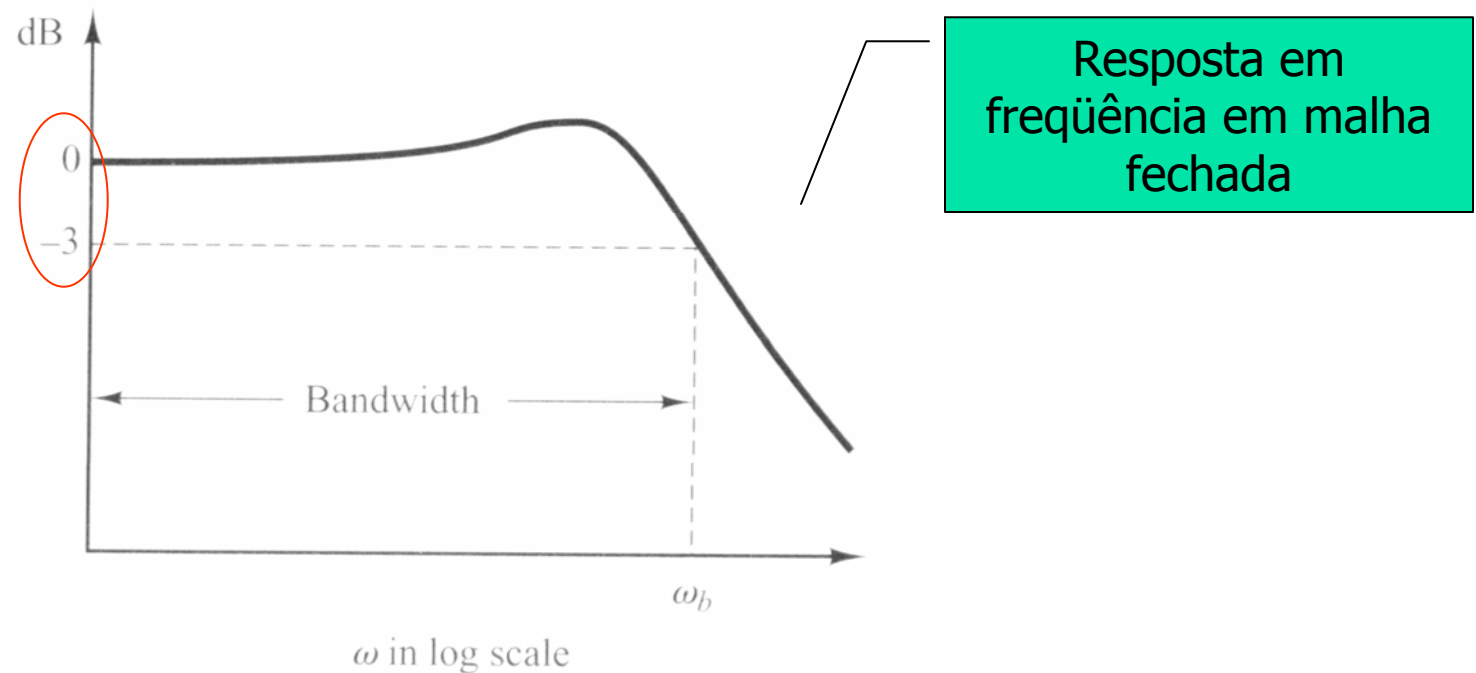
$M_r$ : magnitude do pico ressonante

$M_p$ : sobre-sinal (*overshoot*)

$\xi$  : fator de amortecimento



## Largura de banda (*bandwidth*) e frequência de corte $\omega_b$ (*cutoff frequency*)



A LB indica como um sistema vai seguir um sinal senoidal.  
É proporcional à velocidade de resposta.  
LB grande corresponde a um pequeno tempo de subida.  
A LB decresce com o aumento de  $\xi$ .