Módulo 11

Sistemas lineares discretos e amostrados

1 Introdução

Microcomputadores e microprocessadores digitais são largamente utilizados na indústria atual, seja para fins de supervisão ou de controle dos processos. No entanto, um grande número de sistemas industriais são de natureza analógica. Sempre que um microcomputador faz parte de um sistema analógico a presença de *conversores A/D e D/A* se faz necessária.

Cada sinal analógico que será processado por um computador digital deve primeiro ser convertido de analógico para digital por um conversor A/D. Paralelamente, cada valor digital que irá influenciar o sistema analógico deverá primeiro ser convertido de digital para analógico por um conversor D/A. Como a saída do computador digital não muda até que os próximos cálculos e conversões D/A sejam completados, o sinal analógico gerado por alguns conversores D/A são mantidos constantes durante cada ciclo. Isto é feito por um dispositivo chamado *sample-and-hold (S/H)*. Conversores A/D também utilizam dispositivos *S/H*.

1.1 Escolha do Período de Amostragem

A melhor escolha do período de amostragem em sistemas de controle é um compromisso entre vários fatores normalmente contraditórios. Normalmente a performance de um controlador digital melhora com o aumento da frequência de amostragem mas o custo do dispositivo também. Diminuição da frequência de amostragem significa mais tempo disponível para o cálculo do sinal de controle em tempo real, o que possibilita a utilização de computadores mais lentos e portanto mais baratos. Para sistemas com conversores A/D, menor frequência de amostragem significa que menor velocidade de conversão é necessária, o que também diminui o custo do dispositivo. Além disso, normalmente uma grande frequência de amostragem requer uma grande precisão na representação binária (número de bits elevado), o que também aumenta o custo.

Vários fatores afetam a performance de controladores digitais e para que o sistema apresente uma performance mínima aceitável se faz necessário uma frequência de amostragem mínima tal que todos os sinais presentes no sistema de controle (multivariável ou não), e em especial as variáveis controladas, respeitem o Teorema da Amostragem no pior caso de excitação do sistema.

Para um sistema analógico, em malha fechada com erro nulo para resposta ao degrau, vamos definir frequência de banda passante, e a denotaremos por ω_b, como sendo a maior frequência correspondente ao ganho de $-3dB$. Em sistemas multivariáveis onde o número de entradas é igual ao número de saídas, isto é a matriz de transferência é quadrada, a banda passante pode ser definida através do diagrama de Bode do determinante da matriz de transferência. Para plantas não quadradas podemos utilizar o diagrama de Bode do

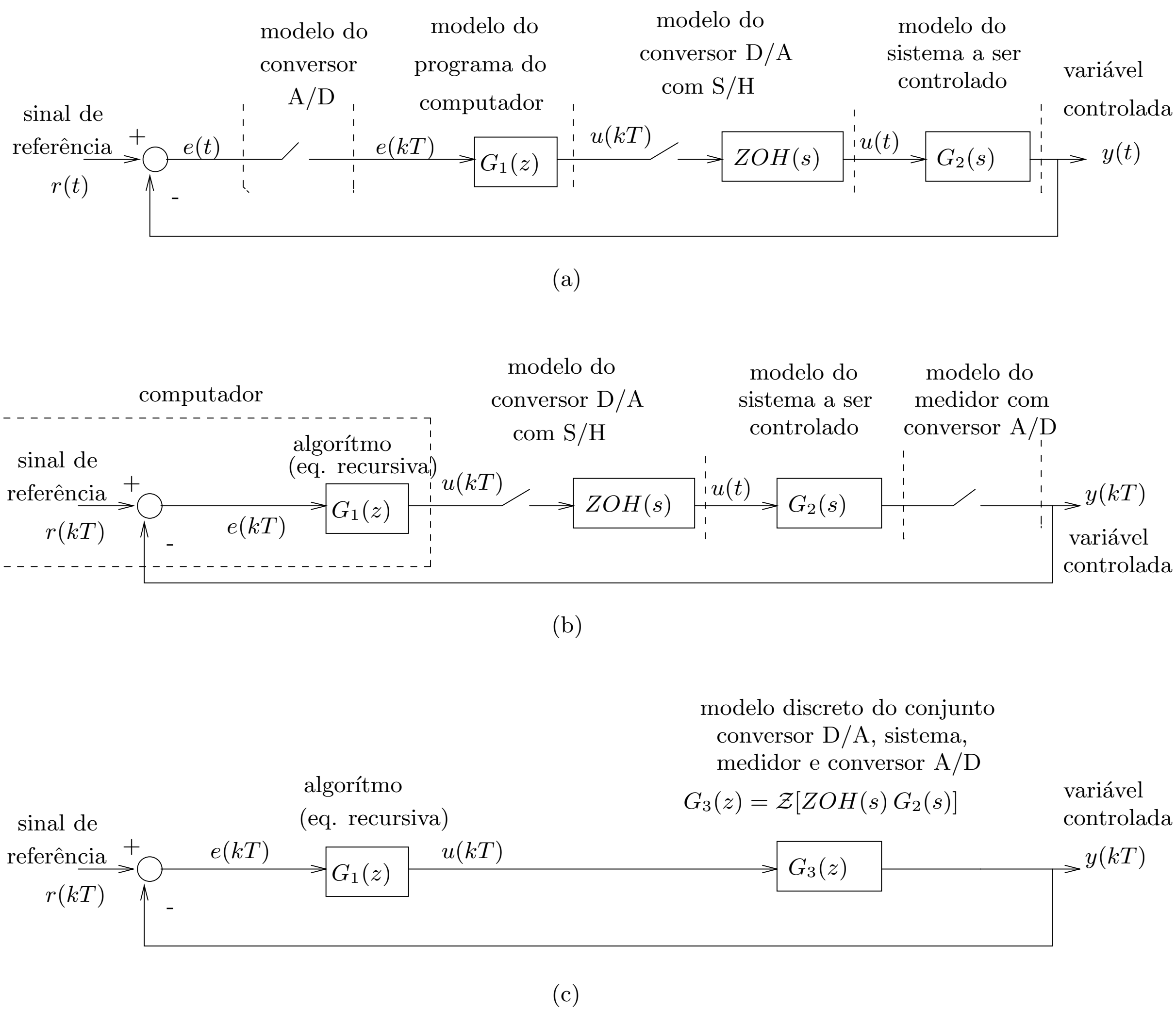

Figura 1: Sistema de controle digital e seu modelo discreto

valor singular máximo da matriz de transferência. A banda passante do sistema de malha fechada deve ser escolhida em função dos requisitos de rapidez de resposta desejados para a malha fechada. Já para a escolha do período de amostragem devemos levar em conta todos os seguintes aspectos:

1. Seguir sinais de referência com energia dentro da banda passante do sistema.
2. Tempo de acomodação pequeno e pouca oscilação.
3. Erros devido à perturbações e ruídos que incidem sobre o sistema a ser controlado dificultando o controle adequado.
4. Degradação da estabilidade que aumenta com a diminuição da frequência de amostragem devido à sensibilidade à erros nos parâmetros do modelo. Isto é acentuado ainda mais em conversores com palavra de tamanho pequeno.
5. Introdução de prefiltros (analógicos) de amostragem para atenuar ruídos de medida mas que também podem introduzir defasagens na variável medida dificultando o projeto do controlador em alguns casos.

Tipicamente, a frequência de amostragem $\omega_a = \frac{2\pi}{T}$ é escolhida de 15 à 20 vezes maior que ω_b, isto é, $15\omega_b \leq \omega_a \leq 20\omega_b$. Para maiores detalhes veja por exemplo [2],[1],[3].

2 Representação de estados

Podemos obter o modelo de estado discreto a partir das equações de estado de tempo contínuo. Para esse fim considere as equações de tempo contínuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2}$$

cuja solução é

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \tag{3}$$

Vamos assumir que o controle é constante entre os instantes de amostragem, isto é, o sinal de controle analógico é obtido é a resposta de segurador de ordem zero alimentado com as amostras do sinal de controle coletadas nos instantes de amostragem. Como todas as componentes do sinal $u(t)$ são constantes nos intervalos $kT \leq t < kT + T$ obtemos de (3)

$$x(kT+T) = e^{A(kT+T)}x(0) + e^{A(kT+T)}\int_0^{kT+T} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \tag{4}$$
$$x(kT) = e^{A(kT)}x(0) + e^{A(kT)}\int_0^{kT} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \tag{5}$$

Multiplicando (5) por e^{AT} e subtraindo de (4) ficamos com

$$x(kT+T) = e^{AT}x(kT) + e^{A(kT+T)}\int_{kT}^{kT+T} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \tag{6}$$

Como $u(t)$ é constante no intervalo $kT \leq t < kT+T$ podemos substituir a constante $u(\tau)$ por $u(kT)$ na equação acima[1] e trocando o índice de integração ($t = \tau - kT$) obtemos

$$x(kT+T) = e^{AT}x(kT) + e^{AT}\int_0^T e^{-At}Bu(kT)dt \tag{7}$$

$$x(kT+T) = e^{AT}x(kT) + \int_0^T e^{A\lambda}Bu(kT)d\lambda \qquad \text{onde } \lambda = T - t \tag{8}$$

Definindo

$$\mathbf{A} = e^{AT} \tag{9}$$

$$\mathbf{B} = \int_0^T e^{A\lambda}Bd\lambda \tag{10}$$

a expressão (8) se escreve como

$$x(kT+T) = \mathbf{A}x(kT) + \mathbf{B}u(kT) \tag{11}$$

onde $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ são dados[2] por (9),(10) e $u(kT)$ é constante no período T entre instantes consecutivos de amostragem. Note que $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dependem de T. Por outro lado a equação de saída fica

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \tag{12}$$

e as matrizes C, D são as mesmas da representação de estados contínua e portanto não dependem do período T. Observe que quando T é muito pequeno a matriz $\mathbf{A} = e^{AT}$ se aproxima da identidade, isto é os autovalores da matriz de dinâmica discreta se aproximam da unidade.

Assim, a representação de estados de tempo discreto de um sistema é dada pelas equações recursivas

$$x(kT+T) = A\,x(kT) + B\,u(kT) \quad , \quad x(kT) \in \mathbb{R}^n, \quad u(kT) \in \mathbb{R}^q \tag{13}$$

$$y(kT) = C\,x(kT) + D\,u(kT) \quad , \quad y(kT) \in \mathbb{R}^m \tag{14}$$

onde $x(kT), u(kT), y(kT)$ é o estado, controle e saída no instante $t = kT$ sendo k uma variável discreta ($k \in \{0, 1, \dots\}$). A primeira equação indica como o estado, no instante seguinte, é calculado a partir do estado e controle no instante atual gerando assim uma recursividade na atualização do estado. A partir de agora usaremos a notação (13),(14) para representar o sistema discreto, lembrando que as matrizes A, B nesta representação correspondem às matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ indicadas em (9),(10).

2.1 Solução da equação de estados

A resposta do sistema (13) possui duas componentes distintas: uma que depende das condições iniciais $x(0)$ e outra que depende do sinal de entrada $u(kT)$. Podemos encontrar essas duas componentes com o auxílio da transformada de $\mathcal{Z}$. De (13) temos

$$zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z) \tag{15}$$

$$Y(z) = CX(z) + DU(z) \tag{16}$$

[1]Na realidade o sinal de controle vai mudar no final do intervalo para $\tau = kT+T$ mas isso não altera o resultado da integral pois esta mudança não aparece através de uma função impulso.

[2]No matlab a conversão de modelo contínuo para modelo discreto se faz com a função 'c2d'.

onde $X(z) = \mathcal{Z}\{x(kT)\}, U(z) = \mathcal{Z}\{u(kT)\}, Y(z) = \mathcal{Z}\{y(kT)\}$ são respectivamente as transformadas de $\mathcal{Z}$ de $x(kT), u(kT), y(kT)$. Isolando $X(z)$ na primeira equação temos

$$X(z) = (zI - A)^{-1}BU(z) + (zI - A)^{-1}zx(0) \tag{17}$$

Voltando ao domínio do tempo encontramos

$$x(kT) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1}Bu(jT) \tag{18}$$

onde A^k recebe o nome de matriz de transição de estados e é dada pela transformada inversa

$$A^k = \mathcal{Z}^{-1}\left\{(zI - A)^{-1}z\right\} \tag{19}$$

Podemos notar em (18) as duas componentes da solução da equação de estado. A primeira indica como o sistema responde para uma dada condição inicial $x(0)$ e a segunda, que é uma integral de convolução, indica como o sistema evolui para um dado sinal de entrada. O calculo da matriz de transição de estados é feito tomando-se a transformada inversa de cada um dos elementos da matrix $(zI - A)^{-1}$.

Exemplo 1 *Considere o sistema* $x_{k+1} = Ax_k$ *onde*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

A matriz de transição de estados é dada por

$$A^k = \mathcal{Z}^{-1}\left\{(zI - A)^{-1}z\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} z+1 & 0 \\ -2 & z+2 \end{bmatrix}^{-1} z\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{z}{z+1} & 0 \\ \frac{2z}{(z+1)(z+2)} & \frac{z}{z+2} \end{bmatrix}\right\}$$
$$= \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 2(-1)^k - 2(-2)^k & (-2)^k \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

Note que a matriz de transição A^k depende do período de amostragem T, como podemos notar em (9). Com o estado dado por (18) podemos construir a saída do sistema com (14), o que resulta em

$$y(kT) = CA^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1}Bu(jT) + Du(kT) \tag{20}$$

Assumindo condições iniciais nulas, definiremos agora

$$g(kT) = CA^{k-1}B + D\delta(kT)\ ,\ k \geq 1 \quad , \quad \text{e g(0)=D} \tag{21}$$

como sendo a resposta ao pulso unitário do sistema pois

$$g(kT) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{C(zI - A)^{-1}B + D\right\} \tag{22}$$

e assim a resposta $y(kT)$ do sistema pode ser expressa na forma convolução da entrada com a resposta ao pulso unitário como indicado em (20).

3 Matriz de Transferência, pólos e zeros

Sistemas lineares invariantes no tempo podem ser descritos pela representação de estados ou de forma equivalente pela sua função de transferência. No caso multivariável a função de transferência é uma matriz que define a relação de cada entrada para cada saída do sistema. Para obter a matriz de transferência aplicamos a transformada $\mathcal{Z}$ nas equações que definem a dinâmica temporal do sistema. Por exemplo, para o sistema amostrado (13),(14) temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x(kT+T)\} &= \mathcal{Z}\{Ax(kT)+Bu(kT)\} \\ zX(z)-zx(0) &= AX(z)+BU(z)\end{aligned} \tag{23}$$

Como a função de transferência expressa a relação entrada-saída para condições iniciais nulas, vamos assumir $x(0)=0$ que resulta em $(zI-A)X(z)=BU(z)$ ou seja, o estado do sistema é dado por

$$X(z)=(zI-A)^{-1}BU(z) \tag{24}$$

Tomando agora a transformada da equação de saída temos

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{y(kT)\} &= \mathcal{Z}\{Cx(kT)+Du(kT)\} \\ Y(z) &= CX(z)+DU(z)\end{aligned} \tag{25}$$

Como o estado $X(z)$ é dado por (24) a saída $Y(z)$ fica

$$Y(z)=C((zI-A)^{-1}BU(z))+DU(z)=(C(zI-A)^{-1}B+D)U(z) \tag{26}$$

A matriz

$$G(z)=C(zI-A)^{-1}B+D \tag{27}$$

expressa a relação entrada-saída do sistema e recebe o nome de função de transferência. Observe que a transformada inversa da função de transferência é a resposta ao pulso unitário do sistema como indicado em (22).

Definição 1 (Pólos) *Um número complexo z é um pólo de $G(z)$ se ele é um pólo de pelo menos uma das funções de transferência que compõe a matriz $G(z)$, isto é, um dos elementos de $G(z)$.*

Podemos facilmente relacionar os pólos de $G(z)$ com os autovalores da matriz de dinâmica do sistema (matriz A da representação de estados). A inversa de uma matriz pode ser expressa, com auxílio do seu determinante e sua matriz cofatora transposta, através da fórmula

$$(zI-A)^{-1}=\frac{1}{det(zI-A)}(\mathrm{cof}(zI-A))'$$

Os elementos da matriz cofatora são polinômios de ordem $n-1$ na variável z, onde n é o número de variáveis de estado. Logo não existem pólos na matriz cofatora pois não existe denominador em nenhum elemento da cofatora. Assim, todo pólo de $G(z)$ vem da divisão da cofatora pelo polinômio $det(zI-A)$. Se não existir cancelamento de raízes de $det(zI-A)$ com raízes dos elementos da cofatora então toda raíz de $det(zI-A)$ será um pólo de $G(z)$. Como as raízes do polinômio $det(zI-A)$ são os autovalores da matriz A chegamos a seguinte conclusão:

Todo pólo de $G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ é um autovalor da matriz A. Porém, devido a possíveis cancelamentos, nem todo autovalor da matriz A será obrigatoriamente um pólo de $G(z)$.

Definição 2 (Zeros) *Zero de um sistema multivariável é todo valor da variável z que anula a saída $Y(z)$ (ou uma combinação dos elementos de $Y(z)$).*

Essa definição de zeros é coerente com a definição usual para sistemas SISO[3] onde zeros são as raízes do numerador da função de transferência. Veja que se $G(z_0) = 0$ então a saída também é nula para $z = z_0$ pois $Y(z_0) = G(z_0)U(z_0)$. A situação de saída nula, vista a partir da função de transferência ou da representação de estados, pode levar a resultados diferentes, pois como vimos alguns autovalores da matriz de dinâmica do sistema podem não aparecer na função de transferência se existem cancelamentos pólo-zero. Esses zeros cancelados também fazem a saída ser nula pois o cancelamento deve ocorrer em todos os elementos da matriz de transferência.

Se definimos zero de um sistema multivariável a partir da função de transferência chegamos à definição de zeros de transmissão.

Definição 3 (Zeros de transmissão) *Dizemos que z_0 é um zero de transmissão de $G(z)$ se $G(z_0)$ não possui posto completo*[4].

Uma consequência da definição acima é que, para um sistema com q entradas e r saídas, se $G(z) \in \mathbb{C}^{r \times q}$ não possui posto completo para algum $z = z_0$ então:

(i) $r > q$ e existe um vetor coluna v de dimensão q tal que $G(z_0)\,v = 0$.

(ii) $r < q$ e existe um vetor linha w de dimensão r tal que $w\,G(z_0) = 0$.

(iii) $r = q$ e $det(G(z_0)) = 0$.

Veja na definição acima que se $G(z)$ não tem posto completo para algum $z = z_0$ então podemos encontrar um sinal de entrada $v = U(z_0)$ que pertence ao espaço nulo[5] $G(z_0)$ e dessa forma a saída $Y(z_0) = G(z_0)v$ será nula para a entrada v nos casos $(i), (iii)$. No caso (ii) é uma combinação das saídas que se anula pois $w\,y(z_0) = w\,G(z_0)U(z_0)$ será nula para qualquer entrada.

A condição de saída nula vista a partir das equações de estado leva à definição de zeros invariantes.

Impondo $Y(z) = 0$ em (25) e levando em conta (23) temos as seguintes condições: $(zI - A)X(z) - BU(z) = 0$ e $CX(z) + DU(z) = 0$. De forma compacta temos

$$R(z) \begin{bmatrix} X(z) \\ U(z) \end{bmatrix} = 0 \text{ , onde } R(z) = \begin{bmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

[3]Sistemas SISO (single-input single-output) são sistemas com uma entrada e uma saída, ou seja, a função de transferência é escalar. Sistemas com mais de uma entrada ou saída são chamados de MIMO (multi-input multi-output).

[4]Posto de uma matriz é o maior número de linhas ou colunas linearmente independentes. Uma matriz tem posto completo quando o número de linhas ou colunas linearmente independentes corresponde à menor dimensão da matriz. No matlab a função *rank(M)* retorna o posto da matriz M.

[5]O Espaço Nulo de uma matriz M é formado por todos os vetores que multiplicados por M dá resultado nulo, isto é $Mv = 0$. No matlab a função *null(M)* retorna uma base para o espaço nulo de M.

Definição 4 (Zeros invariantes) *Um número complexo z_0 é chamado de zero invariante de uma representação de estados se a matriz $R(z)$ acima não tem posto completo para $z = z_0$.*

Veja que $R(z) \in \mathbb{C}^{r+n \times q+n}$ onde n, q, r são o número de estados, entradas e saídas respectivamente. Se $R(z)$ não tem posto completo para $z = z_0$ então:

(i) $r > q$ e existe um vetor coluna v de dimensão $n + q$ tal que $R(z_0)\, v = 0$.

(ii) $r < q$ e existe um vetor linha w de dimensão $n + r$ tal que $w\, R(z_0) = 0$.

(iii) $r = q$ e $det(R(z_0)) = 0$.

Para sistemas quadrados ($r = q$) as condições $det(G(z_0)) = 0$ e $det(R(z_0)) = 0$ são facilmente utilizadas para calcular os zeros do sistema.

4 Propriedades estruturais

Dentre as propriedades de um sistema linear de malha aberta, duas delas merecem destaque: controlabilidade e observabilidade. Quando a estrutura do sistema apresenta essas propriedades temos garantia de poder projetar um controlador de tal forma que os pólos da malha fechada possam ser escolhidos de forma arbitrária pelo projetista.

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Kalman em 1960.

Definição 5 (Controlabilidade) *Um sistema discreto de dimensão n é* **controlável** *se for possível, por meio de um vetor de controle, constante nos intervalos de amostragem e sem restrições de magnitude, transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(kT)$ para qualquer outro estado desejado num intervalo de n períodos de amostragem.*

Da definição acima podemos construir um teste para a controlabilidade do sistema

$$x(kT+T) = A\,x(kT) + B\,u(kT) \quad , \quad x(kT) \in \mathbb{R}^n, \quad u(kT) \in \mathbb{R}^q \tag{28}$$

$$y(kT) = C\,x(kT) + D\,u(kT) \quad , \quad y(kT) \in \mathbb{R}^m \tag{29}$$

Para uma dada condição inicial $x(0)$ e um sinal de controle conhecido $u(kT)$, a solução da equação recursiva (28) é

$$x(nT) = A^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B u(jT) \tag{30}$$

$$= A^n x(0) + A^{n-1} B u(0) + A^{n-2} B u(T) + \cdots + B u(nT - T) \tag{31}$$

Assim obtemos

$$x(nT) - A^n x(0) = \begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(nT-T) \\ u(nT-2T) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \tag{32}$$

Como o estado inicial $x(0)$ e o desejado $x(nT)$ são vetores arbitrários do $\mathbb{R}^n$ a matriz

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{33}$$

deve ter n colunas independentes para que seja possível encontrar uma sequência de controles $u(0), \ldots, u(nT - T)$ tal que a igualdade (32) seja satisfeita quaisquer que sejam os valores de $x(0), x(nT)$ escolhidos. Como M_c possui n linhas e n das nq colunas devem ser linearmente independentes temos que M_c deve ter posto completo.

É interessante notar que se o sinal de controle for limitado pode não ser possível passar de $x(0)$ para $x(nT)$ em n períodos de amostragem mesmo que M_c possua posto completo.

Por outro lado quando $posto(M_c)$ é inferior ao número de variáveis de estado não é possível atender a definição de controlabilidade. Logo, $posto(M_c) = n$ é a condição (necessária e suficiente) para que um sistema seja controlável. Quando a matriz de controlabilidade possui posto r, inferior ao número de variáveis de estado, então existe uma transformação de similaridade[6] T unitária ($T' = T^{-1}$) tal que

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{nc} & 0 \\ A_{21} & A_c \end{bmatrix}, \; \tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix}, \; \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} C_{nc} & C_c \end{bmatrix}$$

onde os autovalores de A_{nc} são os autovalores não controláveis do sistema (se existir algum), o par (A_c, B_c) é controlável e a seguinte igualdade se verifica[7]:

$$C_c(zI - A_c)^{-1}B_c = C(zI - A)^{-1}B$$

Observe com a expressão acima que a função de transferência do sistema não se altera se descartamos os estados não controláveis.

Definição 6 (Estabilizabilidade) *O sistema é dito ser estabilizável quando os autovalores não controláveis são estáveis, isto é os autovalores de A_{nc} possuem módulo inferior à unidade.*

Definição 7 (Observabilidade) *O sistema (28) é* **observável** *se todo estado inicial $x(0)$ puder ser determinado a partir do conhecimento de $y(kT), u(kT)$ durante um intervalo de tempo finito.*

Da definição acima podemos construir um teste para a observabilidade de um sistema. Para uma dada condição inicial $x(0)$ e um sinal de controle conhecido $u(kT)$, a resposta do sistema (28) é

$$y(nT) = CA^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} CA^{n-j-1}Bu(jT) + Du(kT) \tag{34}$$

[6]No matlab essa transformação é feita com a função ctrbf.m do control system toolbox.

[7]Para verificar a igualdade basta utilizar o seguinte resultado de inversão de matrizes

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M_1^{-1} & 0 \\ -M_3^{-1}M_2M_1^{-1} & M_3^{-1} \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M_1^{-1} & -M_1^{-1}M_2M_3^{-1} \\ 0 & M_3^{-1} \end{bmatrix}$$

Com as n primeiras medidas efetuadas temos as relações

$$y(nT) - \sum_{j=0}^{n-1} CA^{n-j-1}Bu(jT) - Du(kT) = CA^n x(0) \tag{35}$$

$$y(nT-T) - \sum_{j=0}^{n-2} CA^{n-j-1}Bu(jT) - Du(kT-T) = CA^{n-1} x(0) \tag{36}$$

$$\vdots \tag{37}$$

$$y(T) - CBu(0) - Du(T) = CAx(0) \tag{38}$$

$$y(0) - Du(0) = Cx(0) \tag{39}$$

Como o lado esquerdo das igualdades acima são valores conhecidos (medidas e controle) poderemos encontrar $x(0)$ a partir dessas expressões quando a matriz

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{40}$$

conhecida como matriz de observabilidade, possuir posto igual ao número de variáveis de estado. Por outro lado, quando $posto(M_o)$ é inferior ao número de variáveis de estado existe uma condição inicial $x(0)$ tal que $M_o x(0) = 0$. Logo, para essa condição inicial teremos o lado direito de todas as expressões nulo e nesse caso a condição inicial desaparece das expressões indicando que não será possível recuperá-la e o sistema não é observável. Isso mostra que $posto(M_o) = n$ é uma condição necessária e suficiente para a observabilidade do sistema.

Quando a matriz de observabilidade possui posto r, inferior ao número de variáveis de estado, então existe uma transformação de similaridade[8] T unitária ($T' = T^{-1}$) tal que

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{no} & A_{12} \\ 0 & A_o \end{bmatrix}, \ \tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} B_{no} \\ B_o \end{bmatrix}, \ \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C_o \end{bmatrix}$$

onde A_{no} contém os autovalores não observáveis (se existir algum), o par (A_o, C_o) é observável e a seguinte igualdade se verifica:

$$C_o(zI - A_o)^{-1}B_o = C(zI - A)^{-1}B$$

Observe com a expressão acima que a função de transferência do sistema não se altera se descartamos os estados não observáveis.

Definição 8 (Detectabilidade) *O sistema é dito ser detectável quando os autovalores não observáveis são estáveis, isto é os autovalores de A_{no} possuem módulo inferior à unidade.*

[8]No matlab essa transformação é feita com a função obsvf.m do control system toolbox.

5 Realização de estados

A obtenção de uma representação de estados do sistema a partir da sua função de transferência recebe o nome de realização de estados.

Para sistemas SISO existem procedimentos bastante simples de realização de estados. Por exemplo, dado a função de transferência

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^q + b_1 z^{q-1} + \cdots + b_q}{z^q + a_1 z^{q-1} + \cdots + a_q} \tag{41}$$

podemos encontrar uma representação de estados procedendo da seguinte forma. Com a introdução de uma variável intermediária $R(z)$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{R(z)} \frac{R(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^q + b_1 z^{q-1} + \cdots + b_q}{z^q + a_1 z^{q-1} + \cdots + a_q} \tag{42}$$

podemos defini-la da seguinte forma:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = b_0 z^q + b_1 z^{q-1} + \cdots + b_q \quad ; \quad \frac{R(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^q + a_1 z^{q-1} + \cdots + a_q} \tag{43}$$

Sendo $y(t)^{[n]} = y(kT + nT)$ o deslocamento temporal de n passos à frente[9] da variável $y(t)$ no instante $t = kT$ e lembrando que as condições iniciais são nulas nas equações acima, usando a transformada inversa podemos reescrevê-las no domínio do tempo como se segue

$$y(t) = b_0 r(t)^{[q]} + b_1 r(t)^{[q-1]} + \cdots + b_q r(t) \quad ; \quad u(t) = r(t)^{[q]} + a_1 r(t)^{[q-1]} + \cdots + a_q r(t) \tag{44}$$

Escolhendo como variáveis de estado

$$x_1(t) = r(t) \ ; \ x_2(t) = r(t)^{[1]} \ ; \ x_3(t) = r(t)^{[2]} \ ; \ x_4(t) = r(t)^{[3]} \ ; \ \ldots \ ; \ x_{i+1}(t) = r(t)^{[i]} \tag{45}$$

até $i = q - 1$, temos as seguintes relações:

$$x_1(kT+T) = x_2(kT) \ ; \ x_2(kT+T) = x_3(kT) \ ; \ \ldots ; x_{q-1}(kT+T) = x_q(kT) \tag{46}$$

$$x_q(kT+T) = r(kT+qT) = -a_1 x_q(kT) - \cdots - a_q x_1(kT) + u(kT)$$

que nos conduz à equação de estados (28) onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_q & -a_{q-1} & -a_{q-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix} \ ; \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ ; \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{q-1} \\ x_q \end{bmatrix} \tag{47}$$

Além disso (44) e (46) implicam

$$\begin{aligned} y(t) &= b_0 r(t)^{[q]} + b_1 r(t)^{[q-1]} + \cdots + b_q r(t) \\ &= (b_q - a_q b_0) x_1(t) + (b_{q-1} - a_{q-1} b_0) x_2(t) + \cdots + (b_1 - a_1 b_0) x_q(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \tag{48}$$

[9] Por simplicidade de notação usaremos $y(t)^{[0]} = y(t)$ sempre que isso for conveniente.

Logo a equação de saída é dada por $y(kT) = Cx(kT) + Du(kT)$ onde

$$C = \begin{bmatrix} b_q - a_q b_0 & b_{q-1} - a_{q-1} b_0 & \dots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \ ; \ D = b_0$$

A representação de estados acima recebe o nome de forma canônica de controlabilidade pois o par (A, B) nessa representação será sempre controlável. Note que não existem zeros na função de transferência de $U(z)$ para $R(z)$. Logo não pode haver cancelamento pólo/zero nessa parte do sistema que define a ação de controle. Isso justifica que o sistema seja controlável. Entretanto, se existem cancelamentos pólo/zero em $G(z)$, isto é, de $U(z)$ para $Y(z)$, esses cancelamentos ocorrem na função de transferência de $R(z)$ para a saída $Y(z)$. Logo o sistema não será observável. A matriz A com a estrutura acima recebe o nome de forma companheira pois sua equação característica pode ser diretamente escrita com a última linha de A, isto é, $det(zI - A) = z^q + a_1 z^{q-1} + \cdots + a_q$. Como a realização de estados de uma dada função de transferência não é única existem outras formas de se obter a representação de estados do sistema. Veja por exemplo [1].

O mesmo procedimento acima pode ser usado para se obter uma realização de estado no caso MIMO. Para ilustrar a idéia, sejam duas funções de transferências escalares $G_1(z)$ e $G_2(z)$. Usando o procedimento acima podemos facilmente encontrar as matrizes de estado para cada uma delas.

$$G_1(z) = C_1(zI - A_1)^{-1}B_1 + D_1$$

$$G_2(z) = C_2(zI - A_2)^{-1}B_2 + D_2$$

Para sistemas MIMO podemos obter a função de transferência de cada entrada para cada saída, como se fossem sistemas SISO desacoplados, e em seguida acoplá-los, dois à dois, da seguinte forma:

$$G_3(z) = \begin{bmatrix} G_1(z) \\ G_2(z) \end{bmatrix} = C_3(zI - A_3)^{-1}B_3 + D_3 \ ; \ \text{onde} \tag{49}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \ ; \ A_3 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \ ; \ B_3 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \ ; \ D_3 = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$G_4(z) = \begin{bmatrix} G_1(z) & G_2(z) \end{bmatrix} = C_4(zI - A_4)^{-1}B_4 + D_4 \ ; \ \text{onde}$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \ ; \ A_4 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \ ; \ B_4 = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \ ; \ D_4 = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix}$$

Como exercício, obtenha a realização de estados do sistema cuja matriz de transferência é indicada abaixo.

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ \frac{1}{(z+1)(z+2)} & \frac{2}{z+1} \end{bmatrix}$$

Definição 9 (Realização Mínima) *A realização de estado (A, B, C, D) de um sistema é dita ser mínima se a matriz de dinâmica A possui a menor dimensão possível.*

O procedimento para realização de estados descrito acima é simples mas normalmente não conduz à uma realização mínima. Para se obter uma realização de estados mínima[10] a partir de uma realização não mínima basta se eliminar os estados não controláveis e

[10] No MATLAB a função *ss* encontra a representação de estado de um sistema a partir de sua transferência $G(z)$. A opção de realização mínima também é possível. Veja a documentação.

não observáveis, pois uma realização (A, B, C, D) é mínima se e somente se (A, B) é controlável e (A, C) é observável.

Questão 1: Considere o sistema não linear abaixo.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + 1 \\ \dot{x}_2 &= -(x_2+1)^2 - 2x_1(x_2+1) - x_1 + 1 \end{aligned} \tag{50}$$

Obtenha o modelo linearizado em torno de um ponto de operação. Suponha que dispomos de um medidor (ganho unitário) para a variável $y = x_1 + x_2$. O sistema é observável ou pelo menos detectável? Obtenha um modelo discretizado para o sistema linearizado. Comente a escolha do período de amostragem. O sistema discreto é observável ou pelo menos detectável?. Comente o resultado.

Questão 2: Considere o sistema $\dot{x} = A\,x + B\,u$ onde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{51}$$

Deseja-se que a dinâmica de malha fechada apresente uma banda passante de aproximadamente $1\,rad/seg$. Pede-se:
(a) Obtenha um modelo discretizado para o sistema de malha aberta supondo que o sinal de controle será obtido a partir de um segurador de ordem zero. Comente a escolha do período de amostragem.
(b) Verifique a estabilidade do sistema discretizado em malha aberta e a controlabilidade.
(c) Obtenha os pólos e os autovalores do sistema discretizado de malha aberta.
(d) Verifique se sistema discretizado é estabilizável . Comente o resultado.
(e) Quais são os zeros do sistema discretizado?.

Laboratório

1. Escolha um ponto de equilíbrio e linearize $\dot{h} = f(h, v)$ em torno deste ponto.
2. Supondo que a banda passante[11] desejada do sistema de malha fechada seja duas vezes a de malha aberta, comente a escolha do período de amostragem e obtenha o modelo discretizado de malha aberta.
3. Verifique a estabilidade do sistema de malha aberta analógico e discretizado.
4. Simule os sistemas linear contínuo, discretizado e não-linear e discuta as diferenças.
5. Verifique se o sistema linearizado (contínuo e discreto) seria observável ou detectável se os medidores fossem localizados nos tanques 1 e 4.
6. O sistema (contínuo e discreto) seria controlável se $\gamma_1 = 0$?
7. Quais são os pólos, zeros de transmissão e zeros invariantes do sistema discretizado?

[11]Para encontrar a banda passante plote o diagrama de Bode do determinante da função de transferência.

Referências

[1] K.Ogata, "Discrete-time control systems", Prentice Hall, 1995.

[2] G.F.Franklin, J.D.Powell, M.L.Workman, *Digital control of Dinamic Systems*, Addison-Wesley, 1990.

[3] A.Trofino, "Sistemas Lineares", apostila do curso de sistemas lineares, www.das.ufsc.br/ trofino/pub, UFSC,1995.