UYGULAMA HAFTA 11

Section 13.2-Kısıtlı Bölgelerde Tanımlı Fonksiyonların Uç Değerleri

Section 13.3-Lagrange Çarpanları

2) $f(x,y) = xy - 2x$ fonksiyonunun $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ dikdörtgeni üzerindeki maksimum ve minimum değerleri bulunuz.

Sol.

f sürekli ve bölge, kapalı bir dikdörtgen olduğundan fonksiyon bu bölgenin bazı noktalarında mutlak maksimuma ve mutlak minimuma sahiptir.

Kritik noktaları araştıralım.

$$\left.\begin{array}{l} f_x = y - 2 = 0 \\ f_y = x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,2)$$ noktası tek kritik noktadır. (bölgenin dışında) X

O halde f-nin verilen bölge üzerindeki maksimum ve minimum değerleri dikdörtgenin dört sınır doğru parçalarından birinin üzerinde bulunur.

- $x = -1$ üzerinde $0 \leq y \leq 1$ için $f(-1,y) = -y + 2$ elde edilir. Burada maksimum değer 2 , minimum değer 1 olur.
- $x = 1$ üzerinde $0 \leq y \leq 1$ için $f(1,y) = y - 2$ elde edilir. Burada maksimum değer -1 , minimum değer -2 olur.
- $y = 0$ üzerinde $-1 \leq x \leq 1$ için $f(x,0) = -2x$ elde edilir. Burada maksimum değer 2 , minimum değer -2 olur.
- $y = 1$ üzerinde $-1 \leq x \leq 1$ için $f(x,1) = -x$ elde edilir. Burada maksimum değer 1 , minimum değer ise -1 olur.

$\Rightarrow$ Fonksiyonun bölgedeki maksimum değeri: 2, minimum değeri: -2 - dir.

4) $f(x,y) = x+2y$ fonksiyonunun $x^2+y^2 \leq 1$ diski üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Sol.

Öncelikle kritik noktaları araştıralım.

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 1 \\ f_y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ f-nin kritik noktası yoktur.

O halde maksimum, minimum değerleri bölgenin sınır noktalarında (yani $x^2+y^2=1$ çemberi üzerinde) arayacağız.
(f-nin sürekliliği açık)

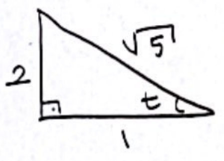
Çemberi $x = \cos t$, $y = \sin t$ ile parametrize edebiliriz.
$(x^2+y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1)$

Buna göre,

$f(x,y) = f(\cos t, \sin t) = \cos t + 2\sin t := g(t)$ diyelim.

g-nin kritik noktaları için;

$g'(t) = -\sin t + 2\cos t = 0 \Rightarrow \tan t = 2$



Ayrıca, $x = \cos t = \pm \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$y = \sin t = \pm \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

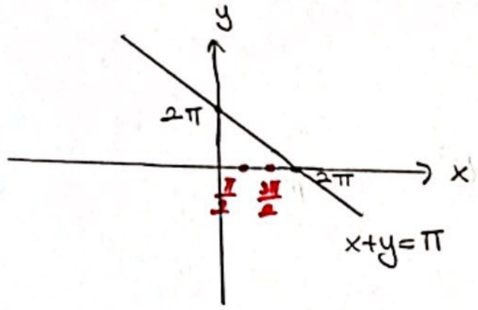
$\Rightarrow$ Kritik noktalar : $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

$\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{4}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ $\rightarrow$ maksimum değer

$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{4}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$ $\rightarrow$ minimum değer

7) $f(x,y)=\sin x\cos y$ -nin , koordinat eksenleri ve $x+y=2\pi$ doğrusu tarafından sınırlanan üçgen üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Sol.



Biliyoruz ki

$-1 \le f(x,y)=\sin x\cos y \le 1$ -dir.

Açıkçası $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ ve $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ noktaları üçgenin sınır doğru parçaları üzerindedir ve

$f\left(\frac{\pi}{2},0\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos 0=1$, $f\left(\frac{3\pi}{2},0\right)=\sin\frac{3\pi}{2}\cos 0=-1$ -dir.

O halde fonksiyonun maksimum değeri 1 , minimum değeri -1 -dir.

10) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{1+x^2+y^2}$ -nin $y \geq 0$ üst yarı düzlem üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Sol.

Öncelikle kritik noktaları araştıralım.

$$\begin{cases} f_x=\dfrac{1+x^2+y^2-(x-y)(2x)}{(1+x^2+y^2)^2}=\dfrac{1-x^2+y^2+2xy}{(1+x^2+y^2)^2}=0 \\[2ex] f_y=\dfrac{-1-x^2-y^2-(x-y)(2y)}{(1+x^2+y^2)^2}=\dfrac{-1-x^2+y^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x^2+y^2+2xy=0 \\ -1-x^2+y^2-2xy=0 \end{cases} \underset{\text{iki denklemi topla / çıkar}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x^2=y^2 \\ 2xy=-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Kritik noktalar $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ve $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ -dir.

Fakat sadece $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ noktası $y \geq 0$ bölgesindedir.

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ değerini alır.

$y=0$ sınırı üzerinde $f(x,0) = \frac{x}{1+x^2} := g(x)$, $-\infty < x < \infty$

elde edilir.

$$g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow g(\pm 1) = \pm \frac{1}{2}.$$

O halde $y \geq 0$ üst yarı düzleminde f-in maksimum ve minimum değerleri sırasıyla $\frac{1}{2}$ ve $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ -dir.

2) $(3,0)$ noktasından $y=x^2$ parabolüne en kısa uzaklığı

a) tek değişkenli koşulsuz bir probleme indirgeyerek

b) Lagrange çarpanları yöntemini kullanarak bulunuz.

Sol.

a) $y=x^2$ parabolü üzerindeki bir (x,y) noktasının $(3,0)$ noktasına olan en uzaklığı D olsun.

$$D = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow D^2 = (x-3)^2 + y^2$$

$$\underset{y=x^2}{\Rightarrow} D^2 = (x-3)^2 + x^4$$

Minimum için;

$$0 = \frac{dD^2}{dx} = 2(x-3) + 4x^3$$

$$\Rightarrow 2x^3 + x - 3 = 0 \quad , \quad x=1 \text{ bir köktür.}$$

$\frac{2x^3+x-3}{x-1} = 2x^2+2x+3$ olup $\Delta = -2\sqrt{5} < 0$ -dır.

Dolayısıyla $x=1$ tek reel köktür.

O halde minimum uzaklık;

$$D = \sqrt{(1-3)^2 + 1^4} = \sqrt{5}.$$

b) Lagrange fonk: $g(x,y)=0$ eğrisi üzerinde $f(x,y)$-nin maksimum ya da minimum olduğu nokta adayları için

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

Lagrange fonksiyonunun kritik noktalarını aramamız gerekir.

$y=x^2$ ($g(x,y)=x^2-y$) kısıtlamasına bağlı olarak

$D^2=(x-3)^2+y^2$ ($f(x,y)=(x-3)^2+y^2$) -yi minimize etmek istiyoruz.

$$\Rightarrow L = (x-3)^2+y^2+\lambda(x^2-y).$$

L-nin kritik noktalarını bulalım.

$$L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-3)+2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$L_y = \frac{\partial L}{\partial y} = 2y-\lambda = 0 \quad (2)$$

$$L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2-y=0 \quad (3)$$

(1) ve (2) -de λ yok edilirse $x+2xy-3=0$ elde edilir.

(3) -den $x+2x^3-3=0 \Rightarrow (x-1)(2x^2+2x+3)=0$

bulunur.

$\Rightarrow x=1 \Rightarrow y=x^2=1$ olup $(1,1)$ tek kritik noktadır.

$\Rightarrow$ minimum uzaklık $D=\sqrt{(1-3)^2+1^4}=\sqrt{5}$.

4) $f(x,y,z) = x+y-z$ fonksiyonunun $x^2+y^2+z^2=1$ küresi üzerinde maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Sol.

$x^2+y^2+z^2=1$ kısıtlamasına bağlı olarak $f(x,y,z)=x+y-z$ -yi minimize ve maksimize etmek istiyoruz.

Lagrange fonksiyonu: $L = x+y-z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$.

L-nin kritik noktalarını bulalım.

$$L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 1+2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$L_y = \frac{\partial L}{\partial y} = 1+2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$L_z = \frac{\partial L}{\partial z} = -1+2\lambda z = 0 \quad (3)$$

$$L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \quad (4)$$

$\overset{(1,2,3)}{\Rightarrow}$ $2\lambda x = 2\lambda y = -2\lambda z$. Bu durumda ya $\lambda = 0$ ya da $x=y=-z$-dir. Ancak $\lambda=0$ alırsak $1=0$ gelişkisi elde edilir. $\Rightarrow$ $x=y=-z$-dir.

(4)-ten $3x^2=1$ $\Rightarrow$ $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ olur.

O halde L-nin kritik noktaları;

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ve $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$-tür.

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ $\rightarrow$ maksimum değer

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ $\rightarrow$ minimum değer

12) $z^2=x^2+y^2$ konisi ve $x-2z=3$ düzleminin kesişiminde oluşan elips üzerinde $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$-nin maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Sol.

$z^2=x^2+y^2$ ve $x-2z=3$ kısıtlamalarına bağlı olarak $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$-yi minimize ve maksimize etmek istiyoruz.

Lagrange fonksiyonu : $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2+y^2-z^2) + \mu(x-2z-3)$.

L-nin kritik noktalarını bulalım.

$$L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 2x(1+\lambda)+\mu = 0 \quad (1)$$

$$L_y = \frac{\partial L}{\partial y} = 2y(1+\lambda) = 0 \quad (2)$$

$$L_z = \frac{\partial L}{\partial z} = 2z(1-\lambda) - 2\mu = 0 \quad (3)$$

$$L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2-z^2 = 0 \quad (4)$$

$$L_\mu = \frac{\partial L}{\partial \mu} = x-2z-3 = 0 \quad (5)$$

(2)-den ya $y=0$-dır ya da $\lambda=-1$-dir

Durum 1: $y=0$.

O halde, (4)-ten $x = \pm z$.

- $x = z$ ise (5)-ten $z=-3$. $\Rightarrow$ Nokta $(-3,0,-3)$.
- $x = -z$ ise (5)-ten $z=-1$. $\Rightarrow$ Nokta $(1,0,-1)$.

Durum 2: $\lambda=-1$.

O halde (1)-den $\mu=0$, (3)-ten $z=0$. Bu halde (4)-ten $x=y=0$. Bu durum (5) ile çelişir. $(-3=0)$

$\Rightarrow \lambda=-1$ olamaz.

$\Rightarrow$ Kritik noktalar $(-3,0,-3)$, $(1,0,-1)$.

$f(-3,0,-3) = 18$ $\rightarrow$ maksimum değer

$f(1,0,-1) = 2$ $\rightarrow$ minimum değer.

22) $x^2+y^2+z^2 \le 1$ yuvarı üzerinde $xy+z^2$-nin maksimum ve minimum değerlerini bulunuz. Sınır durumu için Lagrange çarpanlarını kullanınız.

Sol.

$B = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ üzerinde $f(x,y,z) = xy+z^2$.

Kritik noktaları araştıralım.

$$\left.\begin{aligned} f_x &= y = 0 \\ f_y &= x = 0 \\ f_z &= 2z = 0 \end{aligned}\right\}$$

Tek kritik nokta ne bir maksimum ne de bir minimum olan $(0,0,0)$ iç noktasıdır.

O halde maksimum ve minimum B-nin sınırında yani $x^2+y^2+z^2=1$ küresi üzerinde aranmalıdır.

$x^2+y^2+z^2=1$ kısıtlamasına bağlı olarak $f(x,y,z) = xy+z^2$-yi minimize ve maksimize etme problemi.

Lagrange fonksiyonu: $L = xy+z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$.

L-nin kritik noktalarını bulalım.

$$L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$L_y = \frac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$L_z = \frac{\partial L}{\partial z} = 2z(1+\lambda) = 0 \quad (3)$$

$$L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \quad (4)$$

(3)-ten ya $z=0$-dır ya da $\lambda=-1$-dir.

Durum 1: $z=0$.

Öncelikle (1), (2) ve (4)-ten $y^2=x^2=\frac{1}{2}$-dir.

$$\left(\frac{y = -2\lambda x}{x = -2\lambda y} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow y^2 = x^2 \underset{(4)}{\Rightarrow} 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \right)$$

O halde 4 kritik nokta oluşur.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{2}.$$

Durum 2: $\lambda = -1$.

(1) ve (2) gereği $x = y = 0 \Rightarrow$ (4) gereği $z = \pm 1$.

O halde 2 kritik nokta oluşur. $(0, 0, \pm 1)$.

$$f(0, 0, \pm 1) = 1.$$

O halde f-nin B üzerindeki maksimum ve minimum değerleri sırayla 1 ve $-\frac{1}{2}$ -dir.