

Metodos Numéricos : Tarea 1

Thomas Muñoz , Diego Vilches , Javiera Araya , Ignacio Yanjari.

1. Resolución de sistemas de ecuaciones no lineales:

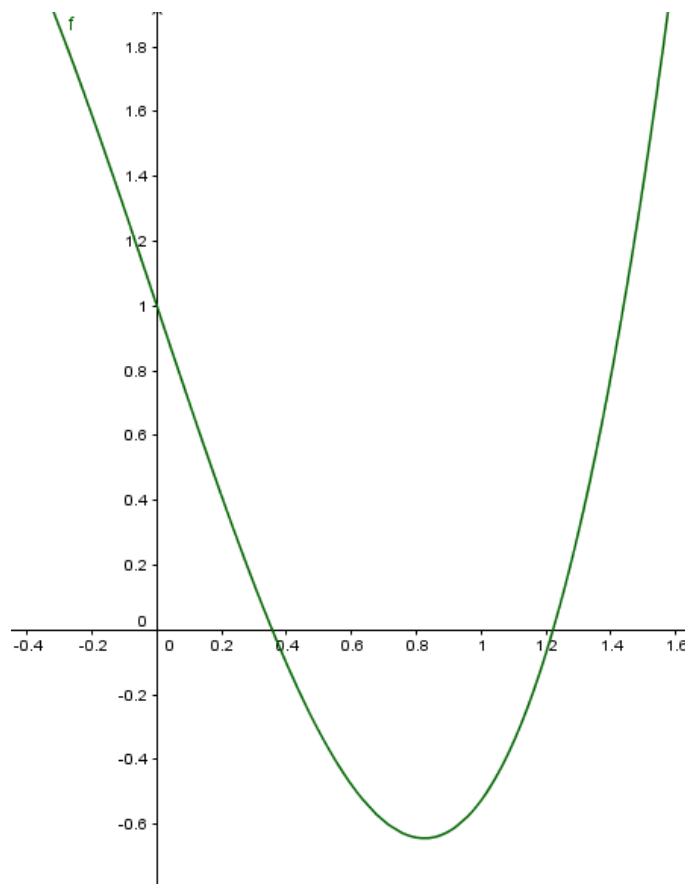
1. Usando los métodos de bisección, falsa posición, y secante, encuentre la raíz aproximada de las siguientes ecuaciones no lineales en los intervalos indicados:

Para realizar estas ecuaciones se utilizaron los programas de :

- Biseccion.m
- Secante.m
- FalsaPosicion.m

y las comparaciones de error se hicieron en base a el resultado de la función fzero de matlab

a) $x^3 - 3\text{sen}(x) + 1 = 0$, sobre $[0,2]$.

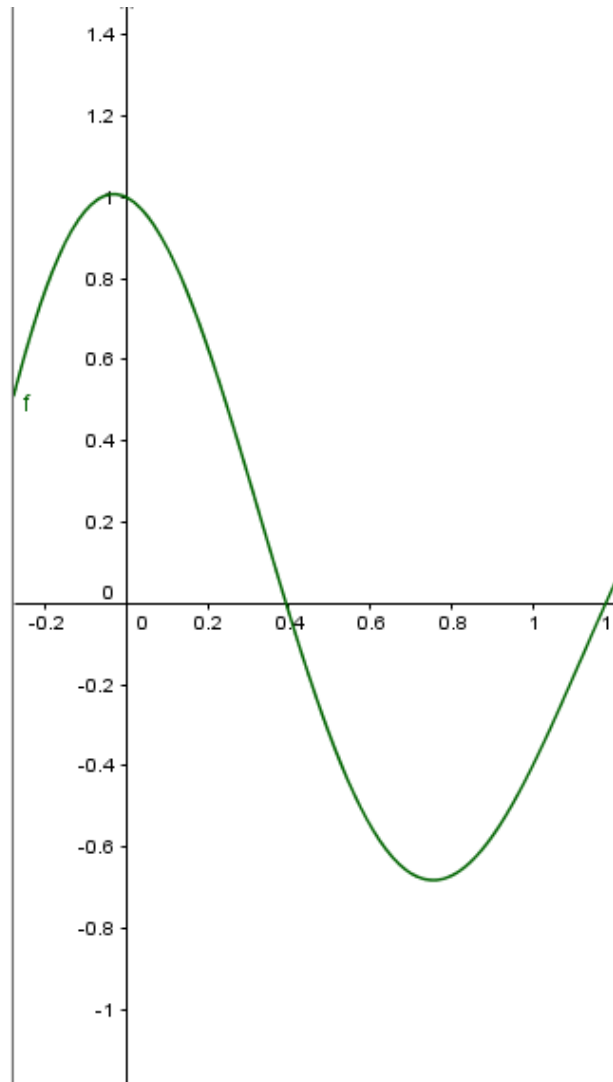


Nuestro objetivo es obtener el 0 de la función para resolver la ecuacion lineal, pero esta como muestra el gráfico tiene 2 soluciones. Para lograr analizar completamente estos 2 casos con los 3 métodos diferentes tendremos que separar en 2 intervalos nuestro intervalo anterior, en este caso lo separaremos en $[0,0.8]$ y $[0.8,2]$

Intervalo $[0,0.8]$:	Métodos	Secante	Biseccion	Falsa Posicion
	Cero Obtenido	0,3558	0,3558	0,3558
	Iteraciones	5	13	5
	Error Obtenido	0	0	0

Intervalo $[0.8,2]$:	Métodos	Secante	Biseccion	Falsa Posicion
	Cero Obtenido	1.2204	1.2204	1.2204
	Iteraciones	8	11	19
	Error Obtenido	0	0	0

b) $e^{-t/2}\cos(4t) = 0$, sobre $[0,1]$.

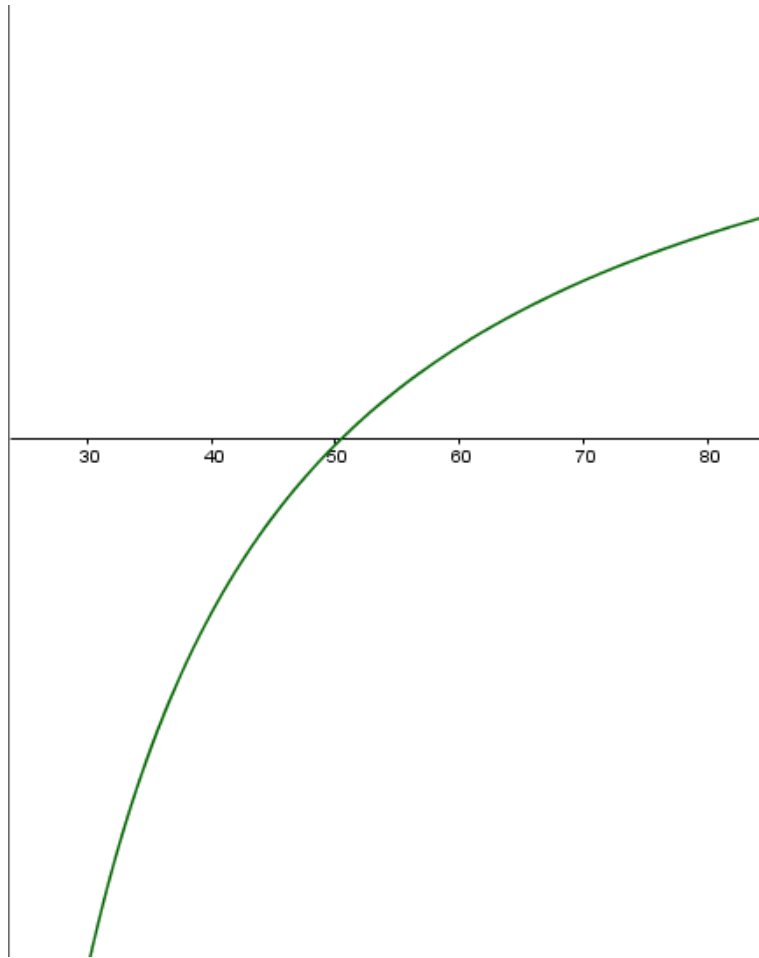


Métodos	Secante	Biseccion	Falsa Posicion
Cero Obtenido	1,9635	0,3927	0,3927
Iteraciones	3	12	4
Error Obtenido	4	0	0

Como se observa en la tabla el valor obtenido por el método de la secante es muy diferente al cero

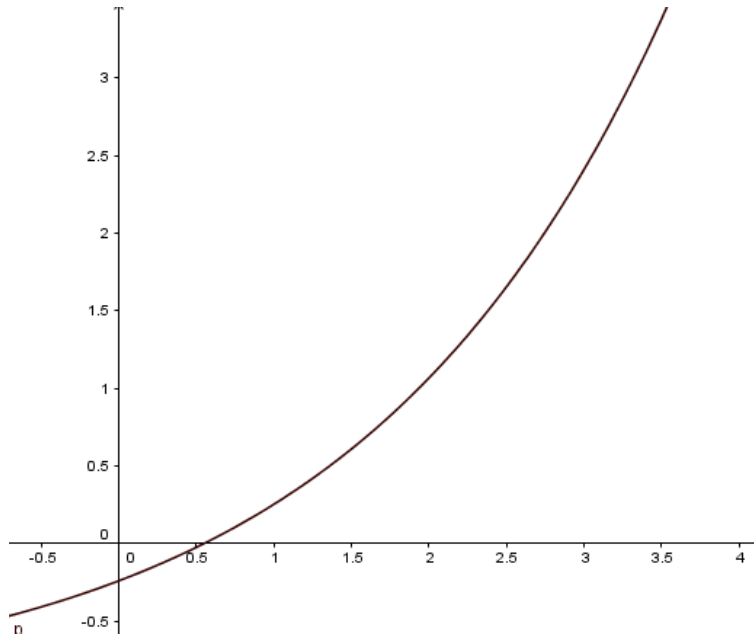
obtenido por los otros 2 que son Biseccion y falsa posición, los cuales encuentran el cero contenido en el intervalo pedido. Esto se debe a la forma en la cual se desarrolla el método de secante, el cual no usa un criterio entre 2 intervalos para encontrar el cero, para obtener el cero correcto se debe definir como $[0-0.8]$ y se encuentra el cero de 0,3927

c) $x + 40 - x \cosh\left(\frac{60}{x}\right) = 0$, sobre $[40,60]$.



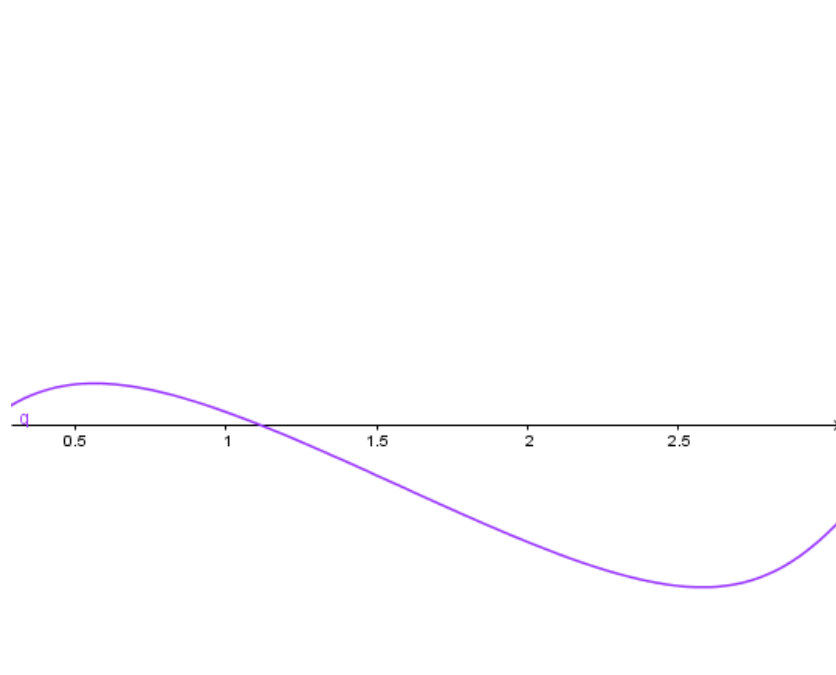
Métodos	Secante	Biseccion	Falsa Posicion
Cero Obtenido	50,5399	50,5399	50,5399
Iteraciones	5	15	9
Error Obtenido	0	0	0

d) $e^{0.5x} \cos(0.05\sqrt{200 - \frac{x^2}{10}}) - 1 = 0$, sobre $[0,4]$.



Métodos	Secante	Biseccion	Falsa Posicion
Cero Obtenido	0.5481	0.5481	0.5481
Iteraciones	5	13	18
Error Obtenido	0	0	0

$$e) f(\theta) = \frac{0.6 \sin \theta}{\sqrt{(\cos(\theta)-0.6)^2 + \sin(\theta)^2}} - \frac{0.6 \sin \theta}{\sqrt{(\cos(\theta)+0.6)^2 + \sin(\theta)^2}} = 0, \theta \in [1, 2]. \text{ (sol.exacta } \theta^* = \frac{\pi}{2} \text{)}$$



Métodos	Secante	Biseccion	Falsa Posicion
Cero Obtenido	1,5708	1,5708	1,5708
Iteraciones	3	10	2
Error Obtenido	0	0	0

Con una tolerancia de 10^{-5} . Haga una comparación de los métodos en cuanto a la cantidad de iteraciones, el error cometido. Cuál de ellos fue más eficiente?

El metodo más eficiente para lograr encontrar el valor de las funciones mencionadas es el metodo de Falsa Posicion ya que encontró el cero en todas las ecuaciones y necesitó en promedio un menor número de iteraciones en comparación con Bisección. Pero si no le damos importancia a la convergencia en el caso b) el mejor y más rapido sería el método de secante.

2.

3. Considere la ecuación no lineal $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(2x) = 0$

- a) Usando el método de Newton con punto inicial $x_0 = \frac{\pi}{2}$ encuentre la solución aproximada de f . Para ello Realize las iteraciones necesarias hasta que se cumpla el criterio de parada
- b) Considere la ecuación no lineal $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(2x) = 0$
- 1) Usando el método de Newton con punto inicial $x_0 = \frac{\pi}{2}$ encuentre la solución aproximada de f . Para ello Realize las iteraciones necesarias hasta que se cumpla el criterio de parada $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$

x_0	Cero Obtenido	Iteraciones
$\frac{\pi}{2}$	1,8955	18

- 2) Repita el proceso tomando como valores iniciales $x_0 = 5\pi$ y $x_0 = 10\pi$ ¿La sucesión construída con estos puntos iniciales converge?

x_0	Cero Obtenido	Iteraciones
5π	1,8955	22
10π	0	66

La sucesión, en el caso de $x_0 = 5\pi$, converge al mismo cero que en el ejercicio anterior. Por otra parte, cuando $x_0 = 10\pi$, esta converge a 0.

- 3) Use el método de la secante para encontrar la solución aproximada tomando como puntos iniciales $x_0 = \frac{\pi}{2}$ y $x_0 = 5\pi$, como criterio de parada el mismo descrito en (a).

x_0	x_1	Cero Obtenido	Iteraciones
$\frac{\pi}{2}$	1,7854	1,8955	24
5π	13,0900	0	31

Se puede apreciar que si $x_0 = 5\pi$, al ocupar el método de la secantem se obtiene un cero distinto a cuando se ocupa el método de Newton.

- c) Considere la ecuación no lineal $f(x) = -x^3 - \cos(x) = 0$
- 1) Usando el método de Newton encontrar la raíz próxima al valor $x_0 = -1$, con una precisión de 10^{-5} .

Cero Obtenido	-0.8655
Iteraciones	4

- 2) Repetir el proceso con el método de Newton modificado, esto es, con la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Cero Obtenido	-0.8655
Iteraciones	7

¿Qué método converge más rápido? El método de Newton usual converge más rápido, ya que solo tomó 4 iteraciones

4. El dinero necesario para pagar la cuota correspondiente a un crédito hipotecario a interés fijo se suele estimar mediante la denominada “ecuación de la anualidad ordinaria”:

$$Q = \frac{A}{i}(1 - (1 + i)^{-n})$$

donde Q es la cantidad pedida en préstamo, A es la cuota que debe pagar el beneficiario por el préstamo, i es la tasa de interés fijado por la entidad bancaria que concede el préstamo y n es el número de periodos durante los cuales se realizan pagos de la cuota. Una pareja que desea comenzar una vida en común se plantea adquirir una vivienda y para ello saben que necesitan pedir un préstamo de 15000 dólares a pagar semestralmente durante un plazo de 10 años. Sabiendo que para atender este pago pueden destinar una cantidad máxima de 200 dólares mensuales, calcule cual es el tipo máximo de interés al que pueden negociar su préstamo con las entidades bancarias. Hint.- Usar método de Newton, tomando como punto inicial $i_0 = 0.03$. Suponga ahora que desean endeudarse en 15 años en lugar de 10. Cual sería el interés en esta situación?

5. Considere la función $f(x) = x * \cos(x) - e^x + 1$.

- a) Considere las siguientes funciones. Realice unas 12 iteraciones de punto fijo, usando como puntos iniciales $x_0 = 0.5$ y $x_0 = 0.5$.

$$g1(x) = \frac{e^x + x - 1}{1 + \cos(x)} \quad (1)$$

■ $x_0=0.5$

iteración	Punto
1	0,6118
2	0,8004
3	1,1947
4	2,5579
5	87,3616
6	4,7832e+37
7	inf
8	NaN
9	NaN
10	NaN
11	NaN
12	NaN

■ $x_0 = -0.5$

iteración	Punto
1	-0.4759
2	-0.4524
3	-0.4298
4	-0.4081
5	-0.3875
6	-0.3680
7	-0.3497
8	-0.3324
9	-0.3163
10	-0.3012
11	-0.2871
12	-0.2739

$$g_2(x) = \frac{\sqrt{x(e^x - 1)}}{\cos(x)} \quad (2)$$

■ $x_0 = 0.5$

iteración	Punto
1	0.6080
2	0.7872
3	1.1555
4	2.4964
5	0.0000 + 5.8994i
6	0.1106 - 0.0106i
7	0.1140 - 0.0113i
8	0.1177 - 0.0121i
9	0.1216 - 0.0130i
10	0.1258 - 0.0140i
11	0.1303 - 0.0151i
12	0.1351 - 0.0163i

■ $x_0 = -0.5$

iteración	Punto
1	0.4735
2	0.5676
3	0.7171
4	0.9989
5	1.7791
6	0.0000 + 6.5089i
7	0.0037 - 0.0660i
8	0.0026 - 0.0660i
9	0.0015 - 0.0660i
10	0.0004 - 0.0660i
11	0.0007 + 0.0659i
12	0.0004 - 0.0659i

- b) Teniendo en cuenta las siguientes funciones de iteración de punto fijo. Realice unas 12 iteraciones de punto fijo, usando como puntos iniciales $x_0 = 0.5$ y $x_0 = -0.5$.

$$g_3(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (3)$$

- $x_0=0.5$

iteración	Punto
1	0.2923
2	0.1645
3	0.0891
4	0.0468
5	0.0241
6	0.0122
7	0.0062
8	0.0031
9	0.0015
10	7.7566e-04
11	3.8803e-04
12	1.9407e-04

- $x_0=-0.5$

iteración	Punto
1	0.9462
2	0.5755
3	0.3398
4	0.1932
5	0.1057
6	0.0560
7	0.0289
8	0.0147
9	0.0074
10	0.0037
11	0.0019
12	9.3724e-04

$$g_4(x) = x - 2 \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (4)$$

- $x_0=0.5$

iteración	Punto
1	0.0846
2	0.0041
3	1.1230e-05
4	8.4146e-11
5	8.4146e-11
6	8.4146e-11
7	8.4146e-11
8	8.4146e-11
9	8.4146e-11
10	8.4146e-11
11	8.4146e-11
12	8.4146e-11

- $x_0=-0.5$

iteración	Punto
1	2.3924
2	0.6344
3	0.1196
4	0.0078
5	3.9737e-05
6	1.0509e-09
7	1.0509e-09
8	1.0509e-09
9	1.0509e-09
10	1.0509e-09
11	1.0509e-09
12	1.0509e-09

$$g_5(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)} \quad (5)$$

- $x_0=0.5$

iteración	Punto
1	-0.0551
2	-0.0023
3	-3.5887e-06
4	1.2916e-10
5	1.2916e-10
6	1.2916e-10
7	1.2916e-10
8	1.2916e-10
9	1.2916e-10
10	1.2916e-10
11	1.2916e-10
12	1.2916e-10

- $x_0=-0.5$

iteración	Punto
1	-0.4614
2	-0.3825
3	-0.2366
4	-0.0667
5	-0.0035
6	-8.1704e-06
7	-2.6231e-11
8	-2.6231e-11
9	-2.6231e-11
10	-2.6231e-11
11	-2.6231e-11
12	-2.6231e-11

c) Que puede decir sobre el comportamiento de las iteraciones de punto fijo calculadas anteriormente.

- De la función $g_1(x)$, cuando se toma el punto inicial $x_0=0.5$, la iteración por punto fijo diverge, pues, cada vez que se hacen más iteraciones, el numero tendra a infinito, por lo tanto 0.5 no es punto fijo de $g_1(x)$. Por otra parte, al tomar en la misma función $g_1(x)$ el punto inicial $x_0=-0.5$, al realizar más iteraciones este convergera a la solución, por lo tanto -0.5 si es punto fijo de $g_1(x)$.
- De la función $g_2(x)$, tanto para el punto inicial $x_0=0.5$ como para $x_0=-0.5$ desde determinada iteración la solución se volvio imaginaria, por lo tanto $g_2(x)$ al no ser una función continua no tiene puntos fijos.
- De la función $g_3(x)$, para el punto inicial $x_0=0.5$ la función cada vez va convergiendo a la solución, por lo que 0.5 es punto fijo de $g_3(x)$.
Ahora para $x_0=-0.5$ al igual que en el anterior punto fijo, este igual converge a la solución, declarandose así que -0.5 tambien es un punto fijo de $g_3(x)$.

- De la función $g_4(x)$, para el punto $x_0=0.5$ en las primeras iteraciones va convergiendo a la solución, hasta que se mantiene fijo en un valor, de esto se deduce que se encuentra la solución tomando como punto fijo 0.5.
Lo mismo sucedio con $x_0=-0.5$ desde determinada iteración fue convergiendo hasta llegar a un valor fijo el cual no siguio variando, se deduce lo mismo que en el caso anterior, que apartir del punto fijo -0.5 se llega a la solución.
- De la función $g_5(x)$ pasa algo similar a lo que sucedio con $g_4(x)$, las cuales se encuentra la solución a partir de los puntos fijos tomados.

iiiiiii HEAD

6. Según los metodos descritos(Nweton, Schröder y Whittaker) para encontrar la raíz aproximada de $f(x) = 0$: =====

7. Métodos iterativos :A continuación se describen algunos métodos de iteración de punto fijo que encuentran la raíz aproximada de $f(x) = 0$

- Método de Newton

$$x_{n+1} = N_f(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Método de Schröder

$$x_{n+1} = S_f(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

- Método de aceleración convexa de Whittaker

$$x_{n+1} = W_f(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)}(2 - L_f(x_n))$$

lllllll 2d15196d83295c79463f3c1fbf4094e856e2e603

- a) Utilize los métodos para encontrar la solución de la ecuación no lineal $f(x) = 0$, donde

(i) $f_1(x) = xe^{x^2} - \text{sen}(x) + 3\cos(x) + 5$.

Métodos	x_0	Iteraciones	Cero Obtenido
Newton	-1	6	-1.2892
Schroder	-1	6	-1.2892
Whittaker	-1	10	-1.2892

(ii) $f_2(x) = x^3 - 3x^2(2^{-x}) + 3x(4^{-x}) - 8^{-x}$, en $[0,1]$.

Métodos	x_0	Iteraciones	Cero Obtenido
Newton	1	43	0.6412
Schroder	1	4	0.6412
Whittaker	1	66	0.6412

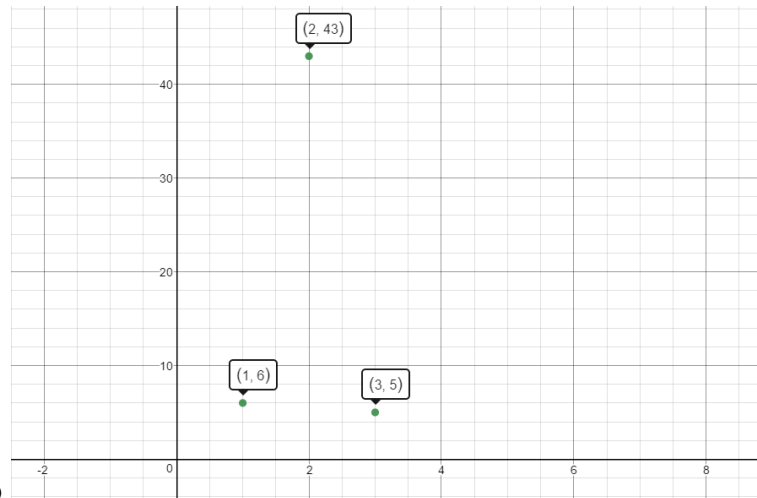
(iii) $f_3(x) = \cos(x + \sqrt[2]{2}) + x(\frac{x}{2} + 2)$, en $[-2,1]$.

Métodos	x_0	Iteraciones	Cero Obtenido
Newton	-1	5	-0.1646
Schroder	-1	5	-0.1646
Whittaker	-1	6	-0.1646

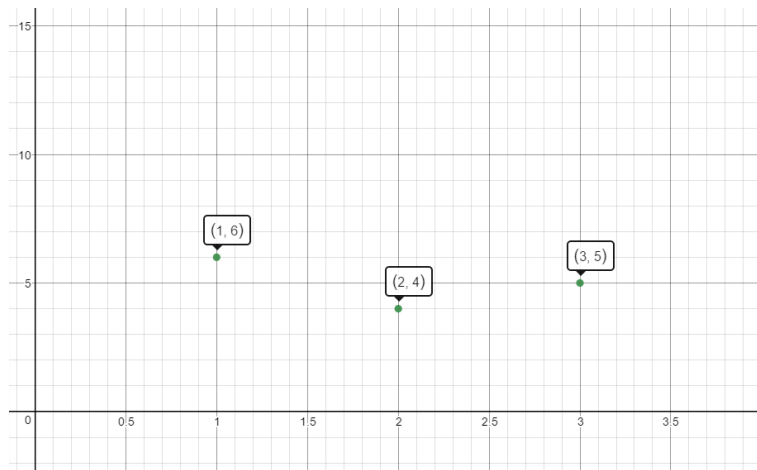
- b) Compare los errores relativos vs. las iteraciones (mediante un gráfico) para los métodos (descritos anteriormente) que determinan la raíz de $f_i(x) = 0$, para $i = 1,2,3$.

- Método de Newton:

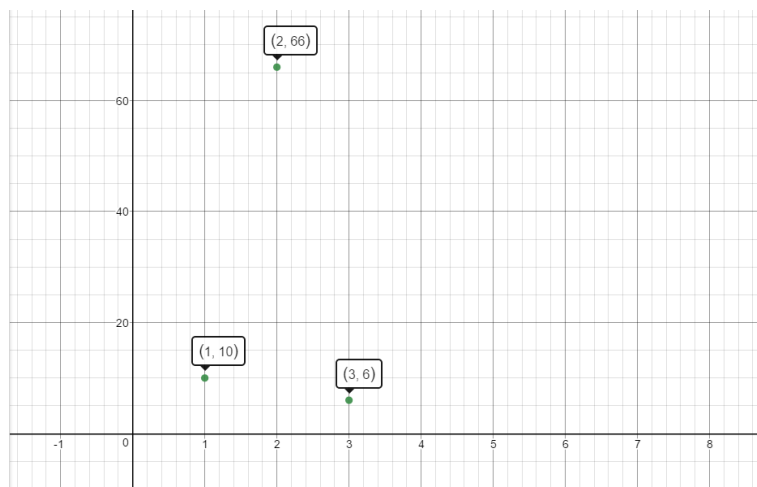
iiiiiii HEAD



■ Métdo de Schröder:



■ Método de Whittaker;



lllllll 2d15196d83295c79463f3c1fbf4094e856e2e603

2. Resolución de sistemas de ecuaciones no lineales:

En los siguientes ejercicios, use como criterio de parada lo siguiente:

$$\frac{\|x^{n+1} - x^n\|}{\|x^{n+1}\|} \leq 10^{-6}$$

Donde $\|z\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2}$, $z \in \mathbb{R}^n$

1. Considere los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales

$$(a) \begin{cases} x^2 + xy^2 - x - 2 = 0 \\ y^2 + xy^2 - y + 2 = 0 \end{cases}$$

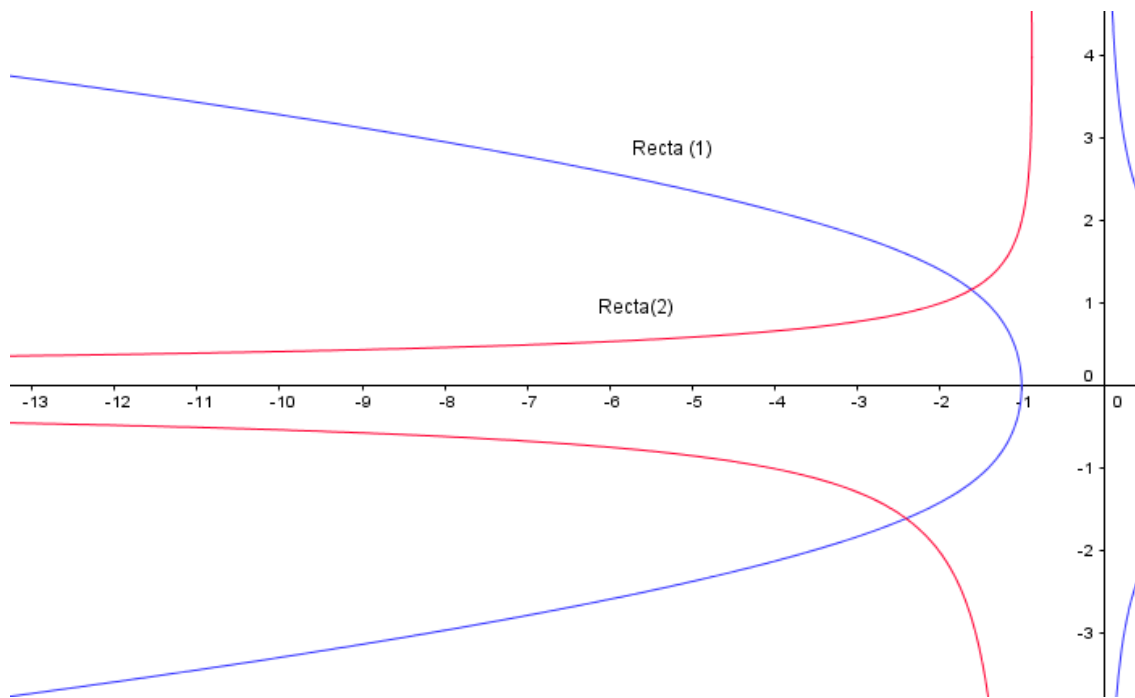
$$(b) \begin{cases} x^2 + x - y^2 = 1 \\ y - \sin(x^2) = 0 \end{cases}$$

Usando el método de Newton, encuentre sus soluciones aproximadas. Para encontrar los puntos iniciales, apóyese en los gráficos que le permiten encontrar una aproximación de la solución

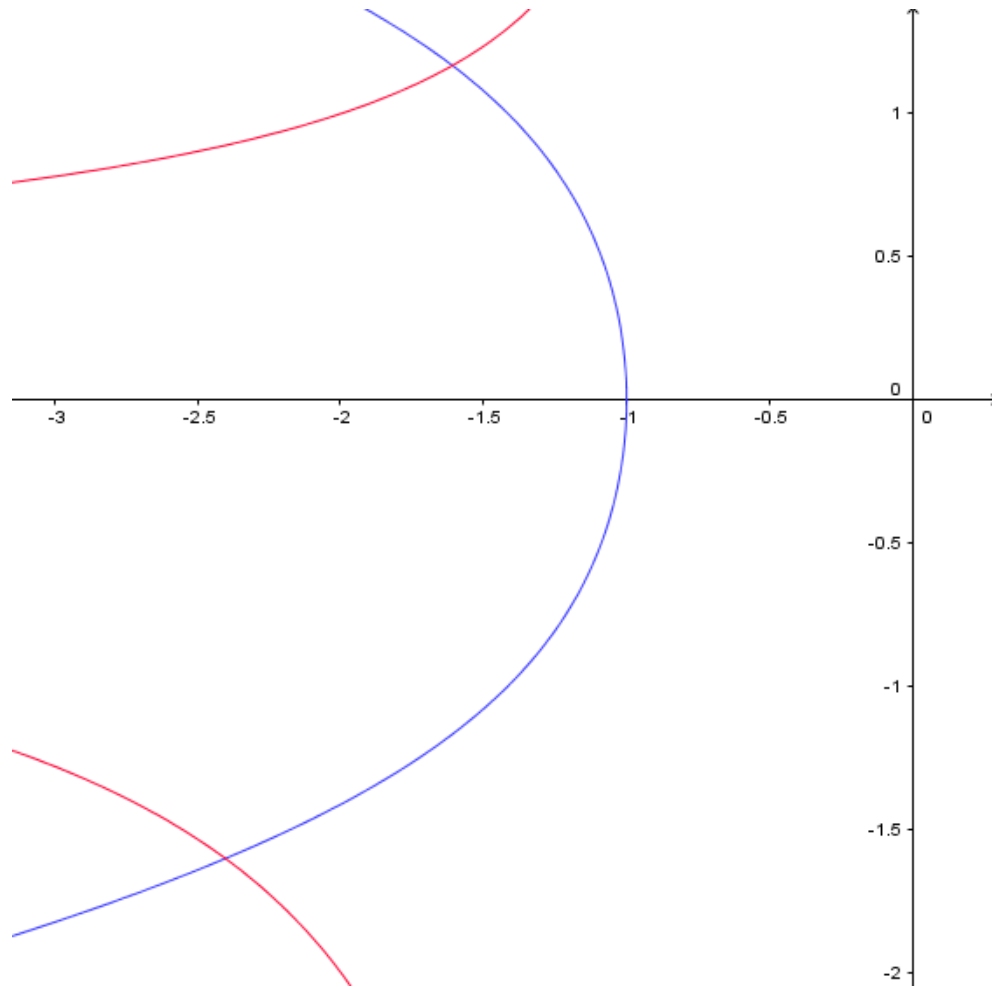
Pregunta 1a)

$$\text{Recta(1)} : x^2 + xy^2 - x - 2 = 0$$

$$\text{Recta(2)} : y^2 + xy^2 - y + 2 = 0$$



Como se observa en el grafico las rectas (1) y (2) se intersectan 2 veces, mientras que su comportamiento luego tiende a alejarse una de la otra analizaremos las 2 soluciones que existen dentro de este intervalo de gráfica mostrado anteriormente. Posteriormente realizando un zoom en donde se encuentran las intersecciones se obtiene lo siguiente.



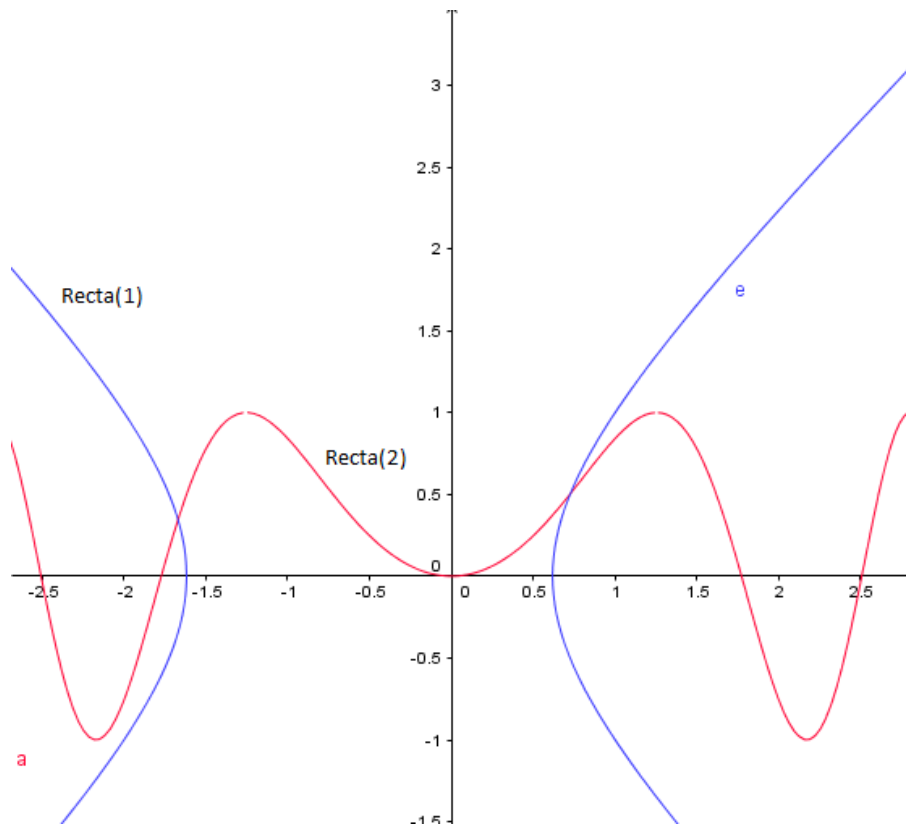
Ahora para lograr obtener nuestra solución que se encuentra en el 2do cuadrante ocuparemos un punto cercano a la intersección. En este caso ocuparemos $x_0 = [-2; 1]$ y el resultado obtenido como primera solución de la ecuación es : $x^* = [-1.6088; 1.1686]$ siendo el punto $x = -1.6088, y = 1.1686$

Como ya obtuvimos la primera solución buscaremos la segunda, la cual se encuentra en el 3er cuadrante, para el cual igual usaremos un punto cercano a lo que se muestra en la gráfica como intersección de las funciones. Por lo tanto ocuparemos el $x_0 = [-2; -1.8]$ obteniendo como el resultado el vector: $x^* = [-2.4022; -1.6030]$ siendo el punto $x = -2.4022, y = -1.6030$

Pregunta 1b)

$$\text{Recta(1)} : x^2 + x - y^2 = 1$$

$$\text{Recta(2)} : y - \text{sen}(x^2) = 0$$



Como se observa en la figura existen 2 soluciones del sistema no lineal, gracias a la gráfica dibujada dividiremos el problema en 2 casos, ocuparemos puntos cercanos a la intersección de las curvas dibujadas y asumiremos gracias a esta que no se intersectan en otro punto ya que $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ las imágenes de las funciones se alejan.

Con el error pedido en el inicio de este item el programa no logra terminar. debido a que el error es la condición de salida y que la diferencia obtenida de una iteración con la otra nunca llega a ser tan pequeña como el intervalo a esperar. Para solucionar esto se redefine nuestra condición de salida por otra, en este caso se ocupo una cantidad de iteraciones igual a 5-6.

Primero encontraremos la solución que se observa en el 1er cuadrante ,en este caso ocuparemos el punto inicial $x_0 = [0.5; 0.5]$ Obteniendo como solución el vector $x^* = [0.7272; 0.5028]$ el punto $x = 0.7272$, $y = 0.5028$.

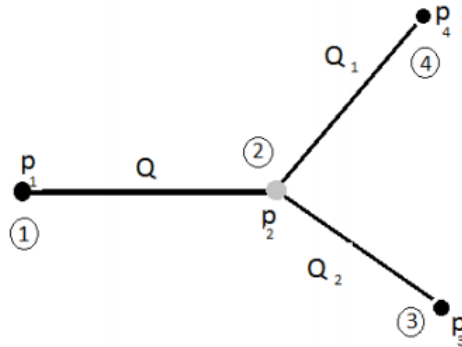
Luego calcularemos la solución que en el gráfico se encuentra en el 2do cuadrante utilizando el punto inicial $0 = [-1.8; 0]$ obteniendo como solución el vector $x^* = [-1.6663; 0.3612]$ el punto $x = -1.6663$, $y = 0.3612$

2. En un sistema de tuberías (ver figura), los caudales de un cierto fluido en cada rama y las presiones en cada nodo de la red se relacionan mediante el siguiente sistema

$$p_1 - p_2 = KQ^{1.75}$$

$$p_2 - p_4 = K_1Q_1^{1.75}$$

$$p_2 - p_3 = K_2Q_2^{1.75}$$



Para un determinado fluido se sabe que

$$p_1 = 75psi \quad p_3 = 20psi \quad p_4 = 15psi \quad K = 2,35e^{-3} \quad K_1 = 4,67e^{-3} \quad K_2 = 3,72e^{-2}$$

Usando el método de Newton en varias variables, determine los caudales en todas las ramas, y la presión en el nodo 2 suponiendo que $Q = Q_1 + Q_2$. Use como valores iniciales: $p_2^0 = 50psi$, $Q_2^0 = 7$ y $Q_1^0 = 16$

Reescribiendo las ecuaciones con valores dados:

$$75 - p_2 = 2.35e^{-3}(Q_1 + Q_2)^{1.75}$$

$$p_2 - 15 = 4.67e^{-3}Q_1^{1.75}$$

$$p_2 - 20 = 4.72e^{-2}Q_2^{1.75}$$

Escribimos vector de funciones de la forma $f(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} 75 - p_2 - 2.35e^{-3}(Q_1 + Q_2)^{1.75} & = & 0 \\ p_2 - 15 - 4.67e^{-3}Q_1^{1.75} & = & 0 \\ p_2 - 20 - 4.72e^{-2}Q_2^{1.75} & = & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando los valores iniciales Se llega al resultado de :

$$\begin{pmatrix} p_2 & = & 44.5717 \text{ psi} \\ Q_1 & = & 15.9418 \\ Q_2 & = & 8.0495 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto como $Q = Q_1 + Q_2$ implica que $Q = 23.9913$

Al igual que el ejercicio 1b) de éste item para lograr el objetivo de encontrar una raíz se limita a una cantidad de iteraciones iguales a 3, logrando así valores cercanos a la solución de la ecuación

Para realizar este item se utilizo el código de NewtonVariables.m