

CONTROLO DIGITAL

4º ANO, 1º SEMESTRE

Eng. Sistemas e Computação

António E.B. Ruano

1 Introdução

O controlo de sistemas físicos por computador conheceu um grande desenvolvimento com a introdução dos microprocessadores e, nos últimos anos, tem-se vulgarizado. Os sistemas de controlo digital oferecem vantagens significativas relativamente aos sistemas que tem vindo a substituir, analógicos, nomeadamente:

- Menor susceptibilidade a variações de condições ambientais, tais como temperatura, humidade, envelhecimento de componentes;
- Redução de custos e rejeição de interferências associados à transmissão digital;
- Possibilidade de realizar algoritmos de controlo mais sofisticado a um baixo custo;
- Potencial flexibilidade para variações nos algoritmos/parâmetros através de software;
- Potencialmente melhor fiabilidade.

Apresenta no entanto desvantagens, das quais se pode salientar:

- A introdução de erros (numéricos) devido à precisão finita da quantificação dos sinais e do seu processamento;
- Necessidade de mais conhecimentos dos engenheiros para tirar partido dos algoritmos mais complexos;
- Limitações na velocidade de operação, embora esta limitação se torne menos problemática com a rápida evolução da tecnologia;
- Potencial para uma maior catástrofe, no caso de avaria no sistema de controlo.

Iremos nesta disciplina tratar de sistemas de controlo de sistemas contínuos, onde o algoritmo de controlo, ou controlador, é implementado num computador digital, conforme se ilustra na fig. 1.

O controlo efectuado é em malha fechada, portanto necessitamos de medir a saída do sistema. Como a informação medida é contínua, e o nosso computador trabalha com quantidades digitais, precisamos de digitalizar esta informação. Isto envolve os seguintes passos:

1. Amostramos o sinal contínuo utilizando para isso um amostrador de topo plano (*sample and hold*). Este dispositivo, enquanto se encontra no estado de manutenção (*hold*), mantém constante o sinal que está a ser amostrado;
2. Enquanto o sinal é mantido constante, à saída do amostrador, este sinal vai ser convertido numa quantidade digital, normalmente codificada em binário, através do *Conversor Analógico-Digital* (ADC ou A/D).

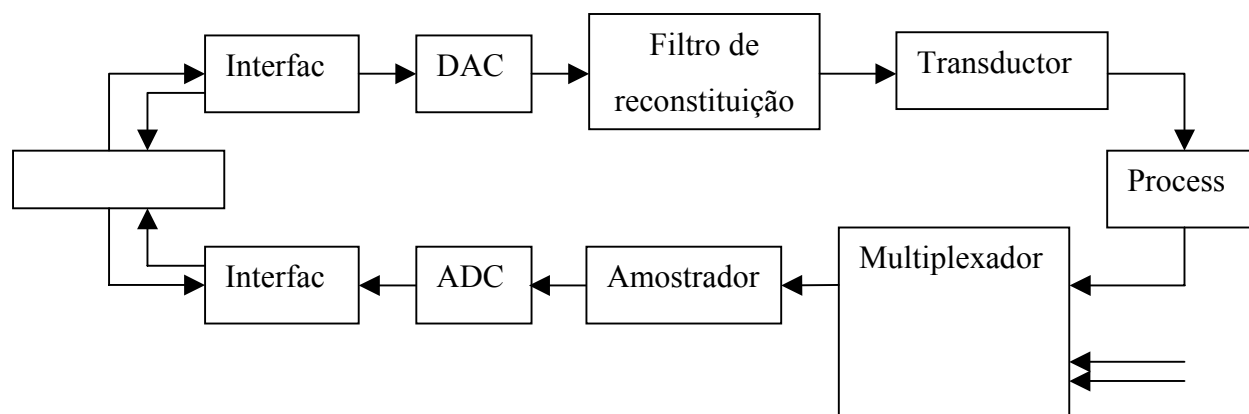


Fig. 1.1 – Estrutura geral de controlo digital

Temos então à saída do processo um sinal contínuo, seja ele $e(t)$, enquanto à saída do amostrador e da ADC temos um sinal que só varia de tempos a tempos, mantendo-se constante no entretanto. Este sinal é denominado de *sinal discreto*, e representa-se por $\hat{e}(kT)$, sendo T denominado de *período de amostragem*, ou, abreviadamente, por $\hat{e}(k)$. Um sistema, como o da fig. 1, onde coexistem sinais contínuos e discretos, é chamado de *sistema amostrado*.

O conversor ADC, conforme já referimos, quantiza o sinal discreto, isto é, de uma gama infinita para a amplitude do sinal, discretiza essa gama num número finito de níveis.

A figura 2 ilustra a operação de quantização. Note que, qualquer que seja a amplitude do sinal de entrada, entre -0.05 e $+0.05$, o sinal de saída tem um valor único de 0 . Neste caso o *quanta* é de 0.1 , normalmente indicado por $q=0.1$. Num caso genérico, uma ADC tem n bits de precisão, e se a sua gama de entrada for g , o *quanta* é igual a:

$$(1.1) q = \frac{g}{2^n}$$

Um sinal que é simultaneamente discreto e quantizado é chamado de *sinal digital*. Normalmente uma ADC é um integrado caro. Por essa razão, a sua utilização é

partilhada pelos vários sinais de entrada, utilizando um *multiplexador analógico* (não confundir com um multiplexador digital).

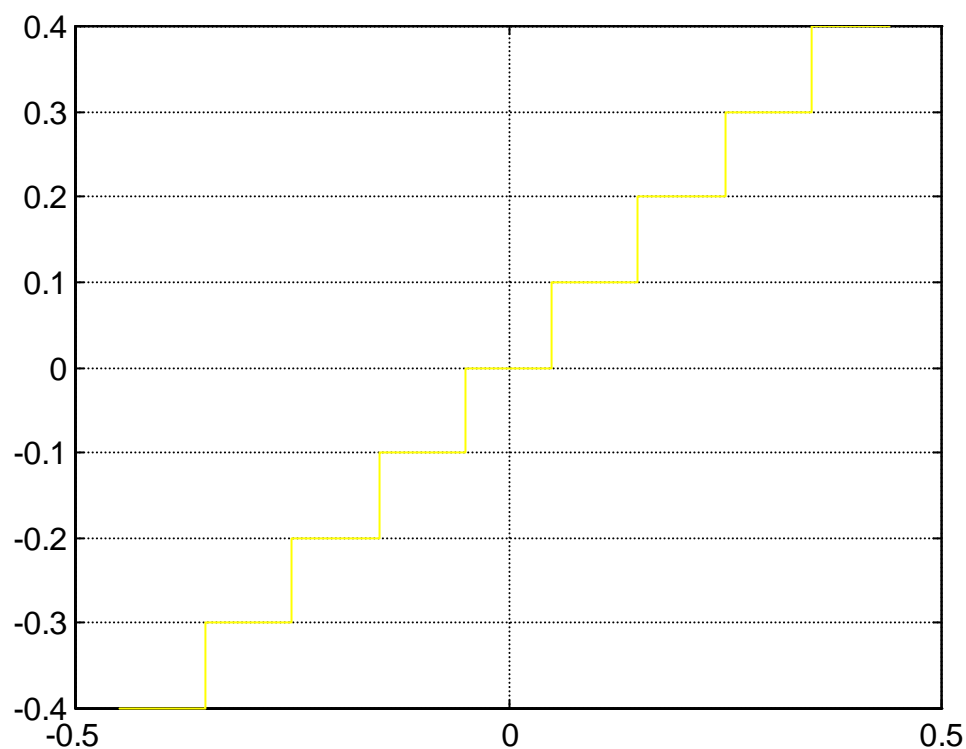


Fig. 1.2 – Saída versus entrada de um conversor analógico-digital

O sinal digital é seguidamente lido pelo computador através de uma *interface de entrada*. É óbvio que todas as operações até aqui referidas devem ser sincronizadas com o computador. Normalmente existe um sinal de relógio – *relógio de tempo real* – que pode ser interno ou externo ao computador que é utilizado para amostrar a saída do sistema com uma determinada frequência, denominada de *frequência de amostragem* – $f_s=1/T$. Este relógio interrompe o CPU, que desencadeia as acções necessárias à amostragem e à conversão.

Com base no sinal lido do sistema, o computador executa um algoritmo de controlo, que resulta numa outra palavra digital, que, para ser aplicada ao sistema, deve ser convertida em analógica. Temos então o caminho inverso. Através de uma *interface de saída*, o sinal digital é aplicada a uma DAC – *Conversor Ddigital para Analógico* - que converte a palavra de n bits num sinal de nível constante, que variará apenas na

próxima saída. Este sinal pode ser aplicado a um filtro reconstituente, e é aplicado a um transdutor que por sua vez controla o sistema.

Em termos de um diagrama de blocos familiar, o nosso sistema genérico pode ser representado como:

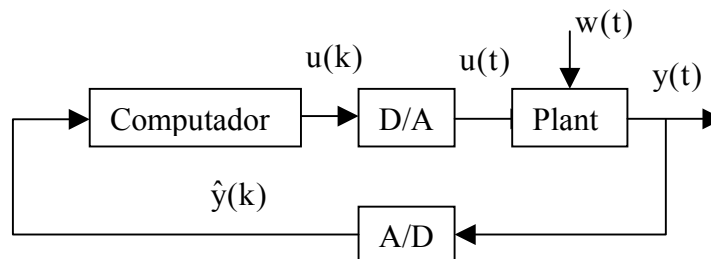


Fig. 1.3 – Diagrama de blocos de um sistema de controlo genérico

Nesta figura ilustra-se a acção de regulação. Se se pretender um objectivo de seguimento de entrada, dever-se-á introduzir uma entrada de referência, que pode ser aplicada directamente ao computador, que por sua vez fará internamente a comparação com o valor digital da saída; caso seja um valor analógico, será comparada com a saída, e o sinal do erro será então aplicado à A/D.

1.1 Análise e projecto de sistemas digitais

Em sistemas discretos os sinais tomam valores diferentes em intervalos de tempo discretos. No capítulo 2 estudaremos estes sinais, desenvolvendo a transformada de z , que desempenha aqui o mesmo papel que a transformada de Laplace para sistemas contínuos. Vamos introduzir funções de transferência pulsadas que são funções de transferência de sistemas contínuos para sinais de entrada/saída amostrados. Estes conceitos vão-se aplicar tanto a sistemas descritos por funções de transferência como em termos de variáveis de estado.

Em sistemas amostrados temos simultaneamente sinais contínuos e sinais discretos. Quando a frequência de amostragem for baixa, pode existir bastante *ripple* entre amostras, e é portanto conveniente estudar, no capítulo 3, os sinais contínuos, e a conversão de sinais discretos para contínuos. Neste capítulo estudar-se-á o sistema sobre o ponto de vista do processo a controlar, e introduzir-se-á o conceito de amostragem como modulação por impulsos. Utilizar-se-ão também as transformadas

de Fourier para introduzir um problema que ocorre em sistemas amostrados, o problema de *aliasing*.

Um sistema de controlo digital pode ser obtido de um sistema de controlo analógico por discretização do controlador. Esta técnica é chamada de *emulação*, dado que o controlador digital vai imitar ou emular o controlador analógico. Este tópico é desenvolvido no capítulo 4.

Após termos desenvolvido as técnicas de análise de sistemas discretos e amostrados, iremos concentrarmo-nos no projecto de controladores, tanto no tempo como na frequência. No capítulo 5 iremos concentrarmo-nos nos métodos baseados em função de transferência, e no capítulo 6 nos métodos baseados em equações de estado. Leitura Adicional

Os tópicos cobertos neste capítulo podem ser todos encontrados no capítulo introductório de textos de apoio sobre Controlo Digital, nomeadamente em:

Franklin, G.F., Powell, J.D., and Workman, M.L., *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley (3rd Ed), 1997

Wittenmark, B., Åström, K.J., *Computer Controlled Systems: Theory and Design*, Prentice Hall (3rd Ed.), 1997

Kuo, B.C., *Digital Control Systems*, Holt, Rinehart and Wiston Inc. (2nd Ed.), 1997

Isermann, R., *Digital Control Systems: Fundamentals, Deterministic Control*, Springer Verlag, 1989

Informação sobre conversão de dados, ADCs, DACs e interfaces pode ser encontrada no 2º capítulo de:

Kuo, B.C., *Digital Control Systems*, Holt, Rinehart and Wiston Inc. (2nd Ed.), 1997,

e ainda nos endereços www:

Scientific Solutions:

<http://www.labmaster.com/>

Analog Devices

<http://www.analogdevices.com/>

6 Projecto de sistemas de controlo digitais utilizando o método de espaço de estados

Conforme já sabemos da disciplina de Sistemas de Controlo II, a utilização da representação em espaço de estados tem vantagens relativamente à formulação em termos de função de transferência, especificamente para o tratamento de sistemas MIMO e em termos de realização numérica.

No capítulo anterior mencionámos 2 grandes classes de métodos de projecto: por *emulação* e por projecto digital directo. É óbvio que o primeiro método é também válido para a representação em espaço de estados, consistindo em projectar o controlador no tempo contínuo, e discretizando-o através dos equivalentes introduzidos no Capítulo 4. Dado já termos exemplificado esta técnica no Capítulo 4, vamo-nos concentrar nos métodos digitais de projecto.

6.1 Lei de controlo

Um processo pode ser representado em espaço de estados por:

$$(6.1.) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases}$$

Assumindo um z.o.h. à entrada do processo, a representação discreta exacta de (6.1) é:

$$(6.2.) \begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{\Phi x}[k] + \mathbf{\Gamma u}[k] \\ \mathbf{y}[k] = \mathbf{Cx}[k] \end{cases}, \text{ onde}$$

$$(6.3.) \mathbf{\Phi} = e^{\mathbf{AT}}, \text{ e}$$

$$(6.4.) \mathbf{\Gamma} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\eta} d\eta \mathbf{B}$$

O projecto de sistemas em espaço de estados envolve 2 fases independentes: na 1ª fase assume-se que estão disponíveis todas as variáveis de estado. Com estas, determina-se a lei de controlo. O 2º passo relaxa a condição de as variáveis de estado estarem todas disponíveis e vamos estimar ou observar todas ou apenas algumas dessas variáveis. O algoritmo de controlo final engloba os 2 módulos, isto é, a lei de

controlo que trabalha com as variáveis de estado estimadas, e o estimador, que estima essas mesmas variáveis.

Nesta secção vamo-nos concentrar na determinação da lei de controlo. Esta tem a forma:

$$(6.5.) u = -\mathbf{k}\mathbf{x} = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Esta estrutura não permite a inclusão de uma referência, sendo válida apenas quando se pretende um *regulador*, isto é, $r=0$.

Substituindo (6.5) em (6.2), temos:

$$(6.6.) \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[k] - \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}\mathbf{x}[k] = \{\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}\} \mathbf{x}[k].$$

A transformada de z de (6.6) é:

$$(6.7.) \{z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}\} \mathbf{X}(z) = 0,$$

e a equação característica do sistema realimentado é:

$$(6.8.) |z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}| = 0.$$

O problema de *colocação de pólos* resume-se então em determinar os valores do vector \mathbf{k} , de tal maneira que a polinomial característica do sistema realimentado seja igual a uma polinomial característica desejada:

$$(6.9.) \alpha_c(z) = (z - \beta_1)(z - \beta_2) \cdots = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots = 0,$$

que corresponde a pólos em malha fechada nas localizações β_1, β_2, \dots .

6.1.1 Exemplo

Vamos utilizar novamente o problema do satélite. Sabemos que o nosso processo tem 2 variáveis de estado, x_1, x_2 , e que as matrizes da equação de estado são:

$$(6.10.) \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}.$$

De acordo com as especificações do sistema, as raízes desejadas para tempo contínuo localizam-se em $s = -1.8 \pm j3.12$. Usando a transformação $z = e^{sT}$, com $T=0.1$ seg,

ficamos com as raízes desejadas, para tempo discreto, em $z = 0.8 \pm j0.25$. A equação característica desejada é:

$$(6.11.) z^2 - 1.6z + 0.7 = 0$$

A eq. correspondente à (6.8) é.

$$\begin{aligned} (6.12.) & \left[\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right] = \\ & \left[\begin{bmatrix} z-1+T^2k_1/2 & -T+T^2k_2/2 \\ Tk_1 & z-1+Tk_2 \end{bmatrix} \right] = \\ & = (z-1+T^2k_1/2)(z-1+Tk_2) + (T-T^2k_2/2)Tk_1 = 0 \end{aligned}$$

Efectuado os cálculos, ficamos com:

$$(6.13.) z^2 + \left\{ Tk_2 + \frac{T^2k_1}{2} - 2 \right\} z + \left\{ \frac{T^2k_1}{2} - Tk_2 - 1 \right\} = 0.$$

Igualando (6.13) e (6.11), temos:

$$\begin{aligned} (6.14.) \quad k_1 &= \frac{0.1}{T^2} = 10, \\ k_2 &= \frac{0.35}{T} = 3.5 \end{aligned}$$

6.1.2 Forma canónica controladora

O método utilizado no exemplo anterior envolve muitos cálculos quando a ordem do sistema é superior a 2. Por isso, existem métodos que permitem a determinação do vector de ganhos de uma maneira mais simples.

Se o sistema estiver na *forma canónica controladora*¹ (recorde-se de Sistemas de Controlo II), as matrizes das equações dinâmicas têm a forma:

$$(6.15.) \Phi_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = [b_1 \quad b_2 \quad b_3].$$

¹ Em Sistemas de Controlo II, as variáveis de estado foram introduzidas da direita para a esquerda. Se as tivéssemos introduzidas da esquerda para a direita, ficaríamos com (6.15)

A equação característica é dada por:

$$(6.16.) z^3 - a_1 z^2 - a_2 z + a_3 = 0.$$

Como se pode ver, os termos da polinomial característica aparecem na 1ª linha da matriz transição de estados discreta. Em termos da matriz do sistema em malha fechada, temos:

$$(6.17.) \Phi_c - \Gamma_c \mathbf{k} = \begin{bmatrix} -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 & -a_3 - k_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Igualando assim os termos da polinomial característica do sistema em malha fechada com os desejados ((6.9) em forma polinomial), obtemos directamente os valores do vector de ganhos:

$$(6.18.) \begin{aligned} k_1 &= \alpha_1 - a_1 \\ k_2 &= \alpha_2 - a_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

6.1.3 Contralabilidade e fórmula de Ackermann

Conforme já sabemos de Sistemas de Controlo II, para um sistema poder ser expresso na fórmula canónica controladora, tem de ser *controlável*, isto é, a entrada tem de afectar todos os modos do sistema. Como sabemos, um sistema é controlável se a sua matriz de controlabilidade,

$$(6.19.) \mathbf{C} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

tem característica n , sendo n a dimensão das matrizes. Em termos discretos, a matriz de controlabilidade calcula-se exactamente da mesma maneira, com as matrizes substituídas pelos seus equivalentes discretos:

$$(6.20.) \mathbf{C} = [\Gamma \mid \Phi\Gamma \mid \dots \mid \Phi^{n-1}\Gamma]$$

Então, a fórmula de Ackermann, para sistemas discretos, é:

$$(6.21.) \mathbf{k} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{C}^{-1} \alpha_c(\Phi), \text{ onde}$$

$$(6.22.) \alpha_c(\Phi) = \Phi^n + \alpha_1 \Phi^{n-1} + \dots + \alpha_n \mathbf{I},$$

onde os α_i s são os coeficientes desejados da polynomial caraterística.

6.1.4 Exemplo anterior com a fórmula de Ackermann

Sabemos que os termos da polinomial característica desejada são:

$$(6.23.) \alpha_1 = -1.6, \quad \alpha_2 = 0.7$$

$$(6.24.) \alpha_c(\Phi) = \Phi^n + \alpha_1 \Phi^{n-1} + \dots + \alpha_n \mathbf{I} = \\ = \begin{bmatrix} 1 & 2T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1.6 \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0.7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4T \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

A matriz de controlabilidade é dada por:

$$(6.25.) \mathbf{C} = [\mathbf{\Gamma} \quad \Phi \mathbf{\Gamma}] = \begin{bmatrix} T^2/2 & 3T^2/2 \\ T & T \end{bmatrix}$$

A sua inversa é:

$$(6.26.) \mathbf{C}^{-1} = 1/T^2 \begin{bmatrix} -1 & 3T/2 \\ 1 & -T/2 \end{bmatrix},$$

e finalmente,

$$(6.27.) \mathbf{k} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{C} \alpha_c(\Phi) = [\mathbf{k}_1 \quad \mathbf{k}_2] = \frac{1}{T^2} [0.1 \quad 0.35T], \text{ ou}$$

$$(6.28.) \mathbf{k} = [10 \quad 3.5],$$

que é o mesmo resultado obtido antes.

6.2 Projecto do estimador

A lei de controlo introduzida na secção anterior pressupõe a disponibilidade de todos os estados do sistema. Na prática isso não acontece e, na maior parte dos casos, alguns deles devem ser estimados. Vamos considerar primeiramente que se pretende estimar todo o vector de estado, e, posteriormente, estimaremos apenas parte desse vector.

Vamos considerar dois tipos de estimadores: o *estimador corrente*, $\hat{\mathbf{x}}[k]$, que é baseado em medidas $y[k]$ até, e incluindo o instante k , e o *estimador predictivo*, $\bar{\mathbf{x}}[k]$,

baseado em medidas até $y[k-1]$. A lei de controlo será então dada por $u = -\mathbf{k}\bar{\mathbf{x}}$, ou $u = -\mathbf{k}\hat{\mathbf{x}}$, consoante o estimador utilizado.

6.2.1 Estimador predictivo

Este estimador já foi introduzido em Sistemas de Controlo II e pode ser visualizado na seguinte figura:

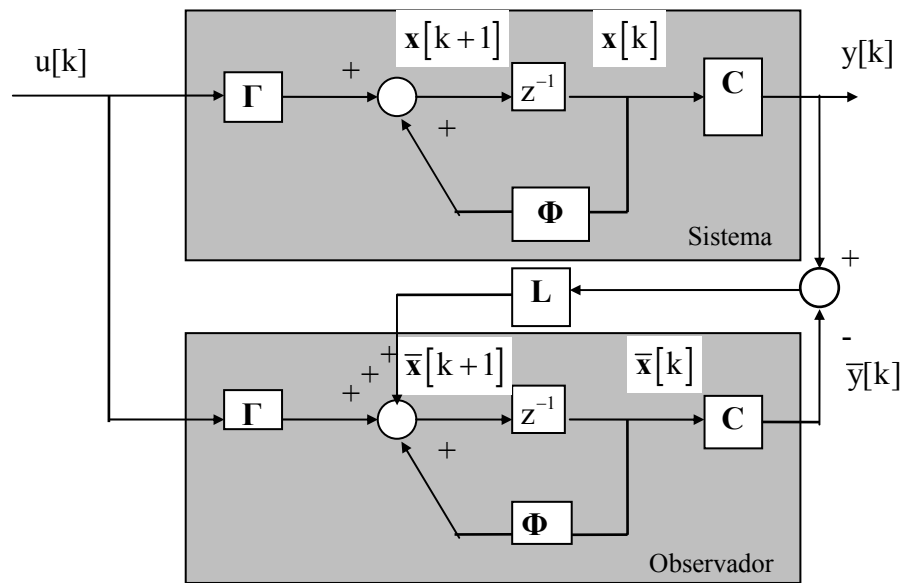


Fig. 1 – Estimador em malha fechada

A equação do estimador é dada pela seguinte equação:

$$(6.29.) \bar{\mathbf{x}}[k+1] = \Phi \bar{\mathbf{x}}[k] + \Gamma u[k] + \mathbf{L}_p (y[k] - C \bar{\mathbf{x}}[k]),$$

onde \mathbf{L}_p é a matriz de realimentação. Repare-se que, no instante k , vai-se estimar ou prever o valor do vector de estados para o instante $k+1$, e portanto trata-se de um estimador predictivo.

Se executarmos a diferença $\tilde{\mathbf{x}}[k] = \bar{\mathbf{x}}[k] - \mathbf{x}[k]$, ficamos com:

$$(6.30.) \tilde{\mathbf{x}}[k+1] = (\Phi - \mathbf{L}_p C) \tilde{\mathbf{x}}[k]$$

Como sabemos, (6.30) é uma equação homogénea, e, assim sendo, se a matriz do sistema for estável, $\tilde{\mathbf{x}}[k]$ tenderá para zero, independentemente das suas condições iniciais. Se a sua dinâmica for mais rápida que a de $\mathbf{x}[k]$, então os erros na estimação convergirão para 0 mais rapidamente que o sistema em malha fechada, e podemos

considerar na lei de controlo que o vector de estados coincide com o seu verdadeiro valor².

Para determinar o valor de \mathbf{L}_p , utilizamos o mesmo método que para determinar \mathbf{k} , isto é, determinamos uma polinomial característica desejada para o estimador:

$$(6.31.) \alpha_e(z) = (z - \beta_1)(z - \beta_2) \cdots = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots = 0$$

e igualamos os termos da polinomial característica efectivamente obtida:

$$(6.32.) \left| z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{L}_p \mathbf{k} \right| = 0.$$

6.2.1.1 Exemplo

Vamos projectar um estimador para o nosso sistema de satélite. Vamos admitir que as raízes da polinomial desejada sejam $z = 0.4 \pm j0.4$, cerca de 3 vezes mais rápidas que as de controlo. Assim, a polinomial característica desejada é:

$$(6.33.) z^2 - 0.8z + 0.32 = 0$$

Para este caso, a eq. (6.32) é:

$$(6.34.) \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{p1} \\ L_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right| =$$

$$= z^2 + (L_{p1} - 2)z + TL_{p2} + 1 - L_{p1} = 0$$

Destas 2 últimas eq., tiramos que:

$$(6.35.) \begin{matrix} L_{p1} = 1.2 \\ L_{p2} = 5.2 \end{matrix}, \text{ para } T=0.1 \text{ seg.}$$

6.2.2 Observabilidade

Conforme também já sabemos, só podemos sintetizar um observador total se o sistema fôr totalmente *observável*. Um sistema é observável se a *sua matriz de observabilidade* tiver característica n .

² Na prática existirão sempre perturbações não modeladas, e o próprio sensor tem ruído, ruído esse suavizado pelo estimador

$$(6.36.) \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\Phi \\ \vdots \\ \mathbf{C}\Phi^{n-1} \end{bmatrix}$$

Do mesmo modo que para o cálculo da lei de controlo, o cálculo do observador é tedioso se a ordem do sistema for superior a 2. A fórmula de Ackermann pode também ser aqui aplicada, e formulada da maneira seguinte:

$$(6.37.) \mathbf{L}_p = \alpha_e(\Phi) \mathbf{Q}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $\alpha_e(\Phi)$ é calculada do mesmo modo que no caso da lei de controlo.

6.2.3 Estimador corrente

Utilizando o estimador predictivo, usamos na lei de controlo um vector de estado que depende de $y[k-1]$. Poderíamos usar a informação obtida até ao momento (isto é, $y[k]$), tornando-se à partida a estimação mais fiável. Se modificarmos (6.29) para:

$$(6.38.) \hat{\mathbf{x}}[k] = \bar{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{L}_c (y[k] - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}[k]), \text{ onde}$$

$$(6.39.) \bar{\mathbf{x}}[k] = \Phi \hat{\mathbf{x}}[k-1] + \Gamma u[k-1],$$

então o estimador obtido irá depender de $y[k]$. Repare que os cálculos de (6.39), e de parte de (6.38) podem ser executados após a amostra anterior, havendo só necessidade de efectuar a multiplicação envolvendo $y[k]$, e o update de $\hat{\mathbf{x}}[k]$, após a amostragem corrente.

Para se perceber bem as diferenças entre o estimador corrente e o predictivo, vamos substituir (6.38) em (6.39). Temos:

$$(6.40.) \bar{\mathbf{x}}[k+1] = \Phi \bar{\mathbf{x}}[k] + \Gamma u[k] + \Phi \mathbf{L}_c (y[k] - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}[k])$$

A equação para o erro, em termos de $\bar{\mathbf{x}}$ é agora:

$$(6.41.) \tilde{\mathbf{x}}[k+1] = (\Phi - \Phi \mathbf{L}_c \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}}[k]$$

Comparando (6.41) com (6.30), vemos que elas são equivalentes, com

$$(6.42.) \mathbf{L}_p = \mathbf{\Phi} \mathbf{L}_c$$

A eq. para o erro, em termos de $\hat{\mathbf{x}}$, é dada por:

$$(6.43.) \tilde{\mathbf{x}}[k+1] = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{L}_c \mathbf{C} \mathbf{\Phi}) \tilde{\mathbf{x}}[k]$$

Obviamente as duas equações tem a mesma dinâmica, e portanto podemos usar uma ou outra para determinar os ganhos do estimador. Usando a última, a aplicação da fórmula de Ackermann será:

$$(6.44.) \mathbf{L}_c = \alpha_e (\mathbf{\Phi})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{C} \mathbf{\Phi}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{\Phi}^n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uma outra forma será determinar \mathbf{L}_p , e utilizar (6.42) para determinar \mathbf{L}_c .

6.2.3.1 Exemplo

Vamos repetir os cálculos efectuados anteriormente para o estimador predictivo. Utilizando a última possibilidade, temos:

$$\mathbf{L}_c = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.2 & 5.2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.68 \\ 5.2 \end{bmatrix}$$

6.2.4 Observadores de ordem reduzida

Até agora estimámos todo o vector de estado. No entanto, caso se disponha de medidas para algumas das variáveis, elas podem ser usadas, e estimar as restantes. Vamos particionar o vector de estado em \mathbf{x}_a , as variáveis medidas, que vão corresponder a y , e as variáveis \mathbf{x}_b , as variáveis que pretendemos estimar. Assim, temos:

$$(6.45.) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a[k+1] \\ \mathbf{x}_b[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{aa} & \mathbf{\Phi}_{ab} \\ \mathbf{\Phi}_{ba} & \mathbf{\Phi}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a[k] \\ \mathbf{x}_b[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_a \\ \mathbf{\Gamma}_b \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a[k] \\ \mathbf{x}_b[k] \end{bmatrix}$$

Se agora escrevermos a equação para as variáveis não medidas:

$$(6.46.) \mathbf{x}_b[k+1] = \Phi_{bb} \mathbf{x}_b[k] + \Phi_{ba} \mathbf{x}_a[k] + \Gamma_b u[k],$$

verificamos que os 2 últimos termos no lado direito correspondem a quantidades conhecidas, e podem considerar-se, à luz do estimador, como uma entrada. Indo agora à parte medida, temos:

$$(6.47.) \mathbf{x}_a[k+1] - \Phi_{aa} \mathbf{x}_a[k] - \Gamma_a u[k] = \Phi_{ab} \mathbf{x}_b[k]$$

Repare que o lado esquerdo corresponde a quantidades medidas, e que o lado direito corresponde à quantidade a estimar.

Podemos então considerar que estas 2 equações se podem considerar como:

$$(6.48.) \mathbf{x}'[k+1] = \Phi' \mathbf{x}'[k] + \Gamma' u'[k],$$

$$(6.49.) y'[k] = C' \mathbf{x}'[k]$$

Assim, o estimador de ordem reduzida, ou de Luenberger, é dado por:

$$(6.50.) \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_b[k+1] &= \Phi_{bb} \hat{\mathbf{x}}_b[k] + \Phi_{ba} \mathbf{x}_a[k] + \Gamma_b u[k] + \\ &+ L_\tau (\mathbf{x}_a[k+1] - \Phi_{aa} \mathbf{x}_a[k] - \Gamma_a u[k] - \Phi_{ab} \hat{\mathbf{x}}_b[k]) \end{aligned}$$

Se subtrairmos esta eq. de (6.46), ficamos com a equação de erro:

$$(6.51.) \tilde{\mathbf{x}}_b[k+1] = (\Phi_{bb} - L_\tau \Phi_{ab}) \tilde{\mathbf{x}}_b[k]$$

Então, podemos determinar \mathbf{x}_b , ou por equivalência dos coeficientes das polinomiais desejadas e reais, ou pela aplicação da fórmula de Ackermann:

$$(6.52.) L_\tau = \alpha_e (\Phi_{bb})^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_{ab} \\ \Phi_{ab} \Phi_{bb} \\ \vdots \\ \Phi_{ab} \Phi_{bb}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.2.4.1 Exemplo:

Vamos novamente revisitar o nosso problema do satélite, e considerar que conseguimos medir a posição (\mathbf{x}_1), mas não a velocidade (\mathbf{x}_2). Começamos por particionar as várias matrizes:

$$(6.53.) \begin{bmatrix} \Phi_{aa} & \Phi_{ab} \\ \Phi_{ba} & \Phi_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

Então, de

$$(6.54.) \left| z\mathbf{I} - \Phi_{bb} + \mathbf{L}_\tau \Phi_{ab} \right| = 0, \text{ temos:}$$

$$(6.55.) z - 1 + \mathbf{L}_\tau T = 0$$

6.3 Projecto de reguladores: lei de controlo e estimador

Conforme sabemos de Sistemas de Controlo II, as raízes da polinomial característica do sistema composto pela lei de controlo e pelo estimador consistem nas raízes da polinomial do estimador e da lei de controlo, calculadas separadamente. Este é um caso especial do *princípio de separação*. Assim, se utilizarmos o estimador predictivo, temos:

$$(6.56.) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}[k+1] \\ \mathbf{x}[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \mathbf{L}_p \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ -\Gamma \mathbf{k} & \Phi - \Gamma \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}[k] \\ \mathbf{x}[k] \end{bmatrix}$$

A sua equação característica é:

$$(6.57.) \left| \begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{L}_p \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \Gamma \mathbf{k} & z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma \mathbf{k} \end{bmatrix} \right| = 0, \text{ ou}$$

$$(6.58.) (z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{L}_p \mathbf{C})(z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma \mathbf{k}) = 0$$

Vamos agora tentar comparar este método de projecto com o projecto de compensadores introduzido no capítulo 5.

Se utilizarmos o estimador predictivo (6.29), as equações do sistema são:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}[k] &= \Phi \bar{\mathbf{x}}[k-1] + \Gamma u[k-1] + \mathbf{L}_p (y[k-1] - \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}}[k-1]) = \\ (6.59.) &= (\Phi - \Gamma \mathbf{k} - \mathbf{L}_p \mathbf{C}) \bar{\mathbf{x}}[k-1] + \mathbf{L}_p y[k-1] \\ u[k] &= -\mathbf{k} \bar{\mathbf{x}}[k] \end{aligned}$$

Caso utilizemos o estimador corrente (substituindo (6.39) em (6.59) e (6.42)), temos:

$$(6.60.) \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}[k] &= (\Phi - \Gamma \mathbf{k} - \mathbf{L}_c \mathbf{C} \Phi + \mathbf{L}_c \mathbf{C} \Gamma \mathbf{k}) \hat{\mathbf{x}}[k-1] + \mathbf{L}_c y[k] \\ u[k] &= -\mathbf{k} \hat{\mathbf{x}}[k] \end{aligned}$$

Tanto (6.59) como (6.60) podem ser convertidas para uma forma de função de transferência $U(z)/Y(z)$. Repare que, dado que a referência é nula, isto corresponde a $-D(z)$.

Assim, para o compensador predictivo, temos:

$$(6.61.) \frac{U(z)}{Y(z)} = -\mathbf{k} \left(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k} + \mathbf{L}_p\mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{L}_p.$$

Para o compensador corrente, temos:

$$(6.62.) \frac{U(z)}{Y(z)} = -\mathbf{k} \left(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k} + \mathbf{L}_c\mathbf{C}\mathbf{\Phi} - \mathbf{L}_c\mathbf{C}\mathbf{\Gamma}\mathbf{k} \right)^{-1} \mathbf{L}_c z.$$

6.3.1.1 Exemplo

Se utilizarmos o vector de ganhos já determinado anteriormente, $\mathbf{k} = [10 \ 3.5]$ e o vector observador $\mathbf{L}_p^T = [1.2 \ 5.2]^T$, utilizando (6.61), vemos que o compensador equivalente é:

$$(6.63.) D_p(z) = 30.4 \frac{z + 0.82}{(z + 0.2 + j0.56)(z + 0.2 - j0.56)}$$

Se utilizarmos o vector de ganhos já determinado anteriormente, $\mathbf{k} = [10 \ 3.5]$ e o vector observador $\mathbf{L}_c^T = [0.68 \ 5.2]^T$, utilizando (6.62), vemos que o compensador equivalente é:

$$(6.64.) D_p(z) = 25.1 \frac{z(z + 0.78)}{(z + 0.26 + j0.39)(z + 0.26 - j0.39)}$$

6.4 Introdução da entrada de referência

A lei de controlo que introduzimos até aqui considera que a referência é nula, e o problema em questão é um problema de regulação, onde o objectivo é conduzir o estado do sistema para zero. Vamos agora introduzir uma entrada de referência, primeiro considerando que se conhece todo o vector de estado, e em seguida introduzindo observadores.

6.4.1 Entrada de referência para realimentação de estado total

A estrutura está representada na figura seguinte:

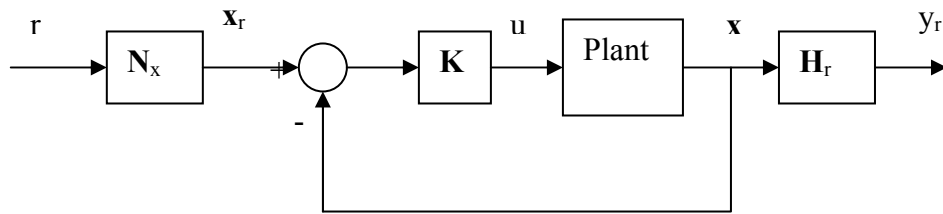


Fig. 2 – Realimentação de estados com entrada de referência

O vector N_x transforma a entrada de referência, num estado de referência, isto é, o valor de um estado de equilíbrio para a respectiva entrada. Assim:

$$(6.65.) \quad N_x r = x_r \quad e \quad u = -k(x - x_r)$$

Se o sistema for de tipo 1 ou superior, e a entrada for um degrau, então não haverá erro em regime estacionário, e

$$(6.66.) \quad x(\infty) \triangleq x_{ss} = x_r$$

Para um sistema de tipo 0, haverá um erro em regime estacionário, dado ser necessário alguma acção de controlo para manter o sistema num desejado x_r , isto é, $x_{ss} \neq x_r$. Nesse caso, dever-se-á determinar x_r de tal modo que $y_r = r$. Para que a solução não fique dependente do tipo de sistema, pode-se incluir um termo para o controlo em regime estacionário:

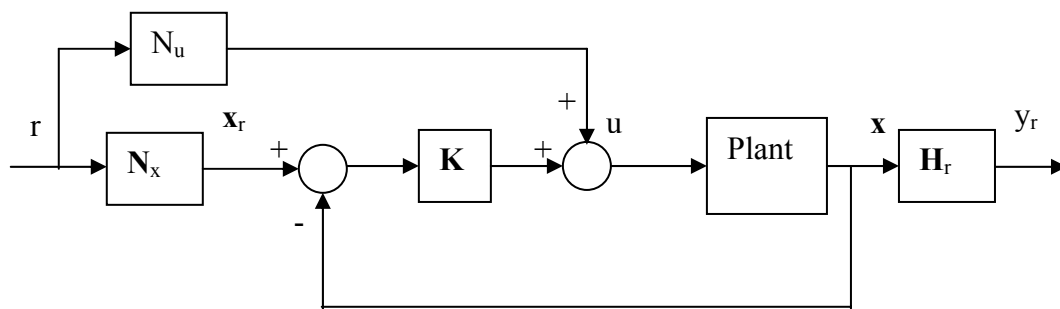


Fig. 3 – Realimentação de estados com entrada de referência e feedforward

Neste caso, iremos ter:

$$(6.67.) \quad u_{ss} = N_u r$$

Assim, para regime estacionário, temos:

$$(6.68.) \begin{aligned} \mathbf{N}_x r &= \mathbf{x}_r = \mathbf{x}_{ss} \\ \mathbf{H}_r \mathbf{x}_{ss} &= y_r = r \end{aligned}$$

Destas equações tira-se que:

$$(6.69.) \mathbf{H}_r \mathbf{N}_x r = r, \quad \text{ou} \quad \mathbf{H}_r \mathbf{N}_x = \mathbf{I}$$

Por outro lado, dado que o sistema está em regime estacionário, temos que:

$$\mathbf{x}_{ss} = \Phi \mathbf{x}_{ss} + \Gamma u_{ss}, \text{ ou}$$

$$(6.70.) (\Phi - \mathbf{I}) \mathbf{x}_{ss} + \Gamma u_{ss} = 0$$

Substituindo (6.67) e (6.68) em (6.70), temos:

$$(\Phi - \mathbf{I}) \mathbf{N}_x r + \Gamma N_u r = 0, \text{ que se reduz a:}$$

$$(6.71.) (\Phi - \mathbf{I}) \mathbf{N}_x + \Gamma N_u = 0$$

Então, (6.71) e (6.69) podem ser expressas como:

$$\begin{bmatrix} \Phi - \mathbf{I} & \Gamma \\ \mathbf{H}_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \text{ ou}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \mathbf{I} & \Gamma \\ \mathbf{H}_r & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

6.4.1.1 Exemplo

Para o problema de posicionamento do satélite, admitindo que pretendemos controlar a variável x_1 ,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}. \text{ Com } T=0.1,$$

$$\begin{bmatrix} \Phi - \mathbf{I} & \Gamma \\ \mathbf{H}_r & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -10 & 0.5 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ e}$$

$$\mathbf{N}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N_u = 0$$

6.4.2 Entrada de referência com estimadores

Neste caso usam-se os mesmos conceitos que já introduzidos anteriormente. A única preocupação é que a entrada do estimador deverá ser a mesma da plant, e portanto o estimador deverá ser posicionado de acordo com a figura seguinte:

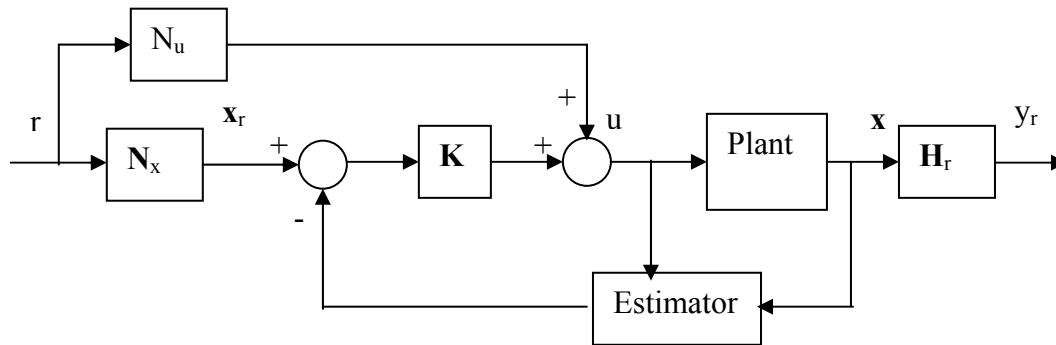


Fig 3 – Realimentação de estado, com referência e estimador

Neste caso, não se devem usar as equações (6.59) e (6.60), dado estas terem sido deduzidas sem entrada de referência. Devemos utilizar um estimador da forma (6.29), mas com $u[k]$ dado por:

$$(6.72.) u[k] = -\mathbf{k}(\bar{\mathbf{x}}[k] - \mathbf{x}_r) + N_u r, \text{ para o estimador predictivo,}$$

$$(6.73.) u[k] = -\mathbf{k}(\hat{\mathbf{x}}[k] - \mathbf{x}_r) + N_u r, \text{ para o estimador corrente, e,}$$

$$(6.74.) u[k] = -[\mathbf{k}_a \quad \mathbf{k}_b] \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} - \mathbf{x}_r \right) + N_u r, \text{ para o estimador de ordem reduzida.}$$

5 Projecto de sistemas de controlo digitais utilizando o método das transformadas

Neste capítulo vamos apresentar 4 classes de métodos para projecto de controladores digitais. O 1º método é baseado no uso de equivalentes digitais introduzidos no capítulo anterior. O segundo método é baseado na aplicação do lugar das raízes no plano z . O 3º método é baseado na resposta em frequência, tanto em termos da transformada z como no plano w . O 4º e último método é baseado em métodos analíticos, e não tem equivalente para o tempo contínuo.

5.1 *Análise da resposta transitória e em regime estacionário*

As especificações de regime transitório introduzidas na disciplina de Sistema de Controlo I, para tempo contínuo, aplicam-se também em tempo discreto. Vamos então examinar a maneira como especificações como razão de amortecimento, tempo de subida, percentagem de sobrelevação e tempo de estabelecimento podem ser interpretados em termos do plano z .

É necessário, em sistemas amostrados, tomar em consideração o tempo de amostragem T . Se o tempo de amostragem for demasiado longo e o teorema de amostragem não for satisfeito, a localização dos pólos e zeros mudará, devido ao fenómeno de *folding*.

Suponhamos que um sistema contínuo tem pólos em $s = -\sigma_1 \pm j\omega_1$. Se este sistema for amostrado e $\omega_1 > \frac{1}{2}w_s$, então ocorrerá o fenómeno de folding e o sistema comportar-se-á como se tivesse pólos em $s = -\sigma_1 \pm j(\pm n\omega_s + \omega_1)$. Dentro da faixa primária os pólos adicionais aparecerão em $s = -\sigma_1 \pm j(-\omega_s + \omega_1)$.

5.1.1 Razão de amortecimento ξ

Como sabemos, no plano s uma relação de amortecimento constante é representada por uma semi-recta saindo da origem. Relembrando a secção 2.6, sabemos que o mapeamento desta semi-recta no plano z é uma espiral logarítmica. Obviamente que se as especificações pretendidas ditarem uma razão de amortecimento superior a um

determinado valor ξ_1 , no plano z os pólos devem permanecer no interior da região delimitada pela espiral logarítmica correspondente a ξ_1 .

5.1.2 Frequência amortecida w_d

Relembrando a secção 2.6, o lugar geométrico no plano s dos pontos com w_d constante é uma recta horizontal, enquanto que no plano z é semi-recta que parte da origem. Sabemos também que o tempo de subida depende apenas da razão de amortecimento e da frequência amortecida dos pólos dominantes.

5.1.3 Tempo de estabelecimento t_s

Sabemos que o tempo de estabelecimento é função da parte real dos pólos dominantes do sistema. Se as especificações pretenderem um tempo de estabelecimento inferior a uma determinada constante, $\sigma < \sigma_1$, em termos do plano s traduz-se na região à esquerda da linha $\sigma = \sigma_1$, enquanto que no plano z esta região corresponde ao interior do círculo de raio $e^{-\sigma_1 T}$.

5.1.4 Análise do erro em regime estacionário

Consideremos o sistema discreto da fig. 1. Iremos assumir que o sistema é estável, de modo a poder aplicar o teorema do valor final.

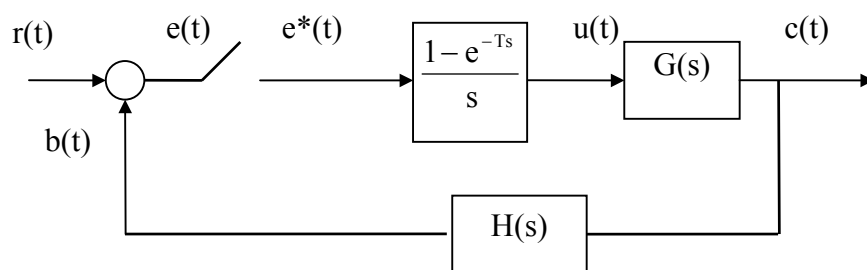


Fig. 1 – Sistema de controlo discreto

Do diagrama, temos que o sinal de erro é:

$$(5.1.) e(t) = r(t) - c(t)$$

Considerando agora o erro amostrado, temos:

$$(5.2.) e_{ss}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z)$$

Se definirmos

$$(5.3.) G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right]$$

e

$$(5.4.) GH(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G(s)H(s)}{s} \right]$$

Temos assim:

$$(5.5.) \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}, \text{ e}$$

$$(5.6.) E(z) = R(z) - B(z) = R(z) - GH(z)E(z), \text{ ou}$$

$$(5.7.) E(z) = \frac{1}{1 + GH(z)} R(z)$$

Substituindo (5.7.) em (5.2.), obtemos:

$$(5.8.) e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + GH(z)} R(z)$$

Do mesmo modo que para sistemas contínuos, consideramos 3 entradas padrão: o degrau, a rampa e a parábola.

5.1.4.1 Constante de erro de posição

Para uma entrada em degrau, $r(t)=u(t)$, e

$$(5.9.) R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Substituindo esta eq. em (5.8.), o erro em regime estacionário para uma entrada em degrau, pode ser obtido como:

$$(5.10.) e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + GH(z)} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{1 + GH(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + GH(z)}$$

Se definirmos a *constante de erro de posição*, k_p , como:

$$(5.11.) k_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)$$

Então, o erro em regime estacionário para uma entrada em degrau pode ser obtido como:

$$(5.12.) e_{ss}^* = \frac{1}{1 + k_p}$$

Obviamente o erro é nulo se $k_p = \infty$, isto é, se houver pelo menos 1 pólo em $z=1$.

5.1.4.2 Constante de erro de velocidade

Para uma entrada em rampa, $r(t)=tu(t)$, isto é:

$$(5.13.) R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

Substituindo esta eq. em (5.8.), temos:

$$(5.14.) e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + GH(z)} \frac{Tz}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Tz}{(z-1)(1 + GH(z))}$$

Definindo a *constante de erro de velocidade* como:

$$(5.15.) k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)(1 + GH(z))}{Tz} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)(GH(z))}{T},$$

o erro em regime estacionário para uma entrada em rampa é dado por:

$$(5.16.) e_{ss}^* = \frac{1}{k_v}.$$

Obviamente, quando $k_v = \infty$, o erro em regime estacionário para uma rampa é nulo. Isso acontece quando existirem 2 ou mais pólos em $z=1$.

5.1.4.3 Constante de erro de aceleração

Para uma entrada em parábola, $r(t) = \frac{1}{2}t^2u(t)$, temos:

$$(5.17.) R(z) = \frac{T^2(z+1)z}{2(z-1)^3}$$

Substituindo esta eq. em (5.8.), temos:

$$(5.18.) e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{1}{1+GH(z)} \frac{T^2 (z+1)z}{2(z-1)^3} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2}{(z-1)^2 (1+GH(z))} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2}{(z-1)^2 GH(z)}$$

Se definirmos a *constante de erro de aceleração*, k_a , como:

$$(5.19.) k_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2 GH(z)}{T^2},$$

então o erro em regime estacionário para uma entrada em parábola, é dado por:

$$(5.20.) e_{ss}^* = \frac{1}{k_a}.$$

Este erro é nulo quando $k_a = \infty$, o que acontece quando $GH(z)$ tem 3 ou mais pólos em $z=1$.

Podemos assim ver que, comparando com o que conhecíamos relativamente aos sistemas contínuos, vemos que os sistemas discretos apresentam o mesmo comportamento para regime estacionário.

5.2 Projecto baseado em equivalentes discretos

Assume-se nesta técnica que o sistema de controlo é projectado em tempo contínuo, isto é, um controlador analógico é projectado, e só depois discretizado.

Consideremos o sistema representado na fig. 2.

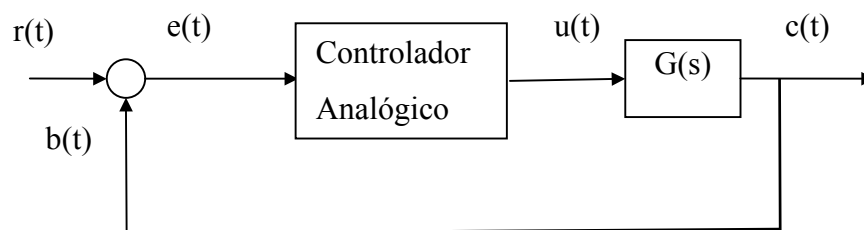


Fig. 2 – Sistema de controlo contínuo

O método então mais utilizado consiste em, de acordo com as especificações, o controlador analógico é projectado, e depois discretizado de acordo com uma das técnicas apresentadas no capítulo anterior.

Um método mais refinado, normalmente designado como *pseudo-tempo contínuo*, incorpora os efeitos do sample-and-hold na fase de projecto em tempo contínuo. Observemos a fig. 3, onde se representa um sistema de controlo discreto.

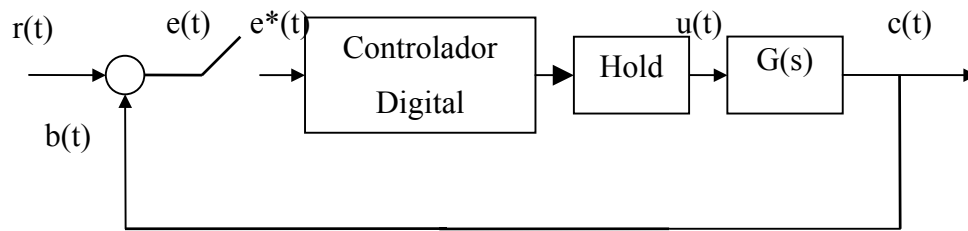


Fig. 3 – Sistema de controlo discreto

Já sabemos que o circuito de hold produz um atraso no sistema. Podemos aproximar o circuito de hold por um quociente de polinomiais, considerando apenas a aproximação de 1ª ordem do termo de atraso:

$$(5.21.) e^{-Ts} = \frac{1 - \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} - \dots}{1 + \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} + \dots} \approx \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}}$$

O retentor de ordem zero pode então ser aproximado como:

$$(5.22.) G_{h0}(z) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \approx \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}} = \frac{T}{\frac{T}{2}s + 1}$$

Como o ganho DC é obtido na fase de projecto, podemos não considerar o T em numerador, e:

$$(5.23.) G_{h0}(z) \approx \frac{1}{\frac{T}{2}s + 1}$$

Então o sistema de controlo discreto representado na fig. 3 pode ser apresentado como:

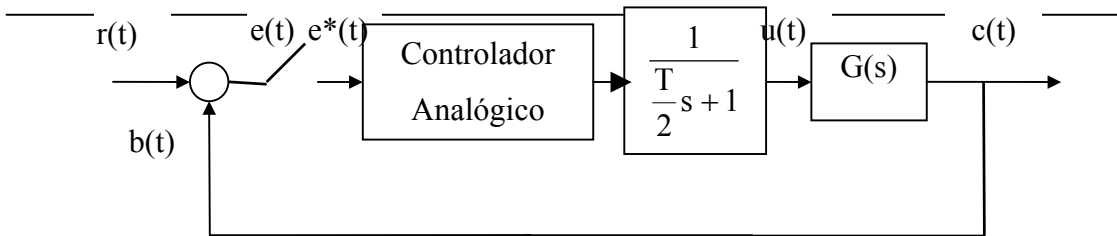


Fig. 4 – Sistema contínuo com a aproximação do z.o.h.

O processo contínuo que se considera, no projecto do controlador, é assim

$\frac{1}{\frac{T}{2}s + 1} G(s)$. Assim que o controlador analógico se encontre projectado, o controlador

será discretizado, e o processo será também discretizado, assumindo um zero-order-hold à entrada. Seguidamente, o sistema discreto em malha fechada é analisado, mediante a resposta no tempo ou na frequência. Se os resultados forem satisfatórios, então esta fase do projecto está concluída. Finalmente o controlador digital deverá ser implementado num programa computacional, e executado num sistema de tempo real.

5.3 Projecto baseado no método do lugar das raízes

Este método determina o controlador directamente no plano z . Inicialmente, o processo a controlar é discretizado, usando (4.32), e em seguida aplicam-se as várias iterações de projecto de modo a que o sistema em malha fechada cumpra as especificações pretendidas. Dado que o processo de discretização assume que um zero-order-hold é incorporado à entrada do processo a controlar, em termos de sistemas amostrados temos um equivalente exacto, e não uma aproximação como no caso anterior. Obviamente estamo-nos a referir apenas às amostras, e não ao comportamento entre amostras, dado este ser dependente do sinal de entrada, entre amostras, do processo contínuo.

O método de projecto baseado no lugar das raízes é apenas uma extensão lógica das técnicas desenvolvidas para sistemas contínuos. Como sabemos a equação característica para sistemas discretos tem a mesma forma que para sistemas contínuos:

$$(5.24.) \Delta(z) = 1 + G(z)H(z) = 0 ,$$

ou

$$(5.25.) \Delta(z) = 1 + GH(z) = 0$$

Assim sendo, as condições de amplitude e fase têm a mesma forma que para sistemas contínuos:

$$(5.26.) \quad |G(z)H(z)| = 1, \text{ ou, } |GH(z)| = 1$$

$$(5.27.) \quad \angle G(z)H(z) = \pi(2k + 1), \text{ ou, } \angle GH(z) = \pi(2k + 1), k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

É fácil de concluir que as regras para construção manual, introduzidas para sistemas contínuos, na disciplina de sistemas de controlo I, são exactamente iguais para sistemas discretos. O que é diferente, é a interpretação a dar aos resultados obtidos, em termos de localização dos pólos e a sua repercussão em termos de estabilidade e comportamento dinâmico.

A melhor maneira de verificarmos as diferenças é utilizando um exemplo:

Vamos supôr que pretendemos determinar um controlador discreto para um sistema de posicionamento de uma antena, em que o proceso a controlar é representado pela função de transferência:

$$(5.28.) \quad G(s) = \frac{1}{s(10s + 1)}.$$

As especificações de projecto são:

- i) percentagem de sobreelevação $< 16\%$
- ii) Erro em regime estacionário para uma entrada em rampa de 0.01 rad/s inferior a 0.01 rad .
- iii) tempo de estabelecimento a $1\% \leq 20 \text{ sec}$.
- iv) tempo de subida $< 6 \text{ sec}$

- i) A 1ª especificação, dado que se pode aproximar a percentagem de sobreelevação por:

$$(5.29.) \quad \% \text{Sobreelevação} \cong \left(1 - \frac{\zeta}{0.6}\right) 100$$

Conduz a um $\zeta \geq 0.5$.

- ii) A 2ª especificação implica que $k_v \leq 1$, dado que $e_{ss} = \frac{1}{k_v}$.

- iii) A 3ª especificação, dado que $t_s \approx \frac{5}{\zeta \omega_n}$, conduz a que a parte real das raízes em s seja inferior a -0.25. Em termos de localizações no plano z, utilizando $z = e^{sT}$, e $T=1$ seg, conduz a um raio inferior a 0.8
- iv) A 4ª especificação, dado $t_r|_{\zeta=0.5} \approx \frac{1.8}{\omega_n}$, conduz a que $\omega_n > 0.3$.

Discretizando o processo com $T=1$ seg, a função de transferência discreta é:

$$(5.30.) G(z) = 0.0484 \frac{z + 0.9672}{(z - 1)(z - 0.9048)}.$$

Considerando um controlador proporcional ($u = k(\theta_s - \theta)$), a equação característica é:

$$(5.31.) 1 + 0.0484k \frac{z + 0.9672}{(z - 1)(z - 0.9048)} = 0.$$

A figura seguinte mostra o lugar das raízes para vários valores de k.

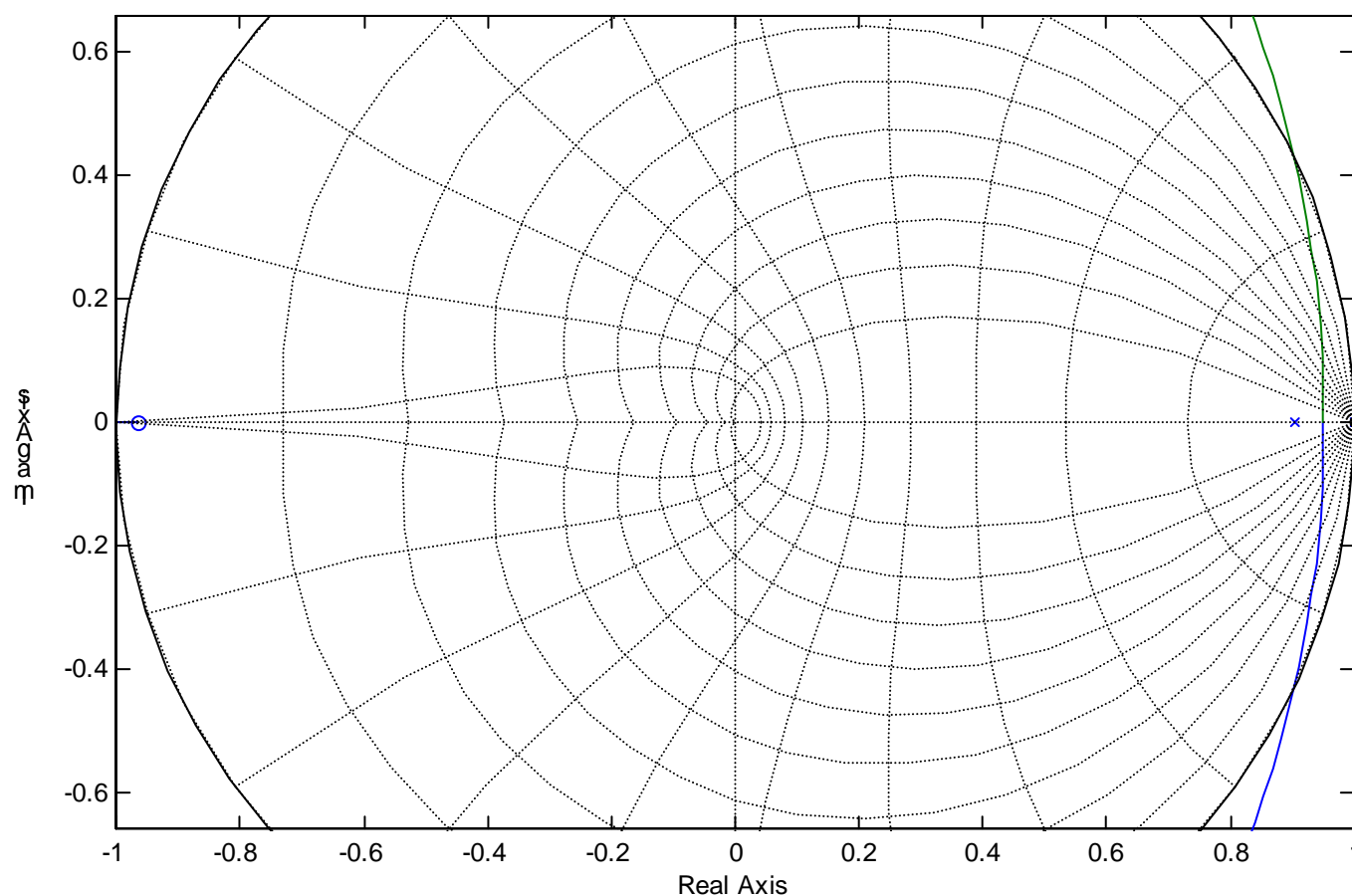


Figura 5 – Lugar das raízes para controlo proporcional

Da figura seguinte, podemos ver que o raio das raízes nunca é menor que 0.95, o que implica que a especificação do tempo de estabelecimento nunca pode ser cumprida. O sistema torna-se instável para $k=1.85$, o que corresponde a um k_v de 1.85.

Temos então que incorporar um compensador dinâmico. É fácil de provar que um compensador contínuo que cumpre as especificações é:

$$(5.32.) G_c(s) = \frac{10s + 1}{s + 1}$$

Se utilizássemos emulação, devíamos discretizar o controlador, usando uma das técnicas introduzidas no capítulo anterior. Utilizando mapeamento de pólos-zeros, teríamos um zero em:

$$(5.33.) z = e^{(-0.1)(1)} = 0.9048$$

e um pólo em:

$$(5.34.) z = e^{(-1)(1)} = 0.3679$$

O ganho DC discreto deveria ser igual ao ganho DC contínuo, e portanto:

$$(5.35.) \text{ganho} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{z \rightarrow 1} k \frac{z - 0.9048}{z - 0.3679} \Rightarrow k = 6.64$$

Vamos tentar usar este controlador. A figura seguinte ilustra o lugar das raízes utilizando-o:

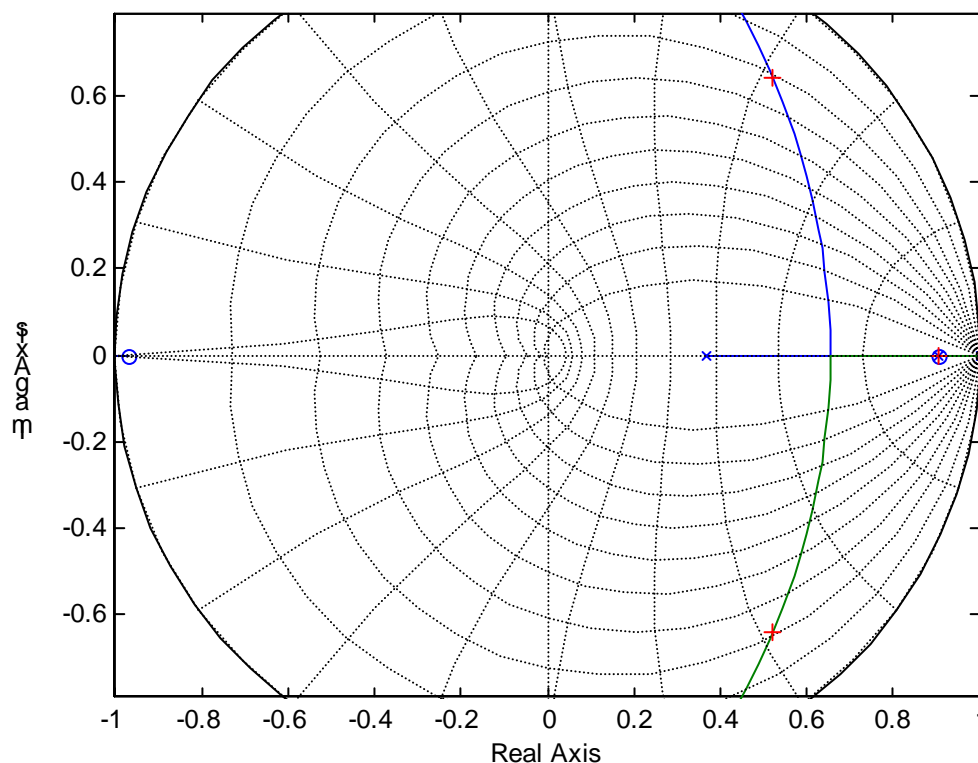


Fig. 6 – lugar das raízes com o controlador obtido por emulação

O ponto marcado com uma cruz denota $k=6.64$. Como vemos, o sistema apresenta um ζ de 0.2, e pode-se provar facilmente que $k_v=1$. O lugar das raízes mostra também que aumentando o ganho iremos diminuir o ζ , o que é exactamente o contrário do pretendido. Pelo contrário, se diminuimos o ganho, podemos melhorar o amortecimento, mas já não conseguimos cumprir as especificações de regime estacionário.

A figura seguinte ilustra a resposta ao degrau do sistema discreto, comparativamente com o sistema contínuo.

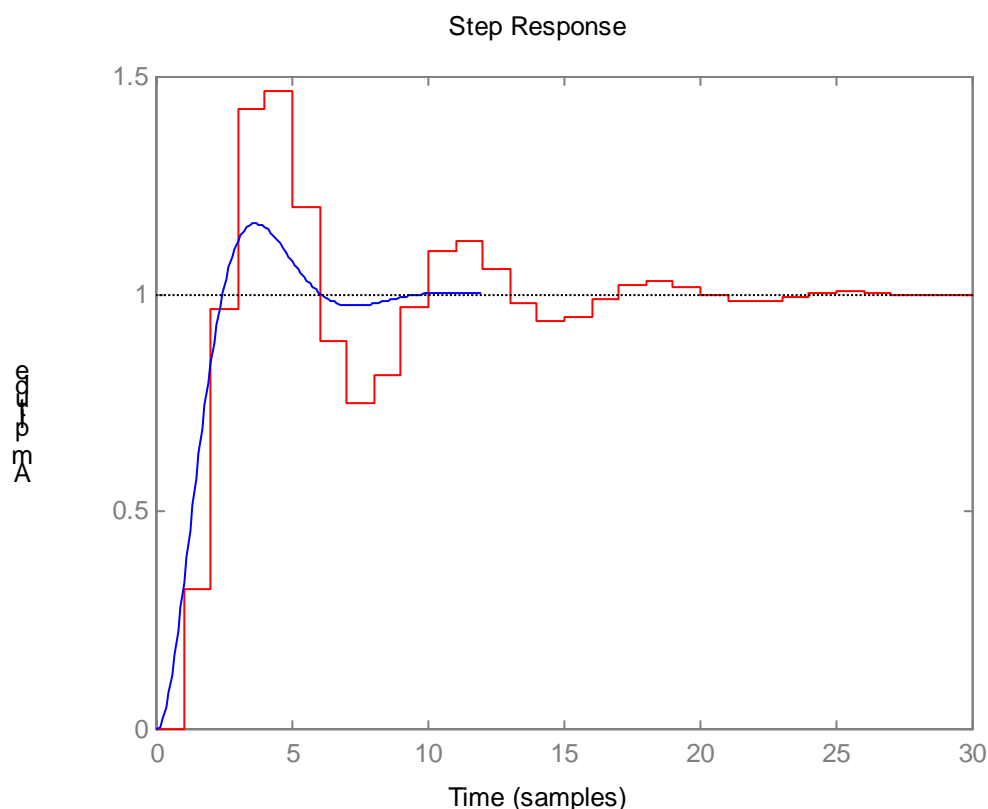


Fig. 7 – Resposta ao degrau do sistema contínuo, comparado com o sistema discreto obtido por emulação.

É óbvio pela comparação entre as duas respostas ao degrau que o projecto por emulação não dá bons resultados neste caso. Reparemos que o nosso sistema pretendido tem um $\omega_n=1$ rad/seg, ou 0.16 Hz. Regras empíricas normalmente usadas indicam uma frequência de amostragem de cerca de 20 vezes a largura de banda. Neste caso, como estamos a utilizar 1 Hz de frequência de amostragem temos apenas um factor de 6. Podemos no entanto utilizar este controlador como um passo inicial, e seguidamente refinar o projecto.

Podemos transferir as especificações para o plano z. As especificações de tempo de estabelecimento ($t_s < 10$ seg) traduzem-se raios de pólos inferiores a 0.61, enquanto as especificações em termos de sobrelevação traduzem-se em que os pólos devem estar no interior da espiral correspondente a $\zeta = 0.5$. As especificações em termos do plano s eram cumpridas com uma localização de pólos em:

$$(5.36.) s = -0.5 \pm j0.867$$

Em termos do plano z, deveríamos ter pólos em:

$$(5.37.) z = 0.392 \pm j0.462$$

O projecto por emulação normalmente resulta em sistemas mal amortecidos quando as especificações de regime estacionário são cumpridas. Nestas circunstâncias deve-se gerar um avanço de fase, o que no caso deste compensador implica separar mais o pólo do zero. Mantendo o zero de modo a cancelar o pólo do processo, e passando o pólo do compensador para 0.1, mantendo as especificações de regime estacionário, obtemos a seguinte resposta ao degrau:

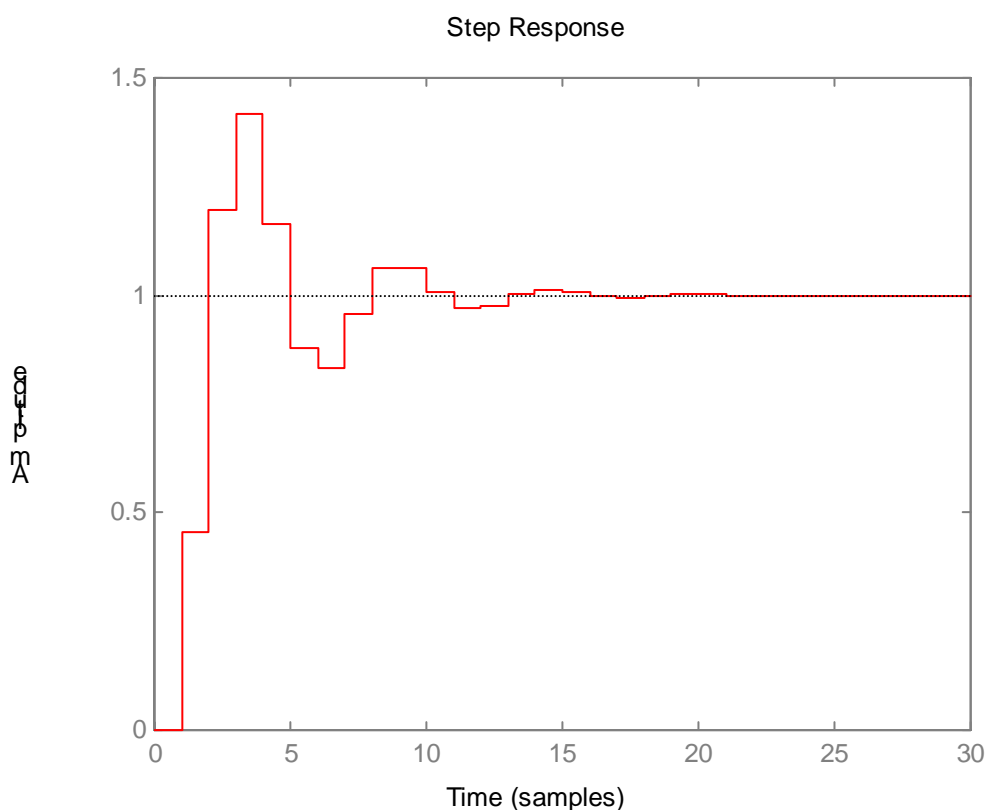


Fig. 8 – Resposta ao degrau, com o pólo do compensador em 0.1

Após várias tentativas, chega-se à conclusão de que com o zero do compensador colocado em 0.904, não se consegue cumprir simultaneamente as especificações.

Após algumas tentativas e erro, o compensador

$$(5.38.) G_c(z) = 6 \frac{z - 0.80}{z - 0.05}$$

satisfaz as especificações para as raízes dominantes e tem um $k_v=1.26$. A resposta ao degrau para este sistema está representada na fig. 9, e o lugar das raízes na fig. seguinte, onde se especifica as raízes para $k=6$.

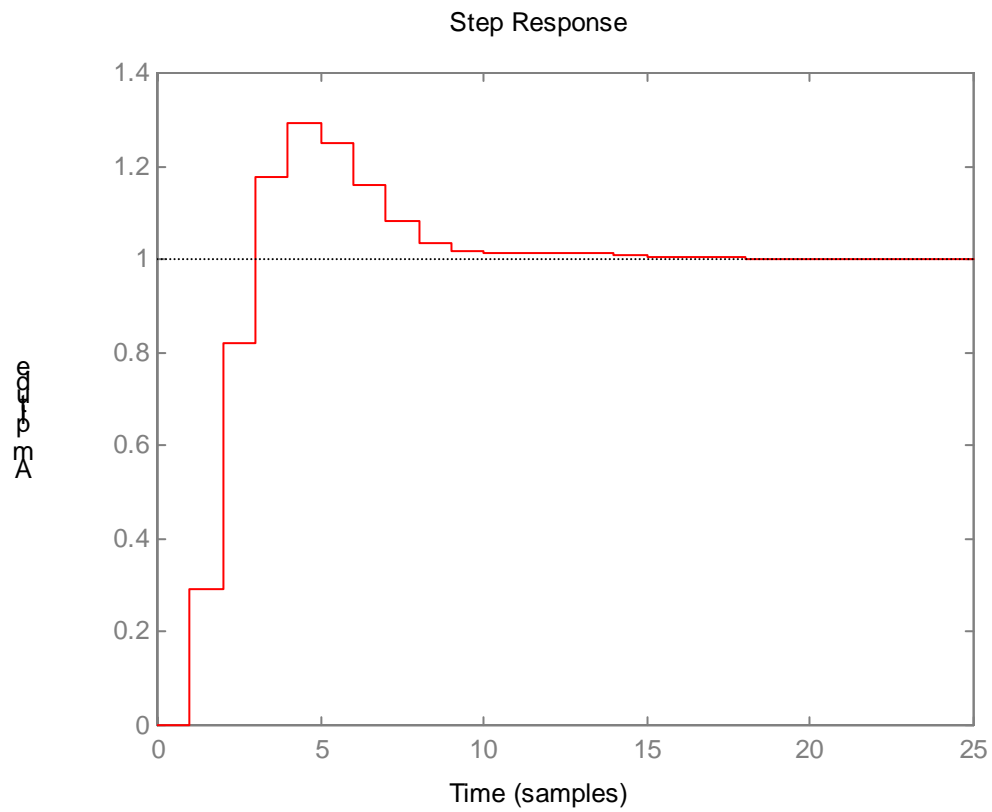


Fig. 9 – Resposta ao degrau para o sistema com compensador (5.38.)

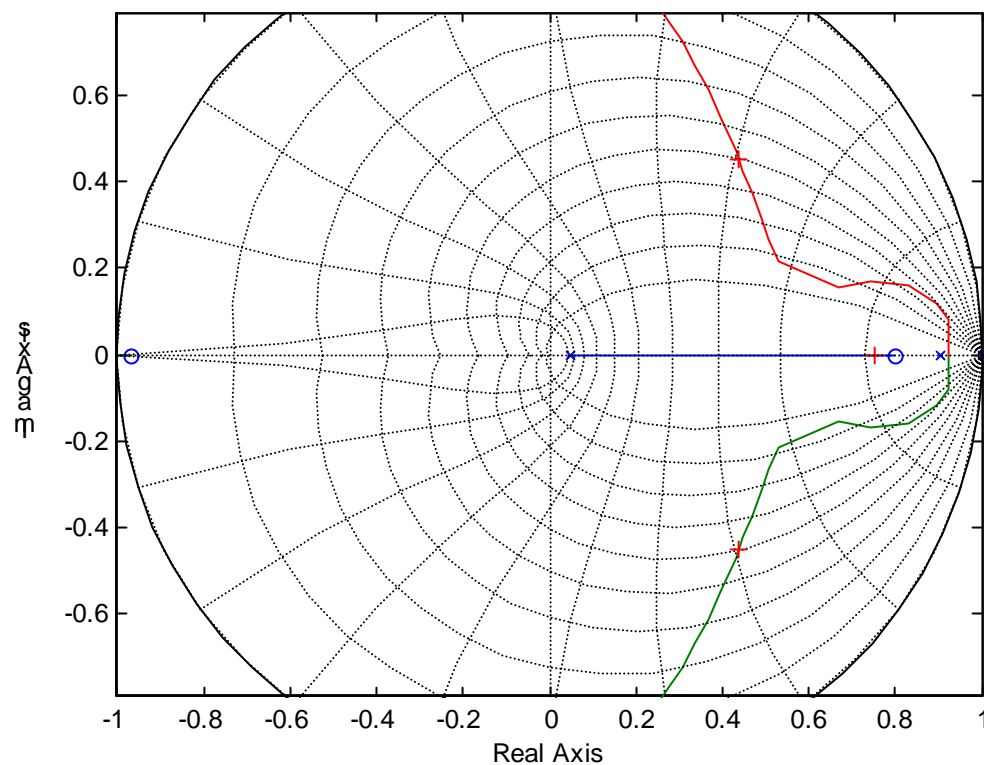


Fig. 10 – Lugar das raízes para o sistema com compensador (5.38.)

De notar que, embora as especificações em termos das raízes dominantes sejam cumpridas, há uma raíz adicional em $z=0.74$ e um zero em $z=0.8$, o que degrada a resposta, conforme se pode observar na figura anterior. Repare-se que a percentagem de sobreelevação é de 29% e o tempo de estabelecimento de 15 seg.

É pois necessário uma nova iteração. Um compensador que atinge os resultados pretendidos é:

$$(5.39.) G_c(s) = 13 \frac{z - 0.88}{z + 0.5}$$

O lugar das raízes com este compensador está representado na fig. seguinte, e na fig. 12 a resposta ao degrau do sistema em malha fechada.

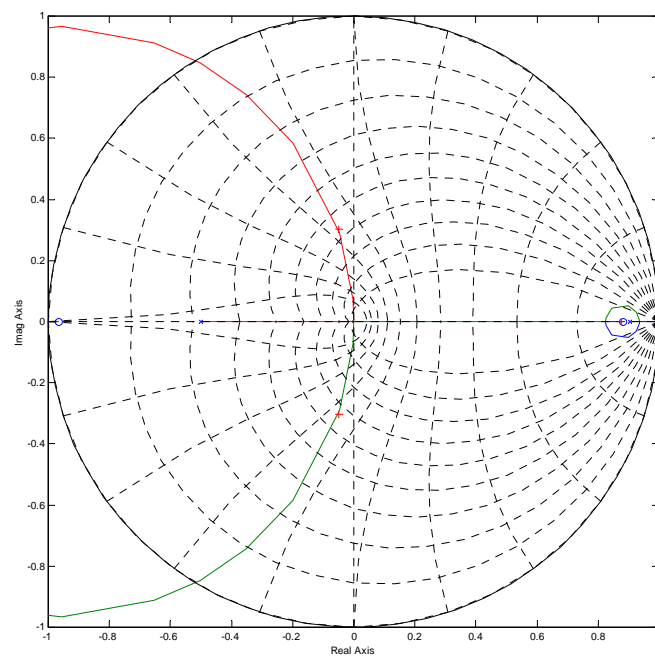


Fig. 11 – Lugar das raízes para o sistema com compensador (5.39.)

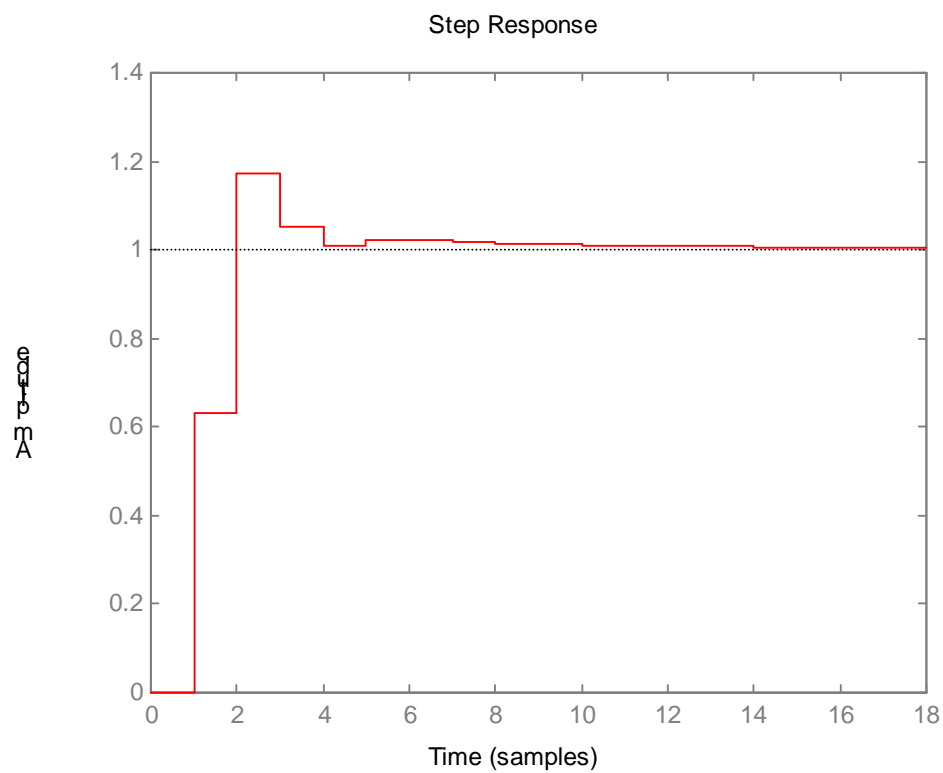


Fig. 12 – Resposta ao degrau para o sistema com compensador (5.39.)

5.4 Projecto baseado na resposta em frequência

Como sabemos, para sistemas contínuos, são muito utilizadas técnicas de projecto com base na frequência de resposta, pelas seguintes razões:

1. As curvas de ganho e de fase podem ser esboçadas à mão;
2. Existe o critério de estabilidade de Nyquist, e podemos determinar margens de ganho e margens de fase, que nos dão uma indicação da resposta do sistema;
3. As constantes de erro do sistema, k_p ou k_v podem ser obtidas directamente da assíntota de baixa frequência da curva de ganho;
4. As correcções às curvas devidas à introdução de um compensador podem ser facilmente computadas, utilizando apenas uma das curvas;
5. O efeito de um pólo, zero, ou variações de ganho de um compensador na velocidade da resposta podem ser facilmente determinadas usando apenas a curva do ganho.

Relembremo-nos que o cálculo da frequência de resposta (ganho e fase) é obtida, para sistemas discretos, calculando o valor da f.t. para valores de z ao longo do círculo unitário:

$$(5.40.) \quad \begin{aligned} \text{Amplitude} &= |H(z)|_{z=e^{j\omega T}} \\ \text{Fase} &= \angle H(z)_{z=e^{j\omega T}} \end{aligned}$$

Através destas relações, vemos que as regras utilizadas para o desenho manual dos diagramas de Bode, para sistemas contínuos, são inúteis para sistemas discretos. Igualmente, a relação existente entre os dois diagramas (amplitude e fase) desaparece para sistemas discretos, e as vantagens 1, 4 e 5 atrás apontadas, são menos evidentes para sistemas discretos. Com algum cuidado de interpretação, os pontos 2 e 3 permanecem basicamente inalterados.

Por causa destas desvantagens para os sistemas discretos quando se utiliza a transformada de z , uma alternativa – a transformada de w – é vulgarmente utilizada para projecto de sistemas discretos utilizando técnicas de frequência de resposta. A utilização desta transformada será discutida na secção 5.4.2.

5.4.1 Utilizando a transformada de z

Vamos utilizar como exemplo o sistema:

$$(5.41.) G(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

Discretizando este sistema com um equivalente de zero-order-hold, para três diferentes frequências de amostragem, obtemos:

$$G(z) = 0.0187 \frac{z + 0.94}{(z - 1)(z - 0.819)} \leftarrow T = 0.2$$

$$(5.42.) G(z) = 0.368 \frac{z + 0.72}{(z - 1)(z - 0.368)} \leftarrow T = 1$$

$$G(z) = 1.135 \frac{z + 0.523}{(z - 1)(z - 0.135)} \leftarrow T = 2$$

O diagrama de bode para estes 3 sistemas, bem como para o sistema contínuo, está representado na fig. 13.

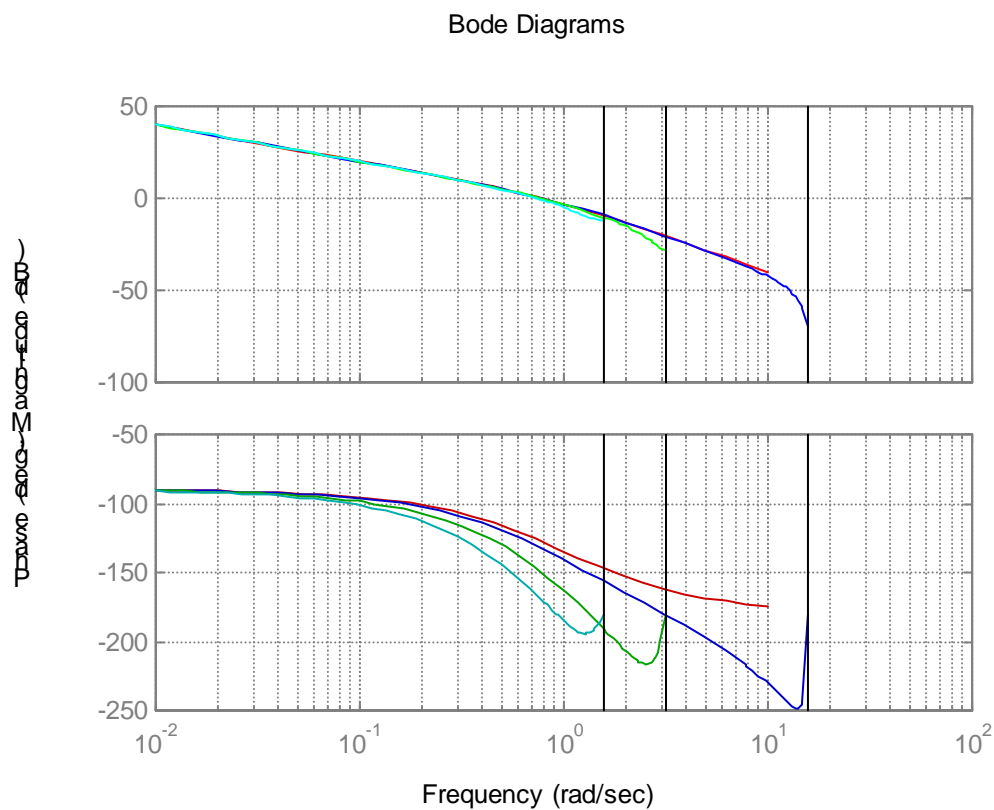


Fig. 13 – Diagramas de bode para o sistema contínuo (5.41.) e sistemas discretos (5.42.)

Conforme se pode observar da fig. 13, em termos da curva de ganhos a semelhança entre o sistema contínuo e os discretos é maior do que em termos da curva da fase. Como era de esperar, as semelhanças entre o sistema contínuo e o discreto aumentam

à medida que aumenta a frequência de amostragem. Com efeito, para frequências correspondentemente $\frac{1}{4}$ da frequência de amostragem, a diferença (em termos de fase) entre o sistema contínuo e o discreto começa a ser demasiada.

Já sabemos de capítulos anteriores que o efeito principal de um amostrador de topo plano é atrasar o sinal de aproximadamente $\frac{\omega T}{2}$ rad. Se entrarmos em linha de conta com este desfasamento adicional, pelo menos até frequências de $\frac{1}{4}$ da frequência de amostragem obteremos bons resultados no cálculo da fase para sistemas amostrados.

5.4.1.1 Critério de estabilidade de Nyquist

Para o caso discreto, o princípio subjacente ao critério de Nyquist é igual ao caso contínuo. A única diferença reside na forma do contorno que envolve a região de instabilidade. No caso discreto, como sabemos é o espaço exterior ao círculo unitário.

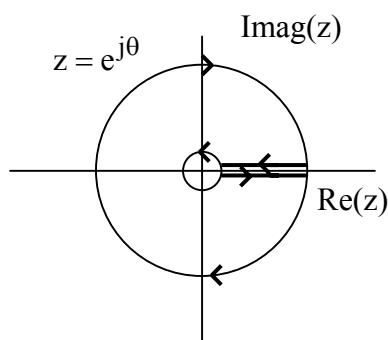


Fig. 14 – Contorno usado para cálculo do diagrama de Nyquist para sistemas discretos

O critério de estabilidade de Nyquist para sistemas discretos, no plano z , pode ser formulado como:

$$(5.43.) Z = N + P,$$

onde:

Z Número de raízes instáveis;

N Número de vezes que o ponto -1 é rodeado (no sentido dos ponteiros do relógio) pelo mapeamento de $G(z)H(z)$ (ou $GH(z)$) do contorno da fig. 14

P Número de pólos instáveis de $G(z)H(z)$ (ou $GH(z)$)

Consideremos o caso do sistema em malha aberta:

$$(5.44.) G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

com controlo proporcional a uma frequência de amostragem de $\frac{1}{2}$ Hz.

O sistema discreto é:

$$(5.45.) G(z) = \frac{1.13z + 0.59}{z^2 - 1.13z + 0.13} = \frac{1.13(z + 0.52)}{(z - 1)(z - 0.13)}$$

A fig. seguinte mostra o diagrama de Nyquist para uma gama de frequências $\omega \in [0.5, \pi/T]$ rad/s.

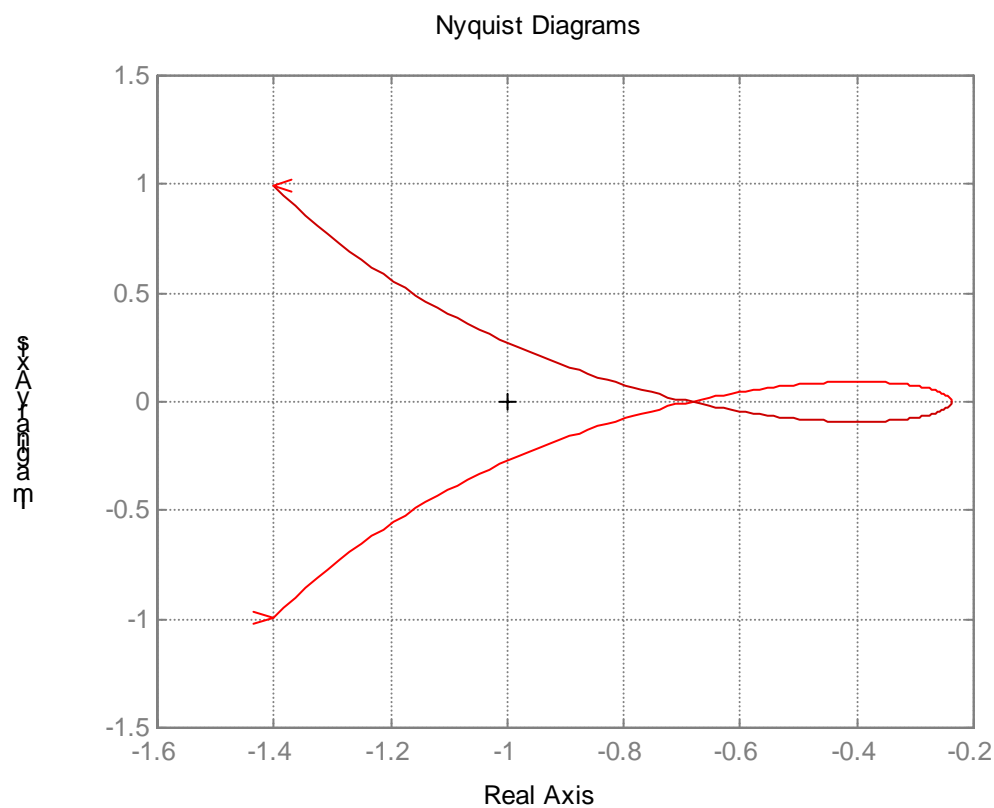


Fig. 15 – Diagrama de Nyquist para a f.t. (5.45)

Para todo o contorno de Nyquist, poderemos observar as figs. 16 e 17.

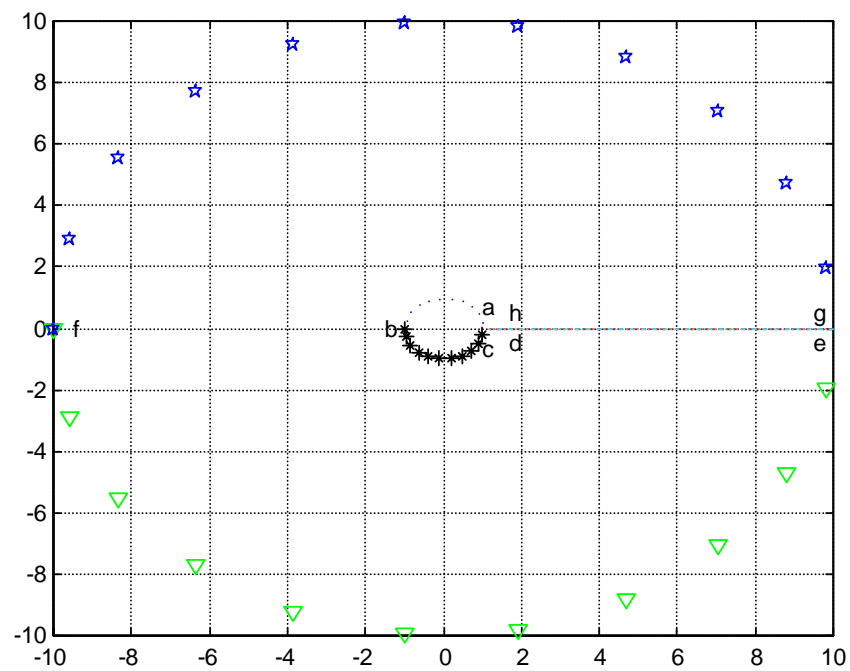


Fig. 16 – Contorno de Nyquist usado para obter o digrama de Nyquist da fig. 17

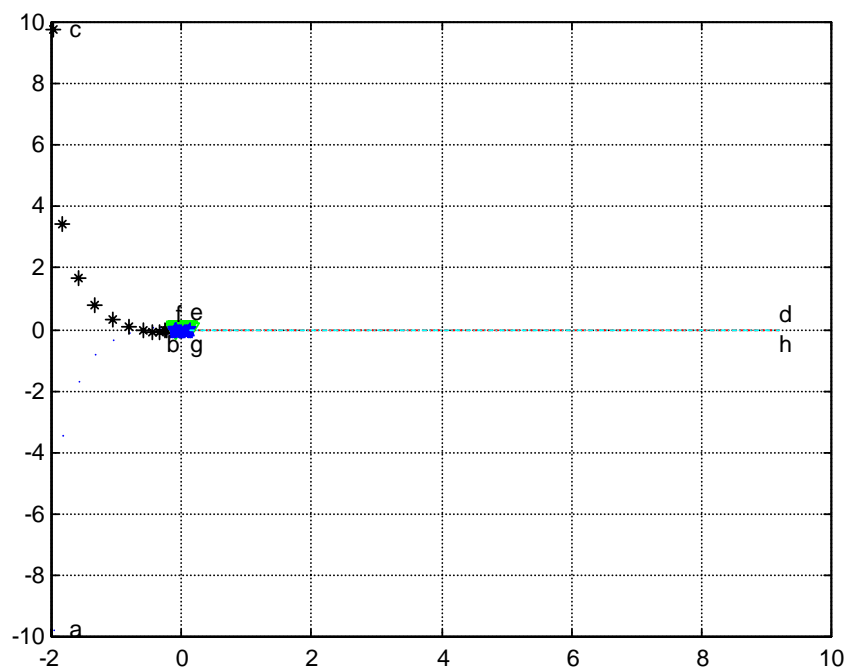


Fig. 17 – Diagrama de Nyquist para a f.t. (5.45)

Note que para o cálculo da transformação entre os pontos $h \rightarrow a$ (englobando a singularidade em $z=1$) é conveniente executarmos a transformação $z_1 = z + 1$. Se assim o fizermos, ficamos com:

$$(5.46.) G(z_1) = \frac{1.13(z_1 - 0.48)}{z_1(z_1 + 0.87)}$$

Fazendo agora a substituição:

$$(5.47.) z_1 = \varepsilon e^{j\theta}$$

temos:

$$(5.48.) G(\varepsilon, \theta) = \frac{1.13(\varepsilon e^{j\theta} - 0.48)}{\varepsilon e^{j\theta}(\varepsilon e^{j\theta} + 0.87)}.$$

Tirando agora o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, fica-se com:

$$(5.49.) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(\varepsilon, \theta) = \infty e^{-j\theta}$$

Como quando z varia de $h \rightarrow a$, θ varia de $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, então $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(\varepsilon, \theta)$ varia de $0 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.

Relativamente ao semicírculo de raio infinito $f \rightarrow g$, faremos a substituição $z = Re^{j\theta}$. Ficaremos com:

$$(5.50.) G(R, \theta) = \frac{1.13(Re^{j\theta} + 0.52)}{(Re^{j\theta} - 1)(Re^{j\theta} - 0.13)}.$$

Tomando o limite quando $R \rightarrow \infty$, fica-se com:

$$(5.51.) \lim_{R \rightarrow \infty} G(R, \theta) = 0 e^{-j\theta}$$

Como quando z varia de $f \rightarrow g$, θ varia de $\pi \rightarrow 0$, então $\lim_{R \rightarrow \infty} G(\varepsilon, \theta)$ varia de $-\pi \rightarrow 0$.

Relativamente ao segmento de recta $g \rightarrow h$, $z = Re^{j0}$, onde R varia de $\infty \rightarrow 1$. Então $G(R)$ varia de $0 \rightarrow \infty$, sem variação de θ .

Conforme podemos observar das figuras, o ponto $-1+j0$ nunca é englobado pelo diagrama, e portanto o sistema é sempre estável.

5.4.1.2 Ganhos na baixa frequência e coeficientes de erro estático

Sabemos que para sistemas contínuos podemos determinar os coeficientes de erro através do diagrama de Bode. Assim:

- a) O coeficiente de erro de posição, k_p , é igual ao ganho quando a assíntota de baixa-frequência tem inclinação nula;
- b) O coeficiente de erro de velocidade, k_v , é determinado através do valor para $w=1$ na assíntota de baixas frequências, caso não existam singularidades para $w<1$.

Para sistemas discretos, estas relações são também válidas.

5.4.1.3 Projecto de compensadores

Sabemos que para sistemas contínuos, de fase mínima, a curva de fase se pode tirar da curva de magnitude. Tal não acontece para sistemas discretos, dado estarmos a utilizar pontos do plano z ao longo do círculo unitário.

A aproximação que podemos usar é a de que a frequência de canto é vista em termos da posição angular, wT , em radianos, e coincide com a distância da singularidade em relação ao ponto $z=1$. Isto é, um pólo em $z=0.9$ provocará uma mudança de declive para $wT=1-0.9=0.1$ rads. Esta regra é válida para valores de $wT \leq 0.1$ rads, i.e.,

quando $w_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\pi * 10w = 62.8w$, e fornece resultados aproximados para

frequências de amostragem 8 vezes superiores à frequência em questão.

Vamos outra vez utilizar o exemplo de posicionamento da antena que introduzimos na secção 5.3.

O sistema a controlar, tem uma função de transferência de:

$$(5.52.) G(z) = 0.0484 \frac{z + 0.9672}{(z-1)(z-0.9048)}$$

amostrado a 1 seg.

Na figura seguinte está ilustrado o diagrama de Bode do sistema não compensado, bem como utilizando 3 possíveis compensadores.

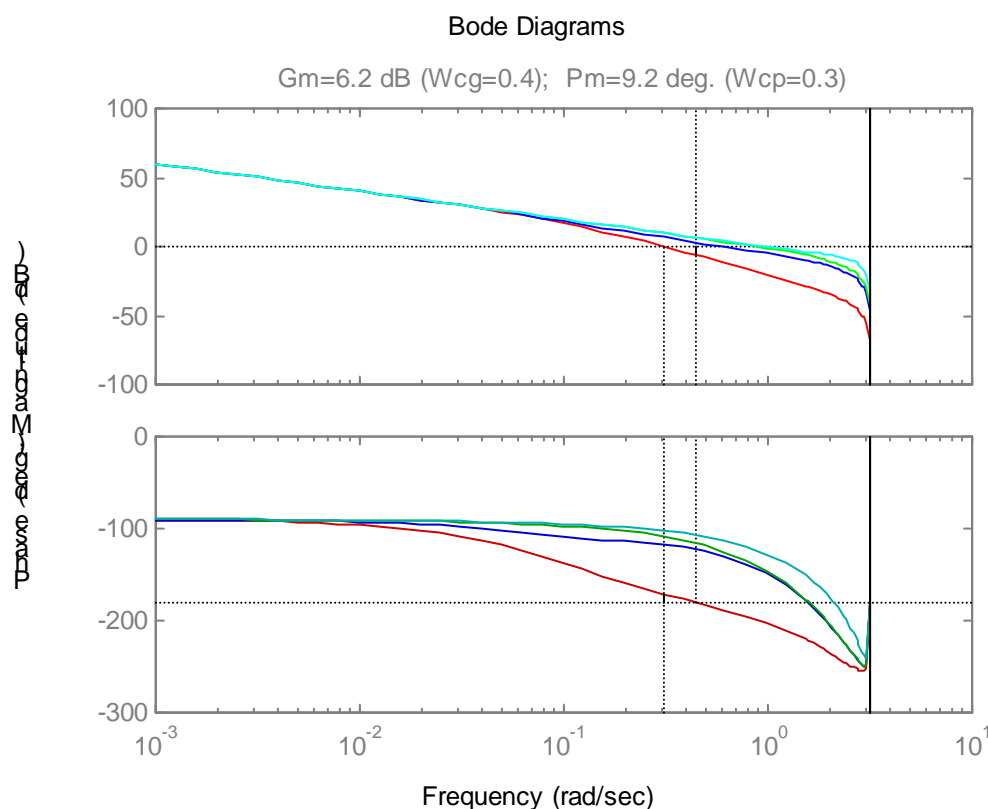


Fig. 18 – Frequência de resposta do sistema não compensado, bem como com 3 diferentes compensadores

Vemos assim que o sistema tem uma margem de fase de 9° para uma frequência de 0.3 rad/s. É sabido que, para sistemas de 2ª ordem, $\zeta \approx PM/100$, e portanto a relação de amortecimento é de cerca de 0.1, enquanto que o pretendido era de 0.5. Por outro lado a frequência natural pretendida era de cerca de 0.92 ($t_s \approx \frac{4.6}{\zeta \omega_n} \leq 10 \rightarrow \omega_n \approx 0.92$),

enquanto que a frequência de margem de fase (aproximadamente igual à frequência natural) obtida é de 0.3 o que implica que a resposta será demasiado lenta.

Pretendemos portanto desenhar um compensador que gere uma margem de fase de cerca de 50° à frequência de 0.9 rad/s.

Note que o k_v de $G(z)$ é de 1, e portanto para termos um k_v do sistema total de 1, só iremos considerar compensadores com k_v de 1.

No 1º caso escolhe-se um compensador avanço com uma frequência de canto de 0.15 rad/seg (note que $T=1$). Este compensador tem a f.t.

(5.53.) $G_{c1}(z) = 6.67 \frac{z - 0.85}{z}$ e está representado a azul.

Este 1º compensador dá-nos uma margem de fase de 50°, com $w_{cp}=0.6$ rad/s. A margem de fase foi conseguida, mas a uma frequência baixa de mais.

No 2º caso baixa-se o zero para 0.9, para conseguirmos uma frequência de margem de fase mais alta (a frequência de canto do compensador baixa para 0.1), ficando assim com:

(5.54.) $G_{c2}(z) = 10 \frac{z - 0.9}{z}$ (a verde)

Este compensador já tem uma frequência de margem de fase de 0.9, mas a margem de fase obtida é de apenas 39°. Se movermos o pólo para $z=0.5$, não há grande efeito em w_{cp} , mas a margem de fase atinge agora 50°, ficando assim as nossas especificações de frequência satisfeitas (a verde azulado). Temos pois as especificações em termos de resposta na frequência satisfeitas).

Vendo agora a resposta ao degrau obtida com este compensador, vemos que as especificações em termo de resposta não foram cumpridas. A explicação é que estamos em presença de um sistema de 3ª ordem, e as aproximações que utilizámos são válidas para sistemas de 2ª ordem apenas.

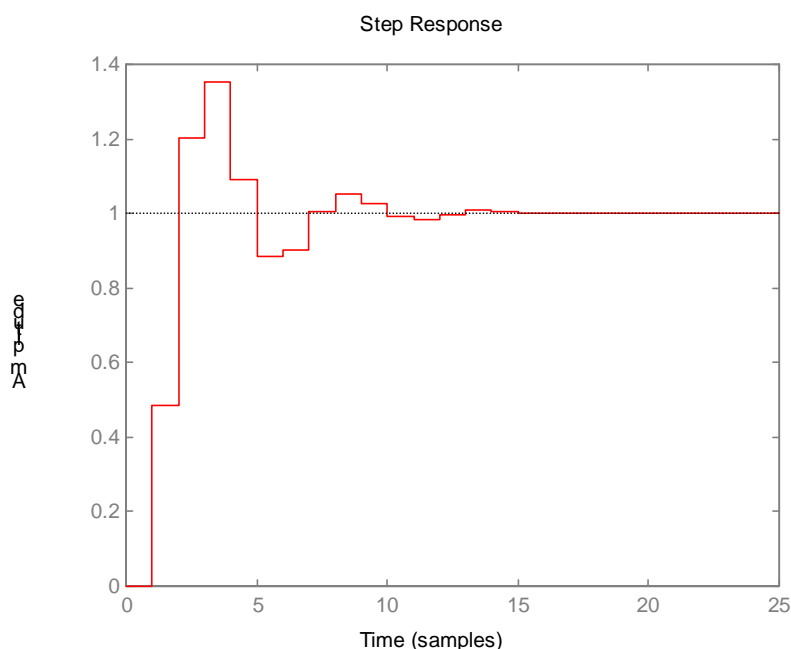


Fig. 19 – Resposta ao degrau do sistema com o compensador (5.54.)

Isto quer dizer que precisamos de uma margem de fase superior a 50° . Após algumas tentativas, o compensador:

$$(5.55.) G_{c4} = 12.8 \frac{z - 0.883}{z + 0.5}$$

cumpra as nossas especificações, como vemos na resposta em frequência e na resposta ao degrau.

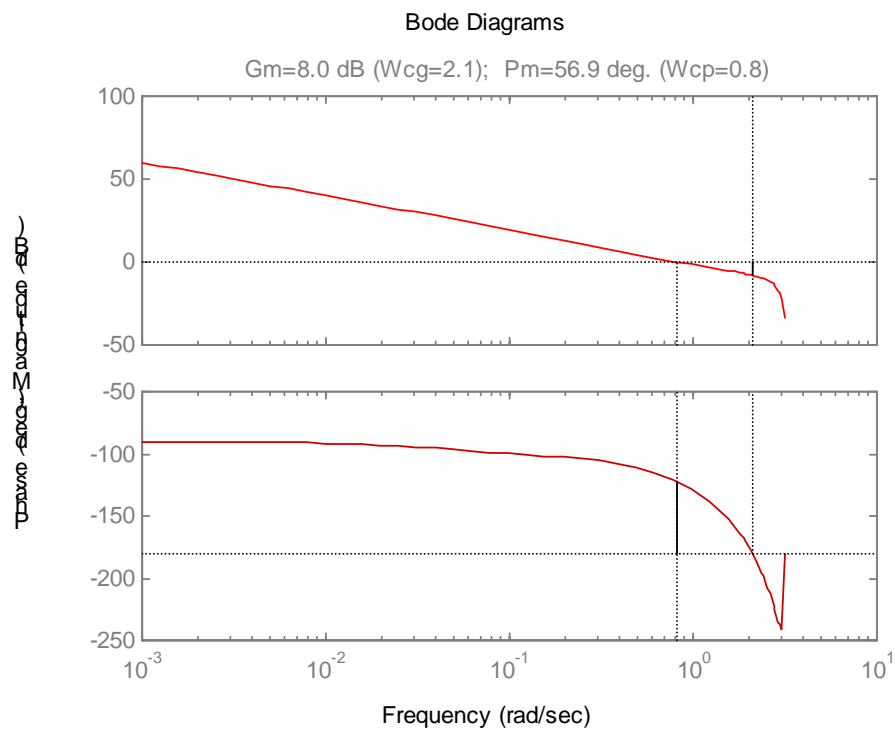


Fig. 20 – Frequência de resposta com o compensador (5.55.)

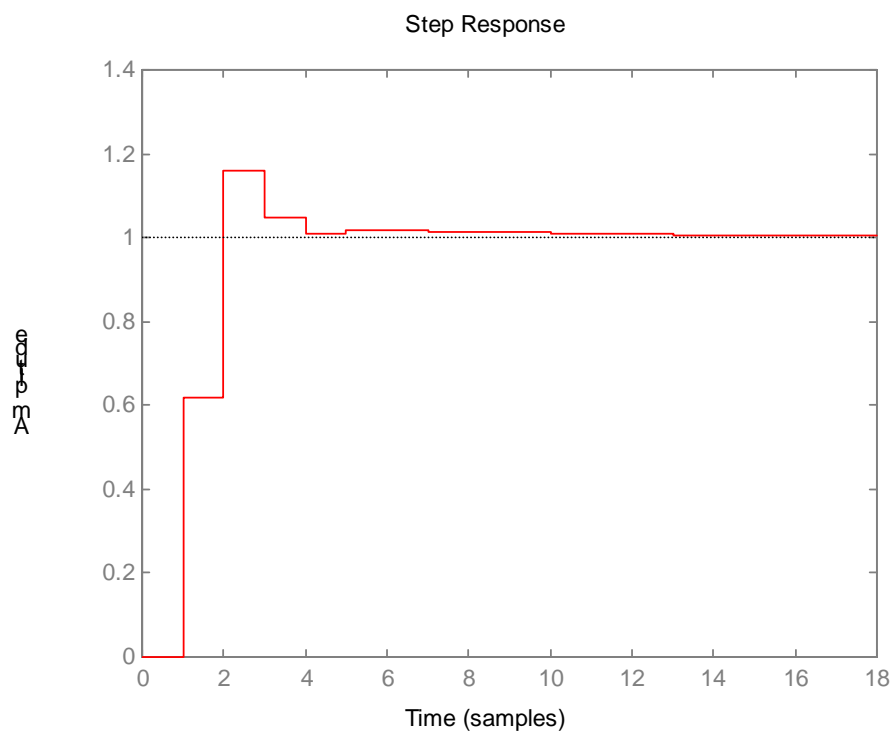


Fig. 21 – Resposta ao degrau com o compensador (5.55.)

5.4.2 Utilizando a transformada de w

A transformada w foi introduzida para permitir uma análise na frequência de sistemas discretos semelhante à de sistemas contínuos. Transforma-se uma função de transferência $G(z)$ em $G(w)$ através da transformação bilinear:

$$(5.56.) w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

e fazemos a análise no plano w. Converte-se posteriormente de w para z utilizando a transformação inversa:

$$(5.57.) z = \frac{1 + wT/2}{1 - wT/2}$$

Note que esta transformação tem a mesma forma da de Tustin, para obtenção de um equivalente discreto de uma função contínua.

O problema principal na utilização dos métodos de frequência com a transformada de z consistia em utilizarmos os valores de z no círculo unitário. Para este caso isto não acontece. Repare-se que, substituindo-se $z=e^{sT}$ em (5.56.), temos:

$$(5.58.) w = \frac{2}{T} \frac{e^{sT} - 1}{e^{sT} + 1} = \frac{2}{T} \tanh \frac{sT}{2}.$$

No eixo imaginário, $s=j\omega$, e

$$(5.59.) w \equiv jv = j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

e portanto a "frequência" do plano w, v, mantém-se real e varia de 0 a ∞ .

O processo de projecto é então:

1. Obtém-se $G(z)$ de $G(s)$;
2. Transforma-se $G(z)$ em $G(w)$ utilizando (5.56.);
3. Realiza-se o projecto do controlador no plano w, do mesmo modo que se faria se o sistema fosse contínuo. O critério de estabilidade de Nyquist, os conceitos de margens de ganho e de fase, etc., são todos os mesmos;
4. Após esta fase concluída, volta-se a $G(z)$ utilizando (5.57.).

2. Análise de sistemas discretos dinâmicos

2.1 Seja a equação diferença:

$$u_{k+2} = 0.25u_k$$

- Admita uma solução do tipo $u_k = Az^k$ e determine a equação característica em z .
- Determine as raízes características z_1 e z_2 e verifique se o sistema é estável.
- Admitindo uma solução geral na forma $u_k = A_1 z_1^k + A_2 z_2^k$, determine A_1 e A_2 que satisfaçam as condições iniciais $u_0=0$ e $u_1 = 1$.
- Repita as alíneas a), b) e c) para a equação diferença $u_{k+2} = -0.25u_k$.
- Repita as alíneas a), b) e c) para a equação diferença $u_{k+2} = u_{k+1} - 0.5u_k$.

2.2 Implemente a função de transferência:

$$H(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{z^3 + 0.5z^2 - 0.25z + 0.25}{z^4 - 2.6z^3 + 2.4z^2 - 0.8z}$$

- Na forma canónica controladora
- Na forma canónica observadora

2.3 Dada a polinomial

$$a(z) = z^3 - 2.1z^2 + 1.6z - 0.4$$

verifique se o sistema é BIBO estável.

2.4 Para o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

- Determine as equações dinâmicas discretas, considerando um intervalo de amostragem de T segundos.
- Determine a transformada de z
- Considerando que o sistema introduz um atraso de $0 \leq \lambda \leq T$, determine a equação de estado.

2.5 Determine a equação de estado discreta para o sistema:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t - 2.5)$$

onde o tempo de amostragem é $T = 1$ seg.

2.6 Determine a transformada discreta de um sistema com função de transferência:

$$a) \quad G(s) = \frac{a}{s + a}$$

$$b) \quad G(s) = \frac{1}{s^2}$$

2.7 Calcular a transformada de z da saída do seguinte sistema:

$$x_{k+1} = 0.5x_k + u_k$$

- Quando a entrada é uma rampa e com condições iniciais $x_0 = 1$.
- Calcular a expressão da resposta no tempo.

2.8 Demonstrar as seguintes propriedades da transformada de z

- Deslocamento temporal $Z\{f(k+h)\} = z^h F(z)$
- Linearidade no plano z.

2.9 Seja o sistema descrito pelas equações de estado:

$$\begin{bmatrix} x_{1k+1} \\ x_{2k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 T) & \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 T) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 T) & \cos(\omega_0 T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix}$$

$$y_k = x_{1k}$$

- Aplicar o operador q e resolver para y_k .
- Converter para o operador δ .

2.10 Converter os sistemas dados pelas seguintes equações diferenciais para o operador q e para o operador δ , sabendo que o período de amostragem $T = 0.02$ seg.

$$a) \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = u$$

$$b) \frac{d^2 y}{dt^2} + 10 \frac{dy}{dt} - y = u$$

2.11 Para a seguinte equação diferença:

$$y[k] - y[k-1] + y[k-2] = 2u[k-1] - 2u[k-2]$$

$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

$$y[k] = 0, \quad k < 0$$

a) Determine a função de transferência $\frac{Y(z)}{U(z)}$

b) Determine uma expressão fechada para $y[k]$

2.12 Para o sistema descrito pelas equações de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-2,5)$$

$$y = [1 \quad 1] \mathbf{x}$$

- Determine as equações de estado discretas, utilizando um intervalo de amostragem de 1 seg.
- Utilizando o resultado da alínea anterior, calcule a função de transferência discreta.

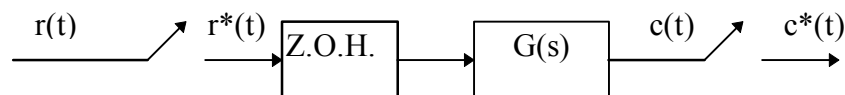
2.13 Para o sistema descrito pelas equações de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-2,5)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- Determine as equações de estado discretas, utilizando um intervalo de amostragem de 1 seg.
- Utilizando o resultado da alínea anterior, calcule a função de transferência discreta.

2.14 Para o sistema da fig. seguinte:



- Obtenha a função de transferência discreta $G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$, onde $G(s) = \frac{1}{2s(s+2)}$, e onde o bloco Z.O.H. representa um amostrador de topo plano (zero-order-hold). Considere uma frequência de amostragem de 1 Hz.
- Assuma agora que $G(s) = e^{-2s}G(s)$, isto é, introduza um tempo de atraso no processo. Calcule para este caso $G(z)$.

2.15 Assuma que um sistema tem como função de transferência $G(s) = \frac{e^{-0.4T}}{(s+1)}$, é amostrado com um período de amostragem T , e que é aplicado um degrau à entrada. Determine a transformada de Z da saída.

2.16 Considere a função de transferência $G(z) = \frac{z+3}{(z+1)(z+2)}$. Determine:

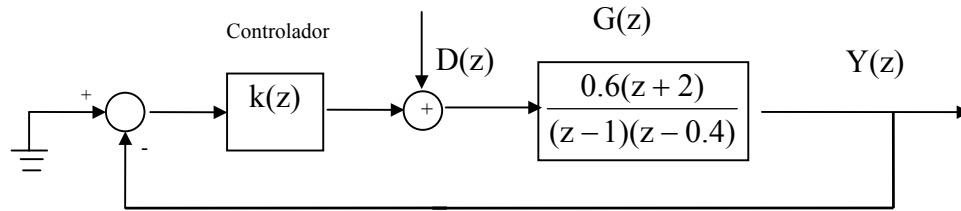
- Uma representação em variáveis de estado para $G(z)$.
- Assumindo que o sistema está inicialmente em repouso ($\mathbf{x}(0)=0$) e que é aplicado um degrau unitário à entrada, os valores do estado e da saída para as 4 primeiras amostras ($\mathbf{x}(k), y(k), k=1 \dots 4$).

2.17 Considere o sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t)$. O sistema é amostrado $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

com $T=0.1$ seg. Determine, analiticamente, as equações dinâmicas discretas.

3. Sistemas amostrados

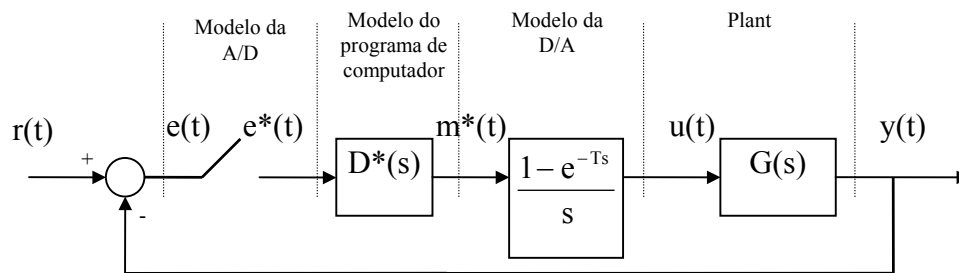
3.1 No regulador discreto da figura as perturbações são dadas por $d(k) = \cos(k)$.



Seja $k(z) = 0.3$, calcular a saída em estado estacionário para as frequências:

$$\omega = 0; \omega = \frac{\pi}{4T} \text{ e } \omega = \frac{\pi}{T} \text{ rad/s}$$

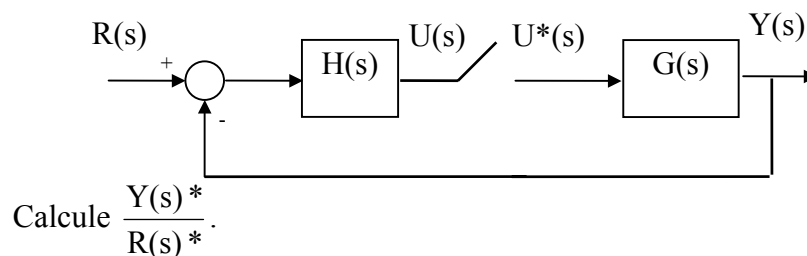
3.2 Seja o seguinte diagrama de blocos:



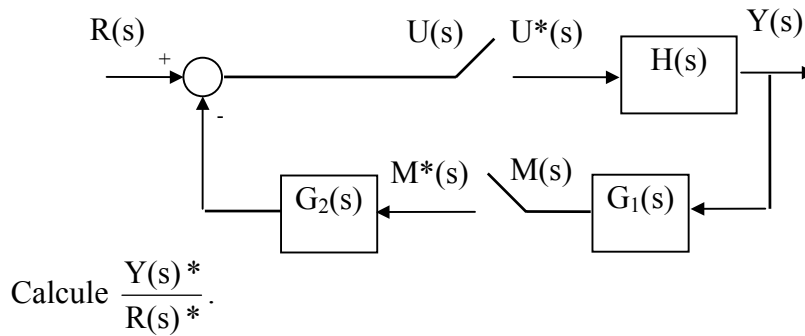
a) Relacionar a entrada $R^*(s)$ com a saída $Y^*(s)$

b) Supondo $G(s) = \frac{a}{s+a}$ e que o programa é $u(kT) = u(kT-T) + k_0 e(kT)$, onde T é tal que $e^{-aT} = 0.5$, obter H^* .

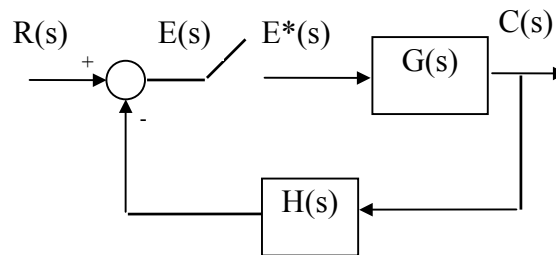
3.3 Seja o seguinte diagrama de blocos:



3.4 Seja o seguinte diagrama de blocos:

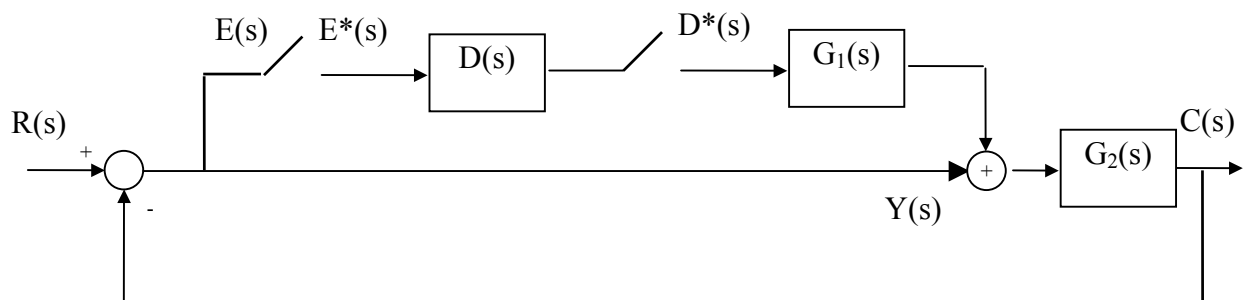


3.5 Seja o seguinte diagrama de blocos:



Construir o grafo de fluxo de sinal amostrado, o grafo de fluxo de sinal equivalente e retire destes a função de transferência $\frac{C^*(s)}{R^*(s)}$. Obter as expressões de C^* e E utilizando a formula de transmitancia de Mason..

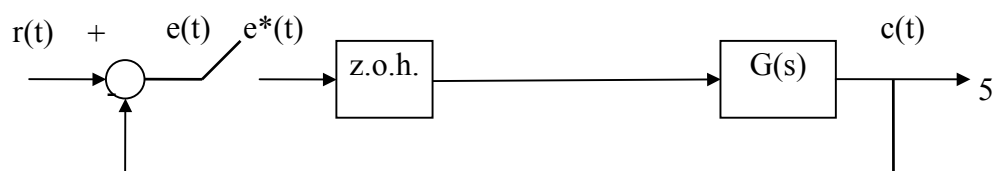
3.6 Seja o seguinte diagrama de blocos:



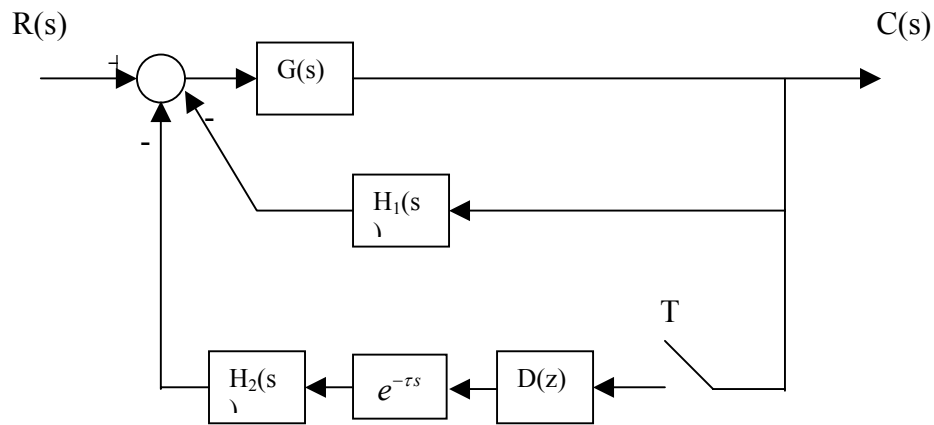
Utilizando a formula de transmitancia de Mason determine as expressões de C^* e C .

3.7 O diagrama de blocos de um sistema de controlo discreto está representado na figura seguinte. Considerando o intervalo de amostragem $T=0.2$ seg., o sistema $G(s) = \frac{1}{(s+0.2)}$ e a entrada um degrau unitário, determine:

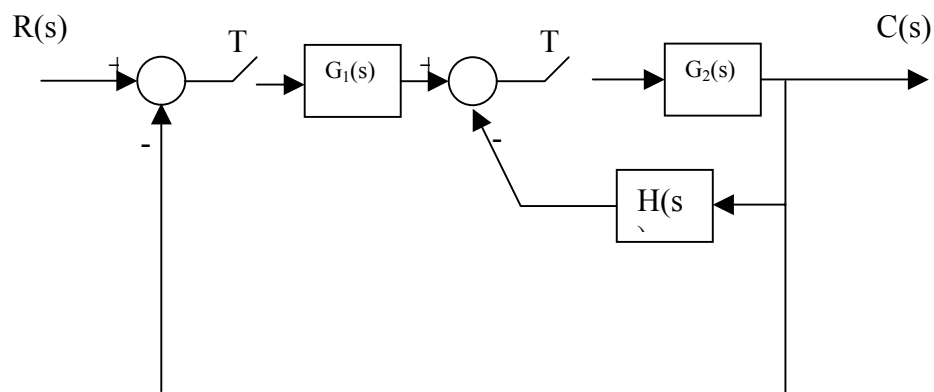
- A transformada de z da saída, $C(z)$
- A resposta nos instantes de amostragem, $c(kT)$
- O valor final da saída



- 3.8 Mostre como poderia construir um sinal com “oscilações escondidas”, mesmo um sinal que cresça de modo instável, mas que as suas amostras sejam nulas. Em termos do plano s , onde deveriam estar localizados os pólos das transformadas desses sinais?
- 3.9 A função de transferência de um filtro digital é $D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{(z-0.99)(z-0.7)(z-0.5)}{(z-1)(z-0.6)(z-0.4)}$. O filtro deverá ser realizado como a série de 3 módulos.
- Desenhe um diagrama de simulação, usando apenas três atrasos.
 - Admita que $x_1[k]$, $x_2[k]$ e $x_3[k]$ são as variáveis de estado, correspondentes aos valores armazenados em cada um dos atrasos. Escreva as equações de diferença deste filtro em termos das variáveis de estado e da entrada.
 - Utilizando a fórmula de Mason, verifique que a estrutura implementada em a) tem a função de transferência original.
- 3.10 Considere o processo com função de transferência $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$. Assumindo um *sample-and-hold* à entrada, determine $G^*(s)$.
- 3.11 Considere o sistema da figura seguinte. Utilizando a fórmula de Mason, determine $C(s)$ e $C^*(s)$.



- 3.12 Considere o seguinte diagrama de blocos, onde $G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, $G_2(s) = \frac{2}{s+2}$, $H(s) = \frac{10}{s+10}$ e $T = 0.1s$. Considere que cada amostrador pode ser considerado um amostrador ideal em série com um circuito de ZOH.



- Determine o grafo de fluxo de sinal composto do sistema
- Utilizando a regra de Mason, determine a função de transferência $\frac{C^*(s)}{R^*(s)}$ e $C(s)$
- Determine explicitamente $\frac{C(z)}{R(z)}$

4. Equivalentes discretos de funções de transferência contínuas

- 4.1 Obter o filtro digital equivalente $G_D(z)$ para o filtro analógico dado pela equação diferencial:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = \dot{x}$$

pelo método de:

- a) Forward approximation
- b) Backward approximation

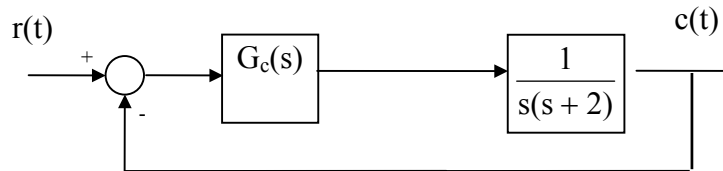
4.2 Desenhar um filtro digital passa-baixo que tem características de resposta na frequência similares às do seguinte filtro analógico:

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

com $a = 0$ e $\omega_A = 10$ rad/s, na região de frequência $0 \leq \omega \leq 10$ rad/s. Considere o período de amostragem $T = 0.2$ seg.

- a) Pela transformação bilinear, trapezoidal ou de Tuilsen.
- b) Pela transformação bilinear com pre-warping.

4.3 Considere o sistema de controlo contínuo:



onde a relação de amortecimento do par de pólos dominantes é $\xi = 0.5$, o tempo de estabelecimento é $T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 2$ seg, a frequência natural não amortecida é $\omega_n = 4$ rad/s e resposta do sistema ao degrau tem uma sobrelevação de 16.3%.

- a) Desenhar um sistema de controlo discreto equivalente para baixas frequências.
- b) Comparar as constantes de erro estático para o sistema analógico e para o sistema digital.

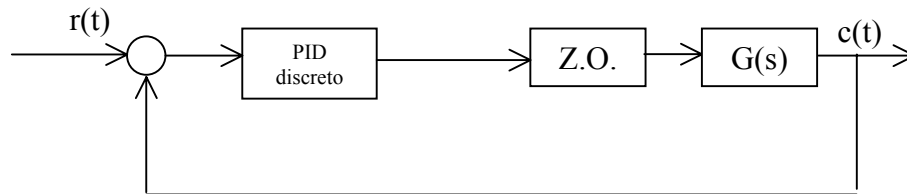
4.4 Para o sistema com função de transferência $G(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+5s)}$, assumindo um tempo de amostragem de 1 segundo:

- a) Determine o seu equivalente discreto, assumindo um *zero-order-hold* à entrada.
- b) Determine o seu equivalente discreto, através de mapeamento de pólos e zeros.
- c) Determine o seu equivalente discreto, através da transformação bilinear, com *prewarping*, para a frequência de 1 rad/s.
- d) Utilizando um método à sua escolha (indique-o), determine as equações dinâmicas discretas do sistema

4.5 Considere o controlador PID na sua forma de posição:

$$m(t) = k \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

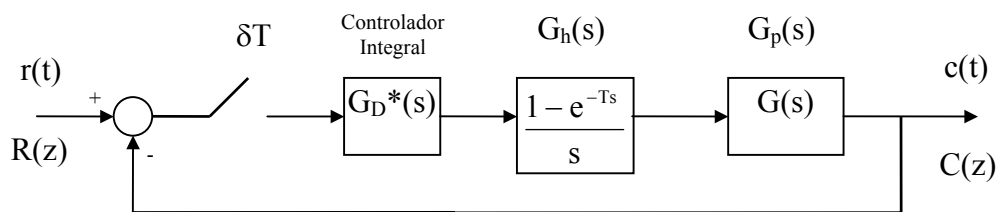
- a) Determine a função de transferência discreta do controlador, usando para o termo integral a regra trapezoidal e para o termo derivativo a forma de Euler (forward rule).
- b) Assuma agora que o PID discreto é usado na seguinte malha de controlo, onde $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$. Determine a função de transferência discreta $\frac{C(z)}{R(z)}$.



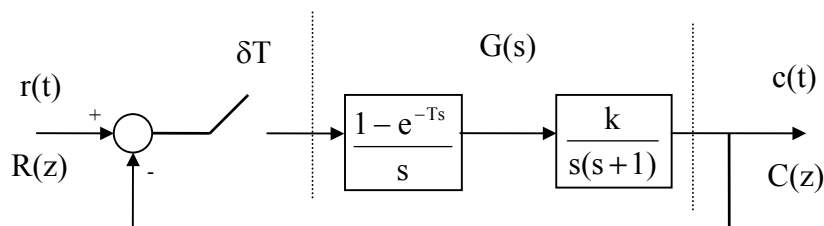
5. Projecto de sistemas de controlo digital usando o método das transformadas

5.1 Seja o sistema

$G(s) = \frac{1}{s+1}$. Desenhar o lugar das raízes no plano z para os períodos de amostragem $T = 0.5$ seg; $T = 1$ seg e $T = 2$ seg. Determinar o valor crítico de k_c para cada caso.

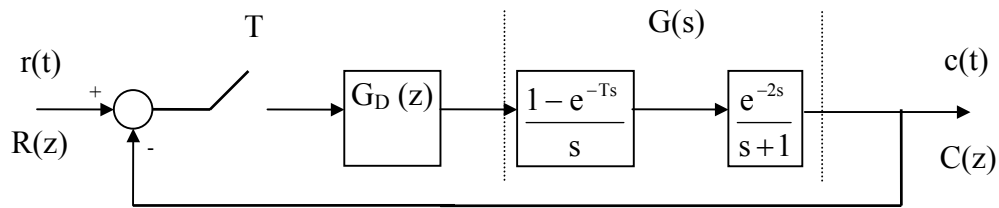


5.2 Desenhar o lugar das raízes no plano z para o sistema:



Onde o período de amostragem é $T = 1$ seg. Calcular o valor do ganho no limiar da estabilidade.

5.3 Considere o seguinte sistema de controlo digital:

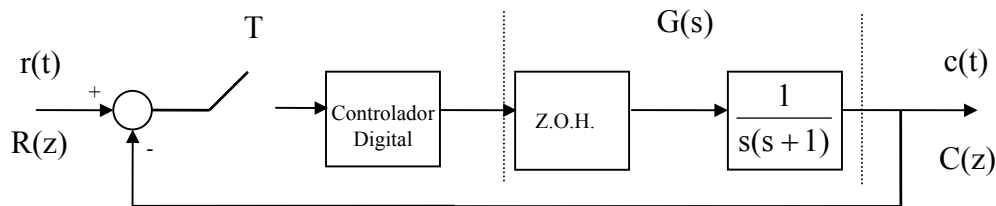


Onde a plant é de primeira ordem e tem um tempo de atraso de 2 segundos. O período de amostragem é $T = 1$ segundo.

Desenhar um controlador P. I. Digital tal que os pólos dominantes em malha fechada tenham uma relação de amortecimento $\xi = 0.5$ e o numero de amostragens por ciclo de oscilação sinusoidal amortecida seja 10.

Obter a resposta do sistema a uma entrada em degrau unitário, a constante de erro de velocidade estática k_v e calcular o erro em regime estacionário na resposta a uma entrada em rampa unitária.

5.4 Considere o seguinte sistema de controlo digital:



Onde o período de amostragem é $T = 1$ segundo.

Deseja-se desenhar um controlador P. I. Digital tal que os pólos dominantes em malha fechada tenham uma relação de amortecimento $\xi = 0.5$ e o numero de amostragens por ciclo de oscilação sinusoidal amortecida seja 8.

Usando o método do lugar das raízes no plano z , determinar a função de transferência do controlador digital, admitindo um controlador do tipo

$$G_D(z) = \frac{z + \alpha}{z + \beta}.$$

Obter a resposta do sistema desenhado a uma entrada em degrau unitário e a constante de erro de velocidade estática k_v .

5.5 Considere o problema de posicionamento da antena. O processo é descrito por

$$G(z) = 0.048 \frac{z + 0.97}{(z - 1)(z - 0.9)}, \text{ a um período de amostragem de 1 seg. Pretende-se}$$

determinar um controlador digital que faça com que a polinomial característica em malha fechada seja de $z^2 - 0.79z + 0.37$, e que tenha uma constante de erro de velocidade de 1.

a) Projecte o controlador usando o método de Ragazzinni

- b) Inspeccione o sinal de controlo. Como pode evitar o problema inerente a este sinal?

5.6 Considere o processo com função de transferência $G(z) = \frac{0.005(z+0.97)}{(z-1)(z-0.9)}$, com $T=0.1s$, num sistema em malha fechada com realimentação unitária negativa.

- a) Determine se o sistema em malha fechada é estável, utilizando a transformada de w .
b) Determine as margens de ganho e de fase para esse sistema, e as respectivas frequências.

5.7 Considere o mesmo sistema do problema anterior. Admita que as especificações de projecto para esse sistema impliquem que se pretende uma resposta ao degrau com amortecimento crítico, e uma constante de tempo de $0.59s$.

- a) Prove que tal não é possível apenas com variação de ganho.
b) Utilize um compensador atraso para conseguir estas especificações

5.8 Considere o sistema de posicionamento da antena utilizado na disciplina. Sabe-se que a sua transformada de z , com $T=1$ seg, é $G(z) = 0.05 \frac{z+0.97}{(z-1)(z-0.9)}$. Pretende-se determinar um compensador do tipo

$$k \frac{z - z_c}{z - p_c}, \text{ utilizando a transformada de } w, \text{ de tal modo que } k_v = 1, \text{ a margem de}$$

fase seja aproximadamente de 50° em $v=1$.

Nota: use a tabela de transformadas fornecida.

5.9 Considere o problema de controlo do satélite utilizado durante a disciplina. Utilizando o método de Ragazzinni, foi desenhado um controlador que satisfaz as seguintes especificações:

- Assumindo um período de amostragem de $1s$, os pólos do sistema em malha fechada satisfazem a polinomial característica $z^2 - 0.79z + 0.37 = 0$;
- Tem uma constante de erro de velocidade $k_v = 1$.

A função de transferência do processo é $G(z) = 0.05 \frac{z+0.97}{(z-1)(z-0.9)}$, a função de

transferência do sistema em malha fechada é $H(z) = \frac{0.63z - 0.05}{z^2 - 0.79z + 0.37}$ e o

compensador projectado foi: $D(z) = 13 \frac{(z-0.9)(z-0.08)}{(z+0.97)(z-0.42)}$.

Após simulação numérica do sistema, verificou-se que a resposta do sistema nos instantes de amostragem comportava-se de acordo com $H(z)$, mas o sinal de controlo oscilava significativamente entre os instantes de amostragem.

- a) Explique, justificando, as oscilações existentes no sinal de controlo;

- b) Explique, justificando, como poderia resolver este problema, por aplicação do método de Ragazzinni.

6. Projecto de Controladores usando o método de espaço de estados

- 6.1 Considere o problema de posicionamento do satélite seguido durante as aulas. Para este problema, foi determinado que

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \frac{T^2}{2}, \quad C = [1 \quad 0].$$

Considere agora que um atraso

correspondente a 1 período de amostragem deve ser inserido entre a saída do sistema e a medida dessa saída disponível para o computador. Vamos projectar um controlador (lei de controlo + observador) para esse sistema.

- Nas condições acima enunciadas, determine as novas equações dinâmicas.
- Determine o vector de ganhos \mathbf{k} para $z_{\text{des}} = 0.8 \pm j0.25$, 0 .
- Determine se o sistema é observável.
- Determine \mathbf{L}_p para $z_{\text{des}} = 0.4 \pm j0.4$, 0
- Determine \mathbf{L}_c para $z_{\text{des}} = 0.4 \pm j0.4$, 0

6.2 Considere o sistema

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 1 & 0.095 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.095 \end{bmatrix}, \quad T=0.1s.$$

$$y[k] = [1 \quad 0] x[k]$$

- Utilizando realimentação de variáveis de estado, determine o vector de ganhos que gere uma polinomial característica do sistema em malha fechada $\Delta = z^2 - 1.776z + 0.819$
- Determine um observador predictivo cuja equação característica seja $\Delta = z^2 - 1.638z + 0.671$
- Considere agora que adiciona uma referência ao sistema obtido pelas alíneas a) e b). Admitindo que pretende uma saída com erro nulo para uma entrada em degrau, desenhe a estrutura completa do seu sistema em malha fechada, determinando os valores numéricos para cada bloco.

5.5 Métodos analíticos de projecto

Este método não tem equivalência no domínio contínuo. Assume-se neste método que já se dispõe de um $G(z)$, e que pretendemos construir uma função de transferência em malha fechada, $H(z)$. O trabalho de projecto é determinar um compensador, $D(z)$, que a realize. A função de transferência em malha fechada é dada por:

$$(5.60.) H(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

O compensador $D(z)$ é dado por:

$$(5.61.) D(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{H(z)}{1 - H(z)}$$

Através da eq anterior vemos que o compensador cancela os efeitos do processo (factor $\frac{1}{G(z)}$, e que irá adicionar a necessária dinâmica para implementar $H(z)$. O

problema consiste em determinar as restrições que $H(z)$ deve satisfazer de tal modo que não seja pedido o impossível ao compensador.

Vejamos primeiro restrições de causalidade. Se $D(z)$ for causal, a sua função de transferência não pode tender para ∞ quando $z \rightarrow \infty$, isto é, $D(z)$ não pode ter um pólo em ∞ . Atentando na última eq., se $G(z)$ tiver um zero em ∞ , então $D(z)$ teria que ter um pólo em ∞ , a não ser que o zero de $G(z)$ seja cancelado por $H(z)$. Assim, para que $D(z)$ seja causal, temos que:

$$H(z) \text{ deve ter um zero em } \infty \text{ da mesma ordem que o zero de } G(z) \text{ em } \infty$$

Esta restrição tem uma interpretação elementar no domínio dos tempos. $G(z)$ tem pelo menos 1 zero em ∞ dado que a resposta pulsada do processo tem um atraso de um instante de amostragem. Se houver adicionalmente tempo de atraso, este número atrasado de instantes de amostragem aumenta. É lógico que para a função de transferência em malha fechada este atraso dever-se-á manifestar.

Consideremos agora restrições de estabilidade. A polinomial característica do sistema é:

$$(5.62.) 1 + G(z)D(z) = 0$$

Seja $G = b(z)/a(z)$ e $D(z) = c(z)/d(z)$. Vamos admitir que existe um factor comum em DG , como acontece várias vezes quando um pólo de $G(z)$ é cancelado por um zero de $D(z)$. Vamos admitir que esse factor é $z - \alpha$, um pólo de $G(z)$. Podemos assim escrever $a(z) = (z - \alpha)\tilde{a}(z)$ e, para cancelá-lo, temos $c(z) = (z - \alpha)\tilde{c}(z)$. Então, temos:

$$(5.63.) (z - \alpha)\tilde{a}(z)d(z) + b(z)(z - \alpha)\tilde{c}(z) = (z - \alpha)[\tilde{a}d + b\tilde{c}]$$

Assim, o factor comum é também um factor comum da polinomial característica. Se este factor é instável, então o sistema é instável.

Se $D(z)$ não cancelar um pólo de $G(z)$, então esse factor de $G(z)$ deve ser um zero de $1 - H(z)$. Do mesmo modo, se $D(z)$ não cancelar um zero de $G(z)$, então este factor deverá ser um zero de $H(z)$.

$1 - H(z)$ deve conter como zeros todos os pólos de $G(z)$ que estão fora do círculo unitário
 $H(z)$ deve conter como zeros todos os zeros de $G(z)$ fora do círculo unitário.

Vamos considerar finalmente restrições de erro em regime estacionário. O sinal de erro é dado por:

$$(5.64.) E(z) = R(z) - C(z) = R(z) - H(z)R(z) = R(z)(1 - H(z)).$$

Se o sistema for de tipo 1 com constante de erro de velocidade k_v , devemos ter erro em regime estacionário nulo para uma entrada em degrau e um erro de $1/k_v$ para uma entrada em rampa unitária.

Para a entrada em degrau, temos:

$$(5.65.) e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{z}{z - 1} (1 - H(z)) = \lim_{z \rightarrow 1} z(1 - H(z)) = 0$$

Então, para que o sistema tenha um erro nulo a uma entrada em degrau, o sistema em malha fechada deve respeitar:

$$(5.66.) H(1) = 1$$

Para ser satisfeita a restrição relativa ao erro a uma rampa, temos:

$$(5.67.) e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{Tz}{(z-1)^2} (1-H(z)) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Tz}{z-1} (1-H(z)) = \frac{1}{k_v}$$

Por causa da restrição (5.66), o limite é indeterminado e deve ser levantado com a regra de l'Hôpital. Assim, temos:

$$(5.68.) -T \left. \frac{dH}{dz} \right|_{z=1} = \frac{1}{k_v}$$

Exemplo:

Consideremos o mesmo exemplo de posicionamento da antena. Em termos de tempo

contínuo, $G(s) = \frac{1}{s(10s+1)}$ e $D(s) = \frac{10s+1}{s+1}$. Então a polinomial característica do

sistema contínuo em malha fechada é:

$$(5.69.) 1 + GD = \text{Num} \quad 1 + \frac{1}{s(s+1)} = s^2 + s + 1$$

Com um intervalo de amostragem de $T=1\text{sec}$, temos a equação característica em z :

$$(5.70.) z^2 - 0.78z + 0.36 = 0$$

O processo discreto tem a função de transferência:

$$G(z) = 0.048 \frac{z + 0.96}{(z-1)(z-0.9)}$$

Pretende-se então projectar um $D(z)$ de tal modo que o sistema em malha fechada tenha as raízes da polinomial característica (5.70), mais pólos adicionais em $z=0$, se necessário, e tenha $k_v=1$.

A forma da f.t. em malha fechada é então:

$$(5.71.) H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots}{1 - 0.78z^{-1} + 0.36z^{-2}}$$

Para satisfazer a restrição de causalidade, como $G(z)$ tem um zero de ordem 1 para ∞ , então

$$(5.72.) b_0 = 0.$$

Como $G(z)$ não tem singularidades fora do círculo unitário, então vamo-nos concentrar nas restrições de erro em regime estacionário.

Para uma entrada em degrau, temos que $H(1)=1$. Isto implica que:

$$(5.73.) H(1) = \frac{b_1 + \dots}{1 - 0.78 + 0.36} = 1$$

Temos então que:

$$(5.74.) b_1 + b_2 = 1 - 0.78 + 0.36 = 0.58$$

Note que só iremos precisar de 2 elementos de b pois só temos 2 equações a satisfazer.

Relativamente à entrada em degrau, dado que $T=1=k_v$, podemos utilizar a derivada relativamente a z^{-1} e:

$$(5.75.) 1 = \left. \frac{dH}{dz} \right|_{z=1} = \left. \frac{dH}{dz^{-1}} \right|_{z^{-1}=1} = \frac{0.58(b_1 + 2b_2) - 0.58(-0.78 + 0.36 * 2)}{0.58^2}$$

A última equação dá-nos que:

$$(5.76.) b_1 + 2b_2 = 0.53$$

A solução de (5.74) e (5.75) é:

$$(5.77.) b_1 = 0.63; b_2 = -0.05$$

4. Equivalentes discretos de funções de transferência contínuas

Neste capítulo assumiremos que o controlador foi projectado utilizando técnicas contínuas, e que pretendemos, mantendo as suas características, implementá-lo num computador. Este tipo de projecto, onde o controlador é desenhado em contínuo, e posteriormente calculado o seu equivalente discreto, é chamado de *emulação*.

O problema essencial neste capítulo é, dado uma função de transferência $H(s)$, pretendemos determinar uma função de transferência $H(z)$, com aproximadamente as mesmas características.

Iremos abordar três possibilidades: Integração numérica, mapeamento de pólos-zeros e equivalentes de *hold*.

4.1 Equivalentes discretos por integração numérica

Nesta disciplina iremos apenas abordar métodos simples de integração numérica, com passo constante. O problema fundamental é, dado uma função de transferência expressa em termos de uma equação diferencial, determinar uma equação diferença cuja solução seja uma aproximação da solução da equação diferencial. Consideremos o sistema:

$$(4.1.) \frac{U(s)}{E(s)} = H(s) = \frac{a}{s + a},$$

equivalente à equação diferencial:

$$(4.2.) \dot{u} + au = ae$$

Se escrevermos (4.2.) em forma integral, temos:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t [-au(\tau) + ae(\tau)] d\tau, \\ (4.3.) \quad u(kT) &= \int_0^{kT-T} [-au(\tau) + ae(\tau)] d\tau + \int_{kT-T}^{kT} [-au(\tau) + ae(\tau)] d\tau = \\ &= u(kT - T) + \int_{kT-T}^{kT} [-au(\tau) + ae(\tau)] d\tau \end{aligned}$$

O nosso problema centra-se agora em como calcular este último integral. Uma hipótese é considerar a área representada pelo integral como a área de um rectângulo, de $kT-T$ a kT , e assumindo como amplitude o integrando no instante $kT-T$:

$$\begin{aligned}
 (4.4.) \quad u_1(kT) &= u_1(kT - T) + T \left\{ -au_1(kT - T) + ae(kT - T) \right\} = \\
 &= (1 - aT)u_1(kT - T) + aTe(kT - T)
 \end{aligned}$$

Esta primeira aproximação é conhecida como *fórmula rectangular para a frente* (forward rectangular rule), ou *fórmula de Euler*.

A função de transferência correspondente a (4.4.) é:

$$\begin{aligned}
 (4.5.) \quad H_F(z) &= \frac{aTz^{-1}}{1 - (1 - aT)z^{-1}} = \\
 &= \frac{a}{\frac{z-1}{T} + a}
 \end{aligned}$$

Uma outra possível aproximação para o integral em (4.3.) consiste em utilizar um rectângulo, neste caso com amplitude correspondente ao valor do integrando para $t=kT$. Neste caso, como “construímos” o rectângulo para trás, esta aproximação denomina-se de *fórmula rectangular para trás* (backward rectangular rule):

$$\begin{aligned}
 (4.6.) \quad u_2(kT) &= u_2(kT - T) + T \left\{ -au_2(kT) + ae(kT) \right\} = \\
 &= \frac{u_2(kT - T)}{1 + aT} + \frac{aT}{1 + aT} e(kT)
 \end{aligned}$$

cuja função de transferência discreta é:

$$\begin{aligned}
 (4.7.) \quad H_B(z) &= \frac{aT}{1 + aT} \frac{1}{1 - z^{-1} / (1 + aT)} = \\
 &= \frac{a}{\frac{z-1}{Tz} + a}
 \end{aligned}$$

A última hipótese que iremos abordar é aproximar a área por um trapézio, que é a média dos rectângulos atrás considerados. Por esta razão, esta aproximação é conhecida por *trapezoidal*, de *Tustin*, ou *bilinear*.

$$\begin{aligned}
 (4.8.) \quad u_3(kT) &= u_3(kT - T) + \frac{T}{2} \left\{ -au_3(kT - T) + ae(kT - T) - au_3(kT) + ae(kT) \right\} = \\
 &= \left(\frac{1 - (aT/2)}{1 + (aT/2)} \right) u_3(kT - T) + \frac{aT/2}{1 + (aT/2)} (e(kT - T) + e(kT))
 \end{aligned}$$

A função de transferência correspondente é:

$$H_T(z) = \frac{aT(z+1)}{(2+aT)z + aT - 2} =$$

$$(4.9.) = \frac{a}{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} + a}$$

Podemos apresentar os resultados obtidos em forma de tabela:

| Método | Transformação directa | Transformação inversa |
|-----------------------|---|---|
| <i>Forward rule</i> | $s \rightarrow \frac{z-1}{T}$ | $z \rightarrow 1 + Ts$ |
| <i>Backward rule</i> | $s \rightarrow \frac{z-1}{Tz}$ | $z \rightarrow \frac{1}{1 - Ts}$ |
| <i>Trapezoid rule</i> | $s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$ | $z \rightarrow \frac{1 + Ts/2}{1 - Ts/2}$ |

Tabela 1 - Aproximações usadas para integração numérica

Para se conseguir então um equivalente discreto de uma função de transferência contínua, substitui-se a variável s pela aproximação correspondente.

Cada uma destas aproximações pode-se visualizar como um mapeamento do plano s para o plano z . Vamos interpretar estas transformações graficamente. Para isso, vamos determinar a forma geométrica em que o eixo $j\omega$, e o semi-plano esquerdo, do plano s é transformado por cada uma das aproximações, socorrendo-nos da última coluna da tabela 1.

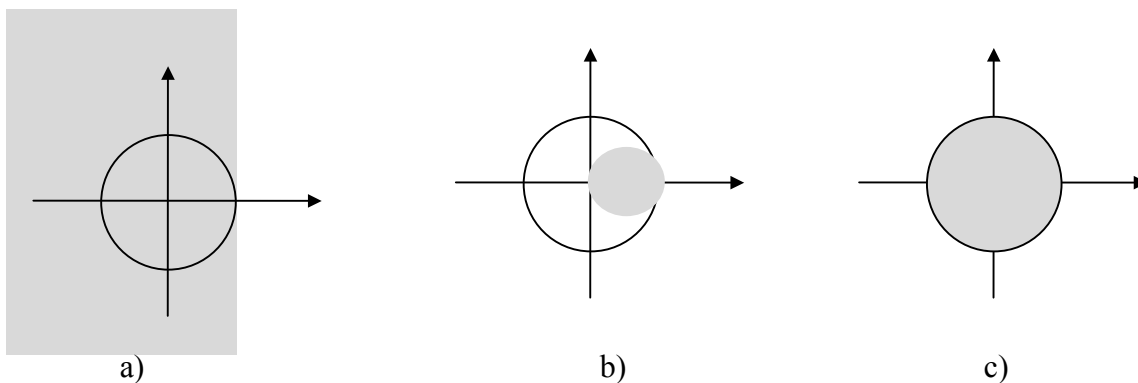


Figura 1 - Transformação do semi-plano esquerdo do plano s para o plano z através das regras de integração da Tabela 1

Vemos assim que a *forward rule* pode transformar um filtro contínuo estável num filtro discreto instável. A transformação bilinear transforma o semi-plano esquerdo do

plano s (a zona estável) no círculo unitário do plano z (também a zona estável). Obviamente existe uma grande distorção nesta transformação, que pode ser compensada, estendendo a regra de Tustin do seguinte modo:

Para uma função de transferência do tipo:

$$(4.10.) H(s) = \frac{a}{s + a}$$

a frequência de corte ($\omega: |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{2}$) é $\omega = a$. Se discretizarmos esta função de transferência utilizando o método de Tustin, teremos:

$$(4.11.) H_T(z) = \frac{a}{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} + a}$$

Para determinar a sua frequência de corte, convém manipular a expressão anterior:

$$(4.12.) \begin{aligned} H_T(e^{j\omega T}) &= \frac{a}{\frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} + a} = \frac{a}{\frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} + a} = \\ &= \frac{a}{\frac{2}{T} j \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) + a} \end{aligned}$$

O quadrado da amplitude será igual a $\frac{1}{2}$ quando:

$$\frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right) = a, \text{ ou,}$$

$$(4.13.) \tan\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right) = \frac{aT}{2}$$

Esta última equação ilustra a distorção provocada pela transformação bilinear. Só não haverá grande distorção, em relação à frequência de corte, quando $\tan(aT/2) \approx aT/2$, i.e. quando $w_s = 2\pi/T \gg a$, ou, por outras palavras, a frequência de amostragem for muito maior que a frequência de corte desejada.

Para corrigir este problema, podemos distorcer previamente a frequência de corte da f.t. contínua, de modo a que a discretização coloque a frequência de corte na localização pretendida. Esta técnica, em inglês, chama-se *prewarping*, e esta aproximação é conhecida como de Tustin, ou bilinear, com *prewarping*. Os passos são então os seguintes:

1. Escreva a função de transferência em s em termos de s/w_1 , com w_1 a frequência de corte desejada. Designemos esta expressão por $H(s/w_1)$.
2. Substitua-se w_1 na última expressão por a , tal que:

$$a = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{w_1 T}{2}\right). \text{ Ficamos assim com } H(s/a).$$

3. Substitua-se s por:

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \text{ em } H(s/a). \text{ O equivalente discreto está assim obtido, assegurando que a frequência de corte do filtro contínuo e discreto é a mesma.}$$

4.2 Equivalentes discretos por integração numérica para espaço de estados

As fórmulas atrás introduzidas são particularmente úteis para modelos em espaço de estados. Vamos supor que temos um sistema:

$$(4.14.) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}e \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}e \end{aligned}$$

A transformada de Laplace deste sistema é:

$$(4.15.) \quad \begin{aligned} s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}E(s) \\ U(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}E(s) \end{aligned}$$

Substitui-se agora s pela expressão correspondente a cada método.

4.2.1 Forward rule

Para a *forward rule*, temos:

$$(4.16.) \quad \frac{z-1}{T} \mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}E(s)$$

$$U(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}E(s)$$

No tempo, este sistema de equações pode ser representado como:

$$\mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}[k] = T\mathbf{A}\mathbf{x}[k] + T\mathbf{B}e[k]$$

$$(4.17.) \quad \mathbf{x}[k+1] = (\mathbf{I} - T\mathbf{A})\mathbf{x}[k] + T\mathbf{B}e[k]$$

$$u[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}e[k]$$

4.2.2 Backward rule

Para este método, a eq. (4.15.) fica:

$$(4.18.) \quad \frac{z-1}{Tz} \mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}E(s)$$

$$U(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}E(s)$$

e no domínio dos tempos:

$$(4.19.) \quad \mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}[k] = T\mathbf{A}\mathbf{x}[k+1] + T\mathbf{B}e[k+1]$$

Na última eq. temos vários termos em $k+1$. Agrupando-os todos do lado esquerdo, e definindo um novo vector de estado, $\mathbf{w}[k]$, temos:

$$(4.20.) \quad (\mathbf{I} - T\mathbf{A})\mathbf{x}[k+1] - T\mathbf{B}e[k+1] = \mathbf{x}[k]$$

$$\triangleq \mathbf{w}[k+1]$$

Resolvendo esta equação em relação a \mathbf{x} , temos:

$$(4.21.) \quad \mathbf{x} = (\mathbf{I} - T\mathbf{A})^{-1} \mathbf{w} + (\mathbf{I} - T\mathbf{A})^{-1} T\mathbf{B}e$$

Igualando (4.20.) e (4.21.), temos:

$$(4.22.) \quad \mathbf{w}[k+1] = (\mathbf{I} - T\mathbf{A})^{-1} \mathbf{w}[k] + (\mathbf{I} - T\mathbf{A})^{-1} T\mathbf{B}e[k]$$

e a equação de saída deve ser reformulada em termos de $\mathbf{w}[k]$:

$$(4.23.) \quad u[k] = \mathbf{C}(\mathbf{I} - T\mathbf{A})^{-1} \mathbf{w}[k] + \{\mathbf{D} + \mathbf{C}(\mathbf{I} - T\mathbf{A})^{-1} T\mathbf{B}\}e[k]$$

Estas duas últimas equações constituem a descrição em espaço de estados do equivalente obtido pela backward rule.

4.2.3 Regra de Tustin

A eq. (4.15.) fica assim:

$$\begin{aligned} \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{E}(s) \\ (4.24.) (z-1)\mathbf{X} &= \frac{\mathbf{A}T}{2}(z+1)\mathbf{X} + \frac{\mathbf{B}T}{2}(z+1)\mathbf{E} \\ \mathbf{U}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{E}(s) \end{aligned}$$

No domínio dos tempos a equação de estados fica:

$$(4.25.) \mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}[k] = \frac{\mathbf{A}T}{2}(\mathbf{x}[k+1] + \mathbf{x}[k]) + \frac{\mathbf{B}T}{2}(\mathbf{e}[k+1] + \mathbf{e}[k])$$

Do mesmo modo que no último método, agrupam-se os termos em $k+1$ do lado esquerdo:

$$\begin{aligned} (4.26.) \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}T}{2} \right) \mathbf{x}[k+1] - \frac{\mathbf{B}T}{2} \mathbf{e}[k+1] &= \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}T}{2} \right) \mathbf{x}[k] + \frac{\mathbf{B}T}{2} \mathbf{e}[k] \\ &\triangleq \sqrt{T} \mathbf{w}[k+1] \end{aligned}$$

Com esta definição de \mathbf{w} , o vector \mathbf{x} aparece-nos como:

$$\begin{aligned} (4.27.) \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}T}{2} \right) \mathbf{x} &= \sqrt{T} \mathbf{w} + \frac{\mathbf{B}T}{2} \mathbf{e} \\ \mathbf{x} &= \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}T}{2} \right)^{-1} \sqrt{T} \mathbf{w} + \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}T}{2} \right)^{-1} \frac{\mathbf{B}T}{2} \mathbf{e} \end{aligned}$$

Se substituirmos (4.27.) em (4.26.), após alguns cálculos, obteremos:

$$(4.28.) \mathbf{w}[k+1] = \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}T}{2} \right) \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}T}{2} \right)^{-1} \mathbf{w}[k] + \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}T}{2} \right)^{-1} \mathbf{B} \sqrt{T} \mathbf{e}[k]$$

Substituindo (4.27.) na equação de saída em (4.24.), temos:

$$(4.29.) u[k] = \sqrt{T} \mathbf{C} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}T}{2} \right)^{-1} \mathbf{w}[k] + \left\{ \mathbf{D} + \mathbf{C} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}T}{2} \right)^{-1} \frac{\mathbf{B}T}{2} \right\} \mathbf{e}[k]$$

Estes resultados podem ser apresentados numa tabela para uma mais fácil referência.

Vamos supor que o sistema discreto é representado por:

$$\begin{aligned} (4.30.) \mathbf{w}[k+1] &= \mathbf{\Phi} \mathbf{w}[k] + \mathbf{\Gamma} \mathbf{e}[k] \\ u[k] &= \mathbf{H} \mathbf{w}[k] + \mathbf{J} \mathbf{e}[k] \end{aligned}$$

| | Forward | Backward | Bilinear |
|--------------|----------------------------|---|---|
| Φ | $(\mathbf{I}+\mathbf{A}T)$ | $(\mathbf{I}+\mathbf{A}T)^{-1}$ | $(\mathbf{I}+\mathbf{A}T/2)(\mathbf{I}-\mathbf{A}T/2)^{-1}$ |
| Γ | $\mathbf{B}T$ | $(\mathbf{I}-\mathbf{A}T)^{-1}\mathbf{B}T$ | $(\mathbf{I}-\mathbf{A}T/2)^{-1}\mathbf{B}\sqrt{T}$ |
| \mathbf{H} | \mathbf{C} | $\mathbf{C}(\mathbf{I}-\mathbf{A}T)^{-1}$ | $\sqrt{T}\mathbf{C}(\mathbf{I}-\mathbf{A}T/2)^{-1}$ |
| \mathbf{J} | \mathbf{D} | $\mathbf{D}+\mathbf{C}(\mathbf{I}-\mathbf{A}T)^{-1}\mathbf{B}T$ | $\mathbf{D}+\mathbf{C}(\mathbf{I}-\mathbf{A}T/2)^{-1}\mathbf{B}T/2$ |

Tabela 2 - Matrizes das equações dinâmicas discretas obtidas por diferentes processos

4.3 Equivalentes discretos por mapeamento de pólos-zeros

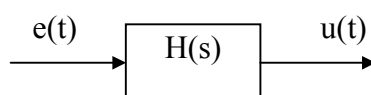
Já sabemos que na transformada de z das amostras de um sinal contínuo $e(t)$, os pólos da função de transferência discreta $E(z)$ estão relacionados com os pólos de $E(s)$ pela relação: $z=e^{sT}$. Sabemos no entanto que tal relação não é aplicada aos zeros. Todavia neste método esta extrapolação é feita. As regras para obtenção deste equivalente são:

1. Todos os pólos em s são transformados em $z=e^{sT}$.
2. Todos os zeros finitos são mapeados em $z=e^{sT}$.
3. Todos os zeros em $s=\infty$, excepto 1, são mapeados em $z=-1$. Isto implica que existe, nesse caso, um atraso de 1 amostra.
4. O ganho da função de transferência digital é seleccionado de modo a igualar o ganho para a função de transferência contínua, para uma determinada frequência de interesse. Na maioria dos casos, é o ganho DC o ganho de interesse, e:

$$(4.31.) H(s)\Big|_{s=0} = H_{pz}(z)\Big|_{z=1}$$

4.4 Equivalentes de hold

Para esta técnica, o problema é o seguinte: pretendemos projectar um sistema discreto $H_{hi}(z)$ que, tendo como entrada as amostras de um sinal contínuo $e(t)$, tenha uma saída que aproxima a saída do sistema contínuo $H(s)$ cuja entrada é o sinal contínuo $e(t)$. Iremos desenhar este equivalente discreto através de, primeiramente, aproximar $e(t)$ através das amostras $e[k]$, obtendo assim um sinal aproximado $\hat{e}(t)$, e seguidamente passar este sinal por $H(s)$.



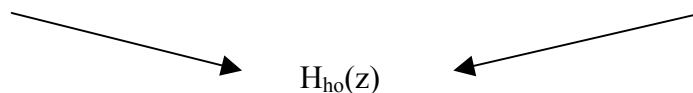


Figura 2 – Construção para equivalentes de hold

Geramos então o equivalente de hold primeiramente aproximando $e(t)$ através das amostras $e[k]$, gerando assim $\hat{e}(t)$, e depois passando este sinal por $H(s)$. Obviamente que para conseguir $\hat{e}(t)$ utilizamos as técnicas de reconstrução de sinais introduzidas no capítulo anterior, isto é, utilizando um zero-order-hold, ou um first-order-hold, ou, como veremos seguidamente, de um hold triangular.

4.4.1 Equivalente de zero-order-hold

Esta situação já foi tratada na secção 2.5. Assim sendo, o equivalente de um retentor de topo plano é:

$$(4.32.) H_{ho}(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{H(s)}{s} \right\}$$

4.4.2 Equivalente de triangle-hold

Imaginemos que temos um sistema com resposta impulsional não-causal, conforme o desenhado na figura seguinte:

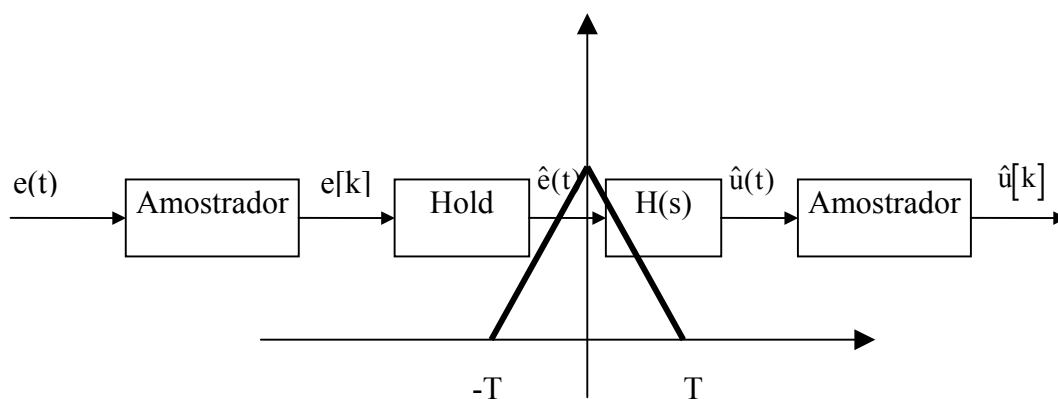


Figura 3 – Resposta impulsional de um retentor triangular

O efeito deste filtro é extrapolar as amostras, de modo a ligar amostra a amostra por uma linha recta. O sistema contínuo é não-causal, todavia o sistema discreto não o é.

A transformada de Laplace do filtro é:

$$(4.33.) \frac{e^{Ts} - 2 + e^{-Ts}}{Ts^2}$$

O equivalente discreto correspondente a (4.32.) é:

$$(4.34.) H_{\text{tri}}(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz} Z \left\{ \frac{H(s)}{s^2} \right\}$$

3. Sistemas amostrados

3.1 Introdução

O uso de computadores para o cálculo da acção de controlo de um sistema contínuo introduz a operação fundamental de amostragem. As amostras são tiradas de sinais contínuos, normalmente provenientes de sensores, digitalizadas, e processadas posteriormente no computador de modo a determinar-se a versão digital do sinal de controlo. Este valor digital é em seguida reconvertido para um sinal analógico, contínuo no tempo, e aplicado ao processo.

Neste capítulo estaremos interessados em analisar este sistema misto (discreto e contínuo) sob o ponto de vista do processo a controlar. Assim sendo, no nosso sistema, estaremos interessados em cortar o ciclo de controlo no lado analógico, por exemplo, no ramo correspondente a $u(t)$, conforme se representa na fig. 1.

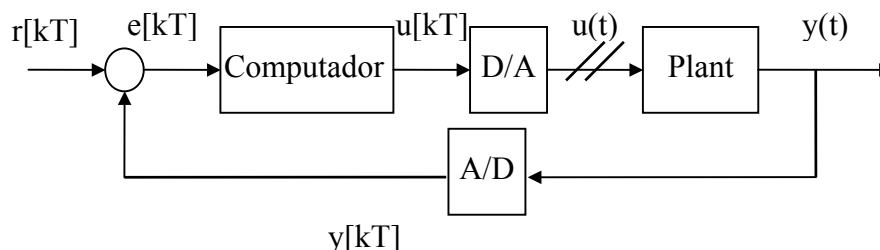


Fig. 1- Diagrama esquemático de um sistema de controlo computadorizado

3.2 Análise de um amostrador de topo plano (*sample and hold*)

Para obter amostras de um sinal físico, tipicamente temos um sensor, que transforma a variável física que pretendemos medir numa voltagem proporcional à amplitude que pretendemos medir, e em seguida um circuito de conversão analógica-digital (A/D ou ADC), que converte a voltagem numa palavra digital.

A operação do conversor A/D pode dividir-se em 3 partes:

1. primeiramente uma operação de amostragem,
2. seguida de uma operação de *hold*, em que a saída é mantida a um valor fixo;
3. enquanto esse valor é mantido fixo, executa-se a conversão desse valor para uma palavra digital, de acordo com o código e resolução apropriados.

A parte 3 consome a maior parte do tempo. Como um exemplo, o tempo de conversão da ADC Brown 803 é de $1.5 \mu s$ com uma resolução de 12 bits. O circuito de hold tem assim de 'segurar' a voltagem pelo menos durante esse tempo de conversão.

Sob o ponto de vista de tratamento matemático, é conveniente separar as operações de amostragem e de hold, e tratá-las cada uma separadamente.

Relativamente à parte de amostragem, dado que essa operação demora um tempo finito, o modelo matemático mais correcto para tratar este problema é o *modelo de modulação*. Neste modelo, o sinal contínuo é convertido num sinal modulado por pulsos com a duração do tempo de amostragem.

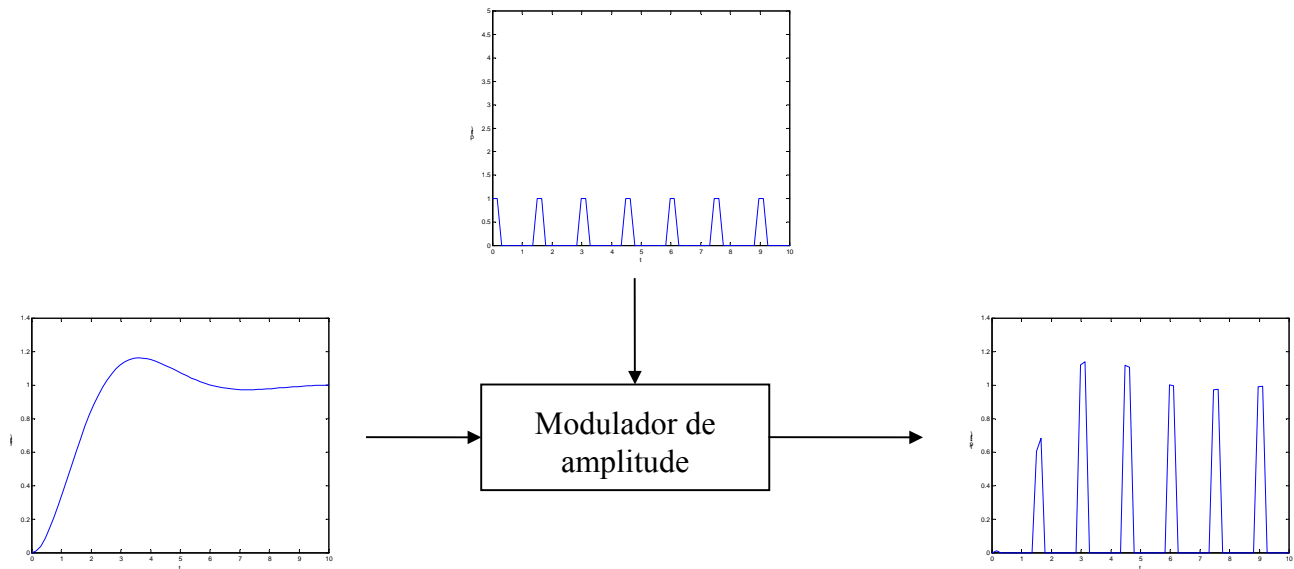


Fig. 2 - Amostrador como um modulador de pulsos

Matematicamente, a saída do amostrador pode representar-se como:

$$(3.1.) f_p^*(t) = f(t) \cdot p(t)$$

onde $p(t)$ é um trem de pulsos de duração p segundos:

$$(3.2.) p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [u(t - kT) - u(t - kT - p)], \quad p < T$$

Se a seguir a esse amostrador colocássemos um circuito de hold, teríamos a seguinte figura:

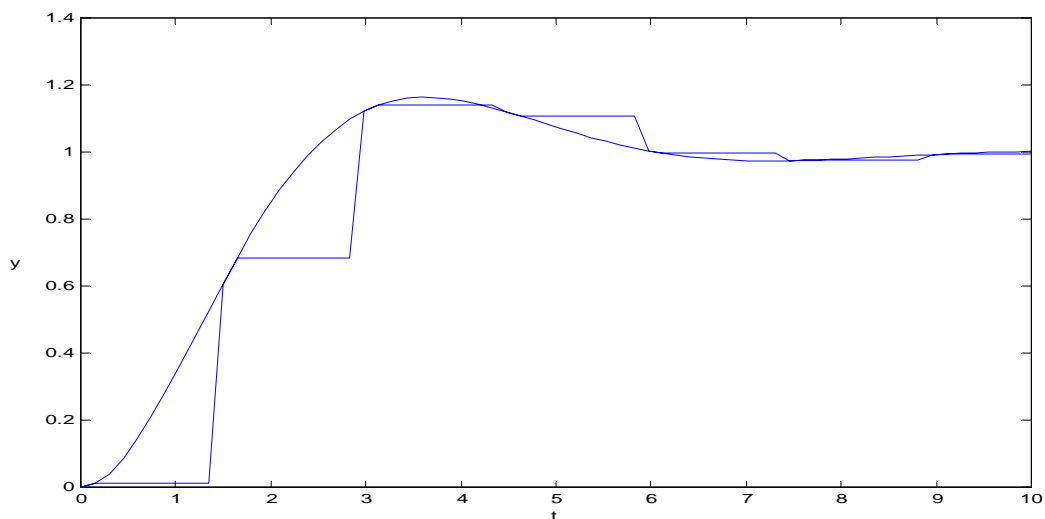


Fig. 3 - Saída de um amostrador não ideal, seguido de um circuito de hold

O tratamento matemático utilizando o modelo de modulação por pulsos torna-se complicado. O leitor mais interessado pode encontrá-lo nas referências especificadas¹ no início.

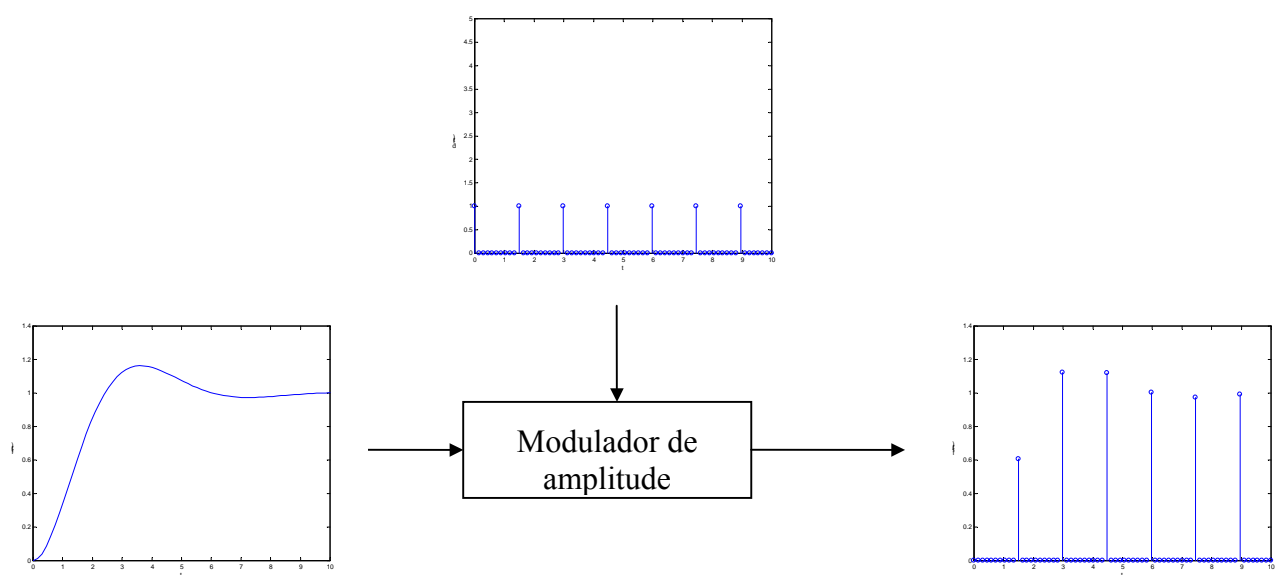


Fig. 4 - Amostrador como um modulador de impulsos

Como normalmente $p \ll T$, é costume aproximar-se o pulso por um impulso, utilizando assim o modelo de *modulação de impulsos* para o amostrador ideal:

¹ Veja o cap. 2.7 de Digital Control Systems, de B. Kuo

Matematicamente, a saída do amostrador ideal pode representar-se como:

$$(3.3.) f_p^*(t) = f(t) \cdot p_\delta(t)$$

onde $p_\delta(t)$ é um trem de impulsos:

$$(3.4.) p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Se a seguir a esse amostrador colocássemos um circuito de hold, teríamos a seguinte figura:

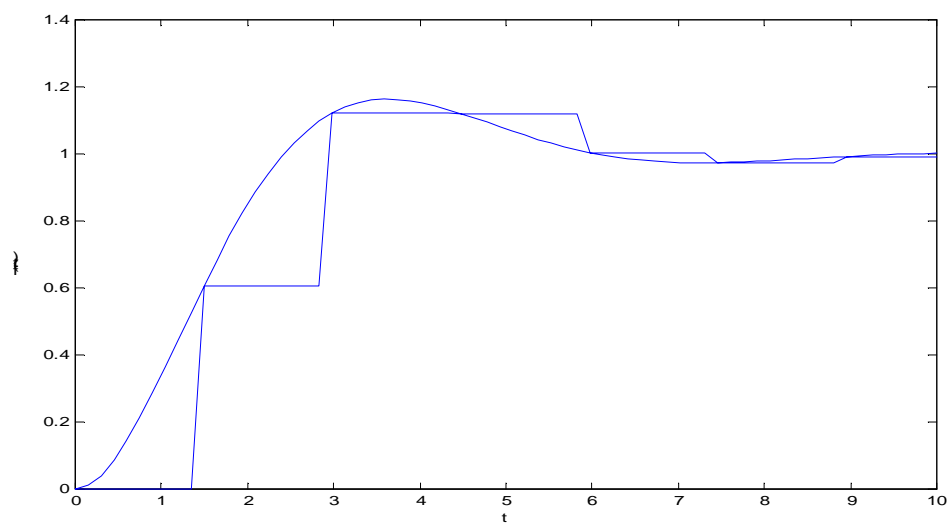


Fig. 5 - Saída de um amostrador ideal, seguido de um circuito de hold

A fig. 6 ilustra as diferenças obtidas na saída de um circuito de hold, considerando o amostrador ideal (.) e um amostrador não ideal (-.).

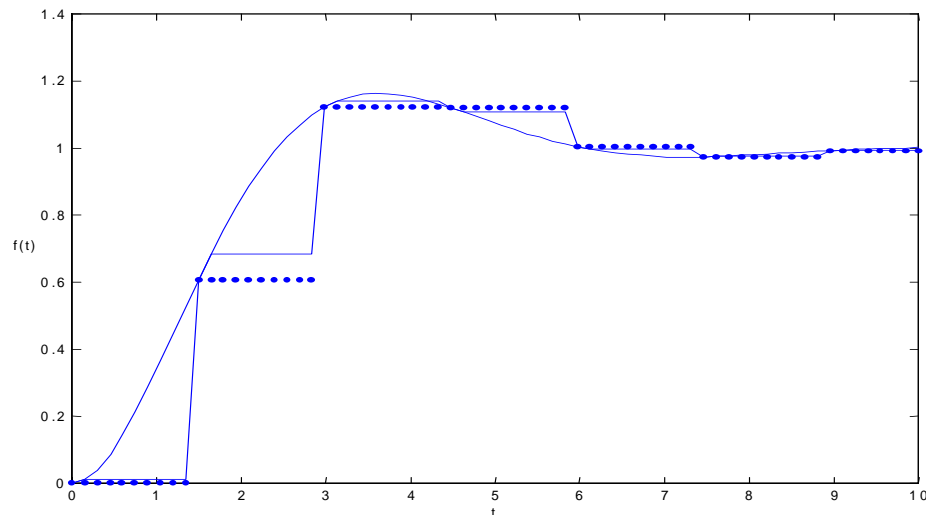


Fig. 6 - Saída de dois tipos de amostradores, seguidos de um circuito de hold

Se estendermos a operação de amostragem ideal de $-\infty$ a $+\infty$, a eq. (3) transforma-se em:

$$(3.5.) f^*(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - kT)$$

A sua transformada de Laplace é:

$$(3.6.) F^*(s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(kT)e^{-skT}$$

Tendo uma descrição matemática do amostrador ideal, precisamos agora de uma descrição do circuito de hold. Este circuito mantém o valor da saída constante até um novo instante de amostragem. Assim, a saída do circuito de hold, $f_h(t)$, é:

$$(3.7.) f_h(t) = f(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T$$

Dado que a operação deste circuito pode ser encarada como uma aproximação polinomial das amostras, neste caso existindo nessa aproximação apenas o termo de ordem 0, este circuito chama-se de *zero-order-hold* (zoh).

A sua resposta a um impulso unitário é:

$$(3.8.) f_h(t) = u(t) - u(t - kT)$$

e portanto a sua f.t. é:

$$(3.9.) Zoh(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Então o circuito de conversão analógica-digital, assumindo um amostrador ideal, pode ser representado pela figura seguinte:

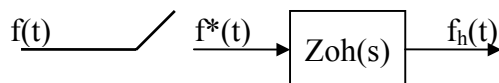


Fig. 7 - Representação esquemática de um amostrador de topo plano

3.3 Espectro de um sinal amostrado

Podemos aprofundar a análise do processo de amostragem pela representação de $f^*(t)$ em transformadas de Fourier. De (3.5.), vemos que o sinal amostrado é um produto do sinal contínuo por um trem de impulsos, com período T . Dado que este trem de impulsos é periódico, admite uma representação em série de Fourier:

$$(3.10.) p(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{j(2\pi n/T)t}$$

onde os coeficientes da série exponencial de Fourier, C_n , são dados por:

$$(3.11.) C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) e^{-j(2\pi n/T)t} dt$$

Dado que o único impulso dentro dos limites de integração é o impulso na origem, e utilizando as propriedades do Dirac, temos:

$$(3.12.) C_n = \frac{1}{T}$$

Então o trem de impulsos $p(t)$ pode representar-se como:

$$(3.13.) p(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi nt/T}$$

Se definirmos a frequência de amostragem como $w_s = \frac{2\pi}{T}$, e se substituirmos (3.13.) em (3.5.), e em seguida tirarmos a transformada de Laplace, ficamos com:

$$\begin{aligned}
 F^*(s) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} e^{-st} dt = \\
 (3.14.) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(s-jn\omega_s)t} dt = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s - jn\omega_s)
 \end{aligned}$$

Esta última expressão mostra que o espectro de $f(t)$ é replicado um infinito número de vezes, em valores múltiplos de ω_s , e a sua amplitude é diminuída do factor $1/T$.

A fig. seguinte mostra o sinal contínuo $f(t)$ da fig. 2, e o seu espectro de amplitudes

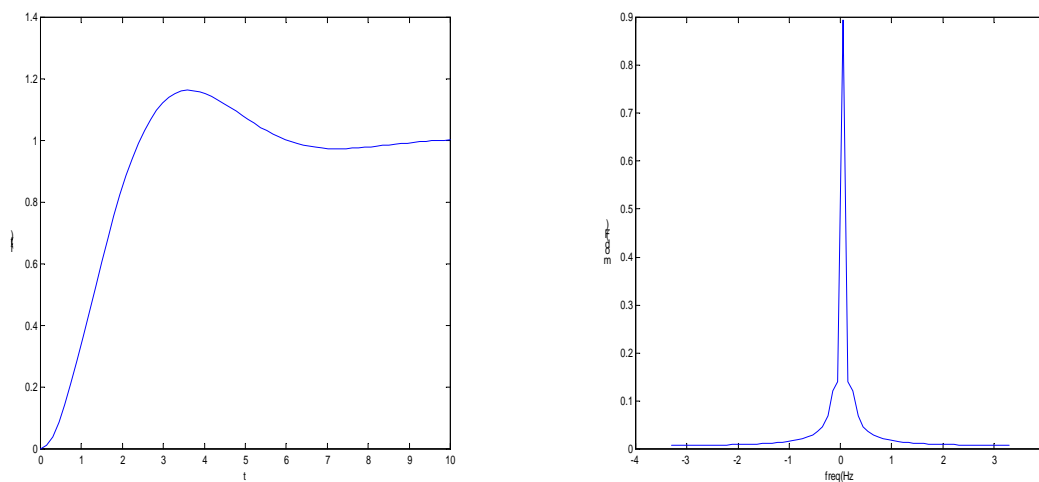


Fig. 8 - Sinal contínuo e espectro de amplitudes

Quando $f(t)$ é amostrado com uma frequência de amostragem de 6.7 Hz, obtemos o sinal amostrado da fig. 9, com o correspondente espectro de amplitudes.

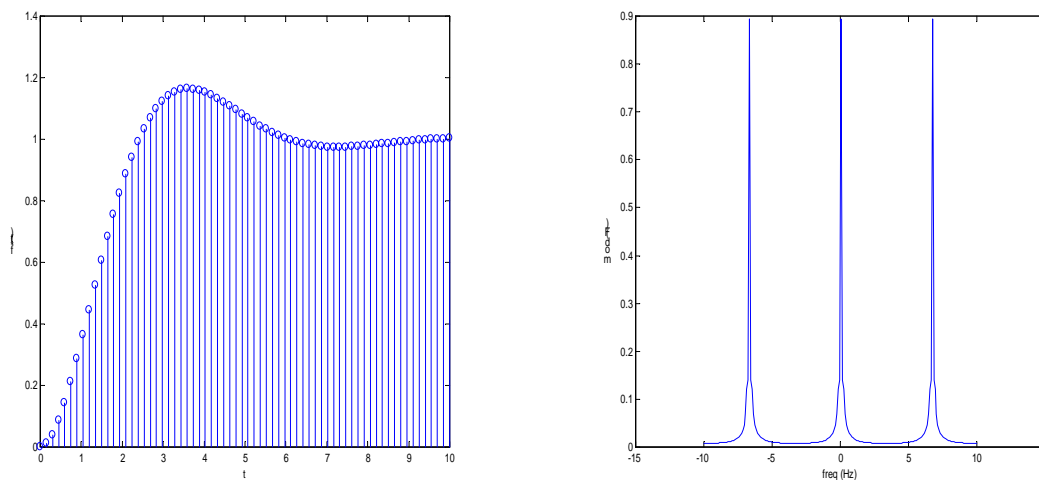


Fig. 9 - O sinal da fig. 8 amostrado com $f_s=6.7$ Hz.

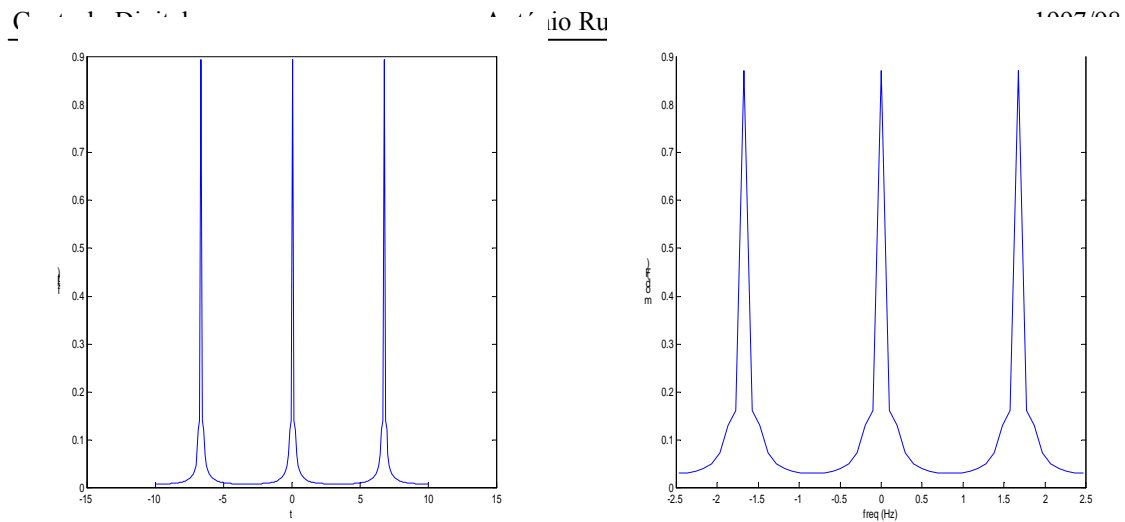


Fig. 10 - O sinal da fig. 8 amostrado com $f_s=1.675$ Hz.

De salientar que, nesta aproximação, a amplitude correspondente à frequência de 1 Hz, é no caso de $f_s=6.7$ Hz, 0.0169, e para o caso de $f_s=1.675$ Hz, de 0.0312. Este fenómeno é conhecido por *aliasing*, e advém, por um lado, do sinal não ser limitado na frequência, e por outro lado, por a frequência de amostragem utilizada não respeitar o teorema de amostragem, ou *teorema de Nyquist*:

$$(3.15.) f_s \geq 2f_{\max},$$

sendo f_{\max} a frequência máxima do sinal $f(t)$.

3.4 Reconstituição do sinal

O teorema de amostragem diz-nos que é possível reconstituir completamente um sinal amostrado se o sinal fôr limitado na frequência e a amostragem respeitar o critério de Nyquist. Neste capítulo vamos ver como é possível reconstitui-lo.

O espectro de um sinal contínuo está contido na parte de baixa frequência do espectro do sinal amostrado. Então, se o sinal contínuo fosse limitado em frequência, bastaria filtrar o sinal contínuo com um filtro passa-baixo ideal, e multiplicar a sua amplitude por T . Já sabemos que a esse extrapolador ideal corresponde uma resposta impulsional:

$$(3.16.) r(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

O problema com este extrapolador é a de que a sua resposta não é causal. Em alguns casos, este problema consegue torner-se atrasando o filtro extrapolador. Em controlo realimentado, como sabemos, o atraso normalmente traduz-se em instabilidade, e portanto extrapoladores deste género não são normalmente usados.

O extrapolador mais utilizado é, sem dúvida, o zero-order-hold, cuja função de transferência está representada em (3.9.). A resposta na frequência do zoh pode ser determinada, exprimindo (3.9.) em transformada de Fourier, e factorizando $e^{-j\omega T/2}$:

$$\begin{aligned}
 (3.17.) \quad Zoh(j\omega) &= e^{-j\omega T/2} \left(\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j} \right) \frac{2j}{j\omega} = \\
 &= e^{-j\omega T/2} T \operatorname{sinc}(\omega T / 2)
 \end{aligned}$$

O efeito de um zero-order-hold é então introduzir um atraso de $\omega T/2$, e multiplicar a amplitude por uma função com a amplitude de uma sinc. A fig. 11 ilustra o comportamento do ganho e da fase de um zero-order-hold em função da frequência.

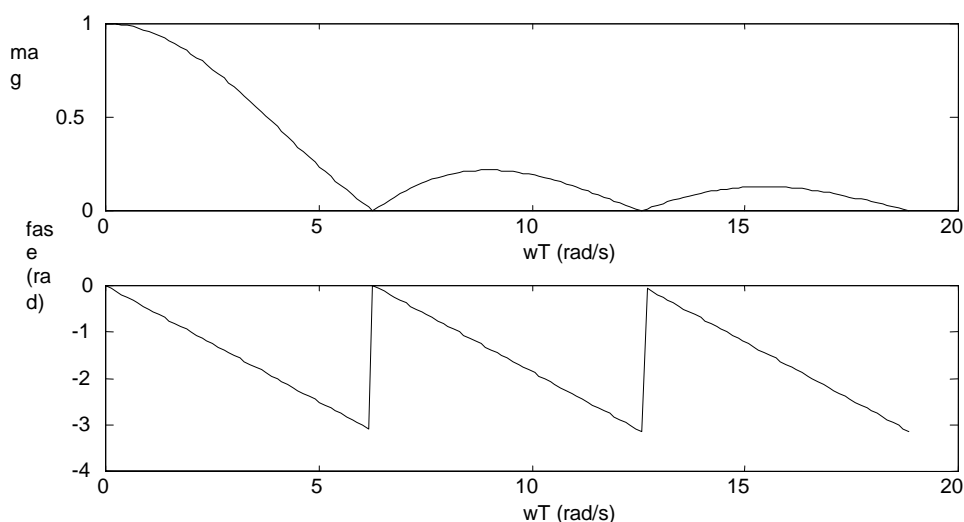


Fig. 11 - Resposta na frequência de um zero-order-hold

Com este último resultado, podemos fazer uma análise completa da operação do circuito de sample-and-hold. Vamos admitir que a entrada é uma sinusóide

$$(3.18.) \quad f(t) = 5 \sin\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)$$

e que o intervalo de amostragem é de $T=0.05$ seg. Analisando a fig. 12, vemos que a saída do *sample-and-hold* não é sinusoidal, embora a entrada o seja. Deste modo, não é possível descrever esta operação por uma função de transferência, pois, embora esta operação seja linear, não é invariante no tempo. A saída do *sample-and-hold* contém mais do que uma frequência, mas, em termos de aplicações de controlo, é normal considerarmos apenas a frequência fundamental, dado que a maior parte dos processos tem uma característica de filtro passa-baixo. As outras harmónicas do sinal de saída são normalmente designadas por *impostoras*.

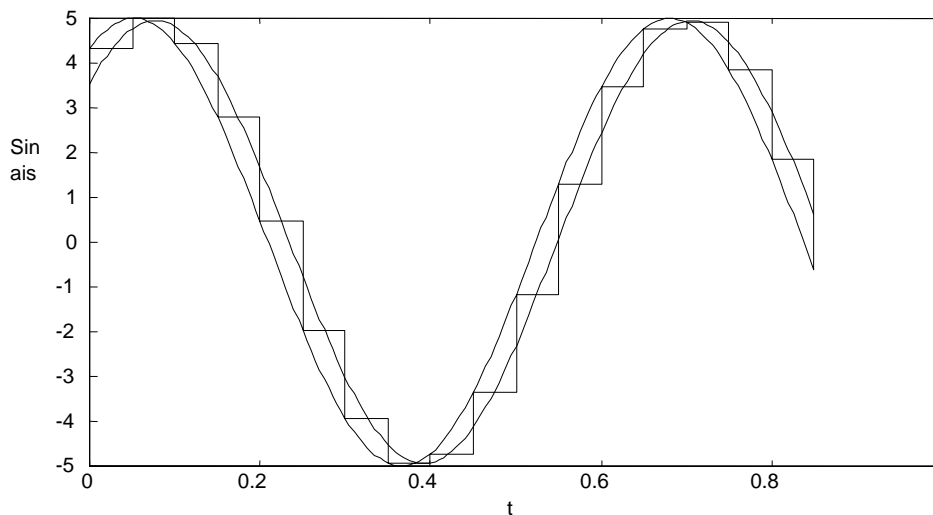


Fig. 12 - Gráfico de $f(t) = 5 \sin\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)$, amostrado com $T=0.05s$

Para fazer uma análise completa do sinal de saída, vamos começar pelo espectro do sinal de entrada. Neste caso, a sua transformada de Fourier é:

$$(3.19.) F(j\omega) = 5\pi \left[e^{j\frac{\pi}{3}} \delta(\omega - 10) + e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta(\omega + 10) \right],$$

isto é, consiste de 2 impulsos centrados em $\omega_0 = \pm 10$ rad/s.

Após a amostragem, o espectro de $f^*(t)$ consiste de réplicas de $F(j\omega)$, espaçadas de $\omega_s = 2\pi/T$ rad/s, e com a sua amplitude diminuída de $1/T$. Finalmente, passando $f^*(t)$ pelo circuito de hold, o espectro de $F^*(j\omega)$ é multiplicado pela função de transferência do zero-order-hold. O espectro de amplitudes destes sinais está representado na fig. seguinte, onde, nas figs b) e c) o factor $1/T$ não foi considerado.

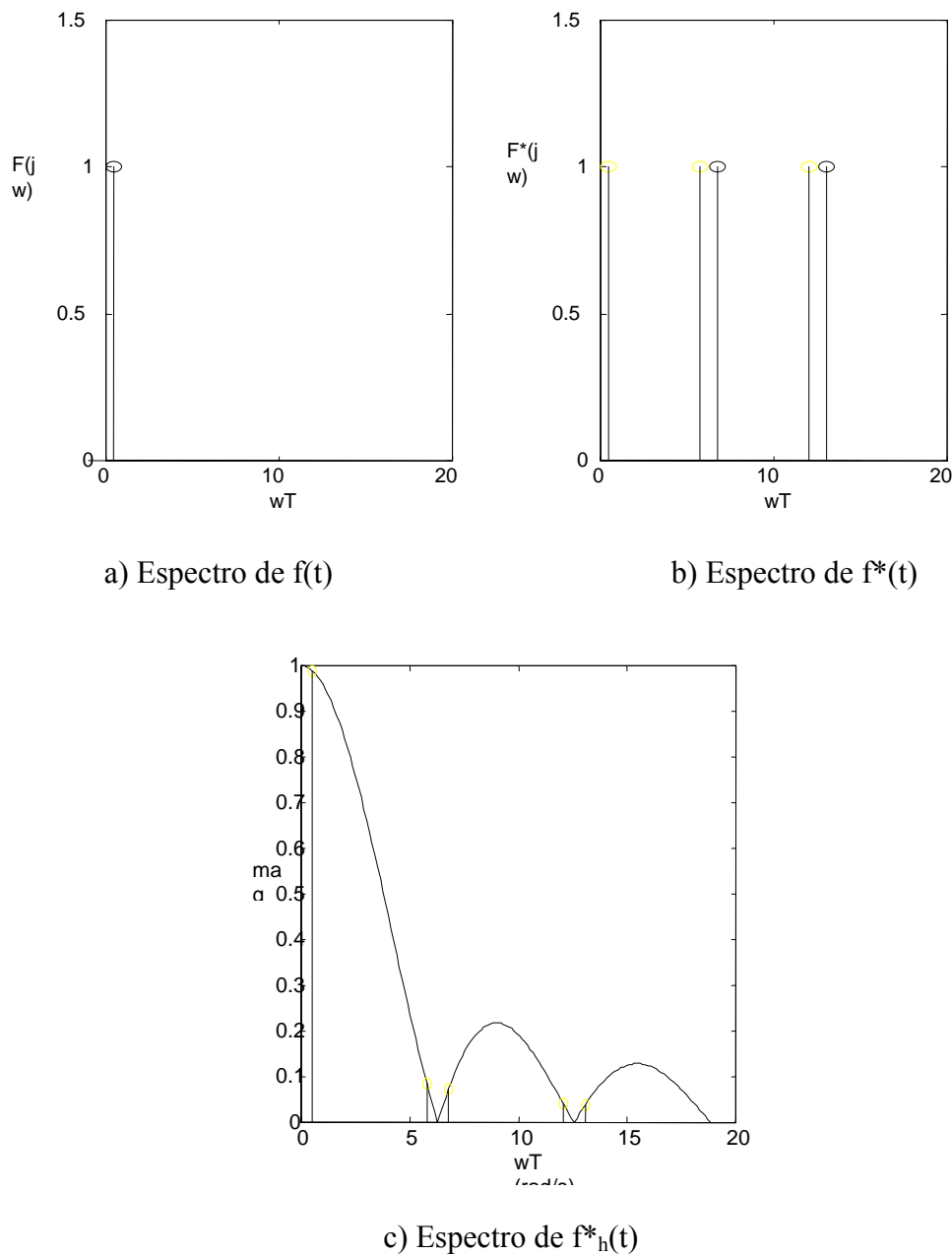


Fig. 13 - Espectros de vários sinais

Se pretendermos a melhor aproximação de $f_h^*(t)$ utilizando apenas uma sinusóide, precisamos apenas de considerar a 1ª harmónica de $f^*(t)$, que quando passa pelo zero-order-hold, sofre a atenuação $\text{sinc}(10T/2)$ e a desfasagem $(-10T/2)$ correspondente a essa frequência. Esta aproximação encontra-se desenhada a tracejado na fig. 12.

3.5 First-order-hold

Como alternativa ao *zero-order-hold*, que como o nome indica se trata de um filtro extrapolador de grau zero, podemos utilizar um extrapolador de 1ª ordem, conhecido por *first-order-hold*. Para determinar a sua função de transferência, podemos,

primeiramente, determinar a sua resposta impulsional, e seguidamente calcular a sua transformada.

$$(3.20.) r_{foh}(t) = f[kT] + \frac{f[kT] - f[(k-1)T]}{T}t$$

A sua resposta impulsional está expressa na figura seguinte:

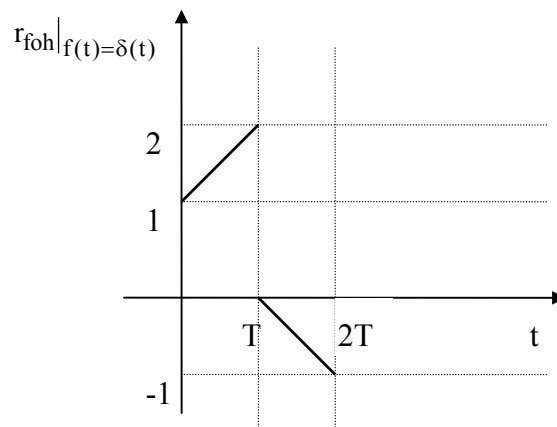


Fig. 14 - Resposta impulsional de um zero-order-hold

Este sinal pode ser descrito analiticamente como:

$$(3.21.) r_{foh}|_{f(t)=\delta(t)} = u(t) + \frac{t}{T}u(t) - 2\frac{(t-T)}{T}u(t-T) - 2u(t-T) + \frac{(t-2T)}{T}u(t-2T) + u(t-2T)$$

A transformada de Laplace do sinal da fig. 14, e consequentemente a f. de transf. do *first-order-hold*, é pois:

$$(3.22.) FOH(s) = T \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{Ts} \right)^2 (Ts + 1)$$

A frequência de resposta de este dispositivo está representado na fig. 15.

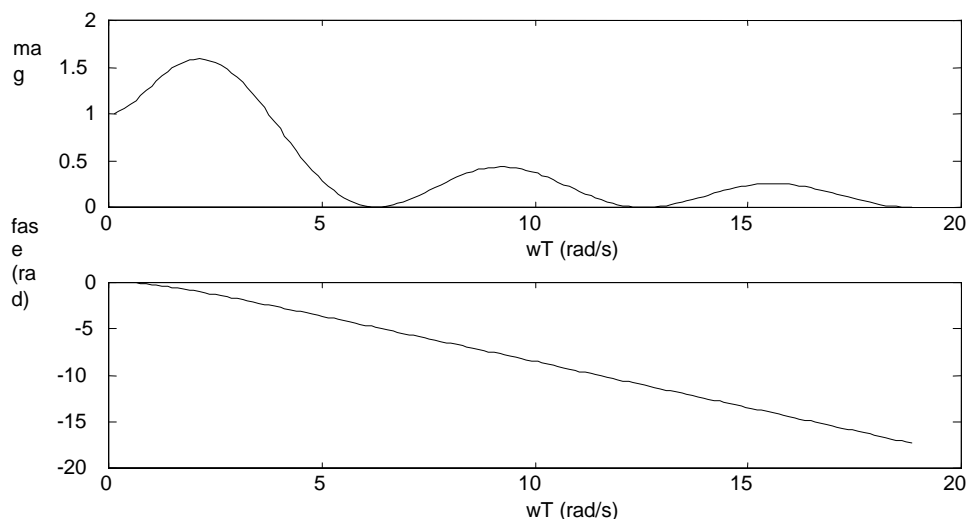


Fig. 15 - Resposta na frequência de um first-order-hold

Conforme se pode verificar, comparando as figs. 15 e 11, o first-order-hold introduz menos desfasagem para baixas frequências do que o zero-order-hold, mas apresenta maiores distorções na amplitude. Não existem vantagens concretas de um extrapolador relativamente ao outro, e dada a menor complexidade do zero-order-hold, é o mais utilizado na prática.

3.6 Análise de sistemas digitais realimentados

Para analisar um sistema realimentado que contenha um computador, precisamos de calcular as transformadas dos vários sinais de saída de cada elemento de um diagrama de blocos, sejam eles contínuos ou amostrados. As técnicas para obter estas transformadas são uma extensão das regras de manipulação de diagramas de blocos ou de fluxo de sinal.

3.6.1 Diagramas de blocos

Neste caso usa-se uma extensão às regras já conhecidas. Vamos considerar o sistema realimentado da fig. 16.

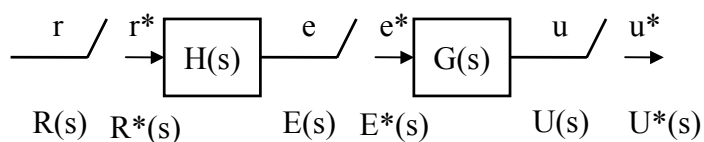


Fig. 16 - Uma série de amostradores e funções de transferência

Para este sistema, temos, por exemplo:

$$(3.23.) \quad \begin{aligned} E(s) &= R^*(s)H(s) \\ U(s) &= E^*(s)G(s) \end{aligned}$$

Se a transformada de um sinal que passa por um amostrador é o produto onde um dos termos é periódico e o outro não o é, como $U(s)=E^*(s)G(s)$, então o sinal amostrado aparece como um factor no resultado, i.e., $U^*(s)=(E^*(s)G(s))^*=E^*(s)G^*(s)$. Vamos provar que assim é. Por definição:

$$(3.24.) U^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E^*(s - jn\omega_s) G(s - jn\omega_s)$$

Mas como:

$$E^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(s - jk\omega_s), \text{ então}$$

$$E^*(s - jn\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(s - jk\omega_s - jn\omega_s)$$

Se, na última equação, fizermos $k=l-n$, teremos:

$$(3.25.) E^*(s - jn\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} E(s - jl\omega_s) = E^*(s)$$

Por outras palavras, se deslocarmos o espectro de um sinal amostrado, o espectro permanece inalterado.

Substituindo (3.25.) em (3.24.), temos:

$$(3.26.) U^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E^*(s) G(s - jn\omega_s) = E^*(s) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s - jn\omega_s) = E^*(s) G^*(s)$$

Deve ser principalmente realçado que, enquanto:

$$(3.27.) \begin{aligned} & \text{se } U(s) = E^*(s)G(s) \text{ então } U^*(s) = E^*(s)G^*(s) \\ & \text{se } U(s) = E(s)G(s) \text{ então } U^*(s) \neq E^*(s)G^*(s) \text{ mas sim } (EG)^* \end{aligned}$$

Um outro pormenor importante é que, dado $U^*(s)$, podemos determinar $U(z)$, e vice-versa:

$$(3.28.) \begin{aligned} U(z) &= U^*(s) \Big|_{s=\frac{\ln(z)}{T}} \\ U^*(s) &= U(z) \Big|_{z=e^{Ts}} \end{aligned}$$

De notar que a transformada inversa de $U^*(s)$ é uma sequência de impulsos, cujas intensidades são dadas por $u[kT]$, enquanto que a transformada inversa de $U(z)$ é a sequência de valores $u[kT]$. Enquanto as sequências de valores e as correspondentes transformadas de z são facilmente interpretadas como sendo processadas por um computador, o modelo de sequências de impulsos é o que nos permite analisar um sistema discreto embebido num mundo real.

Vamos ilustrar estas regras utilizando o exemplo da fig. 17.

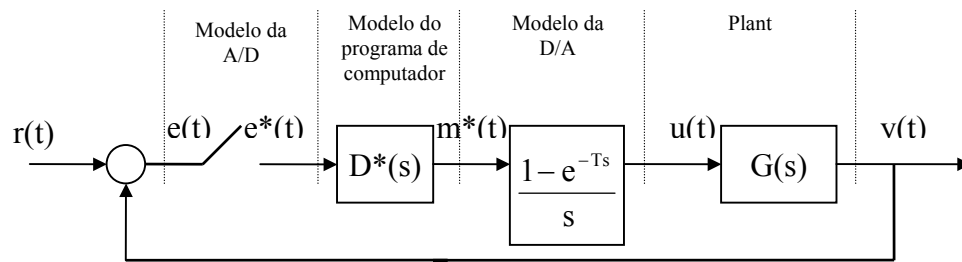


Fig. 17 - Diagrama de blocos de um sistema de controlo digital como um sistema amostrado

Utilizando as regras habituais de diagramas de blocos, temos:

$$(3.29.) E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$(3.30.) M^*(s) = E^*(s)D^*(s)$$

$$(3.31.) U(s) = M^*(s) \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

$$(3.32.) Y(s) = U(s)G(s)$$

Se pretendermos determinar $Y^*(s)$, então deveremos 'estrelar' -star it- cada uma destas equações. Temos assim:

$$(3.33.) E^*(s) = R^*(s) - Y^*(s)$$

$$(3.34.) M^*(s) = E^*(s)D^*(s)$$

$$(3.35.) U^*(s) = M^*(s)$$

$$(3.36.) Y^*(s) = [UG]^*(s)$$

Analisando a última eq, vemos que precisamos de U, e não de U^* . Substituindo (3.31.) em (3.36.), temos:

$$(3.37.) Y^*(s) = \left[M^* \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G \right]^*(s) = M^* (1 - e^{-Ts}) \left(\frac{G(s)}{s} \right)^*$$

Substituindo (3.34.) em (3.37.), e em seguida (3.33.), temos:

$$Y^*(s) = D^* (1 - e^{-Ts}) \left(\frac{G(s)}{s} \right)^* (R^* - Y^*)$$

Se fizermos:

$$(3.38.) H^* = D^* (1 - e^{-Ts}) (G/s)^*$$

Então temos:

$$(3.39.) Y^* = \frac{H^*}{1 + H^*} R^*$$

que tem a forma típica de uma função de transferência de um sistema realimentado.

3.6.2 Grafos de fluxo de sinal

Na secção anterior foram utilizadas as regras de redução de diagrama de blocos, para analisar um sistema realimentado. Para sistemas com vários ciclos e amostradores, o uso destas regras torna-se complicado, normalmente utilizando-se regras de redução de grafos de fluxo de sinal.

Existem basicamente 2 métodos de extensão da fórmula de Mason para sistemas amostrados: no 1º, é construído um grafo de fluxo de sinal amostrado, onde todas as variáveis são quantidades discretas. O segundo método permite a obtenção de funções de transferência directamente do grafo de fluxo de sinal, modificando a fórmula de ganho de Mason. Vamo-nos centrar no 1º método, podendo o segundo ser consultado em [Kuo, Benjamin, *Digital Control Systems*].

Este método envolve os seguintes passos:

1. Partindo do diagrama de blocos do sistema, constroi-se um grafo de fluxo de sinal equivalente. Reproduz-se a fig. 17 na fig. 18a). O grafo de fluxo de sinal correspondente encontra-se representado na fig. 18b).
2. O passo seguinte consiste em construir o grafo de fluxo de sinal ‘amostrado’, a partir do grafo de fluxo de sinal equivalente. Para isso há vários passos intermédios:
 - 2.1. Para todos os nós, que não de entrada ou de saída de amostradores, é construída a sua equação de definição, à custa dos nós de entrada ou das variáveis à saída dos amostradores. Para este efeito é aplicada a fórmula de Mason para cada nó, considerando as entradas como as entradas do sistema ou as saídas dos amostradores. Assim:

$$E(s) = R(s) - E^*(s) D^*(s) \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s)$$

$$M^*(s) = E^*(s) D^*(s)$$

$$U(s) = E^*(s) D^*(s) \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

$$Y(s) = E^*(s) D^*(s) \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s)$$

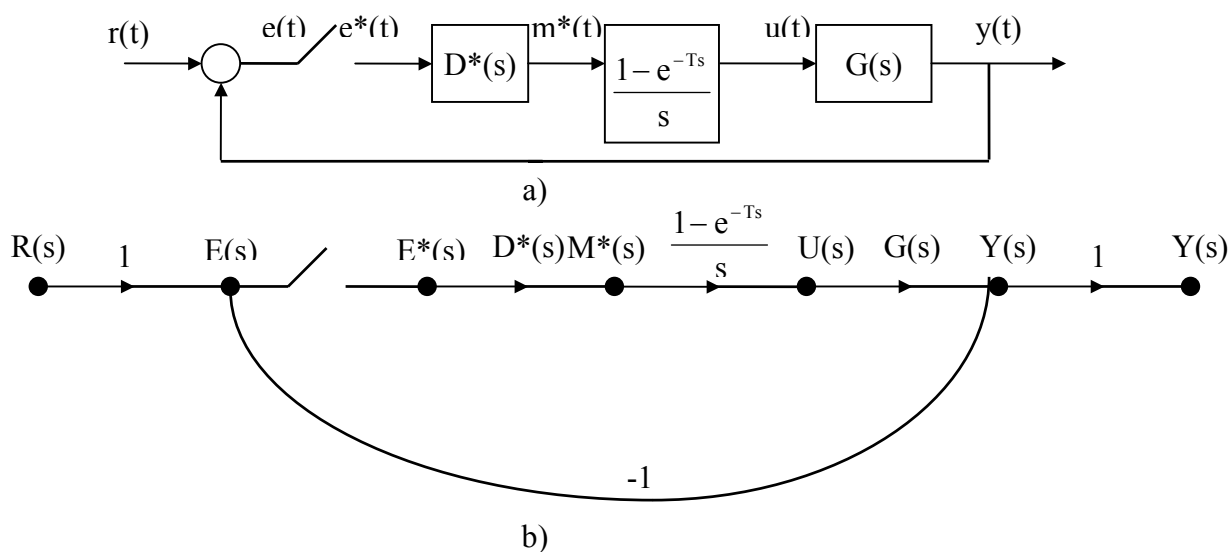


Fig. 18 - Diagrama de blocos de um sistema e o seu grafo de fluxo de sinal equivalente

2.2. Em seguida estrela-se cada uma das equações anteriores. Assim, ficamos com:

$$E^*(s) = R^*(s) - E^*(s)D^*(s)\left(1 - e^{-Ts}\right)\left(\frac{G(s)}{s}\right)^*$$

$$M^*(s) = E^*(s)D^*(s)$$

$$U^*(s) = E^*(s)D^*(s)$$

$$Y^*(s) = E^*(s)D^*(s)\left(1 - e^{-Ts}\right)\left(\frac{G(s)}{s}\right)^*$$

2.3. As últimas equações apenas contêm quantidades amostradas. O grafo de fluxo de sinal usando estas equações é conhecido como o *grafo de fluxo de sinal amostrado*. Este grafo é apresentado na fig. seguinte.

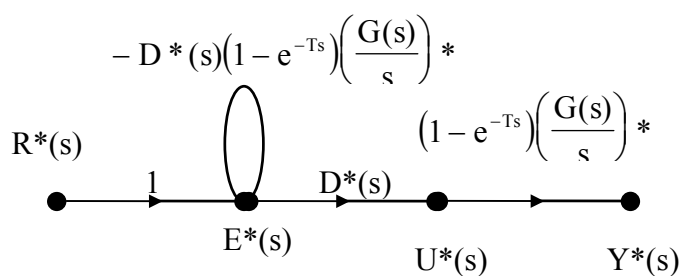


Fig. 19 - Grafo de fluxo de sinal amostrado

3. Uma vez obtido o grafo de fluxo de sinal, a f.t. entre qualquer par de nós entrada/saída pode ser obtida por aplicação directa da fórmula de Mason. Assim:

$$(3.40.) \frac{Y^*(s)}{R^*(s)} = \frac{D^*(s)(1 - e^{-Ts})\left(\frac{G(s)}{s}\right)^*}{1 + D^*(s)(1 - e^{-Ts})\left(\frac{G(s)}{s}\right)^*}$$

perfeitamente equivalente à eq. (3.39.).

4. As funções de transferência entre entradas e saídas contínuas podem ser obtidas através do grafo de fluxo de sinal composto. Este grafo é formado combinando os grafos de fluxo de sinal equivalente (fig 18b)) e amostrado (fig. 19). Mais especificamente são omitidos os amostradores do grafo de fluxo de sinal equivalente e as suas saídas são retiradas directamente do grafo amostrado, conforme ilustra a fig. seguinte.

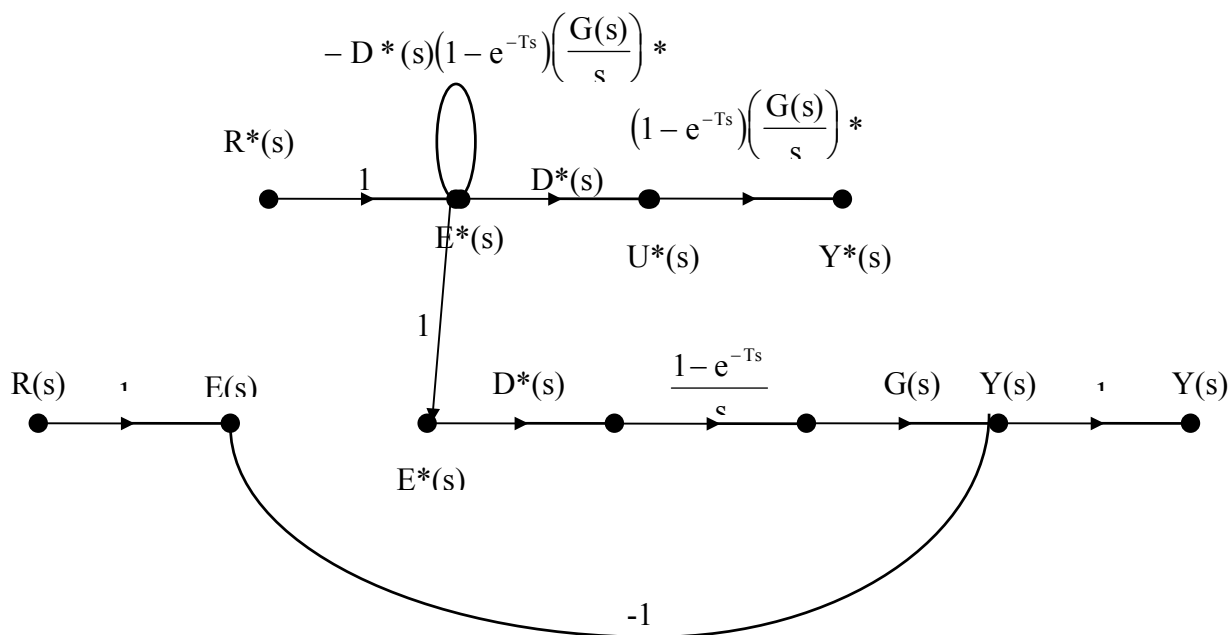


Fig. 20 - Grafo de fluxo de sinal composto

Por exemplo, a função de transferência entre $R^*(s)$ e $Y(s)$ obtém-se utilizando a fórmula de ganho de Mason:

$$(3.41.) \frac{Y(s)}{R^*(s)} = \frac{D^*(s)(1 - e^{-Ts})G(s)}{1 + D^*(s)(1 - e^{-Ts})\left(\frac{G(s)}{s}\right)^*}$$

2. Análise de sistemas dinâmicos discretos

2.1 Introdução

O elemento fundamental na estrutura de controlo digital apresentada na fig. 1 do capítulo anterior é o computador digital. Neste capítulo iremos analisar esta estrutura sob o ponto de vista do computador, e desenvolveremos técnicas de análise de sistemas e sinais digitais.

2.2 Equações diferença lineares

Vamos assumir que a ADC na fig. 3 do capítulo 1 amostra o sinal $y(t)$ em instantes de tempo separados de T segundos, e passa esse valor, quantizado, para o computador, de modo que a este elemento é fornecido, no instante kT , o valor $y(kT)=y(k)$.

Considerando o caso de seguimento da referência, o computador recebe, ao longo do tempo, uma sequência de entrada $\{e(k)\}=(e(0), e(1), e(2), \dots, e(k))$, e conjuntamente com os valores prévios da saída ($u(0), u(1), u(2), \dots, u(k-1)$), terá que calcular o valor de saída no instante k , $u(k)$. Em forma simbólica, podemos representar esta operação por:

$$(2.1.) \quad u(k) = f(e(0), \dots, e(k), u(0), \dots, u(k-1))$$

Assumindo que a função $f()$ é linear, e depende apenas de um número **finito** de valores passados da entrada e da saída, (2.1.) pode-se representar como:

$$(2.2.) \quad u(k) = -a_1 u(k-1) - a_2 u(k-2) - \dots - a_n u(k-n) + \\ + b_0 e(k) + b_1 e(k-1) + \dots + b_m e(k-m)$$

A eq. anterior é chamada de equação de recorrência linear ou *equação diferença linear*. Se os coeficientes a_i e b_i forem constantes esta equação é chamada de *equação diferença de coeficientes constantes* e desempenha um papel fundamental na análise e síntese de sistemas digitais, sendo o análogo para sistemas contínuos das equações diferenciais.

Para resolver a equação diferença, necessitamos de especificar qual o instante temporal inicial, e quais as condições iniciais para esta equação.

Exemplo 2.1

Exemplificando, vamos admitir a seguinte equação diferença:

$$(2.3.) \quad u(k) = u(k-1) + u(k-2)$$

Iniciando a sua resolução a partir de $k=2$, e assumindo como condições iniciais $u(1)=u(0)=1$, para os primeiros 5 instantes de tempo:

| Instante de tempo (k) | Valor (u_k) | |
|-----------------------|-----------------|-------|
| k=0 | 1 | |
| k=1 | 1 | |
| k=2 | 2 | (1+1) |
| k=3 | 3 | (2+1) |
| k=4 | 5 | (3+2) |
| k=5 | 8 | (5+3) |

Tabela 1: Valor de u_k para os primeiros 5 instantes de tempo

Vemos assim que a saída deste sistema cresce indefinidamente, ou, de acordo com o nosso estudo anterior, é um *sistema instável*.

Obviamente pretenderíamos resolver a eq. (2.3.) sem termos de calcular explicitamente os valores instante a instante de tempo, isto é, pretenderíamos uma forma fechada de solução. Sabemos que para sistemas contínuos as soluções das equações diferenciais lineares e de coeficientes constantes são do tipo e^{st} , portanto exponenciais. Para as equações diferença lineares, as soluções são do tipo z^k . Assumindo assim que $u(k) = Az^k$, e substituindo esse valor em (2.3.), temos:

$$Az^k = Az^{k-1} + Az^{k-2}$$

Dividindo esta equação por A e multiplicando por z^{-k} , temos:

$$1 = z^{-1} + z^{-2}$$

ou

$$z^2 = z + 1$$

Esta polinomial é, por comparação com o que ocorre no caso contínuo, chamada de *polinomial característica*. As raízes desta equação são $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Dado termos duas soluções, e dado a equação diferença ser linear, sabemos que uma combinação linear das 2 soluções também será uma solução de (2.3.):

$$u(k) = A_1 z_1^k + A_2 z_2^k$$

Determinamos as constantes A_1 e A_2 utilizando as condições iniciais fornecidas.

Assim:

$$u(0) = 1 = A_1 + A_2$$

$$u(1) = 1 = A_1 z_1^1 + A_2 z_2^1$$

Resolvendo este sistema de equações, obteremos:

$$A_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}$$

Então, a solução de (2.3.) é:

$$(2.4.) u(k) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k$$

Dado que $|z_1| > 1$, esse termo aumenta indefinidamente com k , e confirma-nos assim que estamos na presença de um sistema instável. Vemos assim que a fronteira entre estabilidade e instabilidade, que, nos sistemas contínuos, era o eixo imaginário do plano s , em sistemas discretos essa fronteira é o *círculo unitário* do plano z . Os sistemas discretos só são estáveis se possuírem todos os pólos no interior desse círculo.

O exemplo anterior não possui uma entrada externa. Para cobrirmos esse caso, vamos considerar os seguintes exemplos:

Exemplo 2.2

Consideremos o problema de determinação do número de alunos num determinado ano lectivo e ano académico de um dado curso. Este número é função do número de alunos que entram nesse ano lectivo no ano académico e também da taxa de reprovação observada no ano lectivo anterior para o ano académico em questão. Considerando o caso mais simples, com apenas 1 ano académico e taxa de reprovação constante, se definirmos:

$x(k)$ Número de alunos no ano lectivo k

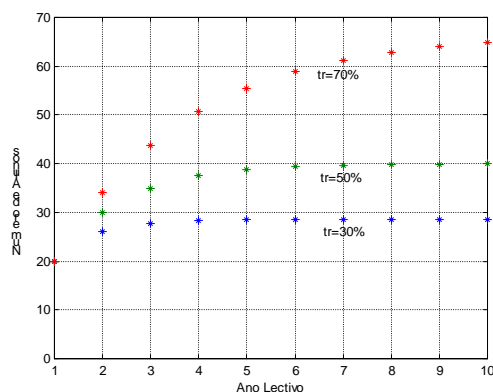
tr Taxa de reprovação

$e(k)$ Número de alunos de entrada no ano lectivo k ,

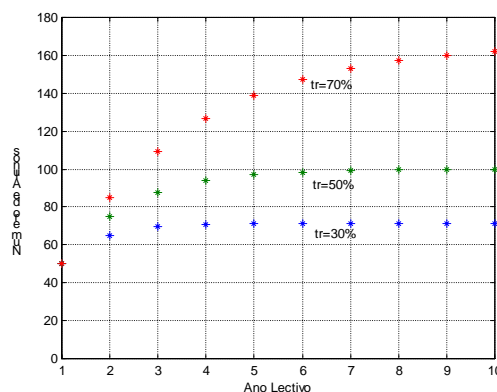
então o número de alunos existente no ano lectivo k pode ser dado por:

$$(2.5.) x(k) = e(k) + tr * x(k-1)$$

A figura seguinte ilustra o crescimento do número de alunos ao longo de 10 anos lectivos, para dois valores diferentes do número de entradas, 20 e 50 alunos.



a) $e(k)=20, k=1..10$



b) $e(k)=50, k=1..10$

Fig. 2.1 – Crescimento do número de alunos

Ficamos a saber que um curso com 50 alunos de entrada por ano pode atingir um número de alunos superior a 150, caso hajam muitas reprovações. Obviamente, o controlo deste sistema (isto é, a mudança das taxas de reprovação) é um problema muito complicado de resolver...

Exemplo 2.3

Consideremos agora o problema de aproximação de um cálculo de um integral de uma função $e(t)$:

$$u = \int_0^t e(t) dt$$

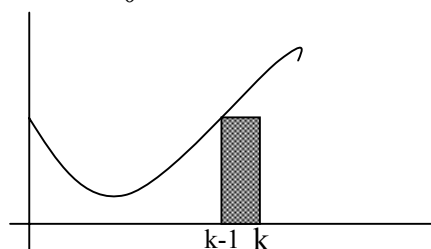


Fig. 2a) – Aproximação rectangular para a frente

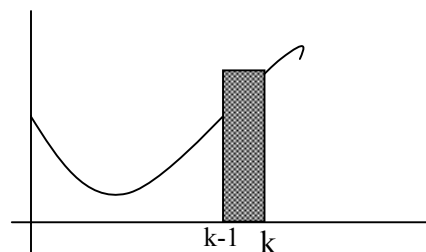


Fig. 2b) Aproximação rectangular para trás

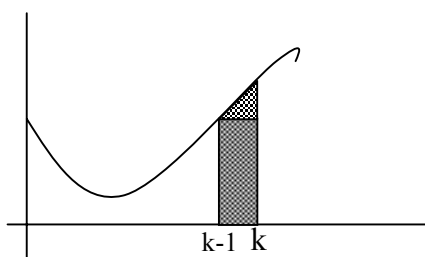


Fig 2c). Aproximação trapezoidal

Na figura 2 estão expressas 3 possibilidades: na fig. a), iremos adicionar à aproximação calculada no instante $k-1$ a área do rectângulo com altura e_{k-1} ; na fig. b) a altura do rectângulo é o valor de e_k ; finalmente na fig. c) iremos adicionar a área de um trapézio. Estas diferentes aproximações correspondem às seguintes equações diferença:

$$(2.6.) \quad u(k) = u(k-1) + Te(k-1)$$

$$(2.7.) \quad u(k) = u(k-1) + Te(k)$$

$$(2.8.) \quad u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2}(e(k) + e(k-1))$$

2.3 A convolução discreta

Suponhamos que um dispositivo digital tem como entrada a sequência, designada por *impulso discreto unitário*:

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)$$

e em consequência gera uma saída:

$$(h(0) \ h(1) \ h(2) \ \dots \ h(n-1) \ h(m)),$$

que é o análogo da resposta impulsional de sistemas contínuos, designada *resposta impulsional discreta*.

Se considerarmos várias sequências de entrada:

$$(u(0) \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0), (0 \ u(1) \ 0 \ \dots \ 0 \ 0) \dots (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ u(n))$$

teremos, se assumirmos linearidade e invariância no tempo:

$$\begin{aligned} (u(0) \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0) &\rightarrow (u(0)h(0) \ u(0)h(1) \ u(0)h(2) \ \dots \ u(0)h(m-1) \ u(0)h(m)) \\ (0 \ u(1) \ 0 \ \dots \ 0 \ 0) &\rightarrow (0 \ u(1)h(0) \ u(1)h(1) \ \dots \ u(1)h(m-1) \ u(1)h(m)) \\ (0 \ 0 \ u(2) \ \dots \ 0 \ 0) &\rightarrow (0 \ 0 \ u(2)h(0) \ \dots \ u(2)h(m-1) \ u(2)h(m)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Considerando agora uma sobreposição das entradas numa única entrada:

$$(u(0) \ u(1) \ u(2) \ \dots \ u(n-1) \ u(n))$$

e assumindo que o sistema é linear, a saída:

$$(y(0) \ y(1) \ y(2) \ \dots \ y(n-1) \ y(n))$$

é dada por:

$$y(0) = u(0)h(0)$$

$$y(1) = u(0)h(1) + u(1)h(0)$$

$$y(2) = u(0)h(2) + u(1)h(1) + u(2)h(0)$$

\vdots

$$(2.9.) \ y(k) = \sum_{j=0}^k u(j)h(k-j) = \sum_{j=0}^k u(k-j)h(j)$$

isto é, $y(k)$ é uma combinação linear do sinal de entrada, em que os pesos dependem do índice $k-j$.

Por analogia com o integral de convolução entre dois sinais contínuos:

$$(2.10.) \ y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

a operação indicada em (2.9.) é designada por *convolução discreta*.

Considerando os sinais $x(k)$ e $h(k)$ representados nas figs. 2.3a) e 2.3b), respectivamente:

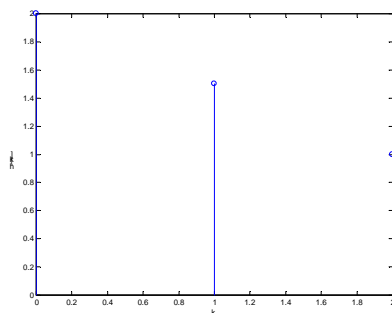


Fig 2.3a)

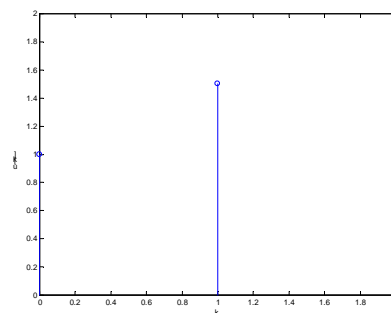
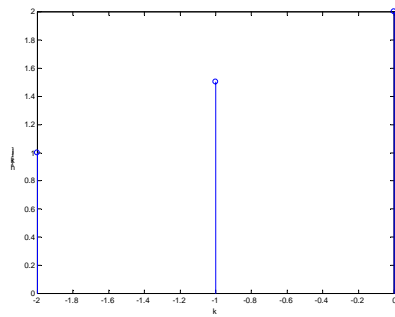


Fig 2.3b)

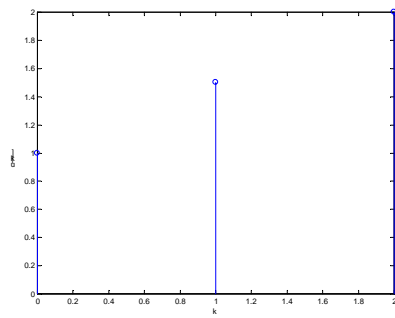
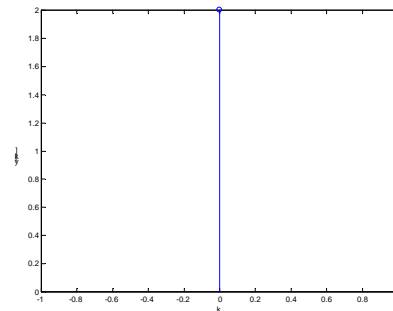
podemos representar graficamente a operação de convolução discreta através das seguintes figuras, amostra a amostra do sinal de saída:

k=0

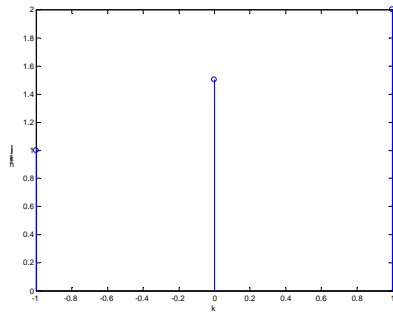


•

=

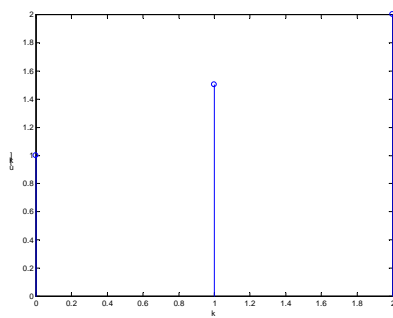
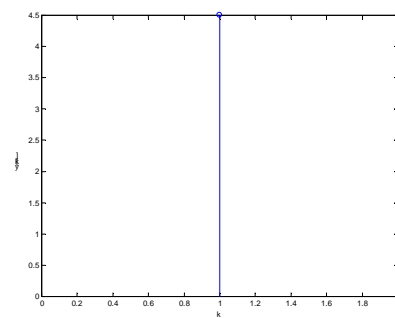


$k=1$



•

=



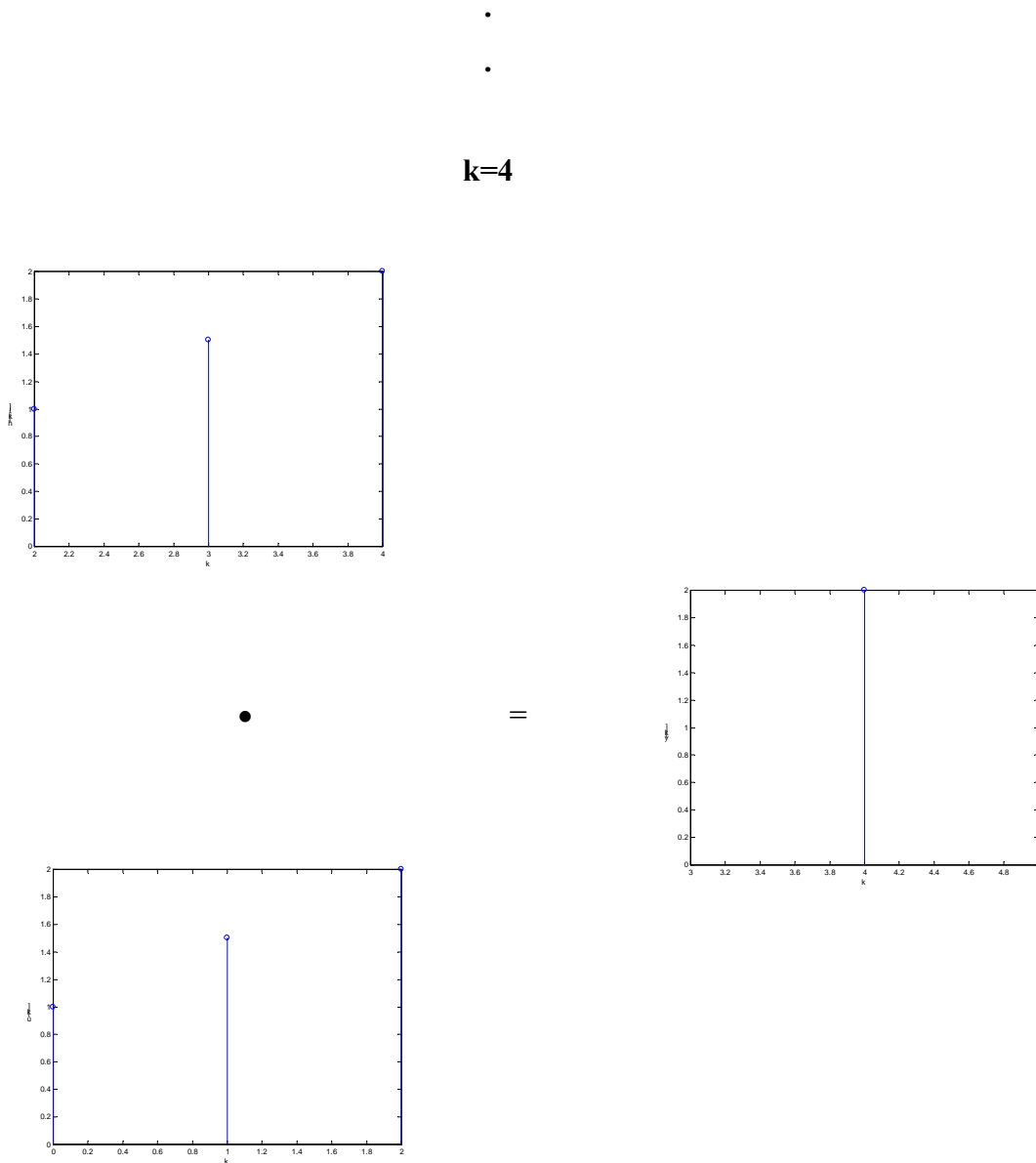


Fig. 2.4 – Representação gráfica da convolução discreta

Conforme se pode observar da figura anterior, para uma sequência de entrada com comprimento N , resposta impulsional de tamanho L , a sequência de saída tem comprimento $N+L-1$.

Matricialmente, a operação de convolução discreta pode ser representada como:

$$(2.11.) \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \vdots & 0 \\ h(1) & h(0) & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ h(n) & h(n-1) & \vdots & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n) \end{bmatrix}$$

2.4 A função de transferência discreta

Os sinais apresentados nas figuras 2.3 e 2.4 podem ser considerados como amostrados por impulsos, isto é podem ser considerados como um trem de impulsos em que a amplitude de cada impulso representa o valor do sinal no instante temporal.

Consideremos assim o sinal amostrado $f^*(t)$, dado por:

$$f^*(t) = f(0)\delta(t) + f(T)\delta(t - T) + f(2T)\delta(t - 2T) + \dots$$

A sua transformada de Laplace é:

$$L\{f^*(t)\} = L\{f(0)\delta(t)\} + L\{f(T)\delta(t - T)\} + L\{f(2T)\delta(t - 2T)\} + \dots$$

$$F^*(s) = f(0) + f(T)e^{-sT} + f(2T)e^{-2sT} + \dots$$

Façamos agora a transformação $z = e^{sT} \Rightarrow z^{-1} = e^{-sT}$. Temos então:

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots$$

Podemos então definir a *transformada de Z* como:

$$(2.12.) F(z) = Z\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

A transformada de Z tem para sistemas discretos o mesmo papel que a transformada de Laplace tem para sistemas contínuos. Consideremos novamente a equação diferença da integração trapezoidal, expressa na eq. (2.8.) (Exemplo 2.3). Se multiplicarmos ambos os membros da equação por z^{-k} e os somarmos sobre k, temos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k-1} z^{-k} + \frac{T}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} e_{k-1} z^{-k} \right)$$

De acordo com (2.12.), o lado esquerdo desta equação é facilmente reconhecido como $U(z)$. Relativamente ao 1º termo do lado direito, se fizermos a substituição $k-1=j$, temos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{k-1} z^{-k} = \sum_{j=-1}^{\infty} u_j z^{-(j+1)} = z^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{-j}$$

Se executarmos operações similares nos últimos 2 termos do lado direito, teremos:

$$U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{T}{2} \left(E(z) + z^{-1}E(z) \right)$$

Rearranjando os termos da última equação, temos:

$$(2.13.) \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Esta última equação define a razão entre duas transformadas de Z de dois sinais, e é, como nós sabemos, denominada *função de transferência*. Mais genericamente a função de transferência de Z é:

$$(2.14.) H(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})},$$

e, caso $n \geq m$, podemos apresentar esta equação em termos de z :

$$(2.15.) H(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_m z^{n-m}}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n} = \frac{b(z)}{a(z)}$$

Vamos admitir que todos os coeficientes de (2.15.) são nulos excepto $b_1=1$. Neste caso $H(z)=z^{-1}$. Considerando agora a equação diferença que deu origem à eq. (2.13.), a eq. (2.8.), temos:

$$(2.16.) u(k) = e(k-1)$$

Podemos então dar um significado à função de transferência z^{-1} . Ela representa um *atraso* de 1 intervalo de tempo entre a entrada e a saída de um sistema. Dado que as equações (2.11.), (2.12.) e (2.13.) são compostas de atrasos, podem também ser representadas em termos de z^{-1} . Se considerarmos a eq. (2.13.), podemos representá-la em diagrama de blocos como:

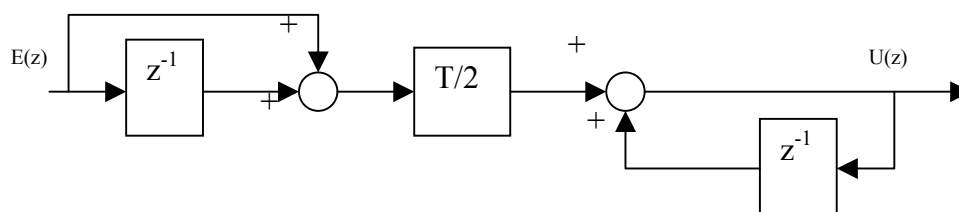


Fig. 2.5 – Diagrama de blocos correspondente à equação diferença (2.13.)

2.4.1 Diagramas de blocos e descrições em variáveis de estado

As equações diferença podem ser representadas graficamente por diagramas de blocos. As regras para redução destes diagramas são exactamente aquelas que foram introduzidas na Secção

Analogamente as formas canónicas introduzidas na Secção ... para representação de um sistema em variáveis de estado são também aplicáveis para sistemas discretos.

2.4.2 Estabilidade externa e o teste de Jury

Uma das propriedades mais importantes de um sistema é a sua estabilidade. A instabilidade interna é determinada pelos valores próprios da matriz **A**. A estabilidade externa ou estabilidade ELSL - Entrada Limitada Saída Limitada (*Bounded Input Bounded Output-BIBO*) reflecte o facto de que, se um sistema for estável, a uma entrada limitada em magnitude corresponde sempre uma saída também limitada em magnitude.

Como sabemos, para sistemas contínuos, utilizamos para determinar se um sistema é ELSL estável o [critério de Routh-Hurwitz](#). Em sistemas discretos Jury e Blanchard introduziram em 1961 um teste análogo.

Admitamos que a nossa função de transferência discreta é:

$$(2.17.) \quad H(z) = \frac{b(z)}{a(z)},$$

onde $a(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$.

Então, a 1ª fase do teste de Jury corresponde a dispor os coeficientes de $a(z)$ nas duas 1ª linhas da rede da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \end{array}$$

As entradas na terceira linha são calculadas dos determinantes de 2ª ordem obtidas com as 2 linhas anteriores, onde a 2ª coluna do determinante é fixa e corresponde à última coluna das linhas acima. Estes determinantes são divididos por a_0 . A quarta linha obtém-se da terceira invertendo a ordem dos elementos.

| | | | | |
|-----------|-----------|---------|---------|-----------|
| a_0 | a_1 | \dots | \dots | a_n |
| a_n | a_{n-1} | \dots | \dots | a_0 |
| b_0 | b_1 | \dots | \dots | b_{n-1} |
| b_{n-1} | b_{n-2} | \dots | \dots | b_0 |

Onde:

$$b_0 = a_0 - \frac{a_n}{a_0} a_n$$

$$(2.18.) b_1 = a_1 - \frac{a_n}{a_0} a_{n-1}$$

$$\dots$$

O processo continua até termos as últimas linhas com apenas 1 elemento. O sistema é estável se todos os termos na primeira coluna das linhas ímpares forem positivos.

2.5 Modelos Discretos de Sistemas Amostrados

2.5.1 Usando a transformada de Z

Analisando o sistema da Fig. 1.3 sob o ponto de vista do computador, este gera uma sequência de dados, que são aplicados à D/A, posteriormente aplicados a plant, e depois amostrados pelo A/D, conforme se representa na fig. 2.6:

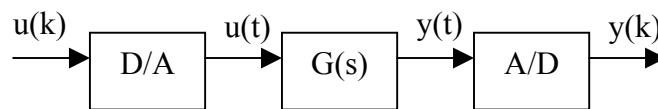


Fig 2.6 – Sistema amostrado

Pretendemos pois determinar a função de transferência entre as transformadas de Z da sequência $u(kT)$ e da sequência $y(kT)$.

Primeiramente, $y(k)$ são apenas amostras do sinal $y(t)$ da plant. Quanto ao funcionamento do dispositivo D/A, vamos assumir que ele é constituído por um *zero-order-hold (ZOH)*, isto é, que no instante k a entrada $u(k)$ é aplicada ao D/A, que mantém a saída a esse valor, constante, até ao próximo instante de amostragem.

Dado que a entrada da D/A é uma sequência de impulsos, a sua resposta impulsional é a representada na fig. 2.7.

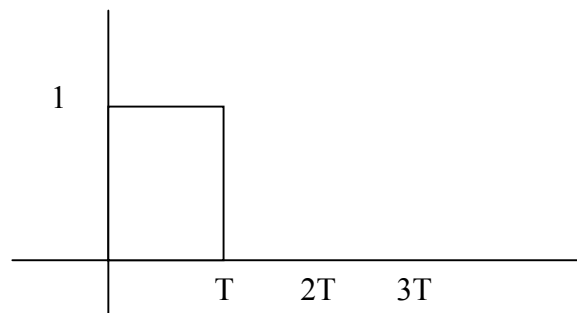


Fig. 2.7 – Resposta impulsional de um dispositivo D/A

No tempo pode ser expressa por:

$$(2.19.) h_{D/A}(t) = u(t) - u(t - T)$$

Aplicando transformadas de Laplace à eq. anterior, temos:

$$(2.20.) H_{D/A}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Combinando então esta função de transferência com a função de transferência do processo, teremos, para uma entrada unitária:

$$(2.21.) Y(s) = \left(1 - e^{-Ts}\right) \frac{G(s)}{s}$$

Então, a transformada de Z requerida é a transformada de Z das amostras do sinal temporal correspondente a (2.21.). Vamos exprimi-lo por:

$$\begin{aligned} G(z) &= Z[y(k)] = \\ (2.22.) &= Z\{L^{-1}[Y(s)]\} \equiv Z\{Y(s)\} \\ &= Z\left\{\left(1 - e^{-Ts}\right) \frac{G(s)}{s}\right\} \end{aligned}$$

Esta equação é a soma de 2 termos: o 1º é $Z\{G(s)/s\}$, enquanto o 2º é:

$$(2.23.) Z\left\{e^{-Ts} \frac{G(s)}{s}\right\} = z^{-1} Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

dado e^{-Ts} representar um atraso de exactamente 1 período. Assim sendo a função de transferência pretendida é:

$$(2.24.) G(z) = \left(1 - z^{-1}\right) Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

2.5.2 Modelos de espaço de estados

Sabemos que as equações dinâmicas de um sistema contínuo são:

$$(2.25.) \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{aligned}$$

que tem como solução:

$$(2.26.) \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{Bu}(\tau) d\tau,$$

ou, considerando $t_0 \neq 0$,

$$(2.27.) \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + e^{\mathbf{A}t} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau$$

Vamos agora calcular (2.27.) durante um intervalo de amostragem. Para isso faremos $t_0=kT$ e $t=(k+1)T$ na última equação:

$$(2.28.) \mathbf{x}(kT + T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}(kT+T)} \int_{kT}^{kT+T} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau$$

Este último resultado não assume nenhum tipo de *hold* aplicado à entrada do sistema.

Se se utilizar, como normalmente acontece, um ZOH, então

$$(2.29.) u(\tau) = u(kT) \quad kT \leq \tau < kT + T$$

Se fizermos a substituição $\eta = kT + T - \tau$ em (2.28.), temos:

$$(2.30.) \mathbf{x}(kT + T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}\eta} \mathbf{B}u(kT) d\eta$$

Se considerarmos:

$$(2.31.) \begin{aligned} \Phi &= e^{\mathbf{A}T} \\ \Gamma &= \int_0^T e^{\mathbf{A}\eta} d\eta \mathbf{B} \end{aligned}$$

e omitindo o intervalo de amostragem T , então a eq. (2.30.) transforma-se em:

$$(2.32.) \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma u(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} u(k) \end{aligned}$$

A solução analítica de (2.32.) é:

$$(2.33.) \Phi = e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{L}^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right\}_{t=T}$$

$$(2.34.) \Gamma = \mathbf{A}^{-1} \left[e^{\mathbf{A}\eta} \right]_0^T \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{e}^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I}) \mathbf{B}$$

$$(2.35.) \mathbf{x}(k+1) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{e}^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I}) \mathbf{B} u(k)$$

De salientar que (2.34.) só é válida se \mathbf{A} for não-singular. Caso isso não aconteça, podemos utilizar:

$$(2.36.) \Gamma = \mathbf{L}^{-1} \frac{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}}{s}$$

Uma outra maneira de calcular Φ e Γ é utilizar a expansão em série de potências:

$$(2.37.) \Phi = e^{AT} = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \frac{A^3 T^3}{3!} + \dots$$

ou, alternativamente:

$$(2.38.) \Phi = I + AT\Psi, \text{ onde}$$

$$(2.39.) \Psi = I + \frac{AT}{2!} + \frac{A^2 T^2}{3!} + \dots$$

Por integração de (2.38.), podemos determinar Γ :

$$(2.40.) \begin{aligned} \Gamma &= \int_0^T e^{A\eta} B d\eta = IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2 T^3}{3!} + \dots \quad B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^{k+1}}{(k+1)!} B = \\ &= T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^k}{(k+1)!} B = T\Psi B \end{aligned}$$

Vemos assim que através do cálculo da matriz Ψ , podemos calcular Φ e Γ , isto é, só necessitamos de efectuar uma expansão em série de potências. O método com melhores propriedades numéricas para determinar Ψ é:

$$(2.41.) \Psi \approx I + \frac{AT}{2} \left(I + \frac{AT}{3} \left(\dots \frac{AT}{N} \left(I + \frac{AT}{N} \right) \right) \dots \right)$$

De salientar que quando T é pequeno (comparado com as constantes de tempo associadas com os valores próprios de A), as seguintes aproximações são válidas:

$$(2.42.) \Phi = e^{AT} \approx I + AT$$

$$(2.43.) \Gamma = TB$$

O cálculo em computador das equações de estado utiliza as propriedades recursivas das equações de estado discretas, isto é, a partir de $x(0)$ e da sequência $\{u(k)\}$, podemos determinar $x(k+1)$ recursivamente:

$$\begin{aligned} x(1) &= \Phi x(0) + \Gamma u(0) \\ x(2) &= \Phi x(1) + \Gamma u(1) = \Phi(\Phi x(0) + \Gamma u(0)) + \Gamma u(1) \\ (2.44.) \quad x(3) &= \Phi^3 x(0) + \Phi^2 \Gamma u(0) + \Phi \Gamma u(1) + \Gamma u(2) \\ x(k) &= \Phi^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma u(j) \end{aligned}$$

Esta equação é conhecida como *equação de resposta dinâmica*.

2.5.3 Sistemas com tempo de atraso

2.5.3.1 Modelos de função de transferência

Muitos sistemas físicos exibem um tempo de atraso. É o caso, por exemplo, de sistemas químicos, onde o transporte dos materiais consome um tempo finito. Adicionalmente, devemos considerar que o controlador digital (computador) consome um tempo finito para os seus cálculos, o que se traduz exactamente no mesmo problema de considerarmos que o sistema a controlar tem um atraso.

Consideremos um sistema contínuo, caracterizado por uma função de transferência racional $H(s)$, sem atraso, e por um atraso λ :

$$(2.45.) G(s) = e^{-\lambda s} H(s)$$

O termo λ engloba o tempo de atraso do processo e o atraso de computação. Vamos separar o atraso λ no menor número inteiro (l) de intervalos de amostragens que englobe λ , menos uma fracção (m) do intervalo de amostragem:

$$(2.46.) \lambda = lT - mT$$

Então, teremos $G(s)/s$:

$$(2.47.) \frac{G(s)}{s} = e^{-lTs} \frac{e^{mTs} H(s)}{s}$$

Dado que no 1º termo de (2.47.), l é inteiro, aplicando transformadas de Z , este reduz-se a z^{-l} . Assim sendo, resta-nos a transformada do 2º termo. Ela pode ser obtida através dos métodos normais, tendo em atenção que os correspondentes sinais temporais são adiantados de mT segundos, isto é, iniciam-se antes do instante de tempo 0. Como estamos a considerar sinais causais, só devemos considerar, para o cálculo da transformada, a porção do sinal correspondente a $t \geq 0$.

Assim, a função de transferência discreta, assumindo um amostrador de topo plano (zero-order-hold) à entrada do sistema, é:

$$(2.48.) Z[G(s)] = G(z) = \frac{z-1}{z} z^{-l} Z\left[\frac{e^{mTs} H(s)}{s}\right] = \frac{z-1}{z^{l+1}} Z\left[\frac{e^{mTs} H(s)}{s}\right]$$

2.5.3.2 Modelos de espaço de estados

Consideremos o sistema contínuo:

$$(2.49.) \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t - \lambda) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

A solução geral de (2.49.) é, como sabemos:

$$(2.50.) \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau - \lambda)d\tau$$

Se na última equação, fizermos $t_0=kT$ e $t=(k+1)T$, ficamos com:

$$(2.51.) \mathbf{x}(kT + T) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}(kT+T-\tau)}\mathbf{B}u(\tau - \lambda)d\tau$$

Se substituirmos em (2.51.) $\eta = kT + T - \tau$ no integral, a eq. transforma-se em:

$$(2.52.) \mathbf{x}(kT + T) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}\eta}\mathbf{B}u(kT + T - \lambda - \eta)d\eta$$

Do mesmo modo que fizemos para os modelos de função de transferência, vamos separar o atraso λ no menor número inteiro (l) de intervalos de amostragens que englobe λ , mais uma fracção (m) do intervalo de amostragem:

$$(2.53.) \lambda = lT - mT$$

Com esta substituição, (2.52.)vem como:

$$(2.54.) \mathbf{x}(kT + T) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}\eta}\mathbf{B}u(kT + T - lT + mT - \eta)d\eta$$

O significado deste integral torna-se mais óbvio se atentarmos na fig. abaixo.

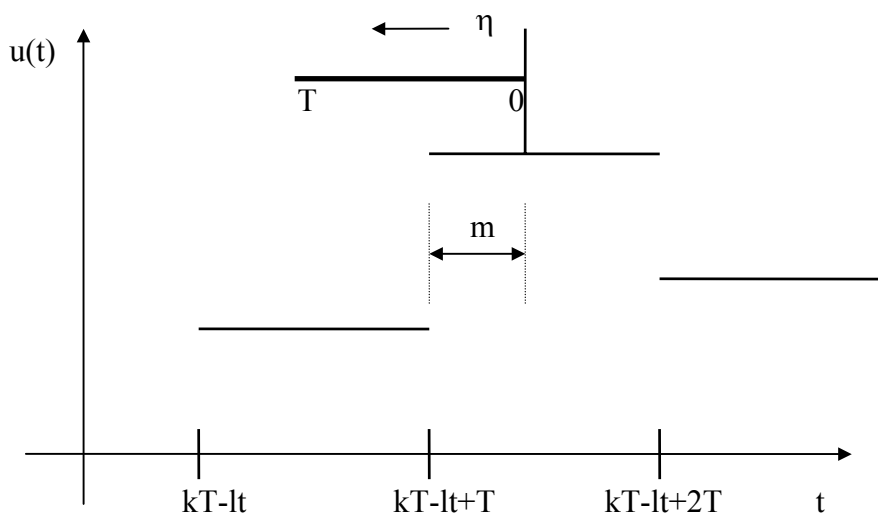


Fig. 2.8 - Interpretação gráfica de (2.54.)

O integral é em ordem a η , que varia de 0 a T. Assim, para $t=kT-lT$, $u(kT-lT+mT-\eta)$, toma primeiramente o valor de $u(kT-lT+T)$, durante mT segundos, e depois o valor de $u(kT-lT)$, durante $T-mT$ segundos. Podemos pois dividir o integral em (2.54.) em dois integrais:

$$(2.55.) \quad \mathbf{x}[k+1] = e^{AT} \mathbf{x}[k] + \int_0^{mT} e^{A\eta} \mathbf{B} u[k+1-l] d\eta + \int_{mT}^T e^{A\eta} \mathbf{B} u[k-l] d\eta = \\ = \Phi \mathbf{x}[k] + \Gamma_1 u[k-l] + \Gamma_2 u[k-l+1]$$

onde

$$\Phi = e^{AT} \\ (2.56.) \quad \Gamma_1 = \int_{mT}^T e^{A\eta} \mathbf{B} d\eta \\ \Gamma_2 = \int_0^{mT} e^{A\eta} \mathbf{B} d\eta$$

Para continuar a análise vamos separar os casos em que $l=0$, $l=1$, e $l>1$.

2.5.3.2.1 $l=0$

Neste caso $\lambda = -mT$, o que implica não um atraso, mas sim uma predição. Como $m < 1$, a saída será sempre nula antes de $k=0$, e o sistema discreto é causal. O sistema discreto com $l=0$, $m \neq 0$, apresenta para $k=0$ a mesma resposta que o sistema com $l=m=0$ apresentaria para $t=mT$, i.e., apresenta nos instantes de amostragem a resposta que o sistema sem atraso apresentaria entre os instantes de amostragem. Esta transformada é conhecida como *transformada de Z modificada*.

Na eq. (2.55.) devemos calcular Γ_1 e Γ_2 . Para facilitar este cálculo, vamos modificar Γ_1 :

$$(2.57.) \quad \Gamma_1 = \int_{mT}^T e^{A\eta} \mathbf{B} d\eta = \int_0^{T-mT} e^{A(mT+\sigma)} \mathbf{B} d\sigma = \\ = e^{AmT} \int_0^{T-mT} e^{A\sigma} \mathbf{B} d\sigma$$

onde foi feita a substituição $\sigma = \eta - mT$. Vamos adicionalmente definir duas matrizes:

$$\Phi(a) = e^{Aa}$$

$$(2.58.) \Psi(a) = \frac{1}{a} \int_0^a e^{A\sigma} d\sigma$$

Utilizando as definições (2.58.), as matrizes Γ_1 e Γ_2 ficam:

$$(2.59.) \begin{aligned} \Gamma_1 &= (T - mT)\Phi(mT)\Psi(T - mT)B \\ \Gamma_2 &= mT\Psi(mT)B \end{aligned}$$

Esta definição é também útil sob o ponto de vista computacional. Pode-se facilmente provar¹ que:

$$(2.60.) \Phi(a) = I + a\Psi(a)A$$

Isto é, para computar (2.55.), só precisamos de calcular a série $\Psi(a)$, através de:

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= \frac{1}{a} \int_0^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \sigma^k}{k!} d\sigma = \\ (2.61.) &= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \frac{a^{k+1}}{k+1} = \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k a^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

de seguida calculamos $\Phi(T)$, através de (2.60.), Γ_1 e Γ_2 através de (2.59.).

Retornando ao caso $l=0$, $m \neq 0$, as equações discretas são:

$$(2.62.) \mathbf{x}[k+1] = \Phi \mathbf{x}[k] + \Gamma_1 u[k] + \Gamma_2 u[k+1]$$

Para mudar esta equação numa forma semelhante à de espaço de estados, temos de eliminar $u[k+1]$. Façamos para isso a substituição:

$$(2.63.) E[k] = \mathbf{x}[k] - \Gamma_2 u[k]$$

Então teremos:

$$\begin{aligned} E[k+1] &= \mathbf{x}[k+1] - \Gamma_2 u[k+1] = \\ &= \Phi \mathbf{x}[k] + \Gamma_1 u[k] + \Gamma_2 u[k+1] - \Gamma_2 u[k+1], \end{aligned}$$

e, substituindo $\mathbf{x}[k]$ pelo seu valor dado em (2.63.),

$$\begin{aligned} E[k+1] &= \Phi \{E[k] + \Gamma_2 u[k]\} + \Gamma_1 u[k] = \\ (2.64.) &= \Phi E[k] + (\Phi \Gamma_2 + \Gamma_1) u[k] = \\ &= \Phi E[k] + \Gamma u[k] \end{aligned}$$

¹ Veja o capítulo 2.4.4 de Franklin & Powell

Dado que temos agora uma nova variável de estado, a equação de saída necessita de ser modificada:

$$\begin{aligned}
 (2.65.) \quad y[k] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[k] = \\
 &= \mathbf{C}\{\mathbf{E}[k] + \mathbf{\Gamma}_2 u[k]\} = \\
 &= \mathbf{C}\mathbf{E}[k] + \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}_2 u[k] = \\
 &= \mathbf{C}\mathbf{E}[k] + \mathbf{\Delta}u[k], \text{ onde } \mathbf{\Delta} = \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}_2
 \end{aligned}$$

Note que, se $m=0$, então, $\mathbf{\Gamma}_2=0$ e (2.64.) e (2.65.) reduzem-se às equações de estado discretas standard.

2.5.3.3 $l=1$

Neste caso as equações de estado são:

$$(2.66.) \quad \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[k] + \mathbf{\Gamma}_1 u[k-1] + \mathbf{\Gamma}_2 u[k]$$

Devemos eliminar $u[k-1]$ de (2.66.). Para isso, podemos aumentar o estado de 1 dimensão, definindo um novo estado $\mathbf{x}_{n+1}[k+1]=u[k]$.

As novas equações dinâmicas são:

$$\begin{aligned}
 (2.67.) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}[k+1] \\ \mathbf{x}_{n+1}[k+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{\Gamma}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ \mathbf{x}_{n+1}[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_2 \\ 1 \end{bmatrix} u[k] \\
 y[k] &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ \mathbf{x}_{n+1}[k] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2.5.3.4 $l>1$

A equação de estado é:

$$(2.68.) \quad \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[k] + \mathbf{\Gamma}_1 u[k-1] + \mathbf{\Gamma}_2 u[k-1+1]$$

Devemos neste caso eliminar as entradas de controlo atrasadas até $u[k]$. Para isso, introduzimos l variáveis de estado, tais que:

$$(2.69.) \quad \mathbf{x}_{n+1}[k] = u[k-1], \quad \mathbf{x}_{n+2}[k] = u[k-1+1], \quad \dots, \quad \mathbf{x}_{n+l}[k] = u[k-1]$$

A estrutura das equações dinâmicas é, neste caso:

$$(2.70.) \begin{bmatrix} \mathbf{x}[k+1] \\ \mathbf{x}_{n+1}[k+1] \\ \mathbf{x}_{n+2}[k+1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n+1}[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 & \Gamma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ \mathbf{x}_{n+1}[k] \\ \mathbf{x}_{n+2}[k] \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n+1}[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ \mathbf{x}_{n+1}[k] \\ \mathbf{x}_{n+2}[k] \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n+1}[k] \end{bmatrix}$$

Esta última situação pode ser visualizada em termos de diagramas de blocos da seguinte forma:

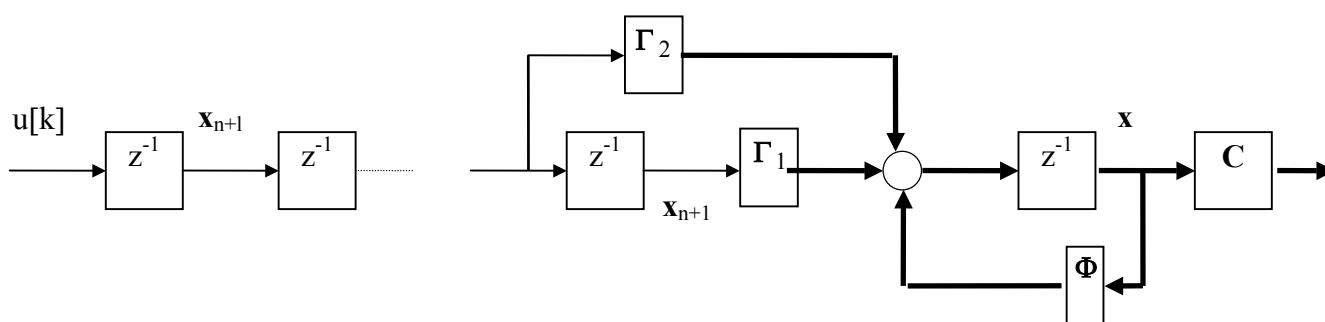


Fig. 8 - Diagrama de blocos de um sistema com um atraso superior a 1 período

2.6 Relação entre os pólos no plano s e os pólos no plano z de funções amostradas

Vamos expor este assunto através de exemplos:

- Exponencial decrescente

$$f(t) = e^{-at}, t > 0, a > 0$$

A sua transformada de Laplace é:

$$F(s) = \frac{1}{s + a}$$

O sinal amostrado é:

$$f[kT] = e^{-akT}, k > 0$$

e a sua transformada de Z é:

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

- Sinusoidal amortecida

$$f(t) = e^{-\alpha t} \sin(w_0 t)$$

A sua transformada de Laplace é:

$$F(s) = \frac{w_0}{(s + a)^2 + w_0^2}$$

O sinal amostrado é:

$$f(t) = e^{-akT} \sin(w_0 kT)$$

A sua transformada de Z é:

$$F(z) = \frac{ze^{-aT} \sin(w_0 T)}{z^2 - 2e^{-aT} \cos(w_0 T)z + e^{-2aT}}$$

Através destes exemplos, é fácil de verificar que no processo de amostragem, os pólos no plano s são transformados em pólos do plano Z, através da transformação:

$$(2.71.) z = e^{Ts}$$

Convirá nesta fase relembrar o mapeamento de zonas importantes do plano s no plano Z, através da transformação (2.71.). Assim:

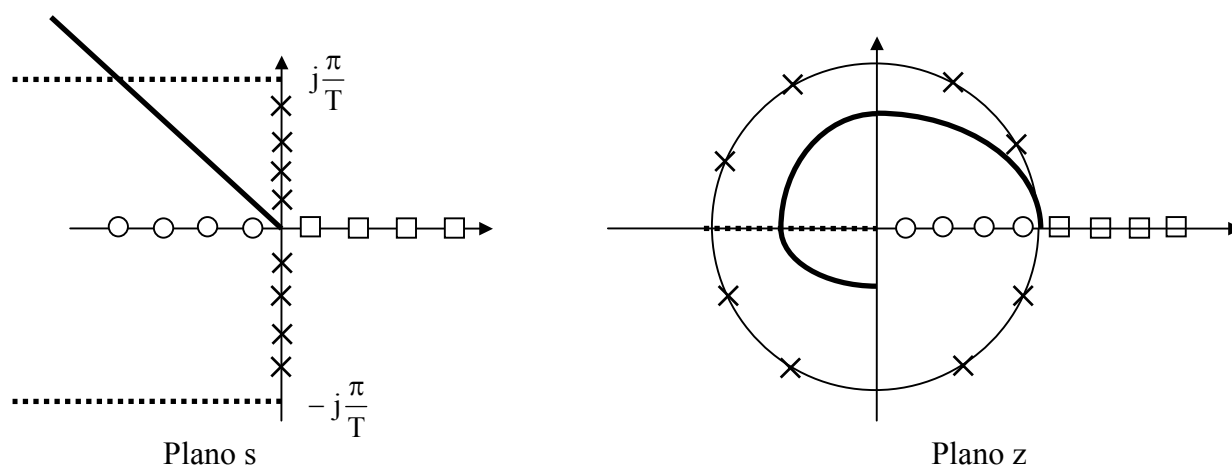


Fig. 9 - Transformações de zonas importantes do plano s através de (2.71.)

A transformação (2.71.) não é unívoca. Com efeito, todos os pontos do plano s que satisfaçam:

$$s = s_1 + j \frac{2\pi}{T} N, \quad N \text{ inteiro}$$

são transformados no mesmo ponto $z_1 = e^{Ts_1}$, já que $e^{Ts_1 + j2\pi N} = e^{Ts_1}$. A importância deste facto será descrita mais tarde.

Da mesma forma que é importante, no projecto de sistemas contínuos definir algumas regiões do plano s , também no plano z é conveniente introduzi-las.

Consideremos assim:

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}, \text{ cujos pólos são:}$$

$$s = -\xi w_n \pm j w_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Utilizando a transformação (2.71.), temos:

$$(2.72.) \quad z = e^{-\xi w_n T} e^{\pm j w_n T \sqrt{1 - \xi^2}} = r e^{j\theta}$$

Temos assim:

$$(2.73.) \quad \xi w_n T = -\ln r$$

$$(2.74.) \quad w_n T \sqrt{1 - \xi^2} = \theta$$

Se dividirmos a 1ª destas equações pela 2ª, ficamos com:

$$\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{-\ln r}{\theta}, \text{ ou}$$

$$(2.75.) \quad \xi = \frac{-\ln r}{\sqrt{\ln^2 r + \theta^2}}$$

Se agora substituirmos ξ dado por (2.75.) em (2.73.), obtemos:

$$(2.76.) \quad w_n = \frac{1}{T} \sqrt{\ln^2 r + \theta^2}$$

Por outro lado,

$$(2.77.) \quad \tau = \frac{1}{\xi w_n} = \frac{-T}{\ln r}$$

e o número de amostras por ciclo, N , é dado por:

$$(2.78.) \quad N = \frac{2\pi}{\theta} = \frac{2\pi}{w_d T}$$

As eq. (2.75.) e (2.76.) definem contornos no plano z , que correspondem a relações de amortecimento constantes e frequências amortecidas constantes. Estes contornos estão representados na fig. 10, e são utilizados no desenho do sistema de controlo.

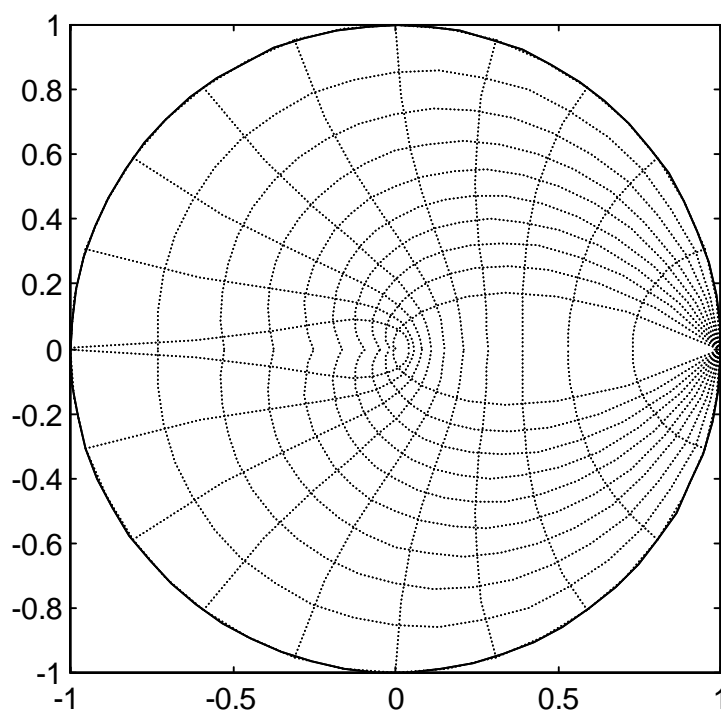


Fig. 10 – Grelha no plano z

2.7 Resposta ao degrau

Como o interesse principal da disciplina centra-se no desenho de controladores, e um dos testes mais importantes para sistemas de controlo centra-se na sua resposta ao degrau, estudaremos agora qual o efeito dos zeros de uma função de transferência na resposta ao degrau de um sistema.

Vamos considerar um caso de uma função de transferência:

$$(2.79.) H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = k \frac{z - z_1}{z^2 - 2r \cos(\theta) + r^2}$$

Escolhamos o ganho, k , de modo a que a resposta em regime estacionário tenha a mesma amplitude do degrau de entrada. Vamos primeiramente fixar os pólos de tal maneira que a relação de amortecimento, ζ , seja igual a 0.5, e fazer $\theta = 18^\circ$. Isto quer dizer que os pólos em s , dados por:

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \zeta = 0.5$$

são transformados em:

$$z = e^{-\zeta\omega_n T} e^{\pm j\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2} = 18 \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{10}$$

$$(2.80.) \quad \omega_n T = \frac{\pi}{10\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$z = 0.834e^{\pm j\frac{\pi}{10}}$$

A fig. 11 ilustra a resposta ao degrau, para 3 diferentes localizações do zero.

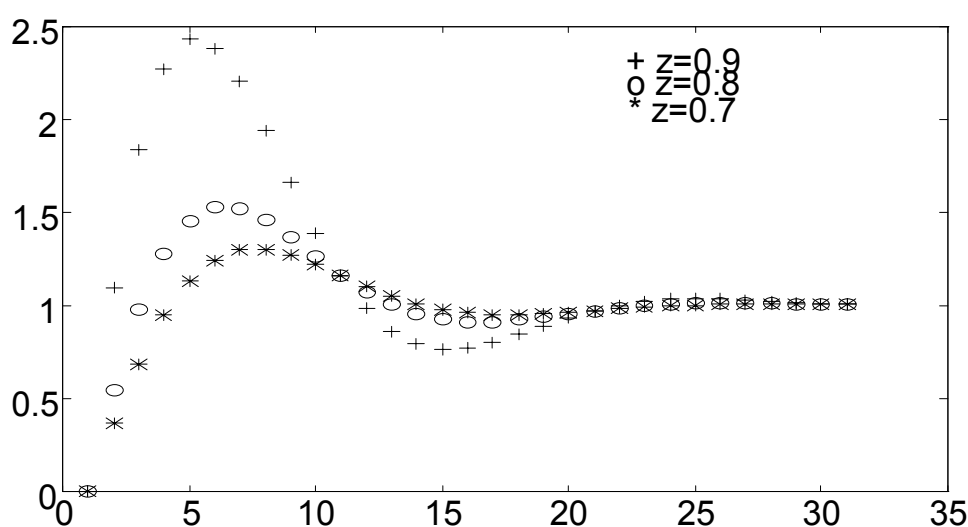


Fig. 11 - Resposta ao degrau do sistema (2.79.), com os pólos dados por (2.80.) e diferentes localizações do zero.

Da fig. anterior facilmente se pode concluir que a principal influência do zero reflecte-se na percentagem de sobrelevação obtida, aumentando à medida que o zero se aproxima de +1.

2.8 Resposta na frequência

Já sabemos que, em sistemas contínuos, se aplicarmos uma sinusóide de frequência ω_0 à entrada, obteremos, após a resposta transiente ter desaparecido, uma sinusóide à saída, com a mesma frequência, com a amplitude multiplicada por $|H(j\omega_0)|$ e desfasada de $\angle H(j\omega_0)$.

Para sistemas discretos, acontece exactamente o mesmo fenómeno. A resposta de um sistema com função de transferência $H(z)$ é:

$$(2.81.) Y(z) = H(z)U(z)$$

Assumindo a entrada um cosseno amostrado com período de amostragem T , temos:

$$(2.82.) u[kT] = \cos(w_0 kT), k > 0$$

A transformada de Z de (2.82.) é:

$$(2.83.) U(z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{z}{z - e^{jw_0 T}} + \frac{z}{z - e^{-jw_0 T}} \right\}$$

Então $Y(z)$ é dado por:

$$(2.84.) Y(z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{zH(z)}{z - e^{jw_0 T}} + \frac{zH(z)}{z - e^{-jw_0 T}} \right\}$$

A resposta em regime estacionário corresponde aos termos da expansão de (2.84.) associados com os pólos no círculo unitário:

$$(2.85.) Y_{ss}(z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{zH(e^{jw_0 T})}{z - e^{jw_0 T}} + \frac{zH(e^{-jw_0 T})}{z - e^{-jw_0 T}} \right\}$$

Se $H(e^{jw_0 T}) = A(w_0 T)e^{j\psi(w_0 T)}$, então (2.85.) fica:

$$(2.86.) Y_{ss}(z) = \frac{A(w_0 T)}{2} \left\{ \frac{ze^{j\psi}}{z - e^{jw_0 T}} + \frac{ze^{-j\psi}}{z - e^{-jw_0 T}} \right\}$$

Invertendo para o tempo, ficamos com:

$$(2.87.) y_{ss}(kT) = \frac{A(w_0 T)}{2} \left\{ e^{j\psi} e^{jw_0 Tk} + e^{-j\psi} e^{-jw_0 Tk} \right\} = A \cos(w_0 Tk + \psi)$$

Vemos assim que a resposta do sistema é um cosseno amostrado, com uma amplitude A e desfasado de ψ . Embora este assunto seja abordado posteriormente, deixamos aqui apenas a nota que qualquer senoide com período $w_0 + 2\pi kT$ passará também por as amostras da eq. (2.87.)

2.9 Propriedades da transformada de Z

Com o intuito de relembrarmos a matéria leccionada em Sistemas e Sinais, vamos apenas enunciar as propriedades da transformada de Z:

2.9.1 Linearidade

$$(2.88.) \alpha f_1[k] + \beta f_2[k] \leftrightarrow \alpha F_1(z) + \beta F_2(z)$$

2.9.2 Convolução temporal

$$(2.89.) \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_1[l] f_2[k-l] \leftrightarrow F_1(z) F_2(z)$$

2.9.3 Deslocamento no tempo

$$(2.90.) f[k+n] \leftrightarrow z^n F(z)$$

2.9.4 Factor de escala no plano z

$$(2.91.) r^{-k} f[k] \leftrightarrow F(rz)$$

2.9.5 Teorema do valor inicial

$$(2.92.) f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

2.9.6 Teorema do valor final

$$(2.93.) \lim_{k \rightarrow \infty} f[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z)$$

2.9.7 Método alternativo de cálculo da transformada de z

Já sabemos que a transformada de z se pode calcular através da definição. Um método alternativo, que se pode usar caso se conheça a transformada de Laplace de um sinal é o seguinte:

Seja $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, racional com k pólos simples ξ_n . Então:

$$(2.94.) F(z) = \sum_{n=1}^k \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} \frac{1}{1 - e^{\xi_n T} z^{-1}}$$

$$\text{onde } D'(\xi_n) = \left. \frac{\partial D(s)}{\partial s} \right|_{s=\xi_n}.$$

Caso $F(s)$ tenha pólos múltiplos, i.e., pólos em $s=s_1, s_2, \dots, s_k$, de multiplicidade m_1, m_2, \dots, m_k :

$$(2.95.) F(z) = \sum_{n=1}^k \sum_{i=1}^{m_n} \frac{(-1)^{m_n-i} k_{ni}}{(m_n-i)!} \left[\frac{\partial^{m_n-i}}{\partial s^{m_n-i}} \left(\frac{1}{1-e^{-Ts}} \right) \right] \Bigg|_{s=s-s_n} \Bigg|_{z=e^{Ts}}$$

onde

$$(2.96.) k_{ni} = \frac{1}{(i-1)!} \left[\frac{\partial^{i-1}}{\partial s^{i-1}} (s-s_n)^{m_n} F(s) \right] \Bigg|_{s=s_n}$$

2.9.8 A transformada inversa de z

É sabido que a transformada de Laplace e a sua inversa são únicas. O mesmo não acontece com a transformada de Z e a sua inversa, dado que a transformada inversa de Z de $F(z)$ só coincide com $f(t)$ nos instantes de amostragem. Existem 3 métodos principais de obter a transformada inversa de Z:

2.9.8.1 Expansão em fracções parciais

É equivalente ao método usado para as transformadas de Laplace, com a excepção de que expandimos $F(z)/z$, e não $F(z)$.

Assim, o termo

$$\frac{Az}{z - e^{-aT}}$$

tem como transformada inversa:

$$Ae^{-akT}$$

enquanto o termo

$$\frac{A}{z - e^{-aT}} = z^{-1} \frac{Az}{z - e^{-aT}}$$

tem como transformada inversa:

$$Ae^{-a(k-1)T}$$

2.9.8.2 Método da série de potências

Utilizando a definição da transformada de Z, se determinarmos $F(z)$ como uma série de potências decrescentes, através da divisão do numerador pelo denominador, obteremos o valor do sinal nos instantes de amostragem. Este método gera uma forma aberta da solução, enquanto o 1º método dá-nos uma forma fechada.

2.9.8.3 Fórmula de inversão

A transformada inversa de Z é dada por:

$$(2.97.) f[kT] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^k \frac{dz}{z}$$

onde C é um contorno que engloba todas as singularidades de $F(z)z^{k-1}$. Através do teorema dos resíduos sabemos que o lado direito de (2.97.) é:

$$(2.98.) f[kT] = \sum_i \operatorname{Res} \left(F(z) z^{k-1} \right) \Big|_{z=z_i}$$

onde z_i são os pólos de $F(z)z^{k-1}$.

2.10 A transformada delta

2.10.1 Os operadores deslocamento e delta

Uma maneira de descrever os modelos amostrados é através do operador deslocamento (*shift*):

$$(2.99.) q\{x_k\} = \{x_{k+1}\}$$

O operador q aplicado a uma sequência transforma-o na mesma sequência, mas adiantada de uma amostra. É portanto conhecido como operador de deslocamento para a frente - *forward shift*.

O operador inverso - *backward shift* - deslocamento para trás, quando aplicado a uma sequência atraza-a de uma amostra:

$$(2.100.) q^{-1}\{x_k\} = \{x_{k-1}\}$$

Em muitos textos de controlo, o símbolo z é utilizado para representar o operador q . Matematicamente isto não é correcto pois q tem o mesmo significado, para tempo discreto, do operador de tempo contínuo d/dt , enquanto z tem a correspondência, em tempo contínuo, da variável complexa s .

O operador q é o operador standard encontrado nos vários livros de controlo. Mais recentemente tem despertado interesse um novo operador, que se pareça mais com uma derivada. Este operador é o operador delta (δ), definido como:

$$(2.101.) \delta \equiv \frac{q-1}{T}$$

A forma equivalente da eq. (2.99.) é assim:

$$(2.102.) \delta x_k \equiv \frac{x_{k+1} - x_k}{T}$$

Vemos assim que o operador δ assemelha-se muito mais a uma derivada do que o operador q . Normalmente o operador q conduz a expressões mais simples, enquanto o operador δ conduz a modelos mais semelhantes aos obtidos em equações diferenciais, e apresenta também melhores propriedades numéricas.

2.10.2 As transformadas Z e Delta

É fácil provar que passar de uma equação diferença utilizando o operador q para a sua transformada de Z envolve apenas a troca do símbolo q pelo símbolo z , à parte de condições iniciais.

Utilizando este raciocínio, e se definirmos uma transformada associada com o operador δ , a transformada Delta, esta deveria estar relacionada com a transformada de Z, através de uma relação semelhante a (2.101.). Introduzindo a variável γ :

$$(2.103.) \gamma = \frac{z-1}{T}, \quad \text{ou} \quad z = \gamma T + 1$$

a transformada Delta deveria estar relacionada com a transformada de Z através de:

$$(2.104.) F_{\Delta}(\gamma) = F(z)|_{z=\gamma T+1}$$

Em termos da sequência $\{f_k\}$, a transformada Delta deveria ser dada por:

$$(2.105.) F_{\Delta}(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (\gamma T + 1)^{-k}$$

No entanto introduz-se um factor de escala adicional T em (2.105.), e temos assim:

$$(2.106.) D(f_k) = F_{\Delta}(\gamma) \equiv T \sum_{k=0}^{\infty} f_k (\gamma T + 1)^{-k}$$

A eq. (2.104.) transforma-se assim em:

$$(2.107.) F_{\Delta}(\gamma) = TF(z)|_{z=\gamma T+1}$$