28) Orijinden $x+y+z=0$, $2x-y-5z=1$ doğrusuna olan uzaklığı bulunuz.

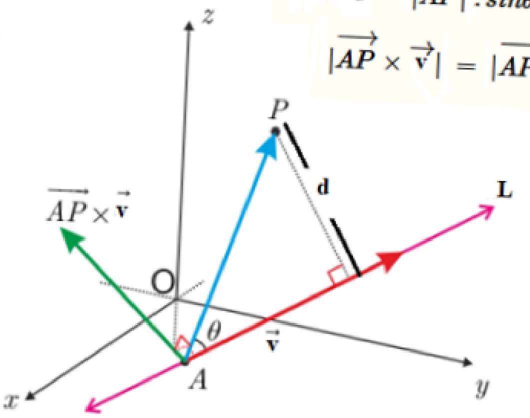
Sol.

Not: Uzayda bir P noktasının bir L doğrusuna olan uzaklığı, $\vec{v}$ L doğrusunun doğrultman vektörü ($\vec{v} \parallel L$) ve A doğru üzerinde bir nokta olmak üzere,

$$d = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} \text{ - dir.}$$

$$\mathbf{d} = |\overrightarrow{AP}| \,.\, sin\theta$$

$$|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}| = |\overrightarrow{AP}| \,.\, |\vec{v}| \,.\, sin\theta$$



$x+y+z=0$, $2x-y-5z=1$ doğrusuna paralel bir vektör,

$$\vec{v} = \langle 1,1,1 \rangle \times \langle 2,-1,-5 \rangle = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -4i + 7j - 3k \text{ - dır.}$$

Şimdi ise doğru üzerinde bir nokta bulmalıyız.

$z=0$ olsun. $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r} x+y=0 \\ + \quad 2x-y=1 \\ \hline 3x=1 \end{array} \Rightarrow x = 1/3 = -y$$

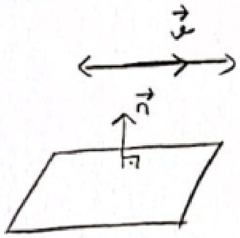
$\Rightarrow A = (1/3, -1/3, 0)$ bu doğru üzerindedir.

$$\Rightarrow d = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 7 & -3 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{(-4)^2+7^2+(-3)^2}} = \frac{|\langle i, j, k \rangle|}{\sqrt{74}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{74}}$$

$P=(0,0,0)$

30) $x-2 = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$ doğrusunun $2y-z=1$ düzlemine paralel olduğunu gösteriniz. Doğru ile düzlem arasındaki uzaklık nedir?

Sol.



Şekilden de açıktır ki bir doğru bir düzleme paralel ise doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normali diktir.

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

Soruda $\vec{v} = \langle 1, 2, 4 \rangle$, $\vec{n} = \langle 0, 2, -1 \rangle$ olup

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow$ paralellik mevcut.

Doğru ile düzlem arasındaki uzaklık için, doğru üzerindeki herhangi bir noktanın düzleme olan uzaklığını bulmak yeterli.

Verilen doğru $(2, -3, 1)$ noktasından geçer.

$$\Rightarrow d = \frac{|0 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 - 1|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

Soru 27

UYGULAMA HAFTA 7

Section 12.1-Çok Değişkenli Fonksiyonlar

Section 12.2-Limitler ve Süreklilik

HATIRLATMALAR

(ii) f, iki bağımsız değişkenli bir fonksiyon ise genellikle bağımsız değişkenler x ve y olarak alınır. $w = f(x, y)$. f nin tanım kümesi, xy-düzleminde bir bölge olarak resmedilir.

(ii) Tek değişkenli bir fonksiyonun grafiği (yani $y = f(x)$ denkleminin grafiği) x, f nin tanım kümesinde olmak üzere, xy-düzleminde $(x, f(x))$ koordinatlı noktaların kümesidir. (Bir eğri belirtir.) Aynı şekilde, iki değişkenli bir fonksiyonun grafiği (yani $z = f(x, y)$ denkleminin grafiği) $(x, y), f$ nin tanım kümesinde olmak üzere 3-boyutlu uzayda $(x, y, f(x, y))$ koordinatlı noktaların kümesidir. (Bir yüzey belirtir.)

Düzlemde, bir $f(x, y)$ fonksiyonunun sabit değer aldığı, $f(x, y) = c$ noktalarının kümesine, f nin bir düzey eğrisi denir. (İki değişkenli fonksiyonların grafikleri çizilirken sıkça kullanılır.)

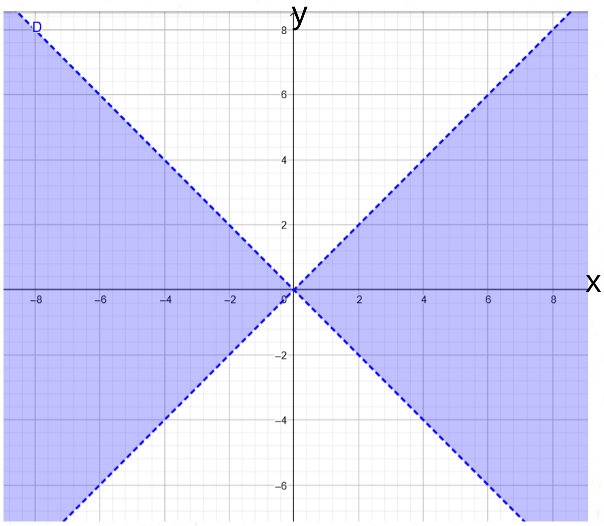
(iii) Tek değişkenli bir f fonksiyonu için $\lim_{x\to a} f(x)$ in varlığı x, a ya sağdan ya da soldan yaklaşırken $f(x)$ in aynı sonlu sayıya yaklaşmasını gerektirir. Aynı şekilde, iki değişkenli bir fonksiyon için (x, y) nin (a, b) ye yaklaşırken f nin tanım kümesinde nasıl yaklaştığının önemi olmaksızın $f(x, y)$ aynı L sayısına yaklaşıyorsa $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ dir deriz. Özellikle,
$(x, y), (a, b)$ ye $D(f)$ de yer alan herhangi bir eğri boyunca yaklaşabilir.
(İki değişkenli fonksiyonlar için de bir limit varsa tektir.)

Aşağıdaki alıştırmalarda yer alan fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

6) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

Sol.

Verilen iki değişkenli fonksiyonun tanımlı olabilmesi için, şu iki koşul sağlanmalıdır.



- $x^2 - y^2 \geqslant 0$
- $\sqrt{x^2-y^2} \neq 0$.

İki şart bize $x^2-y^2 > 0$ -ı verir.

$x^2-y^2 > 0 \Rightarrow x^2 > y^2 \Rightarrow |x| > |y|$.

$D(f) = \{(x,y) : |x| > |y|\}$.

7) $f(x,y) = \ln(1+xy)$

Sol.

Fonksiyonun tanımlı olabilmesi için $xy+1 > 0$ olmalıdır.

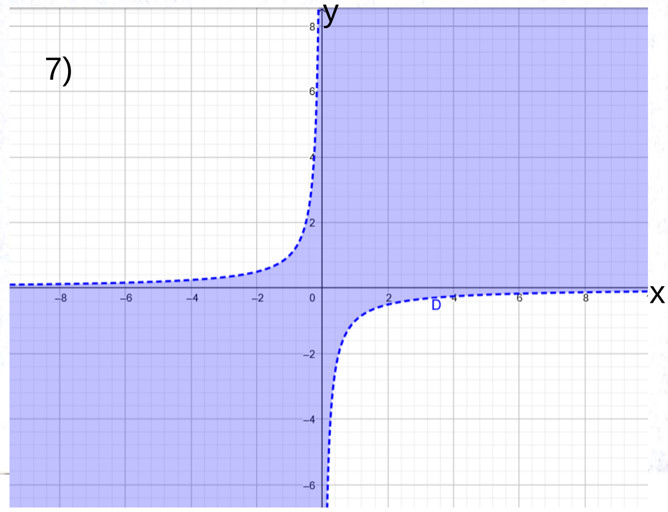
$\Rightarrow D(f) = \{(x,y) : xy > -1\}$.

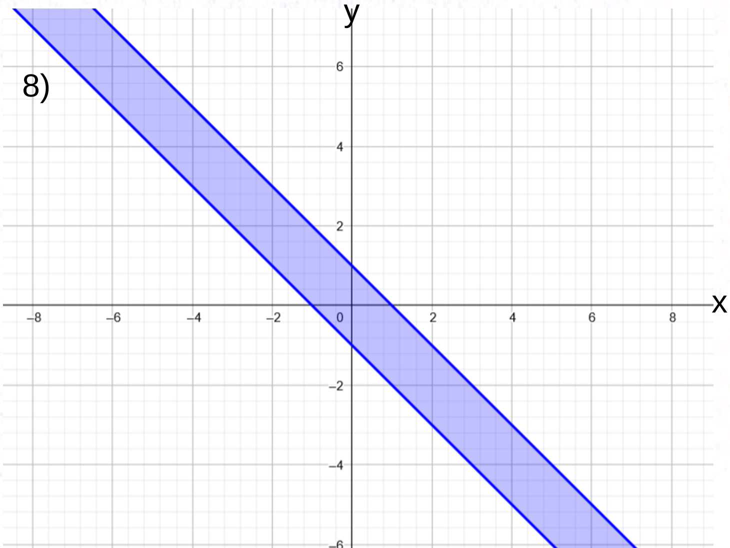
8) $f(x,y) = \arcsin(x+y)$.

Sol.

Fonksiyonun tanımlı olabilmesi için $-1 \leq x+y \leq 1$ olmalıdır.

$\Rightarrow D(f) = \{(x,y) : -1 \leq x+y \leq 1\}$.





14) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ $(x^2+y^2 \leq 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Sol.

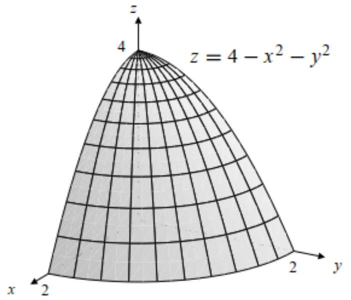
$z = f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 \implies z \leq 4.$

$x^2+y^2 \leq 4$

$z = c \leq 4$ ise $c = 4 - x^2 - y^2 \implies x^2+y^2 = 4-c$ yarıçapı $\sqrt{4-c}$ olan bir çember belirtir.

$y = c$ ise $z = 4 - x^2 - c^2$ bir parabol belirtir. (xz- düzlemine paralel.)

Ayrıca $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ olduğundan, verilen fonksiyonun grafiği yandaki gibidir.



Aşağıdaki alıştırmalardaki fonksiyonların düzey eğrilerinin bazılarını çiziniz.

19) $f(x,y) = x - y$

Sol.

$c = f(x,y) = x - y$, $c \in \mathbb{R}$ olsun.

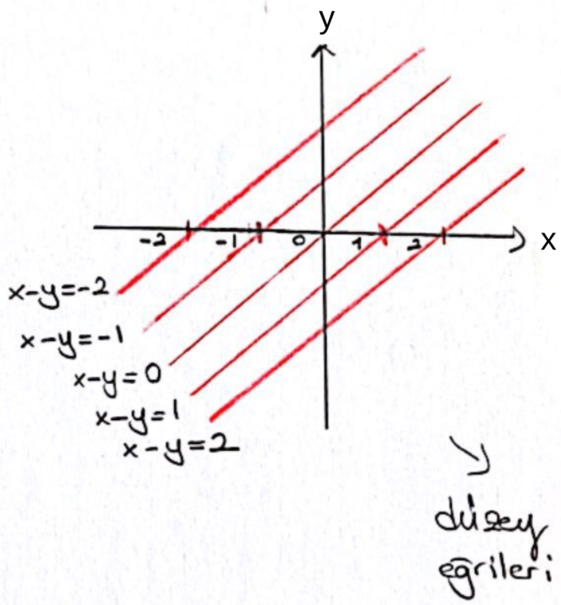
$c = 0 \implies x - y = 0$

$c = 1 \implies x - y = 1$

$c = 2 \implies x - y = 2$

$\vdots$

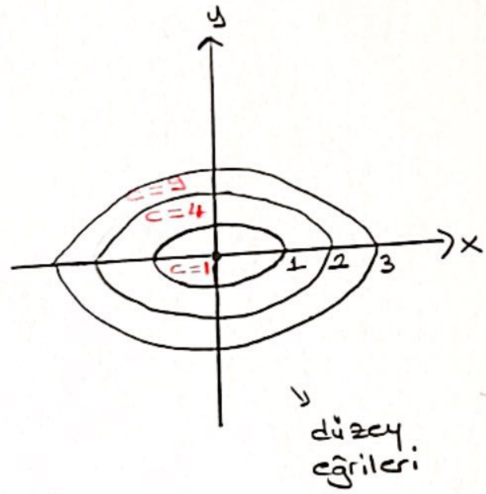
O halde $x - y = c$ eğimleri 1 olan doğrulardan oluşan bir ailedir.



20) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$

Sol.

$c = f(x,y) = x^2 + 2y^2$ olsun.



$c = 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$

$c = 1 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{1/2} = 1$

$c = 2 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 2$

$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

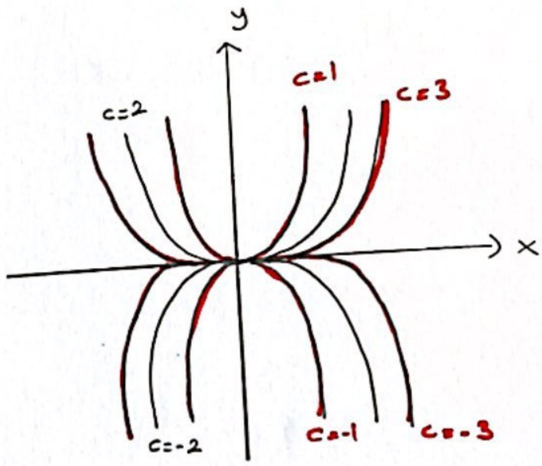
$\vdots$

$x^2 + 2y^2 = c \rightarrow \frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c/2} = 1$ merkezleri

orijin olan elipslerden oluşan bir ailedir.

22) $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$

Sol.



$c = f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ olsun.

$\Rightarrow y = \frac{x^2}{c}$.

$c = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x^2$

$c = \pm 2 \Rightarrow y = \pm \frac{x^2}{2}$

$c = \pm 3 \Rightarrow y = \pm \frac{x^2}{3}$

$\vdots$

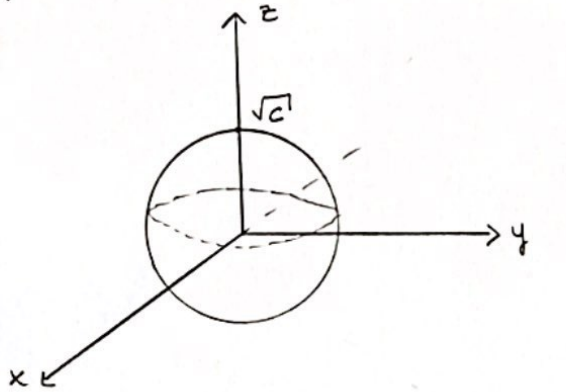
$y = \frac{x^2}{c}$ tepeleri orijinde ve dik eksenli parabollerden oluşan bir ailedir.

Aşağıdaki alıştırmalarda verilen fonksiyonların düzey yüzeylerini betimleyiniz.

37) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

Sol.

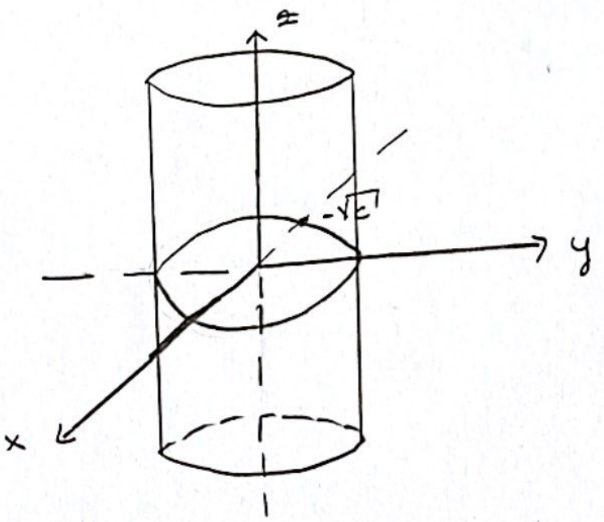
$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = c$, $c \in [0,\infty)$, orijin merkezli, $r=\sqrt{c}$ yarıçaplı kürelerden oluşan bir ailedir.



39) $f(x,y,z) = x^2+y^2$

Sol.

$f(x,y,z) = x^2+y^2 = c$, $c \in [0,\infty)$, orijin merkezli, $\sqrt{c}$ yarıçaplı z-ekseni boyunca uzanan dairesel silindirlerden oluşan bir ailedir.



Aşağıdaki alıştırmalarda belirtilen limiti hesaplayınız ya da neden mevcut olmadığını açıklayınız.

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$

Sol.

$f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ olsun.

$x=0$ boyunca; $f(0,y) = \dfrac{0}{0^2+y^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0.$

O halde limit mevcut ise 0-a eşit olmalıdır. Fakat;

$y=0$ boyunca; $f(x,0) = \dfrac{x}{x^2+0^2} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ limiti mevcut değildir $\left(\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} \dfrac{1}{x} = \pm\infty \right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$ limiti mevcut değildir.

6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$

Sol.

Açıkça, $0 \le \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} \le \dfrac{x^2(y-1)^2}{(y-1)^2} = x^2.$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x^2 = 0 \underset{\text{sıkıştırma teo.}}{\Rightarrow} \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} = 0.$

8) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}$$

Sol.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

9) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$$

Sol.

$f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ olsun.

$x=0$ boyunca ; $f(0,y) = \dfrac{\sin(0)}{y^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0.$

$y=x$ boyunca ; $f(x,x) = \dfrac{\sin(x^2)}{2x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}}_{=1 \text{ L'H}} = \frac{1}{2}$$

Eğer limit mevcut olsaydı bu iki değerin eşit olması gerekirdi.

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ mevcut değildir.

11) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$$

Sol.

Açıkça; $0 \le x^2 \le x^2+y^4 \Rightarrow 0 \le \dfrac{1}{x^2+y^4} \le \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow 0 \le \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} \le y^2.$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0. \quad \underset{\text{Sıkıştırma teo}}{\Longrightarrow} \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} = 0.$

12) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{2x^4+y^4}$

Sol.

$f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{2x^4+y^4}$ olsun.

$y=0$ boyunca ; $f(x,0) = \dfrac{x^2 \cdot 0^2}{2x^4+0^4} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0.$

$y=x$ boyunca ; $f(x,x) = \dfrac{x^4}{2x^4+x^4} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ limit mevcut değildir.