UYGULAMA HAFTA 10

Section 12.8-Kapalı Fonksiyonlar

Section 13.1-Uç Değerler

HATIRLATMALAR

Jacobian: $u = u(x, y)$ ve $v = v(x, y)$ fonksiyonlarının x ve y değişkenlerine göre Jacobian determinantı (ya da kısaca Jacobianı)

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

determinantıdır.

İkinci Türev Testi: (a, b) noktasının, $f(x, y)$ fonksiyonunun tanım kümesi içinde yer alan bir kritik noktası olduğunu varsayalım. (a, b) nin bir komşuluğunda f nin ikinci kısmi türevlerinin sürekli olduğunu ve o noktada

$$A = f_{xx}(a, b), \quad B = f_{xy}(a, b), \quad C = f_{yy}(a, b)$$

değerlerini aldığını varsayalım.

(a) $B^2 - AC < 0$ ve $A > 0$ ise o zaman f, (a, b) de bir yerel minimum değere sahiptir.

(b) $B^2 - AC < 0$ ve $A < 0$ ise o zaman $f, (a, b)$ de bir yerel maksimum değere sahiptir.

(c) $B^2 - AC > 0$ ve ise o zaman f nin (a, b) de bir eyer noktası vardır.

(d) $B^2 - AC = 0$ ise o zaman bu test hiçbir bilgi vermez; $f, (a, b)$ de bir yerel maksimum ya da bir yerel minimum değere veya bir eyer noktaya sahip olabilir.

Aşağıda verilen denklemler için belirtilen türevleri hesaplayınız. Hangi koşullar altında belirtilen türevin çözümü vardır?

4) $e^{yz} - x^2 z \ln y = \pi$ ise $\frac{\partial y}{\partial z}$?

Sol.

$$e^{yz} - x^2 z \ln y = \pi \quad : \quad y = y(x, z)$$

Verilen denklemin z-ye göre kısmi türevini hesaplayalım.

$$e^{yz}\left(\frac{\partial y}{\partial z} z + y\right) - x^2\left(\ln y + z\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial z}\right) = 0$$

$$\Rightarrow y e^{yz} + z\frac{\partial y}{\partial z}e^{yz} - x^2 \ln y - \frac{x^2 z}{y}\frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial z}\left(z e^{yz} - \frac{x^2 z}{y}\right) = x^2 \ln y - y e^{yz}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{x^2 \ln y - y e^{yz}}{z e^{yz} - \frac{x^2 z}{y}} = \frac{x^2 y \ln y - y^2 e^{yz}}{yz e^{yz} - x^2 z}$$

$$= \frac{x^2 y \ln y - y^2 e^{yz}}{z(y e^{yz} - x^2)}$$

O halde; $y > 0$ ($\ln y$), $z \neq 0$ ve $y e^{yz} \neq x^2$ olması durumunda belirtilen türevin çözümü vardır.

11) $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ ve $x + 2y + 3z + 4w = 2$ ise $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$?

Sol.

$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \Rightarrow$ x ve w, y ve z-nin fonksiyonları

z sabit, y-ye göre türev alınacak.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2+w^2=1 \\ x+2y+3z+4w=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=x(y,z) \\ w=w(y,z) \end{array}$$

Her iki denklemin y-ye göre kısmi türevlerini alalım.

$$2x\frac{\partial x}{\partial y}+2y+2w\frac{\partial w}{\partial y}=0$$

$$-\frac{1}{2w}\Big/ \quad \frac{\partial x}{\partial y}+2+4\frac{\partial w}{\partial y}=0$$

$+$

$$\left(2x-\frac{1}{2}w\right)\frac{\partial x}{\partial y}+2y-w=0$$

$$\Rightarrow (4x-w)\frac{\partial x}{\partial y}+4y-2w=0.$$

O halde $\quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z=\frac{2w-4y}{4x-w}.$

$w\neq 4x$ olması durumunda belirtilen türevin çözümü vardır.

12) $x^2y+y^2u-u^3=0$ ve $x^2+yu=1$ ise $\frac{du}{dx}$?

Sol.

$$\left\{\begin{array}{l} x^2y+y^2u-u^3=0 \\ x^2+yu=1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} u=u(x) \\ y=y(x) \end{array}$$

Her iki denklemin x-e göre türevlerini alalım.

$$\left\{\begin{array}{l} \left(2xy+x^2\frac{dy}{dx}\right)+\left(2y\frac{dy}{dx}u+y^2\frac{du}{dx}\right)-3u^2\frac{du}{dx}=0 \\[2ex] 2x+\left(u\frac{dy}{dx}+y\frac{du}{dx}\right)=0 \end{array}\right.$$

$$-u / \quad 2xy + (x^2+2yu)\frac{dy}{dx} + (y^2-3u^2)\frac{du}{dx} = 0$$

$$x^2+2yu / \quad 2x + u\frac{dy}{dx} + y\frac{du}{dx} = 0$$

$+$

$$-2xyu - u(y^2-3u^2)\frac{du}{dx} + 2x(x^2+2yu) + y(x^2+2yu)\frac{du}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x^2+yu) + (3u^3+x^2y+y^2u)\frac{du}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{2x(x^2+yu)}{3u^3+x^2y+y^2u} = -\frac{2x\cdot 1}{3u^3+u^3} = -\frac{x}{2u^3}$$

$\Longrightarrow$ $u \neq 0$ olması durumunda belirtilen türevin çözümü vardır.

(14) Hangi (r,s) noktaları yakınında

$$x = r^2+2s \quad , \quad y = s^2-2r$$

dönüşümü, x ve y-nin fonksiyonları olarak r ve s-ye göre çözülebilir? Çözümün birinci kısmi türevlerinin değerlerini orijinde hesaplayınız.

Sol.

$x=x(r,s)$, $y=y(r,s)$ fonksiyonlarının r ve s değişkenlerine göre Jacobianı,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial s \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial s \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2r & 2 \\ -2 & 2s \end{vmatrix} = 4(rs+1)$$

$\Longrightarrow$ $4(rs+1) \neq 0$ yani $rs \neq -1$ olduğu her (r,s) noktası yakınında bu dönüşüm x ve y-nin fonksiyonları olarak r ve s için çözülebilir.

Kapalı Fonk. Teo.

Şimdi $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial s}{\partial x}$ ve $\frac{\partial s}{\partial y}$ kısmi türevlerini bulmaya çalışalım.

$$x = r^2 + 2s \quad , \quad y = s^2 - 2r$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 2r\frac{\partial r}{\partial x} + 2\frac{\partial s}{dx} \quad (1) \quad , \qquad 0 = 2s\frac{\partial s}{\partial x} - 2\frac{\partial r}{\partial x} \quad (3)$$

$$0 = 2r\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{2\partial s}{\partial y} \quad (2) \qquad 1 = 2s\frac{\partial s}{\partial y} - 2\frac{\partial r}{\partial y} \quad (4)$$

(2) ve (4) gereği; $\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{r}{2(rs+1)}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{1}{2(rs+1)}$.

(1) ve (3) gereği; $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{s}{2(rs+1)}$, $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{2(rs+1)}$.

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial s}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0 \ , \ \left.\frac{\partial r}{\partial y}\right|_{(0,0)} = -\frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{\partial r}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0 \ , \ \left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \frac{1}{2}.$$

Aşağıdaki alıştırmalarda verilen fonksiyonların kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

4) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Çöz.

$\vec{\nabla} f = 0$ -ı sağlayan ortak (x,y) noktaları kritik noktalardır.

$$\vec{\nabla} f = \langle f_x, f_y \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x = 4x^3 - 4y = 0 \\ f_y = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = y \\ x = y^3 \end{cases} \Rightarrow x^9 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^8 - 1) = 0$$

$\Rightarrow \quad x=0 \quad , \quad x=1 \quad , \quad x=-1$

$\Rightarrow \quad y=0 \quad , \quad y=1 \quad , \quad y=-1$

O halde; $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$ noktaları kritik noktalardır.

Sınıflandırmak için;

$$A=f_{xx}=12x^2 \quad , \quad B=f_{xy}=-4 \quad , \quad C=f_{yy}=12y^2$$

olmak üzere,

- $(0,0)$ noktasında,

$A=0 \quad , \quad B=-4 \quad , \quad C=0$ olup $B^2-AC=16>0$ -dır.

$\Rightarrow (0,0)$ bir eyer noktasıdır.

- $(1,1)$ noktasında,

$A=12 \quad , \quad B=-4 \quad , \quad C=12$ olup $B^2-AC=-128<0$ -dır.

Ayrıca $A>0$ olduğundan $(1,1)$ bir yerel minimum noktasıdır.

- $(-1,-1)$ noktası da benzer şekilde bir yerel minimum noktasıdır.

5) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{8}{x}-y$

Sol.

$$\begin{cases} f_x=\dfrac{1}{y}-\dfrac{8}{x^2}=0 \\ f_y=-\dfrac{x}{y^2}-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=8y \\ x=-y^2 \end{cases} \Rightarrow -x=\dfrac{x^4}{64}$$

$\Rightarrow x(x^3+64)=0$

$\Rightarrow x=0 \quad , \quad x=-4$

$\Rightarrow y=0 \quad , \quad y=2$

$(0,0) \notin D(f) \Rightarrow (0,0)$ bir kritik nokta değildir.

$(-4,2)$ bir kritik noktadır.

$$A = f_{xx} = \frac{16}{x^3} \quad , \quad B = f_{xy} = -\frac{1}{y^2} \quad , \quad C = f_{yy} = \frac{2x}{y^3}$$

• $(-4, 2)$ noktasında,

$A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = -1$ olup $B^2 - AC = -\frac{3}{16} < 0$ -dır.

Ayrıca $A < 0$ olduğundan $(-4, 2)$ bir yerel maksimum noktasıdır.

8) $f(x,y) = \cos x + \cos y$

Sol.

$$\begin{cases} f_x = -\sin x = 0 \\ f_y = -\sin y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = m\pi \\ y = n\pi \end{cases} ; m, n \in \mathbb{Z}.$$

O halde $(m\pi, n\pi)$ kritik noktalardır.

$$A = f_{xx} = -\cos x \quad , \quad B = f_{xy} = 0 \quad , \quad C = f_{yy} = -\cos y$$

olmak üzere,

• $(m\pi, n\pi)$ noktalarında,

$A = -\cos(m\pi) = -(-1)^m = (-1)^{m+1}$, $B = 0$,

$C = -\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$ - dir.

$\Rightarrow B^2 - AC = -(-1)^{m+n+2} = (-1)^{m+n+3}$

→ m ve n çift ise,

$B^2 - AC = -1 < 0$ ve $A = -1 < 0$ olduğundan $(m\pi, n\pi)$ bir yerel maksimum noktasıdır.

→ m ve n tek ise,

$B^2 - AC = -1 < 0$ ve $A = 1 > 0$ olduğundan $(m\pi, n\pi)$ bir yerel minimum noktasıdır.

→ m ve n-nin biri tek biri çift ise,

$B^2 - AC = 1 > 0$ olup $(m\pi, n\pi)$ bir eyer noktasıdır.

11) $f(x,y) = x e^{-x^3+y^3}$

Sol.

$$\begin{cases} f_x = (1-3x^3)\, e^{-x^3+y^3} = 0 \\ f_y = 3xy^2\, e^{-x^3+y^3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^3 = 1 \\ 3xy^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3^{1/3}}, \; y = 0.$$

Tek kritik nokta $\left(\frac{1}{3^{1/3}}, 0\right)$-dır.

$$A = f_{xx} = 3x^2(3x^3-4)\, e^{-x^3+y^3}$$

$$B = f_{xy} = -3y^2(3x^3-1)\, e^{-x^3+y^3}$$

$$C = f_{yy} = 3xy(3y^3+2)\, e^{-x^3+y^3}$$

olmak üzere,

• $\left(\frac{1}{3^{1/3}}, 0\right)$ noktasında,

$A < 0$, $B = C = 0$. $\Rightarrow B^2 - AC = 0 \Rightarrow$ İkinci türev testi sonuçsuz.

$$f\left(\frac{1}{3^{1/3}}, 0\right) = \frac{1}{3^{1/3}} e^{-1/3} \approx 0.97 \quad \text{iken}$$

$f(0,0) = 0 < 0.97$ ve $f\left(\frac{1}{3^{1/3}}, -1\right) = \frac{1}{3^{1/3}} e^{-4/3} \approx 2.637 > 0.97$

$\Rightarrow f(x,y)$, $\left(\frac{1}{3^{1/3}}, 0\right)$-da ne maksimuma ne de minimuma sahiptir.

↪ $\left(\frac{1}{3^{1/3}}, 0\right)$ bir eyer noktasıdır.

27) $e^{2zx - x^2} - 3e^{2zy + y^2} = 2$ denklemini sağlayan $z = g(x,y)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz.

Sol.

Verilen denklemin x ve y-ye göre türevini alalım.

$$\left(2\frac{\partial z}{\partial x}x + 2z - 2x\right)e^{2zx-x^2} - 3\left(2y\frac{\partial z}{\partial x}e^{2zy+y^2}\right) = 0 \qquad *$$

$$2\frac{\partial z}{\partial y}x\, e^{2zx-x^2} - 3\left(2\frac{\partial z}{\partial y}y + 2z + 2y\right)e^{2zy+y^2} = 0 \qquad **$$

Kritik noktalar için $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ve $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ -ı sağlayan değerler incelenmelidir.

Bu durumda (*) ve (**) denklemlerinden;

$$\underbrace{(2z-2x)}_{0}e^{2zx-x^2} - \underbrace{(2z+2y)}_{0}3e^{2zy+y^2} = 0 .$$

$\Rightarrow z = x \qquad \Rightarrow z = -y$

Denklemde yerine yazalım.

$$e^{2z^2 - z^2} - 3e^{-2z^2+z^2} = 2$$

$$\Rightarrow e^{z^2} - \frac{3}{z^2} - 2 = 0 \quad e^{z^2}\cdot \Rightarrow (e^{z^2})^2 - 2e^{z^2} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (e^{z^2} - 3)(e^{z^2} + 1) = 0$$

$$\Rightarrow e^{z^2} = 3 \text{ ve } \cancel{e^{z^2} = -1} \;?$$

$e^{z^2} = 3 \Rightarrow z^2 = \ln 3$

$\Rightarrow z = \pm\sqrt{\ln 3}$. Bu durumda kritik noktalar;

$(\sqrt{\ln 3}, -\sqrt{\ln 3}), (-\sqrt{\ln 3}, \sqrt{\ln 3})$.