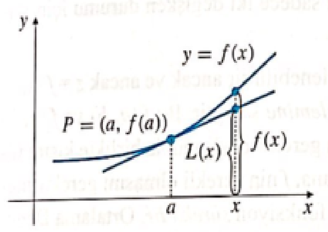
UYGULAMA HAFTA 9

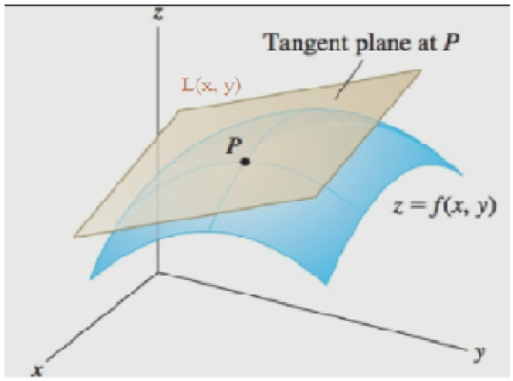
Section 12.6-Doğrusal(Lineer) Yaklaşımlar

Section 12.7-Gradyanlar ve Yönlü Türevler

HATIRLATMALAR



Şekil 12.24 f nin $x = a$ daki doğrusallaştırılması



Lineerizasyon: İlk şekilden gözlemlendiği gibi $y = f(x)$ grafiğine $x = a$ daki teğet doğrusu a yakınındaki x için $f(x)$ in değerlerine uygun bir yaklaşım sağlar. Burada $L(x)$, f nin a daki doğrusallaştırılmasıdır (lineerizasyonudur); grafiği o noktada $y = f(x)$ e teğet doğrusudur.

İkinci şekilden gözlemlendiği gibi, $z = f(x, y)$ grafiğine (a, b) deki teğet düzlem, f nin (a, b) deki doğrusallaştırılmasıdır (lineerizasyonudur), $L(x, y)$ olarak gösterilir, yine bir yaklaşım sunar.

Yönlü Türev: f, (a, b) de türevlenebilir ve $\vec{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ bir birim vektör ise (a, b) de f nin $\vec{u}$ yönündeki yönlü türevi

$$D_{\vec{u}}f(a, b) = \vec{u} \bullet \vec{\nabla} f(a, b)$$

ile verilir.

Aşağıdaki alıştırmalarda belirtilen noktalarda verilen fonksiyonların yaklaşık değerini bulmak için uygun lineerizasyonları (doğru sallaştırmaları) kullanınız.

4) $(2.1, 1.8)$ -de $f(x,y) = \dfrac{24}{x^2+xy+y^2}$

Sol.

Kolaylık bakımından $(2,2)$ noktasını ele alalım.
Fonksiyonun $(2,2)$ noktasındaki teğet düzlemin denklemi-ni bulalım.

$$z = f(x,y) = \frac{24}{x^2+xy+y^2} \Rightarrow \bar{f}(x,y,z) = \frac{24}{x^2+xy+y^2} - z.$$

$$z = f(2,2) = \frac{24}{2^2+2\cdot 2+2^2} = 2 \Rightarrow P=(2,2,2) \rightarrow \text{teğet nokta.}$$

$$\vec{\nabla}\bar{f}(2,2,2) = \langle \bar{f}_x(2,2,2), \bar{f}_y(2,2,2), \bar{f}_z(2,2,2)\rangle.$$

$$\bar{f}_x = \frac{-24(2x+y)}{(x^2+xy+y^2)^2} \Rightarrow \bar{f}_x(2,2,2) = -1$$

$$\bar{f}_y = \frac{-24(x+2y)}{(x^2+xy+y^2)^2} \Rightarrow \bar{f}_y(2,2,2) = -1$$

$$\bar{f}_z = -1$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\bar{f}(2,2,2) = \langle -1,-1,-1\rangle \rightarrow \text{düzleme dik vektör}$$

O halde teğet düzlemin denklemi; (P noktasında)

$$-1(x-2) - 1(y-2) - 1(z-2) = 0 \Rightarrow z = -x-y+6.$$

$$\Rightarrow f(x,y) \approx L(x,y) = -x-y+6 \text{ , } (2,2) \text{ noktasında.}$$

$$\Rightarrow f(2.1, 1.8) \approx L(2.1, 1.8) = -2.1 - 1.8 + 6 = 2.1.$$

6) $(2.05, -3.92)$-de $f(x,y) = x e^{y+x^2}$

Sol.

Fonksiyonun $(2,-4)$ noktasındaki teğet düzlemin denklemini bulalım.

$$z = f(x,y) = x e^{y+x^2} \Rightarrow \bar{f}(x,y,z) = x e^{y+x^2} - z$$

$$z = f(2,-4) = 2 e^{-4+2^2} = 2 \Rightarrow P = (2,-4,2) \rightarrow \text{teğet nokta}$$

$$\vec{\nabla} \bar{f}(2,-4,2) = \langle \bar{f}_x(2,-4,2), \bar{f}_y(2,-4,2), \bar{f}_z(2,-4,2) \rangle.$$

$$\bar{f}_x = e^{y+x^2} + 2x^2 e^{y+x^2} \Rightarrow \bar{f}_x(2,-4,2) = 9$$

$$\bar{f}_y = x e^{y+x^2} \Rightarrow \bar{f}_y(2,-4,2) = 2$$

$$\bar{f}_z = -1$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \bar{f}(2,-4,2) = \langle 9, 2, -1 \rangle.$$

O halde teğet düzlemin denklemi, (P noktasında)

$$9(x-2) + 2(y+4) - 1(z-2) = 0 \Rightarrow z = 9x + 2y - 8.$$

$\Rightarrow (2,-4)$ noktasında $f(x,y) \approx L(x,y) = 9x + 2y - 8.$

$$\Rightarrow f(2.05, -3.92) \approx L(2.05, -3.92) = 9(2.05) + 2.(-3.92) - 8$$
$$= 2.61$$

Aşağıda verilen fonksiyonların her birinin verilen noktada gradyan vektörünü, teğet düzlem denklemini ve o noktadan geçen düzey eğrisine teğet olan doğrunun denklemini yazınız.

5) $(1,-2)$-de $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

Sol.

• $\vec{\nabla} f = \langle f_x, f_y \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$

$$= \frac{2x}{x^2+y^2} i + \frac{2y}{x^2+y^2} j$$

$\Rightarrow \vec{\nabla} f(1,-2) = \frac{2}{5} i - \frac{4}{5} j = \langle \frac{2}{5}, -\frac{4}{5} \rangle \rightarrow (1,-2)$ -deki gradyent vektör

• $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2) \Rightarrow \bar{f}(x,y,z) = x^2+y^2-z$

$z = f(1,-2) = \ln(1^2+2^2) = \ln 5 \Rightarrow P = (1,-2,\ln 5)$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \bar{f} = \langle \bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z \rangle = \frac{2x}{x^2+y^2} i + \frac{2y}{x^2+y^2} j - k$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \bar{f}(1,-2,\ln 5) = \frac{2}{5} i - \frac{4}{5} j - k = \langle \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -1 \rangle$

P noktasında teğet düzlem denklemi,

$$\frac{2}{5}(x-1) - \frac{4}{5}(y+2) - 1(z-\ln 5) = 0$$

$\Rightarrow z - \ln 5 = \frac{2}{5}(x-1) - \frac{4}{5}(y+2) \Rightarrow 2x - 4y - 5z = 10 - 5\ln 5$

• $(1,-2)$ noktası için $z = f(1,-2) = \ln 5 \Rightarrow \ln 5 = \ln(x^2+y^2)$

O halde verilen fonksiyonun $(1,-2)$ noktasından geçen düzey eğrisi: $\ln 5 = \ln(x^2+y^2)$ - dir.

Bu eğriye $(1,-2)$ noktasında teğet olan doğru denklemini bulalım.

$$\ln(x^2+y^2) - \ln(5) = 0$$

$\rightarrow$ Kapalı fonk. türevi $\quad \frac{2x+2yy'}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow 2x + 2yy' = 0$

$\underset{(1,-2)}{\Rightarrow} 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Teğet doğru denklemi $\quad (y+2) = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow x - 2y = 5$ - tir.

6) $(2,-2)$ -de $f(x,y)=\sqrt{1+xy^2}$

Sol.

• $\vec{\nabla} f = \langle f_x, f_y \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j = \frac{y^2}{2\sqrt{1+xy^2}} i + \frac{xy}{\sqrt{1+xy^2}} j$

$\Rightarrow \vec{\nabla} f(2,-2) = \frac{2}{3} i - \frac{4}{3} j = \langle \frac{2}{3}, -\frac{4}{3} \rangle$.

• $z = f(x,y) = \sqrt{1+xy^2} \Rightarrow \bar{f}(x,y,z) = \sqrt{1+xy^2} - z$

$z = f(2,-2) = \sqrt{1+8} = 3 \Rightarrow P = (2,-2,3)$.

$\Rightarrow \vec{\nabla} \bar{f} = \langle \bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z \rangle = \frac{y^2}{2\sqrt{1+xy^2}} i + \frac{xy}{\sqrt{1+xy^2}} j - k$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \bar{f}(2,-2,3) = \frac{2}{3} i - \frac{4}{3} j - k = \langle \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -1 \rangle$

P noktasındaki teğet düzlem denklemi;

$\frac{2}{3}(x-2) - \frac{4}{3}(y+2) - (z-3) = 0$

$\Rightarrow z - 3 = \frac{2}{3}(x-2) - \frac{4}{3}(y+2) \Rightarrow 2x - 4y - 3z = 3.$

• $(2,-2)$ noktası için $z = f(2,-2) = 3 \Rightarrow 3 = \sqrt{1+xy^2}$.
O halde verilen fonksiyonun $(2,-2)$ noktasından geçen düzey eğrisi $3 = \sqrt{1+xy^2}$ -dir.
Bu eğriye $(2,-2)$ noktasında teğet olan doğru denklemi?

$\sqrt{1+xy^2} - 3 = 0$

Kapalı fonk türevi $\longrightarrow$ $\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+xy^2}} \cdot (y^2 + x\,2yy') = 0$

$\underset{(2,-2)}{\Longrightarrow} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{9}} (4 - 8y') = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}$

Teğet doğru denk. $\Rightarrow$ $(y+2) = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow x - 2y = 5$ -tir.

8) $f(x,y,z) = \cos(x+2y+3z)$ fonksiyonunun $(\pi/2, \pi, \pi)$ noktasından geçen düzey yüzeyine teğet düzlemin bir denklemini bulunuz.

Sol.

$(\pi/2, \pi, \pi)$ noktası için $w = f(\pi/2, \pi, \pi) = \cos\left(\frac{11\pi}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \cos(x+2y+3z) = 0$

O halde verilen fonksiyonun $(\pi/2, \pi, \pi)$ noktasından geçen düzey yüzeyi $\cos(x+2y+3z) = 0$ - dır.

Bu yüzeye teğet bir düzlem bulalım.

Nokta : $(\pi/2, \pi, \pi)$ ✓

Normal vektör ?

$$\vec{\nabla} f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = -\sin(x+2y+3z)\,i - 2\sin(x+2y+3z)\,j - 3\sin(x+2y+3z)\,k$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(\pi/2, \pi, \pi) = -\sin\left(\frac{11\pi}{2}\right)(i+2j+3k)$$

$$= i+2j+3k = \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$\Rightarrow$ $(\pi/2, \pi, \pi)$ noktasında

Teğet düzlem denklemi

$$1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2(y-\pi) + 3(z-\pi) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2y + 3z = \frac{11\pi}{2}.$$

12) $f(x,y) = \dfrac{x}{1+y}$ fonksiyonunun $(0,0)$-da $i-j$ vektörü yönündeki yönlü türevini (değişim oranını) bulunuz.

Sol.

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j = \frac{1}{1+y} i - \frac{x}{(1+y)^2} j$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(0,0) = i.$$

$\vec{u} = i - j$ olsun. $\Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

O halde; $D_{\vec{u}} f(0,0) = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \cdot \vec{\nabla} f(0,0)$

$$= \frac{(i-j)\cdot i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

17) $(2,0)$ noktasında $f(x,y) = xy$ fonksiyonu hangi yönlerde -1 değişim oranına sahiptir? Oranın -3 veya -2 olduğu olduğu yönler var mıdır?

Sol.

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j = y i + x j \Rightarrow \vec{\nabla} f(2,0) = 2j.$$

$\vec{u} = u_1 i + u_2 j$ bir birim vektör olsun. $\Rightarrow u_1^2 + u_2^2 = 1.$

$$\Rightarrow -1 = D_{\vec{u}} f(2,0) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f(2,0)$$

$$= (u_1 i + u_2 j) \cdot (2j) = 2u_2$$

$\Rightarrow -1 = 2u_2 \Rightarrow u_2 = -1/2$.

$u_1^2 + u_2^2 = 1 \Rightarrow u_1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow u_1^2 = 3/4 \Rightarrow u_1 = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

O halde $(2,0)$ noktasında $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} i - \dfrac{1}{2} j$ yönlerinde -1 değişim oranı vardır.

• $-3 = D_{\vec{u}} f(2,0) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f(2,0)$

$= (u_1 i + u_2 j) \cdot (2j) = 2u_2$

$\Rightarrow 2u_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad u_2 = -\frac{3}{2}.$

$u_1^2 + u_2^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u_1^2 + \frac{9}{4} = 1$ olacak şekilde bir u_1 yoktur. O halde değişim oranı -3 olan bir yön yoktur.

• $-2 = D_{\vec{u}} f(2,0) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f(2,0)$

$= (u_1 i + u_2 j) \cdot (2j) = 2u_2$

$\Rightarrow -2 = 2u_2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = -1$

$u_1^2 + u_2^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u_1^2 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 0$

O halde $-j$ yönünde -2 değişim oranı vardır.

22) xy- düzleminde, $(1,1)$ noktasından geçen ve $f(x,y) = x^4 + y^2$ fonksiyonunun tüm düzey eğrilerini dik açıyla kesen eğrinin bir denklemini bulunuz.

Sol.

$y = g(x)$ aranılan eğri olsun.

O halde bu eğrinin normali, $\vec{\nabla}(g(x) - y) = g'(x) i - 1 j$ -dir.

$z = f(x,y) = x^4 + y^2$ fonksiyonunun düzey eğrileri $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $c = x^4 + y^2$ - dir.

O halde seviye eğrilerinin normali $\vec{\nabla}(x^4 + y^2) = 4x^3 i + 2y j$ dir.

Eğriler birbirlerini dik kestiklerinden normalleri de dik olacaktır.

$\Rightarrow (g'(x) i - j) \cdot (4x^3 i + 2y j) = 0$

$\Rightarrow 4x^3 g'(x) - 2y = 0 \quad \underset{y = g(x)}{\Rightarrow} \quad 4x^3 g'(x) - 2g(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{2x^3} \quad \Rightarrow \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{1}{2x^3}\,dx$$

$$\Rightarrow \ln(g(x)) = -\frac{1}{4x^2} + c_1$$

$$\Rightarrow g(x) = e^{-1/4x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c} = c\,e^{-1/4x^2}$$

Eğri $(1,1)$ noktasından geçtiğinden,

$$1 = c\,e^{-1/4} \Rightarrow c = e^{1/4}.$$

O halde $g(x) = e^{1/4 - 1/4x^2}$.