

DSP Simulation Project #2

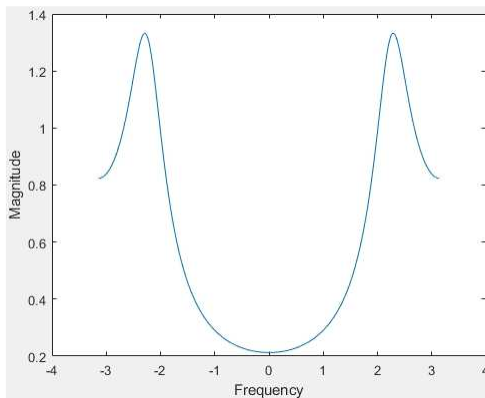
2018142023 조성민

< Inverse system & Minimum phase system >

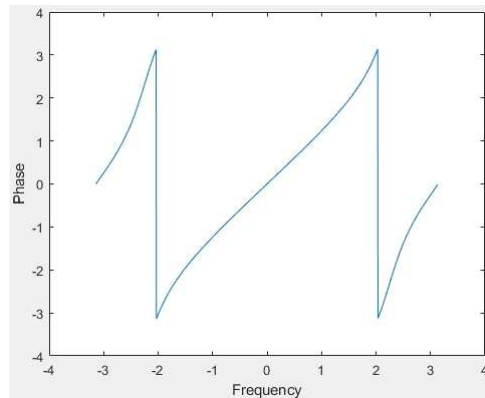
1. 다음과 같은 z-전달함수를 갖는 LTI system에 대하여 아래의 실험들을 진행합니다.
(frequency 영역에서의 ω 축은 $[-\pi, \pi]$ 로 나타냅니다)

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 1.4e^{-j\frac{5\pi}{7}}z^{-1})(1 - 1.4e^{j\frac{5\pi}{7}}z^{-1})}$$

- ① 주어진 LTI system의 spectral magnitude response와 phase response의 그래프를 그립니다. (Hint : phase 값의 범위를 $[-\pi, \pi]$ 로 나타내세요.)



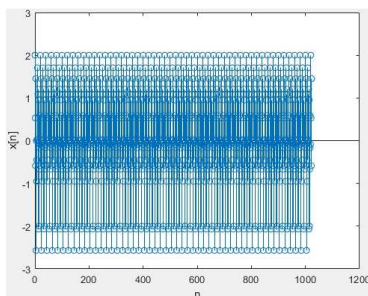
$|H(w)|$



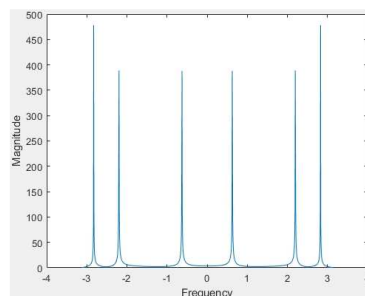
$\angle H(w)$

- ② 다음의 입력신호 $x[n]$ 을 1024 포인트로 발생시킨 후에 시간 축에서 그리고, 주파수 축에서 spectral magnitude response와 phase response의 그래프를 그립니다.

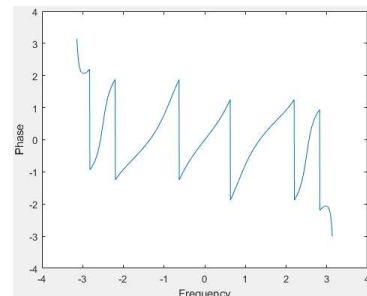
$$x[n] = \sin\left(\frac{9}{10}\pi n\right) + \cos\left(\frac{7}{10}\pi n\right) + \cos\left(\frac{1}{5}\pi n\right)$$



$x[n]$

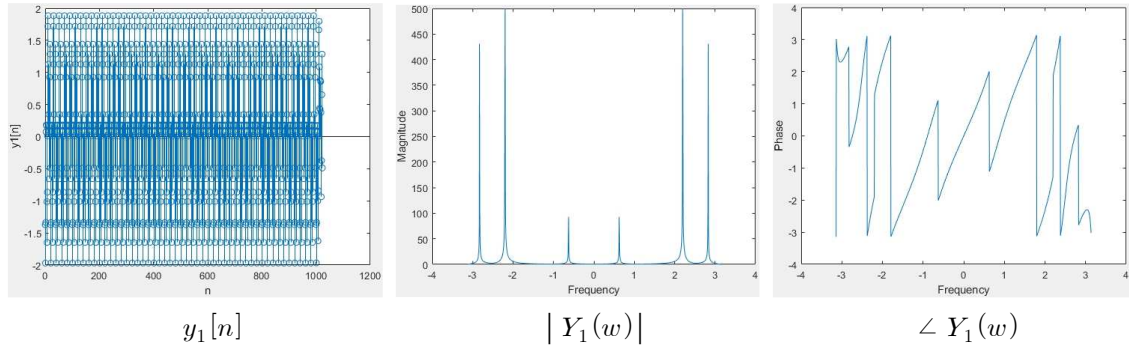


$|X(w)|$

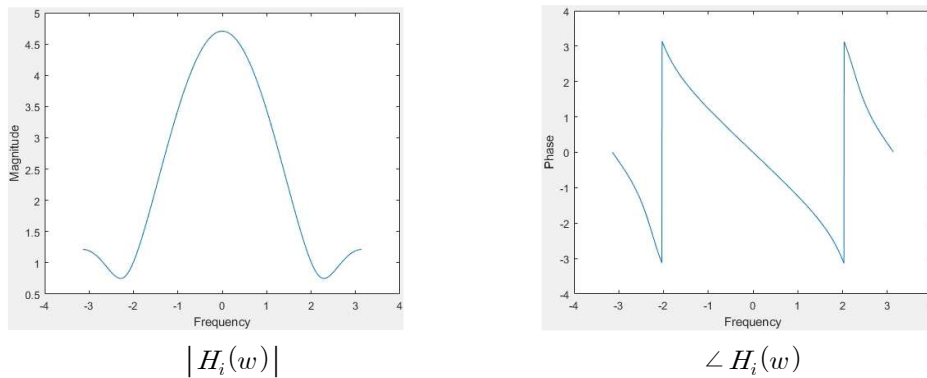


$\angle X(w)$

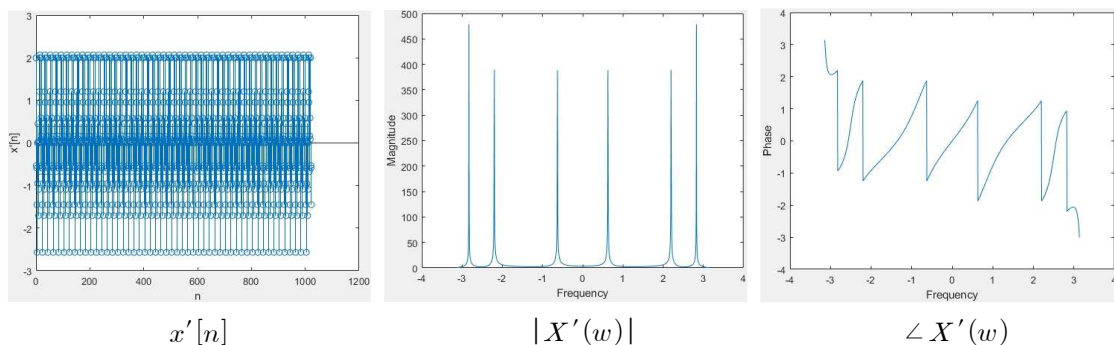
- ③ ②에서의 입력 신호를 $H(z)$ 에 통과시켰을 때의 출력 $y_1[n]$ 을 시간 축에서 그리고, 주파수 축에서 spectral magnitude response와 phase response를 각각 그래프로 그립니다.



- ④ 위 system의 inverse system에 대한 전달함수 $H_i(z)$ 를 구하고, spectral magnitude response와 phase response를 각각 그래프로 그립니다.

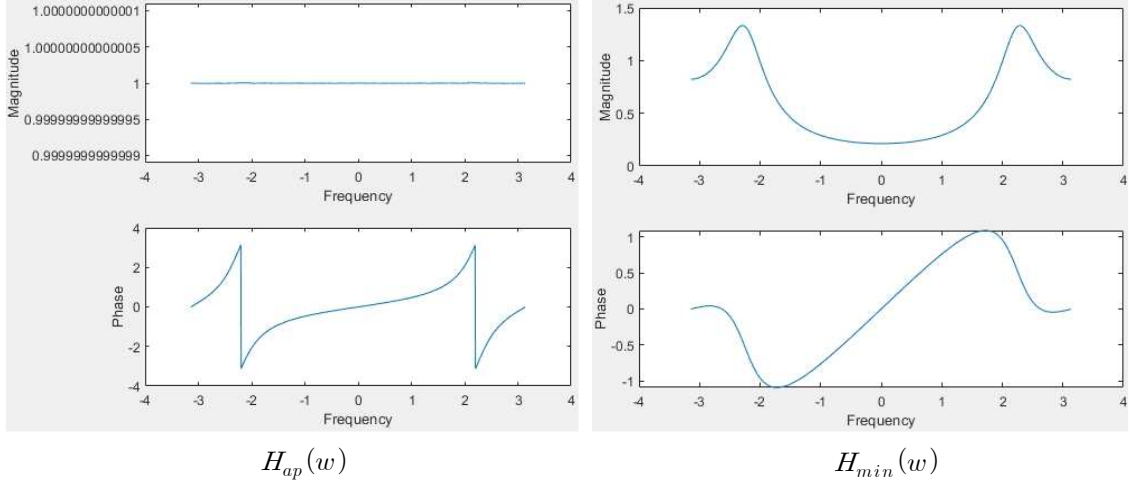


- ⑤ ③에서 구한 $y_1[n]$ 을 inverse system $H_i(z)$ 에 통과시켰을 때의 출력 $x'[n]$ 을 구하여 시간 축에서 그리고, 주파수 축에서 spectral magnitude response와 phase response를 각각 그래프로 그리고 결과를 $x[n]$ 과 비교합니다.

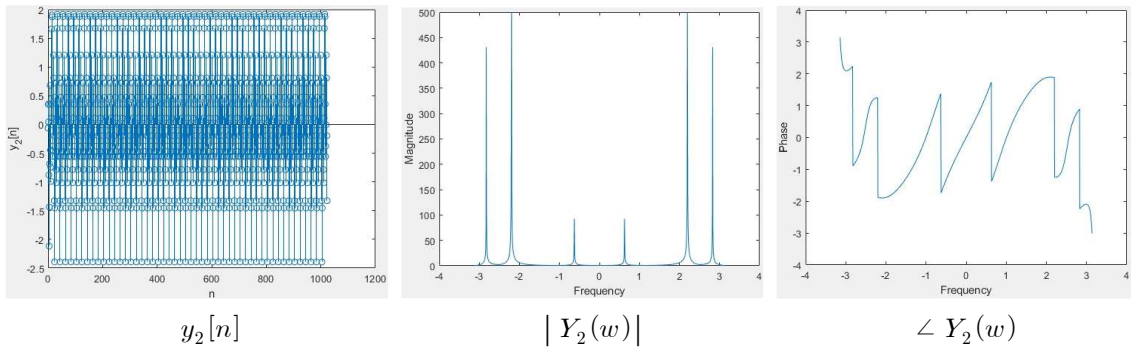


$|X'(w)|$ 에서 $|X(w)|$ 의 저주파 대역의 신호가 통과되고 고주파 대역의 신호가 필터링 된 것을 확인할 수 있고, $\angle X'(w)$ 에서는 pole로 인해 $\angle X(w)$ 와 다르게 $w = \pm \frac{5\pi}{7}$ 에서 신호가 튀는 것을 알 수 있다.

- ⑥ All-pass filter $H_{ap}(z)$ 를 이용하여 $H(z)$ 를 minimum phase system $H_{min}(z)$ 로 변형하고, 두 system $H_{ap}(z)$ 와 $H_{min}(z)$ 의 spectral magnitude response와 phase response를 각각 그래프로 그림니다.



- ⑦ ②에서의 입력 신호를 minimum phase system $H_{min}(z)$ 에 통과시켰을 때의 출력 $y_2[n]$ 을 시간 축에서 그리고, 주파수 축에서 spectral magnitude response와 phase response를 각각 그래프로 그림니다.



⑧ 위의 결과로부터 all-pass filter와 minimum phase system에 대해 자세하게 설명합니다. 또한 $H_{ap}(z)$ 와 $H_{min}(z)$ 를 유도하는 과정을 설명합니다.

-Unit circle의 바깥에 위치한 2개의 pole $1.4e^{-j\frac{5\pi}{7}}$, $1.4e^{j\frac{5\pi}{7}}$ 을 상쇄시키기 위한 all-pass filter를 만들어서 stable & causal system을 만든다.

-식 $H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$ 에 의하여 all-pass filter를 다음과 같이 설계할 수 있다.

$$H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1} - 1.4e^{j\frac{5\pi}{7}})(z^{-1} - 1.4e^{-j\frac{5\pi}{7}})}{(1 - 1.4e^{-j\frac{5\pi}{7}}z^{-1})(1 - 1.4e^{j\frac{5\pi}{7}}z^{-1})} \quad (\text{Gain}=1)$$

-Minimum phase system에서 pole과 zero가 모두 unit circle 안에 존재해야 한다.

-식 $H_{min}(z) = H(z)H_{ap}(z)$ 을 통해 minimum phase system을 설계할 수 있다.

- $H_{ap}(z)$ 와 $H_{min}(z)$ 의 유도과정은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{(1 - 1.4e^{-j\frac{5\pi}{7}}z^{-1})(1 - 1.4e^{j\frac{5\pi}{7}}z^{-1})} \\ &= H'_{min}(z) \times \frac{1}{1 - 1.4e^{-j\frac{5\pi}{7}}z^{-1}} \times \frac{1}{1 - 1.4e^{j\frac{5\pi}{7}}z^{-1}} \\ &= H'_{min}(z) \times \frac{1}{z^{-1} - 1.4e^{j\frac{5\pi}{7}}} \times \frac{1}{z^{-1} - 1.4e^{-j\frac{5\pi}{7}}} \times \frac{z^{-1} - 1.4e^{j\frac{5\pi}{7}}}{1 - 1.4e^{-j\frac{5\pi}{7}}z^{-1}} \times \frac{z^{-1} - 1.4e^{-j\frac{5\pi}{7}}}{1 - 1.4e^{j\frac{5\pi}{7}}z^{-1}} \\ &= H_{min}(z) \times \frac{(z^{-1} - 1.4e^{j\frac{5\pi}{7}})(z^{-1} - 1.4e^{-j\frac{5\pi}{7}})}{(1 - 1.4e^{-j\frac{5\pi}{7}}z^{-1})(1 - 1.4e^{j\frac{5\pi}{7}}z^{-1})} \end{aligned}$$

$$H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1} - 1.4e^{j\frac{5\pi}{7}})(z^{-1} - 1.4e^{-j\frac{5\pi}{7}})}{(1 - 1.4e^{-j\frac{5\pi}{7}}z^{-1})(1 - 1.4e^{j\frac{5\pi}{7}}z^{-1})}$$

$$H_{min}(z) = \frac{H(z)}{H_{ap}(z)} = \frac{1}{(1.4)^2 \left(1 - \frac{1}{1.4e^{j(5\pi/7)}}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{1.4e^{-j(5\pi/7)}}z^{-1}\right)}$$

<Appendix>

Q 1-1

```
clc; % Reset
clear;

b0=1; % Numerator
a1=[1 -1.4*exp(-j*5*pi/7)]; % Denominator
a2=[1 -1.4*exp(j*5*pi/7)];

b=b0;
a=conv(a1,a2);

[h,w]=freqz(b,a,'whole',1024); % Frequency Response
N=length(h);
h=circshift(h,fix(N/2));

figure(1) % Spectral Magnitude Response
plot(w-pi,abs(h));
xlabel('Frequency');
ylabel('Magnitude');

figure(2) % Phase Response
plot(w-pi,angle(h));
xlabel('Frequency');
ylabel('Phase');
```

Q 1-2

```
clc; % Reset
clear;

n=0:1023;
N=length(n);
x=sin(0.9*pi*n)+cos(0.7*pi*n)+cos(0.2*pi*n);
X=fftshift(fft(x));
X_m=abs(X);
X_a=angle(X);
w=2*pi*(-N/2:N/2-1)/N;

figure(1) % x[n]
stem(n,x);
xlabel('n');
ylabel('x[n]');

figure(2) % Spectral Magnitude Response
plot(w,X_m);
xlabel('Frequency');
ylabel('Magnitude');

figure(3) % Phase Response
plot(w,X_a);
xlabel('Frequency');
ylabel('Phase');
```

Q 1-3

```

clc; % Reset
clear;

n=0:1023;
N=length(n);
w=2*pi*(-N/2:N/2-1)/N;
z=exp(j*w);

H_n=1;
H_d=(1-1.4*exp(-j*5*pi/7)*z.^(-1)).*(1-1.4*exp(j*5*pi/7)*z.^(-1));
H=H_n./H_d;

x=sin(0.9*pi*n)+cos(0.7*pi*n)+cos(0.2*pi*n);
X=fftshift(fft(x));

Y1=X.*H;
y1=ifft(Y1);

figure(1) % y1[n]
stem(n,y1);
xlabel('n');
ylabel('y1[n]');

figure(2) % Spectral Magnitude Response
plot(w,abs(Y1));
xlabel('Frequency');
ylabel('Magnitude');

figure(3) % Phase Response
plot(w,angle(Y1));
xlabel('Frequency');
ylabel('Phase');

```

Q 1-4

```

clc; % Reset
clear;

b1=[1 -1.4*exp(-j*5*pi/7)]; % Numerator
b2=[1 -1.4*exp(j*5*pi/7)]; % Denominator
a0=1;
b=conv(b1,b2);
a=a0;

[hi,w]=freqz(b,a,'whole',1024); % Frequency Response
N=length(hi);
hi=circshift(hi,fix(N/2));

figure(1) % Spectral Magnitude Response
plot(w-pi,abs(hi));
xlabel('Frequency');
ylabel('Magnitude');

figure(2) % Phase Response
plot(w-pi,angle(hi));
xlabel('Frequency');
ylabel('Phase');

```

Q 1-5

```

clc; % Reset
clear;

n=0:1023;
N=length(n);
w=2*pi*(-N/2:N/2-1)/N;
z=exp(j*w);

Hn=1;
Hd=(1-1.4*exp(-j+5*pi/7)*z.^(-1)).*(1-1.4*exp(j+5*pi/7)*z.^(-1));
H=Hn./Hd;
x=sin(0.9*pi*n)+cos(0.7*pi*n)+cos(0.2*pi*n);
X=fftshift(fft(x));
Y1=X.*H;
y1=ifft(Y1);

Hi=(1-1.4*exp(-j+5*pi/7)*z.^(-1)).*(1-1.4*exp(j+5*pi/7)*z.^(-1));
Xi=Y1.*Hi;
xi=ifft(Xi);

figure(1) % x'[n]
stem(n,xi);
xlabel('n');
ylabel('x'[n]);

figure(2) % Spectral Magnitude Response
plot(w,abs(Xi));
xlabel('Frequency');
ylabel('Magnitude');

figure(3) % Phase Response
plot(w,angle(Xi));
xlabel('Frequency');
ylabel('Phase');

```

Q 1-6

```

clc; % Reset
clear;

N=1024;
b0=(1.4)^2; % Numerator
b1=[1 -1/(1.4*exp(j+5*pi/7))];
b2=[1 -1/(1.4*exp(-j+5*pi/7))];
a1=[1 -1.4*exp(-j+5*pi/7)]; % Denominator
a2=[1 -1.4*exp(j+5*pi/7)];
b=b0+conv(b1,b2);
a=conv(a1,a2);
[H_ap,w_ap]=freqz(b,a,'whole',1024);
H_ap=circshift(H_ap,fix(N/2));

figure(1) % Hap(z)
subplot(2,1,1) % Spectral Magnitude Response
plot(w_ap-pi,abs(H_ap));
xlabel('Frequency');
ylabel('Magnitude');

subplot(2,1,2) % Phase Response
plot(w_ap-pi,angle(H_ap));
xlabel('Frequency');
ylabel('Phase');

figure(2) % Hmin(z)
subplot(2,1,1) % Spectral Magnitude Response
plot(w_min-pi,abs(H_min));
xlabel('Frequency');
ylabel('Magnitude');

subplot(2,1,2) % Phase Response
plot(w_min-pi,angle(H_min));
xlabel('Frequency');
ylabel('Phase');

b0_m=1; % Numerator
a0_m=(1.4)^2;
a1_m=[1 -1/(1.4*exp(j+5*pi/7))]; % Denominator
a2_m=[1 -1/(1.4*exp(-j+5*pi/7))];
b_m=b0_m;
a_m=a0_m+conv(a1_m,a2_m);
[H_min,w_min]=freqz(b_m,a_m,'whole',1024);
H_min=circshift(H_min,fix(N/2));

```

Q 1-7

```

clc; % Reset
clear;

n=0:1023;
N=length(n);
w=2*pi*(-N/2:N/2-1)/N;
z=exp(j*w);

H_n=1;
H_d=(1.4)^2*(1-(1/(1.4*exp(j*5*pi/7)))+z.^(-1)).+(1-(1/(1.4*exp(-j*5*pi/7)))+z.^(-1));
H_min=H_n./H_d;

x=sin(0.9*pi*n)+cos(0.7*pi*n)+cos(0.2*pi*n);
X=fftshift(fft(x));

Y2=X.*H_min;
y2=ifft(Y2);

figure(1) % y2[n]
stem(n,y2);
xlabel('n');
ylabel('y2[n]');

figure(2) % Spectral Magnitude Response
plot(w,abs(Y2));
xlabel('Frequency');
ylabel('Magnitude');

figure(3) % Phase Response
plot(w,angle(Y2));
xlabel('Frequency');
ylabel('Phase');

```