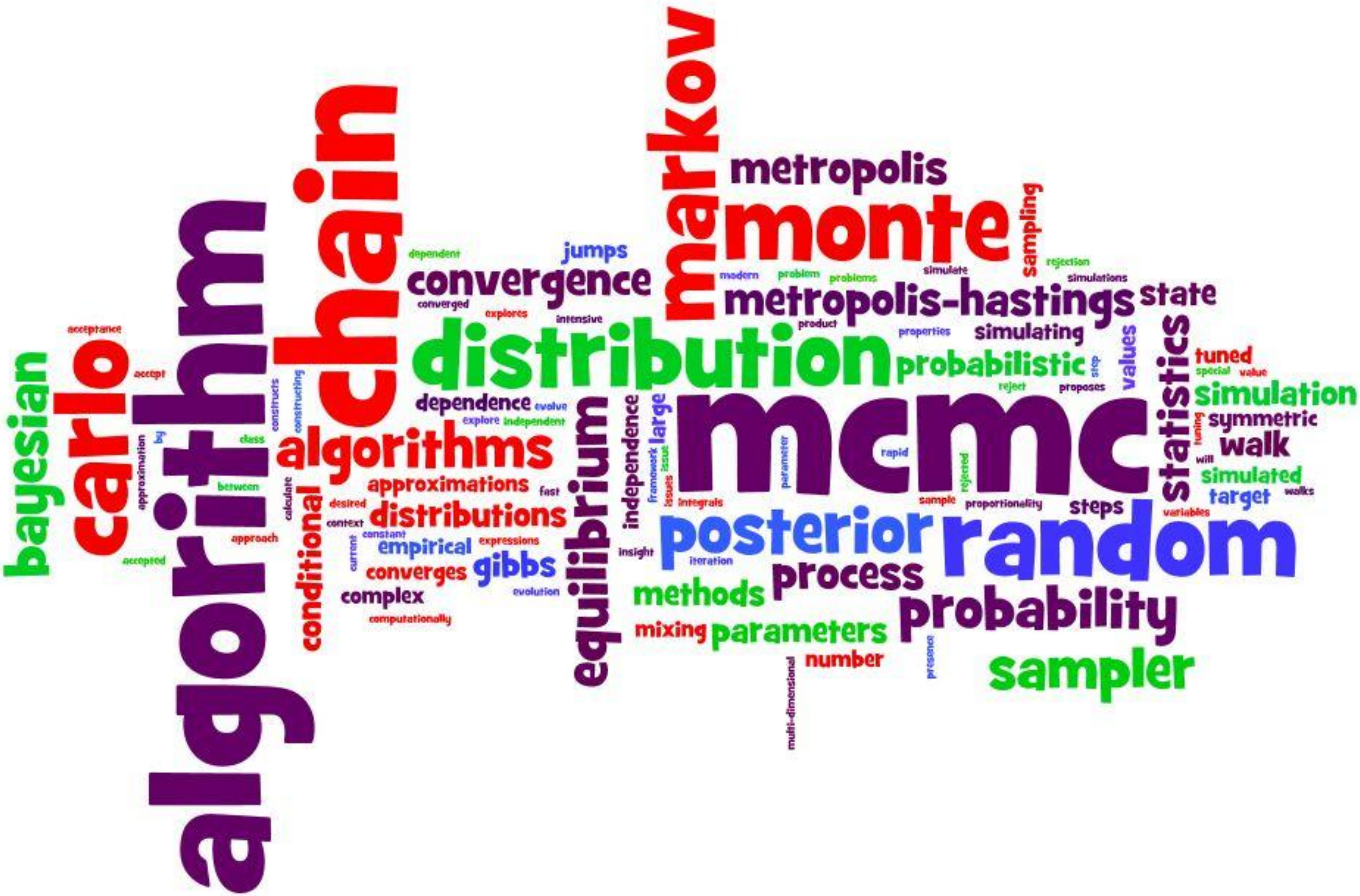
Inferência Bayesiana



Inferência Bayesiana

Conceitos importantes para caminhar pelo **MCMC:**

- Qual a função de verossimilhança?
- Quais são os parâmetros do modelo?
- Conceito de superfície de verossimilhança.
- Conceito de busca heurística.

Inferência Bayesiana

Conceitos importantes para caminhar pelo **MCMC:**

- Qual a função de verossimilhança?
- Quais são os parâmetros do modelo?
- Conceito de superfície de verossimilhança.
- Conceito de busca heurística.

Conceitos importantes da estatística **Bayesiana**:

- Teorema de Bayes.
- Distribuição a priori. (Prior)
- Distribuição a posteriori. (Posterior)

Inferência Bayesiana

Teorema de Bayes

$$P(\theta|y) = \frac{P(\theta)P(y|\theta)}{P(y)}$$

Inferência Bayesiana

Teorema de Bayes

$$P(\theta|y) = \frac{P(\theta)P(y|\theta)}{P(y)}$$

$P(\theta|y)$ = distribuição posterior.

$P(y|\theta)$ = verossimilhança.

Inferência Bayesiana

Teorema de Bayes

$$P(\theta|y) = \frac{P(\theta)P(y|\theta)}{P(y)}$$

$P(\theta|y)$ = probabilidade do modelo condicionada nas observações.

$P(y|\theta)$ = probabilidade das observações condicionada no modelo.

Inferência Bayesiana

Teorema de Bayes

$$P(\theta|y) = \frac{P(\theta)\,P(y|\theta)}{P(y)}$$

O objetivo da inferência usando a estatística Bayesiana é estimar a *distribuição posterior* dos parâmetros condicionada nas observações.

Diferente da máxima verossimilhança, estamos calculando a probabilidade dos parâmetros e não das observações.

Inferência Bayesiana

$$P(\theta|y) = \frac{P(\theta)\,P(y|\theta)}{P(y)}$$

Inferência Bayesiana

$$P(\theta|y) = \frac{P(\theta)P(y|\theta)}{P(y)}$$

$P(\theta|y)$ = probabilidade do modelo condicionada nas observações.

$P(\theta)$ = probabilidade marginal do modelo (prior).

$P(y|\theta)$ = probabilidade das observações condicionada no modelo.

$P(y)$ = probabilidade marginal das observações.

Inferência Bayesiana

$$P(\theta|y) = \frac{P(\theta)P(y|\theta)}{P(y)}$$

$P(\theta|y)$ = distribuição posterior (posterior).

$P(\theta)$ = distribuição a priori (prior).

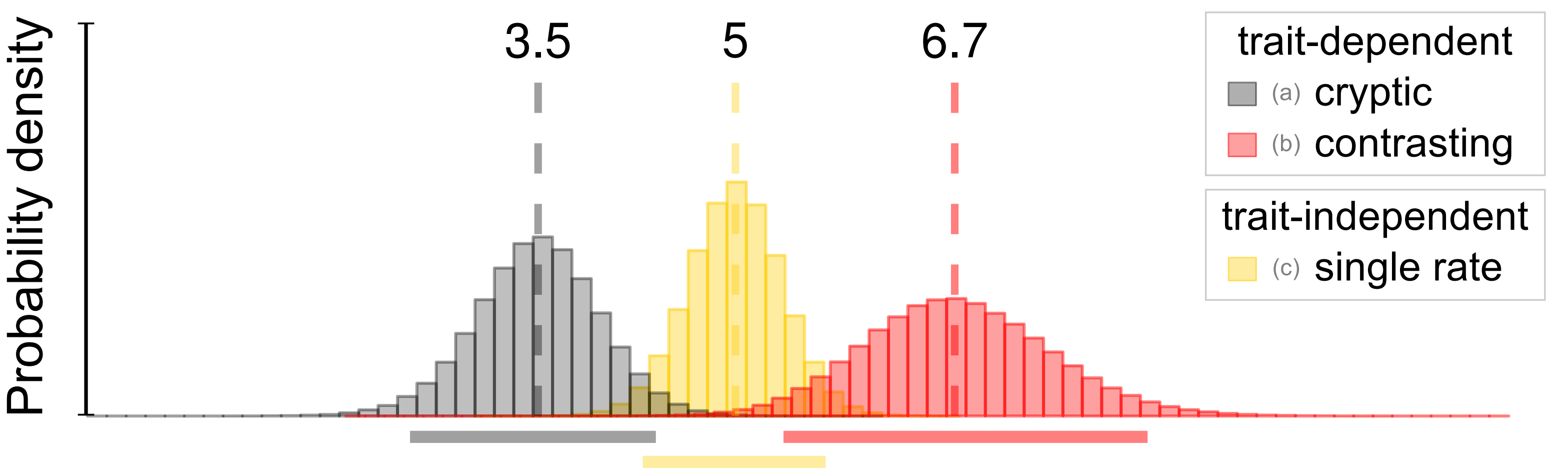
$P(y|\theta)$ = verossimilhança (likelihood).

$$P(y) = \sum_\theta P(\theta)P(y|\theta)$$

Inferência Bayesiana

$$P(\theta|y) = \frac{P(\theta)P(y|\theta)}{P(y)}$$

$P(\theta|y)$ = o principal objetivo de uma análise usando **MCMC**.

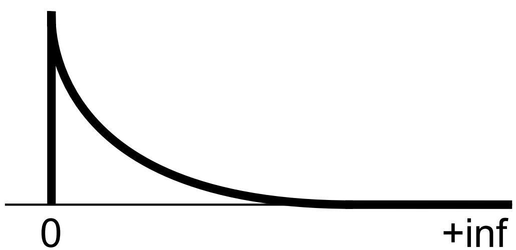


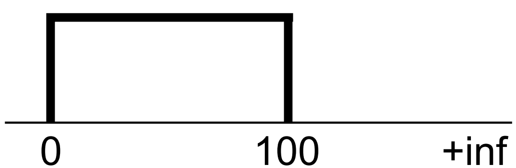
Inferência Bayesiana

$$P(\theta|y) = \frac{\color{red}{P(\theta)}P(y|\theta)}{P(y)}$$

$\color{red}{P(\theta)}$ = nosso conhecimento a priori dos valores possíveis dos parâmetros.

O prior pode ser qualquer distribuição que respeite as restrições dos parâmetros. Geralmente são separados em priors informativos ou 'não informativos'.





Inferência Bayesiana

$$P(\theta|y) = \frac{\color{red}{P(\theta)}P(y|\theta)}{P(y)}$$

$\color{red}{P(\theta)}$ = nosso conhecimento a priori dos valores possíveis dos parâmetros.

O prior é o elemento que mais gera discussão em análises Bayesianas.

Vamos explorar em mais detalhe a influência do prior nos nossos resultados.

Inferência Bayesiana

$$P(\theta|y) = \frac{P(\theta)\,P(y|\theta)}{P(y)}$$

$P(y|\theta)$ = função de verossimilhança.

Como vimos anteriormente ...

A função de verossimilhança calcula a verossimilhança de nossas observações condicionado aos valores dos parâmetros dos modelos.

Inferência Bayesiana

$$P(\theta|y) = \frac{P(\theta)P(y|\theta)}{P(y)}$$

$P(y)$ = probabilidade dos dados condicionada a TODOS os valores possíveis dos parâmetros.

$$P(y) = \sum_\theta P(\theta)P(y|\theta)$$ para distribuições discretas

ou

$$P(y) = \int P(\theta)P(y|\theta)d\theta$$ para distribuições contínuas

Inferência Bayesiana

$$P(\theta|y) = \frac{P(\theta)P(y|\theta)}{P(y)}$$

$P(y)$ = probabilidade dos dados condicionada a TODOS os valores possíveis dos parâmetros.

$$P(y) = \sum_\theta P(\theta)P(y|\theta)$$

ou

$$P(y) = \int P(\theta)P(y|\theta)d\theta$$

Inferência Bayesiana

$P(y)$ é somente possível de ser derivada para os modelos mais simples.

Essa quantidade é o principal motivo da inferência Bayesiana ter sido aplicada para uma ampla variedade de problemas somente após o desenvolvimento da computação.

Não conseguimos, na prática, calcular $P(y)$.

Usamos '*odds ratios*' ou 'razão de probabilidade'.

Inferência Bayesiana

Vamos voltar a fórmula de Bayes ...

$$P(\theta|y) = \frac{P(\theta)P(y|\theta)}{P(y)}$$

$$P(y) = \int P(\theta)P(y|\theta)d\theta$$

Veja que $P(y)$ não depende de um valor específico para os parâmetros do modelo, pois é uma *distribuição marginal de probabilidade* das observações.

Ou seja, $P(y)$ não está condicionada a algum valor de parâmetro.

Inferência Bayesiana

Comparando o valor de $P(\theta|y)$ para θ_1, θ_2 , temos:

$$P(\theta_1|y) = \frac{P(\theta_1)P(y|\theta_1)}{P(y)}$$

$$P(\theta_2|y) = \frac{P(\theta_2)P(y|\theta_2)}{P(y)}$$

Então a '*odds ratio*' $\frac{P(\theta_1|y)}{P(\theta_2|y)}$ ...

Inferência Bayesiana

A *odds ratio* para θ_1, θ_2 :

$$\frac{P(\theta_1|y)}{P(\theta_2|y)} = \frac{P(\theta_1)P(y|\theta_1)}{P(\theta_2)P(y|\theta_2)}\frac{P(y)}{P(y)}$$

$$= \frac{P(\theta_1)P(y|\theta_1)}{P(\theta_2)P(y|\theta_2)}$$

Podemos usar essa razão para comparar o fit de θ_1 em relação a θ_2 .

Mas somente para diferentes valores de parâmetros do MESMO MODELO.

Introdução ao MCMC

A *odds ratio* para θ_1, θ_2 :

$$\frac{P(\theta_1|y)}{P(\theta_2|y)} = \frac{P(\theta_1)P(y|\theta_1)}{P(\theta_2)P(y|\theta_2)}$$

Essa razão é uma peça fundamental do **MCMC**, pois permite a comparação relativa do fit entre dois pontos na superfície de verossimilhança.

O primeiro termo se chama prior ratio.
O segundo termo se chama likelihood ratio.

Introdução ao MCMC

A *odds ratio* para θ_1, θ_2 :

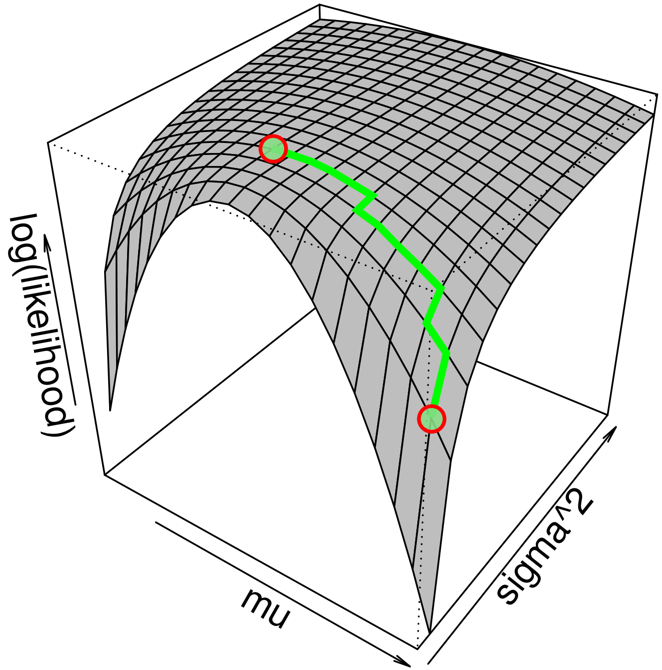
$$\frac{P(\theta_1|y)}{P(\theta_2|y)} = \frac{P(\theta_1)P(y|\theta_1)}{P(\theta_2)P(y|\theta_2)}$$

Essa razão é uma peça fundamental do **MCMC**, pois permite a comparação relativa do fit entre dois pontos na superfície de verossimilhança.

O primeiro termo se chama prior ratio.
O segundo termo se chama likelihood ratio.

Lembra-se da busca de ML?

Maximizar uma função



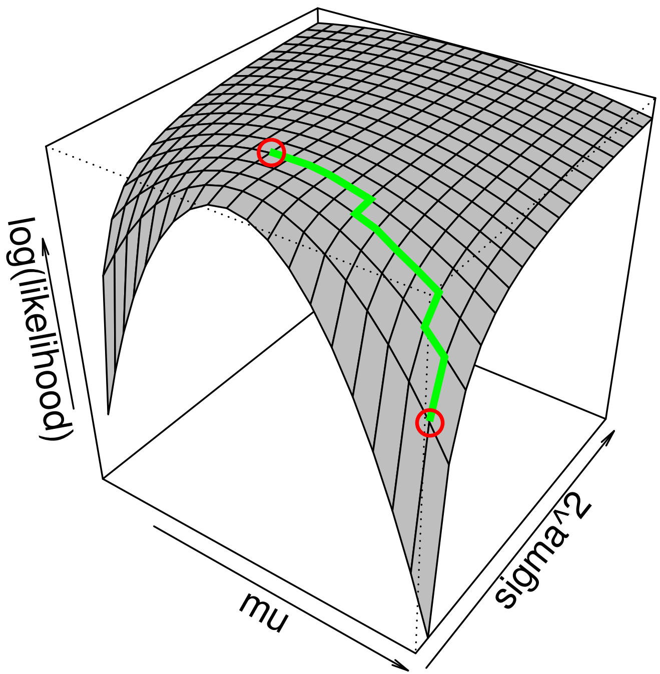
O método de busca mais simples tenta maximizar (ou minimizar) o valor de uma função.

Temos um valor inicial.

Caminhamos pela superfície de verossimilhança até encontrarmos uma combinação de parâmetros que maximiza a verossimilhança.

Introdução ao MCMC

A '*odds ratio*' é a peça fundamental da máquina que caminha pela superfície de verossimilhança durante o **MCMC**.



$$\frac{P(\theta_1|y)}{P(\theta_2|y)} = \frac{P(\theta_1)P(y|\theta_1)}{P(\theta_2)P(y|\theta_2)}$$

Vamos usar o resultado desta razão para 'decidir' se estamos subindo na verossimilhança do modelo ou não.

Introdução ao MCMC

Odds ratio para comparar o fit de θ_1 em relação a θ_2 .

$$\frac{P(\theta_1|y)}{P(\theta_2|y)} = 1; \theta_1 = \theta_2 \text{ ou equivalente}$$

$$\frac{P(\theta_1|y)}{P(\theta_2|y)} > 1; \theta_1 \text{ melhor fit que } \theta_2$$

$$\frac{P(\theta_1|y)}{P(\theta_2|y)} < 1; \theta_1 \text{ pior fit que } \theta_2$$

Introdução ao MCMC

No próximo passo vamos entender como a fórmula de Bayes e a *odds ratio* é utilizada para amostrar a distribuição posterior dos parâmetros de um modelo.

Vou apresentar algoritmos de Markov chain Monte Carlo e vamos navegar pelos seus componentes.