Facultad de Ingeniera
Escuela de Informtica y Telecomunicaciones

Metodos Numéricos : Tarea 1

Thomas Muñoz , Diego Vilches , Javiera Araya , Ignacio Yanjari.

7 de octubre de 2016

1. Introducción

El presente informe mostrará y hará un detallado análisis de los resultados de los problemas en los cuales se basa este trabajo, utilizando los diversos métodos vistos en cátedra, los cuales hacen principalmente referencia a las aproximaciones a la solución de alguna función, es por ello que para cada ítem sea necesario un análisis exhaustivo, debido a que se tiene que ser capaz de discriminar que es lo que sucede con los métodos aplicados en distintas situaciones. Lo cual deriva a conceptos importantes como entender cuando una solución converge a la solución, como también el caso contrario . Además de los procesos vistos en catedra, se indagará acerca del método de Horner, describiendo el algoritmo, dando un par de ejemplos y mostrando su código.

2. Resolución de sistemas de ecuaciones no lineales:

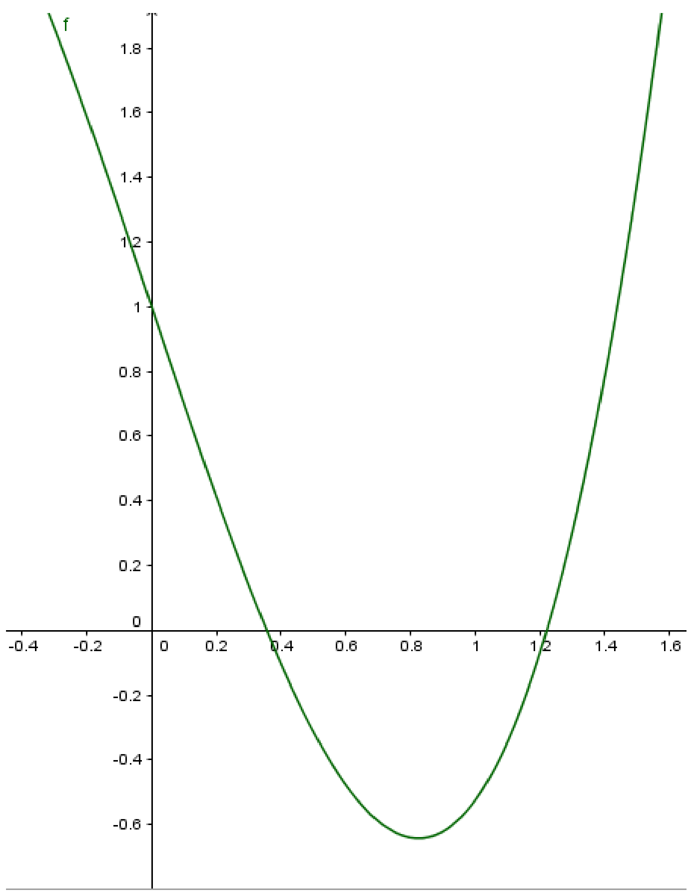
1. Usando los métodos de bisección, falsa posición, y secante, encuentre la raíz aproximada de las siguientes ecuaciones no lineales en los intervalos indicados:

   Para realizar estas ecuaciones se utilizaron los programas de :

   - Biseccion.m
   - Secante.m
   - FalsaPosicion.m

   y las comparaciones de error se hicieron en base a el resultado de la función fzero de matlab

   a) $x^3 - 3sen(x) + 1 = 0$, sobre [0,2].



El objetivo es obtener el 0 de la función para resolver la ecuacion lineal, pero esta, como muestra el gráfico tiene 2 soluciones.Para lograr analizar completamente estos 2 casos con los 3 métodos diferentes se tienen que separar en 2 intervalos nuestro intervalo anterior, en este caso lo separaremos en [0,0.8] y [0.8,2]

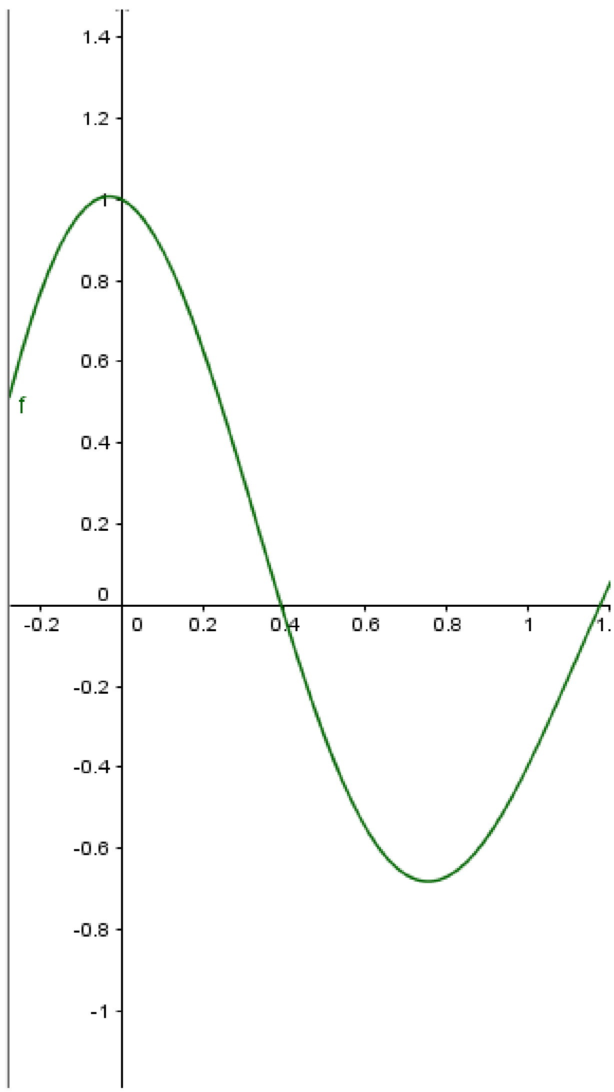
Intervalo [0,0.8]:

Métodos	Secante	Biseccion	Falsa Posicion
Cero Obtenido	0,3558	0,3558	0,3558
Iteraciones	5	13	5
Error Obtenido	0	0	0

Intervalo [0.8,2]:

Métodos	Secante	Biseccion	Falsa Posicion
Cero Obtenido	1.2204	1.2204	1.2204
Iteraciones	8	11	19
Error Obtenido	0	0	0

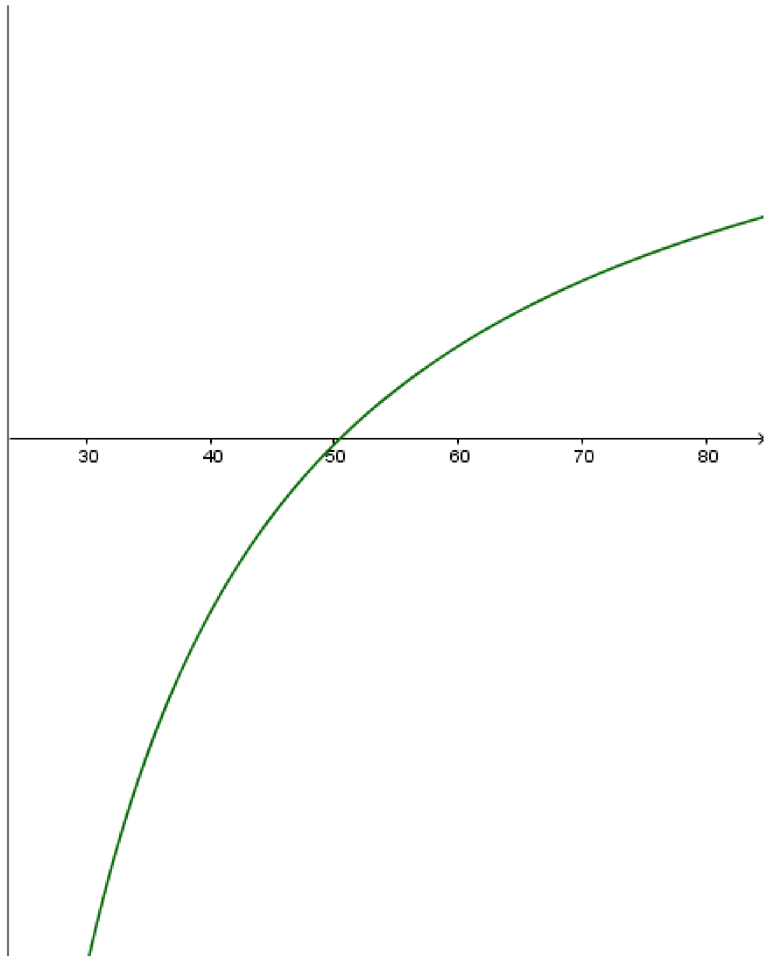
b) $e^{-t/2}cos(4t) = 0$, sobre [0,1].



Métodos	Secante	Biseccion	Falsa Posicion
Cero Obtenido	1,9635	0,3927	0,3927
Iteraciones	3	12	4
Error Obtenido	4	0	0

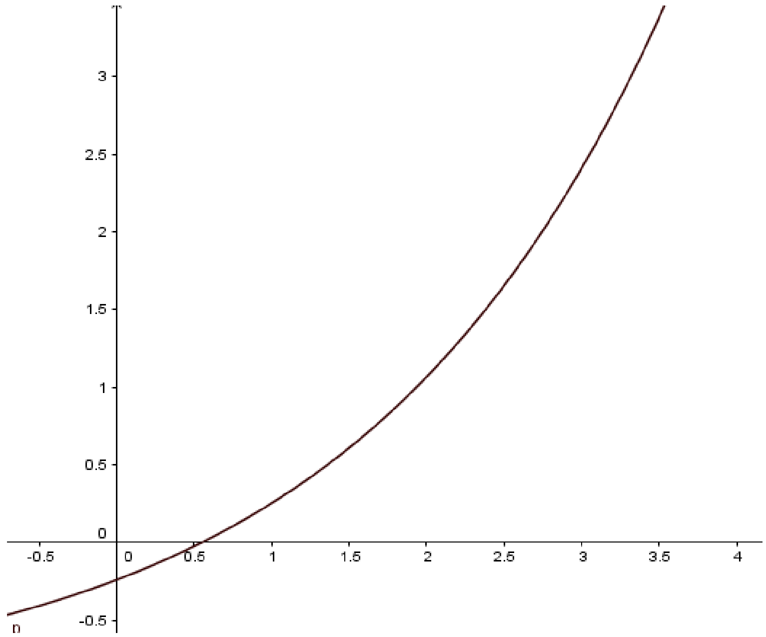
Como se observa en la tabla, el valor obtenido por el método de la secante es muy diferente al cero conseguido por los otros dos, los cuales encuentran el cero contenido en el intervalo pedido. Esto se debe a la forma en la cual se desarrolla el método de secante, el cual no usa un criterio entre 2 intervalos, si no que, para obtener el cero correcto se debe definir como [0-0.8] y da como resultado 0,3927.

c) $x + 40 - x\cosh(\frac{60}{x}) = 0$, sobre [40,60].



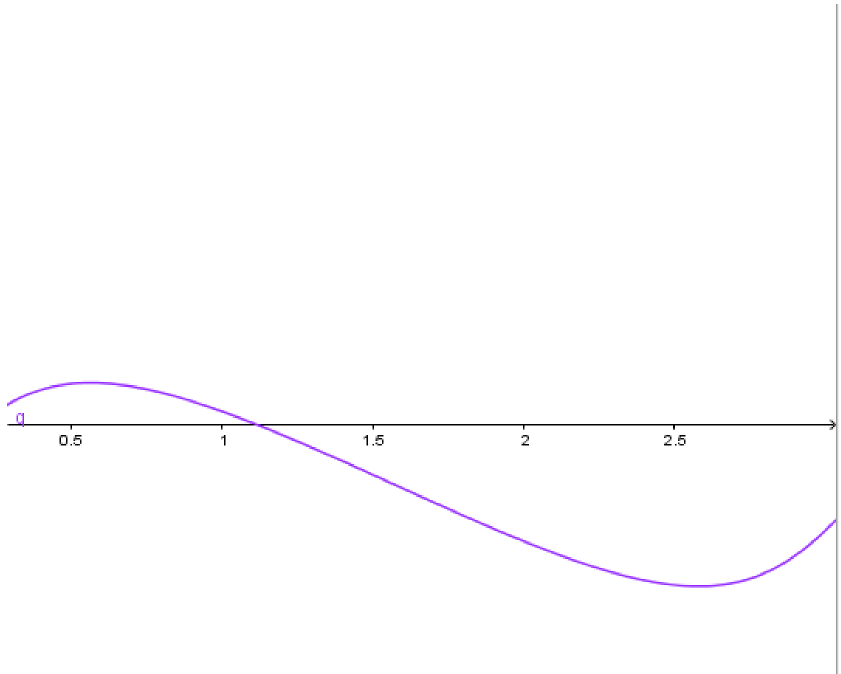
Métodos	Secante	Biseccion	Falsa Posicion
Cero Obtenido	50,5399	50,5399	50,5399
Iteraciones	5	15	9
Error Obtenido	0	0	0

d) $e^{0.5x}\cos(0.05\sqrt{200-\frac{x^2}{10}})-1=0$, sobre [0,4].



Métodos	Secante	Biseccion	Falsa Posicion
Cero Obtenido	0.5481	0.5481	0.5481
Iteraciones	5	13	18
Error Obtenido	0	0	0

e) $f(\theta) = \frac{0.6 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{(cos(\theta)-0.6)^2+sen(\theta)^2}} - \frac{0.6 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{(cos(\theta)+0.6)^2+sen(\theta)^2}} = 0, \theta \in [1,2]$. $(sol.exacta\theta^* = \frac{\pi}{2})$



Métodos	Secante	Biseccion	Falsa Posicion
Cero Obtenido	1,5708	1,5708	1,5708
Iteraciones	3	10	2
Error Obtenido	0	0	0

Con una tolerancia de 10^{-5}. Haga una comparación de los métodos en cuanto a la cantidad de iteraciones, el error cometido ¿Cuál de ellos fue más eficiente?

El método más eficiente para encontrar el valor de las funciones mencionadas es el método de Falsa Posición ya que encontró el cero en todas las ecuaciones y necesitó, en promedio, un menor número de iteraciones en comparación con Bisección.Pero, si no le damos importancia a la convergencia en el caso b), el mejor y más rápido sería el método de secante.

2. Considere la ecuación no lineal $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - xsen(x) - \frac{1}{2}cos(2x) = 0$

   a) Usando el método de Newton con punto inicial $x_0 = \frac{\pi}{2}$ encuentre la solución aproximada de f. Para ello Realize las iteraciones necesarias hasta que se cumpla el criterio de parada

   b) Considere la ecuación no lineal $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - xsen(x) - \frac{1}{2}cos(2x) = 0$

      1) Usando el método de Newton con punto inicial $x_0 = \frac{\pi}{2}$ encuentre la solución aproximada de f. Para ello REalize las iteraciones necesarias hasta que se cumpla el criterio de parada $|x_{n+1} - x_n < 10^{-6}$

x_0	Cero Obtenido	Iteraciones
$\frac{\pi}{2}$	1,8955	18

      2) Repita el proceso tomando como valores iniciales $x_0 = 5\pi$ y $x_0 = 10\pi$ ¿La sucesión construída con estos puntos iniciales converge?

x_0	Cero Obtenido	Iteraciones
5π	1,8955	22
10π	0	66

      La sucesión, en el caso de $x_0 = 5\pi$, converge al mismo cero que en el ejercicio anterior. Por otra parte, cuando $x_0 = 10\pi$, esta converge a 0.

      3) Use el método de la secante para encontrar la solución aproximada tomando como puntos iniciales $x_0 = \frac{\pi}{2}$ y $x_0 = 5\pi$, como criterio de parada el mismo descrito en (a).

x_0	x_1	Cero Obtenido	Iteraciones
$\frac{\pi}{2}$	1,7854	1,8955	24
5π	13,0900	0	31

      Se puede apreciar que si $x_0 = 5\pi$, al ocupar el método de la secante se obtiene un cero distinto a cuando se ocupa el método de Newton.

3. Considere la ecuación no lineal $f(x) = -x^3 - \cos(x) = 0$

   a) Usando el método de Newton encontrar la raíz próxima al valor $x_0 = -1$, con una precisión de 10^{-5}.

Cero Obtenido	-0.8655
Iteraciones	4

   b) Repetir el proceso con el método de Newton modificado, esto es, con la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Cero Obtenido	-0.8655
Iteraciones	7

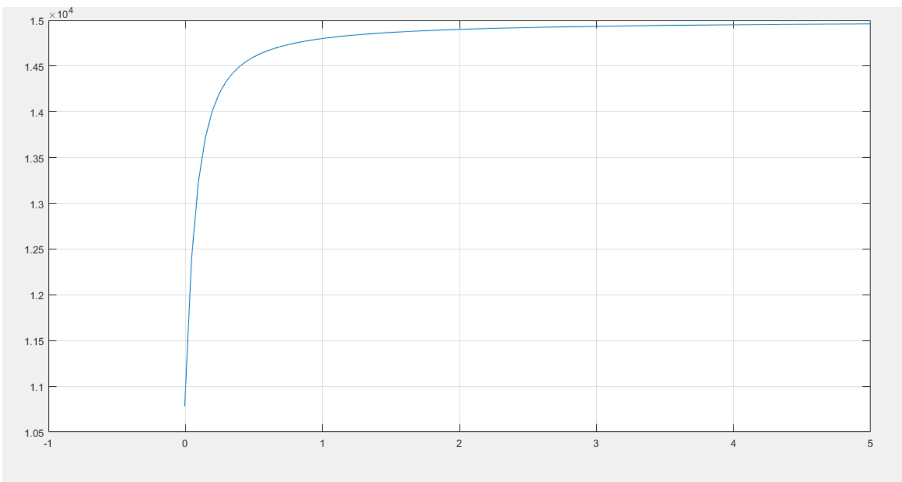
   ¿Qué método converge más rápido? El método de Newton usual converge más rápido, ya que este sólo tomó 4 iteraciones.

4. El dinero necesario para pagar la cuota correspondiente a un crédito hipotecario a interés fijo se suele estimar mediante la denominada "ecuación de la anualidad ordinaria":

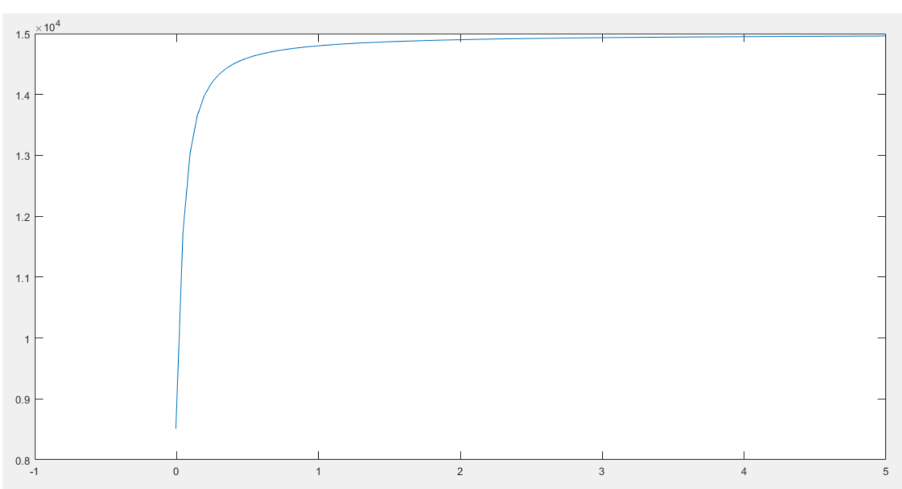
$$Q = \frac{A}{i}(1 - (1 + i)^{-n})$$

donde Q es la cantidad pedida en préstamo, A es la cuota que debe pagar el beneficiario por el préstamo, i es la tasa de interés fijado por la entidad bancaria que concede el préstamo y n es el número de periodos durante los cuales se realizan pagos de la cuota. Una pareja que desea comenzar una vida en común se plantea adquirir una vivienda y para ello saben que necesitan pedir un préstamo de 15000 dólares a pagar semestralmente durante un plazo de 10 años. Sabiendo que para atender este pago pueden destinar una cantidad máxima de 200 dólares mensuales, calcule cual es el tipo máximo de interés al que pueden negociar su préstamo con las entidades bancarias. Hint.- Usar método de Newton, tomando como punto inicial i0 = 0.03. Suponga ahora que desean endeudarse en 15 años en lugar de 10. Cual sería el interés en esta situación?

Resp: Al realizar el método de Newton aplicándolo a optimización, se obtiene un interes de 10.24 %.Si se Consideraba un error de 5 % el porcentaje de interes era excesivamente alto (orden del 40 %), es por ello que se realizarón iteraciones hasta observar que el valor no cambiaba, así se encontro el valor en el que converge a los 10 años del préstamo.



Suponga ahora que desean endeudarse en 15 años en lugar de 10 ¿Cual sera el interes en esta situacion? Resp: 5.1 % . El proceso de busqueda fue similar al anterior.



5. Considere la función $f(x) = x * cos(x) - e^x + 1$.

a) Considere las siguientes funciones. Realice unas 12 iteraciones de punto fijo, usando como puntos iniciales x0 = 0.5 y x0 = 0.5.

$$g1(x) = \frac{e^x + x - 1}{1 + cos(x)} \tag{2.1}$$

- x0=0.5

iteración	Punto
1	0,6118
2	0,8004
3	1,1947
4	2,5579
5	87,3616
6	4,7832e+37
7	inf
8	NaN
9	NaN
10	NaN
11	NaN
12	NaN

- x0=-0.5

iteración	Punto
1	-0.4759
2	-0.4524
3	-0.4298
4	-0.4081
5	-0.3875
6	-0.3680
7	-0.3497
8	-0.3324
9	-0.3163
10	-0.3012
11	-0.2871
12	-0.2739

$$g2(x) = \frac{\sqrt{x(e^x - 1)}}{cos(x)} \tag{2.2}$$

- x0=0.5

iteración	Punto
1	0.6080
2	0.7872
3	1.1555
4	2.4964
5	0.0000 + 5.8994i
6	0.1106 - 0.0106i
7	0.1140 - 0.0113i
8	0.1177 - 0.0121i
9	0.1216 - 0.0130i
10	0.1258 - 0.0140i
11	0.1303 - 0.0151i
12	0.1351 - 0.0163i

- x0=-0.5

iteración	Punto
1	0.4735
2	0.5676
3	0.7171
4	0.9989
5	1.7791
6	0.0000 + 6.5089i
7	0.0037 - 0.0660i
8	0.0026 - 0.0660i
9	0.0015 - 0.0660i
10	0.0004 - 0.0660i
11	0.0007 + 0.0659i
12	0.0004 - 0.0659i

b) Teniendo en cuenta las siguientes funciones de iteración de punto fijo. Realice unas 12 iteraciones de punto fijo, usando como puntos iniciales x0 = 0.5 y x0 = 0.5.

$$g3(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2.3}$$

- x0=0.5

iteración	Punto
1	0.2923
2	0.1645
3	0.0891
4	0.0468
5	0.0241
6	0.0122
7	0.0062
8	0.0031
9	0.0015
10	7.7566e-04
11	3.8803e-04
12	1.9407e-04

- x0=-0.5

iteración	Punto
1	0.9462
2	0.5755
3	0.3398
4	0.1932
5	0.1057
6	0.0560
7	0.0289
8	0.0147
9	0.0074
10	0.0037
11	0.0019
12	9.3724e-04

$$g4(x) = x - 2\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2.4}$$

- x0=0.5

iteración	Punto
1	0.0846
2	0.0041
3	1.1230e-05
4	8.4146e-11
5	8.4146e-11
6	8.4146e-11
7	8.4146e-11
8	8.4146e-11
9	8.4146e-11
10	8.4146e-11
11	8.4146e-11
12	8.4146e-11

- x0=-0.5

iteración	Punto
1	2.3924
2	0.6344
3	0.1196
4	0.0078
5	3.9737e-05
6	1.0509e-09
7	1.0509e-09
8	1.0509e-09
9	1.0509e-09
10	1.0509e-09
11	1.0509e-09
12	1.0509e-09

$$g5(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)} \tag{2.5}$$

- x0=0.5

iteración	Punto
1	-0.0551
2	-0.0023
3	-3.5887e-06
4	1.2916e-10
5	1.2916e-10
6	1.2916e-10
7	1.2916e-10
8	1.2916e-10
9	1.2916e-10
10	1.2916e-10
11	1.2916e-10
12	1.2916e-10

- x0=0.5

iteración	Punto
1	-0.4614
2	-0.3825
3	-0.2366
4	-0.0667
5	-0.0035
6	-8.1704e-06
7	-2.6231e-11
8	-2.6231e-11
9	-2.6231e-11
10	-2.6231e-11
11	-2.6231e-11
12	-2.6231e-11

c) Que puede decir sobre el comportamiento de las iteraciones de punto fijo calculadas anteriormente.

- De la función g2(x), tanto para el punto inicial x0=0.5 como para x0=-0.5, desde determinada iteración la solución se volvió imaginaria, por lo tanto g2(x), al no ser una función continua, no tiene puntos fijos.
- En cuanto a la función g3(x),para el punto inicial x0=0.5, la función cada vez va convergiendo a la solución, por lo que 0.5 es punto fijo de g3(x).
  Ahora para x0=-0.5 al igual que en el anterior punto fijo, este igual converge a la solución, declarandose así que -0.5 tambien es un punto fijo de g3(x).
- En cuanto a la función g4(x), para el punto x0=0.5 en las primeras iteraciones va convergiendo a la solución, hasta que se mantiene fijo en un valor. De esto se deduce que se encuentra la solución tomando como punto fijo 0.5.
  Lo mismo sucedió con x0=-0.5 desde determinada iteración fue convergiendo hasta llegar a un valor fijo el cual no siguió variando, se deduce lo mismo que en el caso anterior, en el que a partir del punto fijo -0.5, se llega a la solución.
- Acerca de la función g5(x) pasa algo similar a lo que sucedio con g4(x), en las cuales se encuentra la solución a partir de los puntos fijos tomados.

6. Métodos iterativos: A continuación se describen algunos métodos de iteración de punto fijo que encuentran la raíz aproximada de f(x) = 0

- Método de Newton
$$x_{n+1} = N_f(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
- Método de Schröder
$$x_{n+1} = S_f(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$
- Método de aceleración convexa de Whittaker
$$x_{n+1} = W_f(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)}(2 - L_f(x_n))$$

a) Utilice los métodos para encontrar la solución de la ecuación no lineal $f(x) = 0$, donde

(i) $f_1(x) = xe^{x^2} - sen(x) + 3cos(x) + 5$.

Métodos	x_0	Iteraciones	Cero Obtenido
Newton	-1	6	-1.2892
Schroder	-1	6	-1.2892
Whittaker	-1	10	-1.2892

(ii) $f_2(x) = x^3 - 3x^2(2^{-x}) + 3x(4^{-x}) - 8^{-x}$, en [0,1].

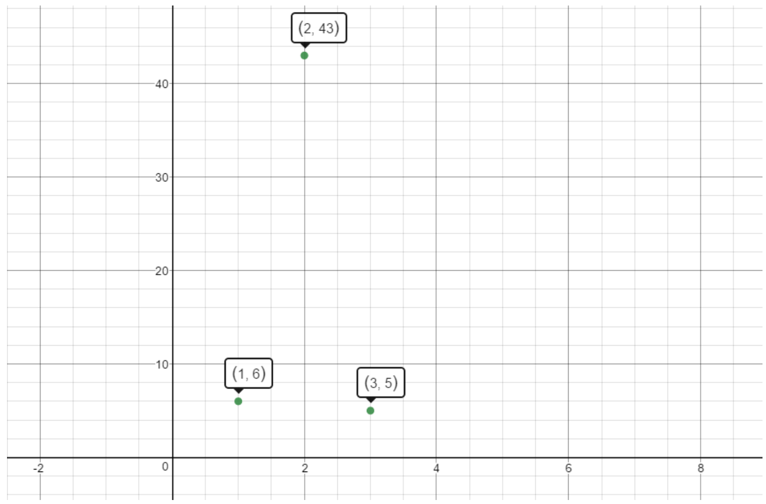
Métodos	x_0	Iteraciones	Cero Obtenido
Newton	1	43	0.6412
Schroder	1	4	0.6412
Whittaker	1	66	0.6412

(iii) $f_3(x) = cos(x + \sqrt[2]{2}) + x(\frac{x}{2} + 2)$, en [-2,1].

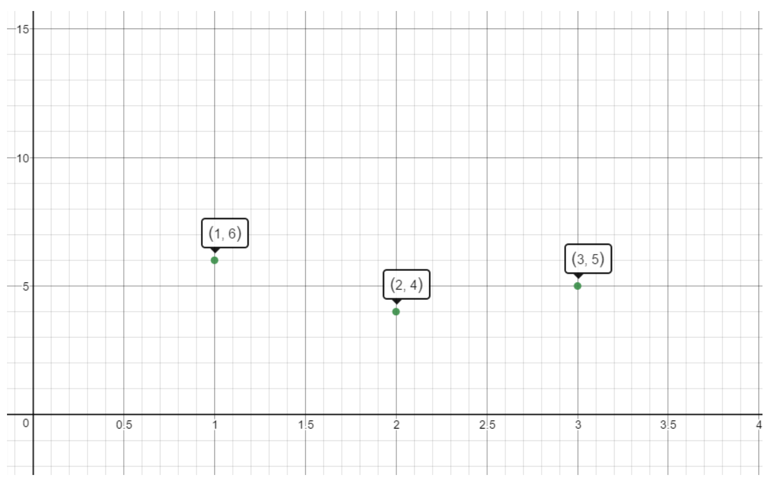
Métodos	x_0	Iteraciones	Cero Obtenido
Newton	-1	5	-0.1646
Schroder	-1	5	-0.1646
Whittaker	-1	6	-0.1646

b) Compare los errores relativos vs. las iteraciones (mediante un gráfico) para los métodos (descritos anteriormente) que determinan la raíz de $f_i(x) = 0$, para $i = 1,2,3$.

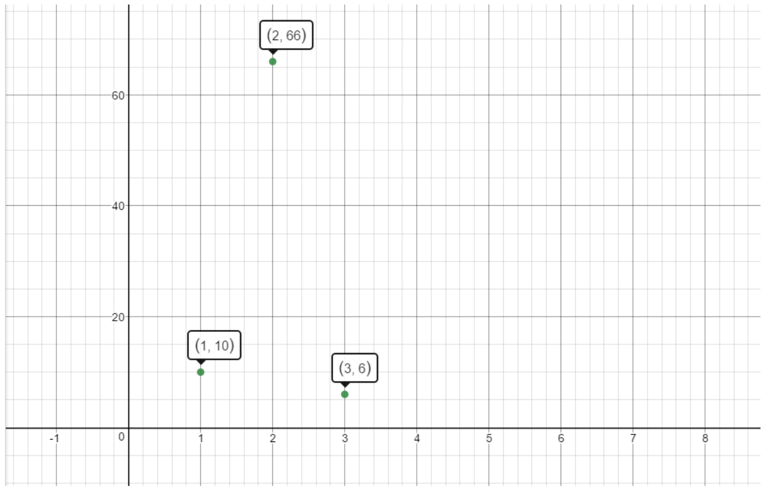
- Método de Newton:



- Métdo de Schröder:



- Método de Whittaker;



Al analizar la cantidad de iteraciones utilizadas por cada método, se puede concluír que el más eficiente es el método de Schroder.

3. Resolución de sistemas de ecuaciones no lineales:

En los siguientes ejercicios, use como criterio de parada lo siguiente:

$$\frac{||x^{n+1}-x^n||}{||x^{n+1}||} \leq 10^{-6}$$

Donde $||z|| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + ... + z_n^2}, z \in \mathbb{R}^n$

1. Considere los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales

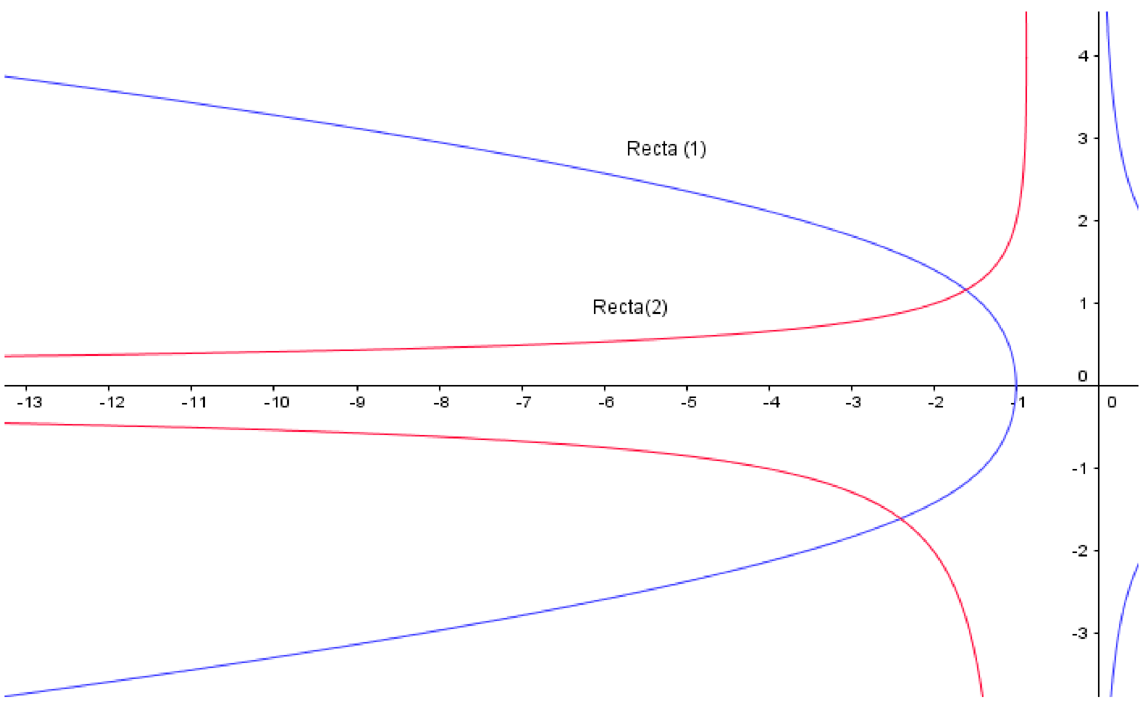
$$(a)\left\{\begin{array}{ll} x^2 + xy^2 - x - 2 & = 0 \\ y^2 + xy^2 - y + 2 & = 0 \end{array}\right. \qquad (b)\left\{\begin{array}{ll} x^2 + x - y^2 & = 1 \\ y - sen(x^2) & = 0 \end{array}\right.$$

Usando el método de Newton, encuentre sus soluciones aproximadas. Para encontrar los puntos iniciales, apóyese en los gráficos que le permiten encontrar una aproximación de la solución.

Pregunta $1a)$

$Recta(1) : x^2 + xy^2 - x - 2 = 0$

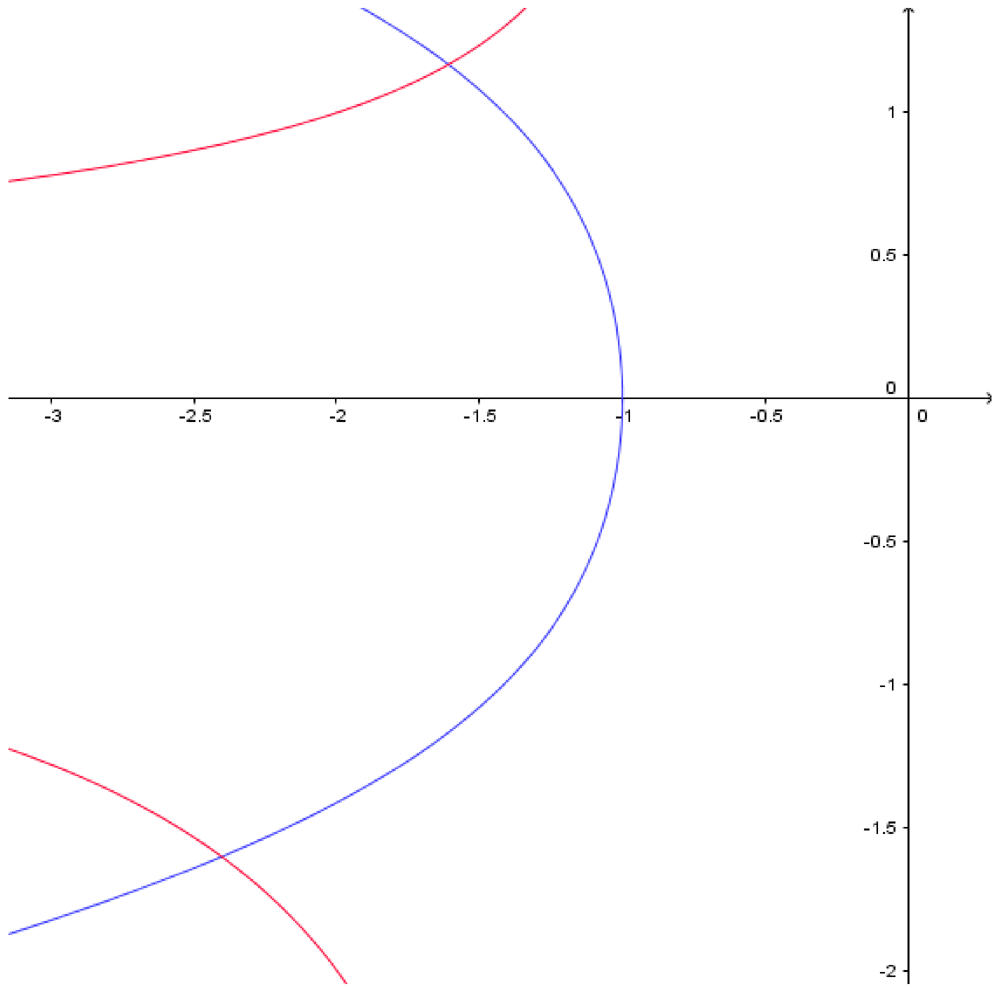
$Recta(2) : y^2 + xy^2 - y + 2 = 0$



Como se observa en el grafico las rectas (1) y (2) se intersectan 2 veces, mientras que luego tienden a alejarse una de la otra.

Analizaremos las 2 soluciones que existen dentro de este intervalo de gráfica mostrado anteriormente.

Luego, realizando un zoom en donde se encuentran las intersecciones, se obtiene lo siguiente.



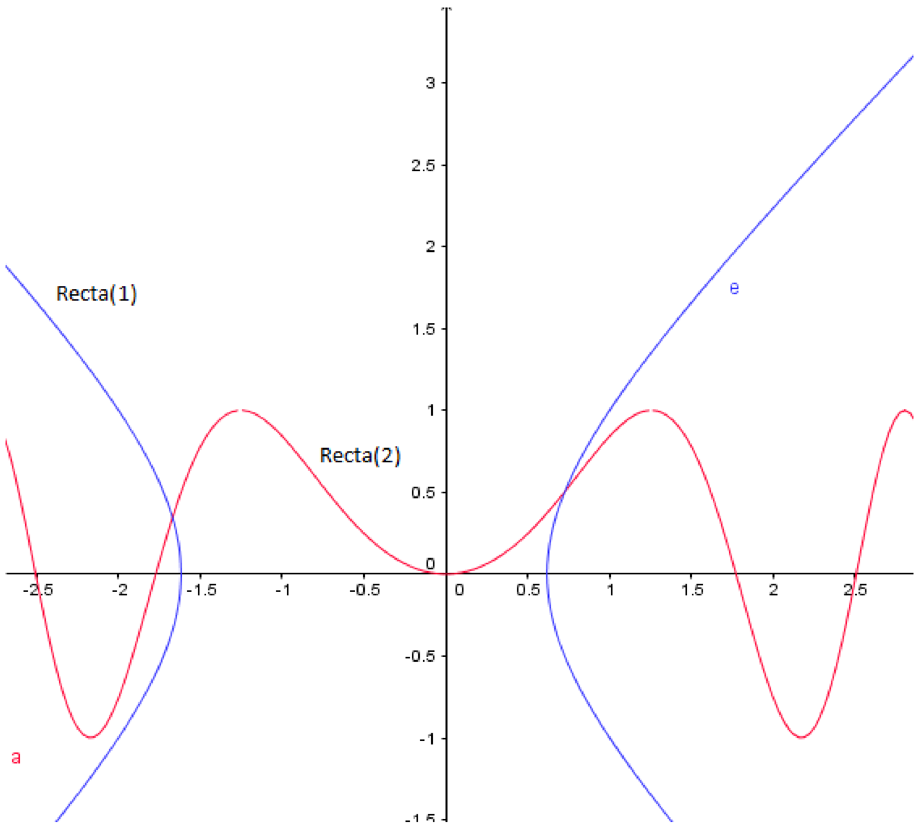
Ahora, para lograr obtener nuesta solución que se encuentra en el 2do cuadrante, ocuparemos un punto cercano a la interseccion. En este caso ocuparemos $x0 = [-2; 1]$ y el resulado obtenido como primera solución de la ecuación es: $x* = [-1.6088; 1.1686]$ siendo el punto $x = -1.6088$,$y = 1.1686$

Como ya obtuvimos la primera solución, buscaremos la segunda, la cual se encuentra en el 3er cuadrante, para el cual igualmente usaremos un punto cercano a lo que se muestra en la gráfica como interseccion de las funciones.Por lo tanto ocuparemos el $x0 = [-2; -1.8]$ obteniendo como el resultado el vector: $x* = [-2.4022; -1.6030]$ siendo el punto $x = -2.4022$, $y = -1.6030$

Pregunta $1b$)

$Recta(1) : x^2 + x - y^2 = 1$

$Recta(2) : y - sen(x^2) = 0$



Como se observa en la figura existen 2 soluciones del sistema no lineal, gracias a la gráfica dibujada dividiremos el problema en 2 casos, ocuparemos puntos cercanos a la intersección de las curvas dibujadas y asumiremos gracias a esta que no se intersectan en otro punto ya que $x \in (-inf, -2) \cup (1, inf+)$ las imagenes de las funciones se alejan.

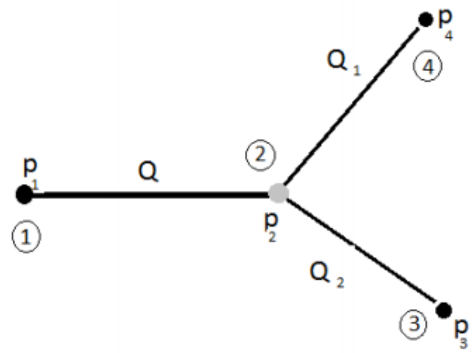
Con el error pedido en el inicio de este item el programa no logra terminar. debido a que el error es la condición de salida y que la diferencia obtenida de una iteración con la otra nunca llega a ser tan pequeña como el intervalo a esperar. Para solucionar esto se redefine nuestra condición de salida por otra, en este caso se ocupo una cantidad de iteraciones igual a 5-6.

Primero encontraremos la solución que se observa en el 1er cuadrante ,en este caso ocuparemos el punto inicial $x0 = [0.5; 0.5]$ Obteniendo como solución el vector $x* = [0.7272; 0.5028]$ el punto $x = 0.7272$, $y = 0.5028$.

Luego calcularemos la solución que en el gráfco se encuentra en el 2do cuadrante utilizando el punto inicial $0 = [-1.8; 0]$ obteniendo como solución el vector $x* = [-1.6663; 0.3612]$ el punto $x = -1.6663$, $y = 0.3612$

2. En un sistema de tuberías (ver figura), los caudales de un cierto fluido en cada rama y las presiones en cada nodo de la red se relacionan mediante el siguiente sistema

$$p1 - p2 = KQ^{1,75}$$
$$p2 - p4 = K_1 Q_1^{1,75}$$
$$p2 - p3 = K_2 Q_2^{1,75}$$



Para un determinado fluido se sabe que

$p_1 = 75psi \qquad p_3 = 20psi \qquad p_4 = 15psi \qquad K = 2,35e^{-3} \qquad K_1 = 4,67e^{-3} \qquad K_2 = 3,72e^{-2}$

Usando el método de Newton en varias variables, determine los caudales en todas las ramas, y la presión en el nodo 2 suponiendo que $Q = Q_1 + Q_2$. Use como valores iniciales: $p_2^0 = 50psi$, $Q_2^0 = 7$ y $Q_1^0 = 16$

Reescribiendo las ecuaciones con valores dados:

$$75 - p2 = 2.35e^{-3}(Q_1 + Q_2)^{1.75}$$
$$p2 - 15 = 4.67e^{-3}Q_1^{1.75}$$
$$p2 - 20 = 4.72e^{-2}Q_2^{1.75}$$

Escribimos vector de funciones de la forma $f(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} 75 - p2 - 2.35e^{-3}(Q_1 + Q_2)^{1.75} & = 0 \\ p2 - 15 - 4.67e^{-3}Q_1^{1.75} & = 0 \\ p2 - 20 - 4.72e^{-2}Q_2^{1.75} & = 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando los valores iniciales Se llega al resultado de:

$$\begin{pmatrix} p_2 & = 44.5717\ psi \\ Q_1 & = 15.9418 \\ Q_2 & = 8.0495 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto como $Q = Q_1 + Q_2$ implica que $Q = 23.9913$

Al igual que el ejercicio 1b) de éste item, para lograr el objetivo de encontrar una raiz se limita a una cantidad de iteraciones iguales a 3, logrando así valores cercanos a la solución de la ecuación.

Para realizar este item se utilizo el código de NewtonVariables.m

4. Investigación

El método de Horner es utilizado como el paso previo para encontrar las raíces de una ecuación polinomial, es decir una función de la forma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

Este algoritmo permite evaluar este tipo de ecuaciones con mayor rapidez que un método común, tomando n multiplicaciones y n sumas para evaluar un polinomio de grado n.

5. Conclusión

Del trabajo realizado se concluye lo siguiente, para el uso de ecuaciones no lineales, junto con esto los métodos que fueron aplicados para cada ítem, se logra una amplia comprensión de como es el funcionamiento de cada uno de estos procesos para los casos a los cuales se aplicaron, esto quiere decir que se observó el comportamiento de la función en cada método, casos como el del punto fijo, secante y newton en donde la toma del punto inicial fue fundamental para ver si el método que aplicamos era el correcto, así se determinó que para este tipo de casos existía una convergencia local, ya que la dependencia de este punto era vital para que existiera convergencia.
En general, la aplicación de estos métodos se hicieron con el fin de aproximarse cada vez más a la solución, es por ello que se realizaban múltiples iteraciones para la mayoría de los casos y observando en todo momento su comportamiento. Finalmente, la realización del trabajo es fundamental para comprender de manera practica la teoría de los métodos de aproximación.