MAT/MATH 102, Vize (Midterm), Group D, 16.04.2022, 10:00 - 12:00

İsim ve Soyisim (Name and Surname) : ____________________

Öğrenci No(Student ID number): : ____________________

Bölüm (Department) : ____________________

* This is a closed book and closed notes exam (Bu sınavda kitap ve not kullanılamaz).
* No calculators, no talking and no questions (Hesap makinası, konuşmak ve soru sormak yasaktır).
*This is a multiple choice exam. In the table below, please fill in the circle corresponding to the correct answer in each question. (Bu çoktan seçmeli bir sınavdır. Verilen tabloda her soru için doğru şıkkı işaretleyiniz.)
*Only the answers on the front page will be considered when calculating exam grade. (Sınav notu hesaplanırken sadece ön sayfadaki cevaplar dikkate alınacaktır.)

Questions (Group **D**)	Answers
1	A ● C D E
2	A B C D ● F
3	A B ● D E
4	A B C ● E
5	A ● C D E
6	A B C D E ●
7	A B ● D E F
8	A B C D ● F
9	A B C ● E
10	● B C D E
Total	

Questions- Group D

1. Determine whether the given sequences are bounded (above or below), positive or negative (ultimately), increasing, decreasing, or alternating, and convergent or divergent.

$$(i)\left\{\sin\frac{1}{n}\right\}, \qquad (ii)\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$$

(Yukarıda verilen dizilerin sınırlı, artan/azalan pozitif/negatif/değişen, ya da yakınsak veya ıraksak olduğunu belirleyiniz.)

A) (i) Bounded, positive, increasing and converges to '1'.
(ii) Bounded, positive, decreasing and converges to '0'.
(i) Sınırlı, pozitif, artan ve '1'e yakınsak.
(ii) Sınırlı, pozitif, azalan ve '0'a yakınsak.

B) (i) Bounded, positive, decreasing and converges to '0'.
(ii) Bounded below, positive, increasing and diverges to infinity.
(i) Sınırlı, pozitif, azalan ve '0'a yakınsak.
(ii) Alttan sınırlı, pozitif, artan ve sonsuza ıraksayan.

C) (i) Bounded below, positive, increasing and diverges to infinity.
(ii) Bounded below, positive, increasing and diverges to infinity.
(i) Alttan sınırlı, pozitif, artan ve sonsuza ıraksayan.
(ii) Alttan sınırlı, pozitif, artan ve sonsuza ıraksayan.

D) (i) Bounded, positive, decreasing and converges to '0'.
(ii) Bounded, positive, decreasing and converges to '1'.
(i) Sınırlı, pozitif, azalan ve '0'a yakınsak.
(ii) Sınırlı, pozitif, azalan ve '1'e yakınsak.

E) (i) Bounded, positive, increasing and converges to '1'.
(ii) Bounded below, positive, increasing and diverges to infinity.
(i) Sınırlı, pozitif, artan ve '1'e yakınsak.
(ii) Alttan sınırlı, pozitif, artan ve sonsuza ıraksayan.

Solution: i) $a_n = \sin\frac{1}{n} > 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$
$a_{n+1} = \sin\frac{1}{n+1} \leq \sin\frac{1}{n} = a_n \ (\forall n \in \mathbb{N})$
$|\sin\frac{1}{n}| \leq 1 \ (\forall n \in \mathbb{N})$ and $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = \sin 0 = 0$.
Therefore $\left\{\sin\frac{1}{n}\right\}$ is bounded, positive, decreasing and converges to '0'
ii) $a_n = \frac{n^2-1}{n} = n - \frac{1}{n} \geq 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$
$a_n = n - \frac{1}{n} \leq (n+1) - \frac{1}{n+1} = a_{n+1} \ (\forall n \in \mathbb{N})$
$0 \leq a_n \ (\forall n \in \mathbb{N})$ (There is no upper bound) and $\lim_{n\to\infty}(n - \frac{1}{n}) = \infty$.
Therefore $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$ is bounded below, positive, increasing and diverges to infinity.

2. Determine whether the given positive series are convergent or divergent. Mark the true statment for all.(No partial credit)
(Verilen pozitif serilerin yakınsak mı yoksa ıraksak mı olduğunu belirleyin. Tümü için doğru ifadeyi işaretleyin. (Kısmi kredi yok))
convergent: yakınsak divergent: ıraksak

I-$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, **II.**$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{3}{\pi})^{k-1}$ III. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{2^k k!}$ **IV.**$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2}{2^k}\right)^k$ **V.**$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2k+1}{k^2-1}$

A) I-divergent	II-convergent	III-convergent	IV-convergent	V-divergent
B) I-convergent	II-divergent	III-divergent	IV-convergent	V-divergent
C) I-convergent	II-divergent	III-divergent	IV-convergent	V-convergent
D) I-divergent	II-convergent	III-convergent	IV-divergent	V-convergent
E) I-divergent	II-convergent	III-divergent	IV-convergent	V-divergent
F) I-divergent	II-convergent	III-divergent	IV-divergent	V-divergent

Solution: I-$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$(p-series) is divergent since $p = 1/2 < 1$.
I.$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{3}{\pi})^{k-1}$ (geometric series) is convergent since $r = \frac{3}{\pi} < 1$.
III.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} \frac{2^k k!}{k^k 2^k k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k (k+1)}{2.2^k (k+1)k!} \frac{2^k k!}{k^k 2^k k!}$$
$$= \lim_{k\to\infty} (1+\frac{1}{k})^k . \frac{1}{2} = \frac{e}{2} > 1$$

Thus $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{2^k k!}$ is divergent by the ratio test.
IV.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k^2}{2^k}\right)^k} = 0 < 1.$$

Thus $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2}{2^k}\right)^k$ is convergent by the root test.
IV. $\lim_{k\to\infty} \frac{k^2+2k+1}{k^2-1} = 1 \neq 0$. Thus $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2k+1}{k^2-1}$ is divergent by nth term test for divergence of a series.

3. For what values of x does the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x-7)^n}{6^n(2n+1)}$ (i) converge absolutely? (ii) converge conditionally?

(x in hangi değerleri için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x-7)^n}{6^n(2n+1)}$ serisi (i) mutlak yakınsaktır? (ii) şartlı yakınsaktır?)

A) (i) on the interval $[\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$, (ii) at $x = \frac{11}{2}$
(i) $[\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$ aralığında, (ii) $x = \frac{11}{2}$
B) (i) on the interval $(\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$, (ii) at $x = \frac{1}{2}$ and $x = \frac{13}{2}$
(i) $(\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$ aralığında, (ii) $x = \frac{1}{2}$ ve $x = \frac{13}{2}$
C) (i) on the interval $(\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$, (ii) at $x = \frac{13}{2}$
(i) $(\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$ aralığında, (ii) $x = \frac{13}{2}$
D) (i) on the interval $[\frac{1}{2}, \frac{13}{2}]$, (ii) nowhere
(i) $[\frac{1}{2}, \frac{13}{2}]$ aralığında, (ii) hiçbiryerde
E) (i) on the interval $(\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$, (ii) for $x < \frac{1}{2}$
(i) $(\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$ aralığında, (ii) $x < \frac{1}{2}$

Solution:(i) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}(2x-7)^{n+1}}{6^{n+1}(2n+3)} . \frac{6^n(2n+1)}{(-1)^n(2x-7)^n}\right| = \frac{|2x-7|}{6} . \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{|2x-7|}{6} < 1$$

$$|2x-7| < 6 \implies -6 < 2x-7 < 6 \implies \frac{1}{2} < x < \frac{13}{2}.$$

(ii) At $x = \frac{1}{2} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-6)^n}{6^n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ (Harmonic series) diverges

At $x = \frac{13}{2} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 6^n}{6^n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (Alternating harmonic series) converges conditionally.

The interval of convergence absolutely: $\frac{1}{2} < x < \frac{13}{2}$
convergence conditionally: $x = \frac{13}{2}$.

4. Determine the exact sum of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n5^n}$.

Hint : Use $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ for $-1 < x \leq 1$.

($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n5^n}$ serisinin toplamını bulunuz.)

İpucu : $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ $(-1 < x \leq 1)$ eşitliğini kullanın.

A) $1 + \ln 2$ B) $\frac{1}{2} + \ln(\frac{3}{2})$ C) $\frac{1}{4} - \ln(\frac{5}{4})$ D) $\frac{1}{4} + \ln(\frac{5}{4})$ E) $3 - \ln 2$

Solution: $|\frac{1}{5}| < 1$ and $-1 < -\frac{1}{5} \leq 1$. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Big(-\frac{1}{5} \Big)^n$$
$$= \frac{1}{5} \frac{1}{(1 - \frac{1}{5})} - \ln(1 - \frac{1}{5}) = \frac{1}{4} + \ln(\frac{5}{4})$$

5. i) Find the Maclaurin series expansion for $f(x) = \frac{1}{1+7x}$ by using substitution.

ii) By using by part (i), find the Maclaurin series expansion for $g(x) = \frac{x^4}{1+7x}$

i) $f(x) = \frac{1}{1+7x}$ *in Maclaurin seri açılımını yerine koyma ile bulunuz.*

ii) $g(x) = \frac{x^4}{1+7x}$ *in Maclaurin seri açılımını (i) kısmını kullanarak bulunuz.*

A) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(7)^n x^{n+4}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(7x)^n$

B) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(7x)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(7)^n x^{n+4}$

C) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(7x)^{n-1}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(7)^n x^{n+1}$

D) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(7x)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(7)^n x^{n-1}$

E) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(7)^{n+1}x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(7)^n x^{n-1}$

Solution:
(i)

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$f(x) = \frac{1}{1+7x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(7x)^n$$

(ii)

$$g(x) = \frac{x^4}{1+7x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 7^n x^{n+4}$$

6. For what value of k do the four points $A(3,3,1)$, $B(2,5,0)$, C(0,3,2) and $D(k+2,2,4)$ all lie in a plane?

(k'nın hangi değeri için dört nokta, $A(3,3,1)$, $B(2,5,0)$, C(0,3,2) ve $D(k+2,2,4)$ aynı düzlemdedir?)

A) 6 B) 5 C) 4 D) 0 E) -4 F) -6

Solution:
$A(3,3,1)$, $B(2,5,0)$, C(0,3,2) and $D(k+2,2,4)$ $\implies$ $\overrightarrow{AB} =< -1,2,-1 >$, $\overrightarrow{AC} =< -3,0,1 >$ and $\overrightarrow{AD} =< k-1,-1,3 >$.

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ and } \overrightarrow{AD} \text{ are coplanar} \implies (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AD} = 0 \implies k = -6.$$

7. Let $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 1\rangle$ and $\mathbf{w} = \langle 5, 8, 4\rangle$. If the projection of $\mathbf{u}$ along $\mathbf{v}$ is $\langle 2, -2, 2\rangle$ and $\mathbf{u}$ is parallel to $\mathbf{w}$, then find the length of $\mathbf{u}$.
($\mathbf{v} = \langle 1, -1, 1\rangle$ ve $\mathbf{w} = \langle 5, 8, 4\rangle$ olsun. Eğer $\mathbf{u}$'nun $\mathbf{v}$ vektörü üzerindeki izdüşümü $\langle 2, -2, 2\rangle$ ise ve $\mathbf{u}$ vektörü $\mathbf{w}$ vektörüne paralel ise, $\mathbf{u}$'nun uzunluğunu bulunuz.)

A) $\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{30}$ C) $6\sqrt{105}$ D) 42 E) 6 F) 18/5

Solution:

Let $\mathbf{u} = \langle x, y, z\rangle$. The projection of $\mathbf{u}$ along $\mathbf{v}$ is

$$\frac{(u\cdot v)}{||v||^2}v = \Big(\frac{x-y+z}{3}\Big)\langle 1, -1, 1\rangle = \langle 2, -2, 2\rangle.$$

Hence $x - y + z = 6$. Since $\mathbf{u}$ is parallel to $\mathbf{w}$ we have

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{8} = \frac{z}{4} = k.$$

Then

$$\mathbf{u} = \langle x, y, z\rangle = k\langle 5, 8, 4\rangle$$

$$x - y + z = 5k - 8k + 4k = k = 6 \implies k = 6$$

$$||\mathbf{u}|| = 6\sqrt{5^2 + (8)^2 + (4)^2} = 6\sqrt{105}.$$

8.

$$L: \quad x = -1 + 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 3 + t$$

Find the <u>x-coordinate</u> of the point on the line L that is closest to the point $(1, 0, -5)$.

(L doğrusu üzerinde bulunan ve $(1, 0, -5)$ noktasına en yakın olan noktanın <u>x-koordinatını</u> bulunuz.)

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2 F) -3

Solution:

$< 2, -1, 1 >$ is a direction vector of L.
Let (x, y, z) be the closest point on L to the point $(1, 0, -5)$.
Then the vectors $< 2, -1, 1 >$ and $< x - 1,\ y,\ z + 5 >$ are orthogonal. Hence,

$$< x - 1,\ y,\ z + 5 > \ \cdot < 2, -1, 1 >= 0$$

$$2x - 2 - y + z + 5 = 0$$

$$2x - y + z = -3$$

$$2(-1 + 2t) - (1 - t) + (3 + t) = k + 2$$

$$6t = -3$$

$$x = -1 + 2t \quad \implies \quad \boxed{x = -2}$$

9. i) Specify the domain of the function $f(x,y) = \sqrt{y-x}$ (fonksiyonunun tanım kümesini belirleyiniz.)
ii) Describe the levels curves of the function $f(x,y) = \sqrt{y-x}$ (fonksiyonunun seviye eğrilerini ifade ediniz.)

A) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $y \geq x$,
(Tanım kümesi: $y \geq x$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir)
ii) Level curves are straight lines $x+y=C$ parallel to the line $x-y=0$.
($x-y=0$ doğrusuna paralel, denklemleri $x+y=C$ olan doğrular seviye eğrileridir.)

B) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $y > x$,
(Tanım kümesi: $y > x$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir)
ii) Level curves are straight lines $y-x=C$ parallel to the line $y=x$ for positive number C.
(C pozitif bir sayı olmak üzere $y=x$ doğrusuna paralel, denklemleri $y-x=C$ olan doğrular seviye eğrileridir.)

C) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $y \leq x$,
(Tanım kümesi: $y \leq x$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir)
ii) Level curves are straight lines $x+y=C$ parallel to the line $x+y=0$.
($x+y=0$ doğrusuna paralel, denklemleri $x+y=C$ olan doğrular seviye eğrileridir.)

D) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $y \geq x$,
(Tanım kümesi: $y \geq x$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir)
ii) Level curves are straight lines $y-x=C^2$ parallel to the line $y=x$ for positive number C.
(C pozitif bir sayı olmak üzere $y=x$ doğrusuna paralel, denklemleri $y-x=C^2$ olan doğrular seviye eğrileridir.)

E) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $x>0, y>0$,
(Tanım kümesi: $x>0, y>0$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir)
ii) Level curves are straight lines $x-y=e^C$ parallel to the line $x-y=0$.
($x-y=0$ doğrusuna paralel, denklemleri $x-y=e^C$ olan doğrular seviye eğrileridir.)

Solution: (i) We can't take the square root of a negative number so this means that we must require,

$$y - x \geq 0.$$

Then $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$
(ii) $f(x,y) = C \implies \sqrt{y-x} = C \quad (C \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$
$y - x = C^2$ represents some straight lines parallel to the line $y = x$

10. Evaluate the following limits (Aşağıdaki limitleri değerlendiriniz):
i) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x \sin y}{x^2+1}$, ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y}$, iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2})$

A) i) 0, ii) the limit does not exist (limit yok), iii) 0
B) i) 0, ii) the limit does not exist (limit yok), iii) 1
C) i) the limit does not exist (limit yok), ii) 1, iii) 1
D) i) 0, ii) 0, iii) 1
E) i) 0, ii) the limit does not exist (limit yok), iii) the limit does not exist (limit yok)

Solution: i) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x \sin y}{x^2+1} = \frac{1.\sin 0}{2} = 0$

ii) $x = 0 \implies f(x,y) = f(0,y) = 1 \to 1$ as $y \to 0$.
$y = x^2 \implies f(x,y) = f(x,x^2) = 2 \to 2$ as $x \to 0$.
Along different paths we get different limit values, meaning the limit does not exist.

iii) $|x^2 - y^2| < x^2 + y^2 \implies \left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| < x^2 \implies -x^2 < \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} < x^2$
$\implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2})$ since $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\pm x^2) = 0$.

MAT/MATH 102, Vize (Midterm), Group C, 16.04.2022, 10:00 - 12.00

İsim ve Soyisim (Name and Surname) : ______________________

Öğrenci No(Student ID number): : ______________________

Bölüm (Department) : ______________________

* This is a closed book and closed notes exam (Bu sınavda kitap ve not kullanılamaz).
* No calculators, no talking and no questions (Hesap makinası, konuşmak ve soru sormak yasaktır).
*This is a multiple choice exam. In the table below, please fill in the circle corresponding to the correct answer in each question. (Bu çoktan seçmeli bir sınavdır. Verilen tabloda her soru için doğru şıkkı işaretleyiniz.)
*Only the answers on the front page will be considered when calculating exam grade. (Sınav notu hesaplanırken sadece ön sayfadaki cevaplar dikkate alınacaktır.)

Questions (Group **C**)	Answers
1	(A) (B) (C) (D) ●
2	(A) ● (C) (D) (E) (F)
3	(A) (B) (C) ● (E)
4	(A) (B) ● (D) (E)
5	(A) (B) (C) (D) ●
6	(A) (B) (C) ● (E) (F)
7	(A) (B) (C) (D) (E) ●
8	(A) (B) (C) (D) (E) ●
9	● (B) (C) (D) (E)
10	(A) (B) ● (D) (E)
Total	

Questions- Group C

1. Determine whether the given sequences are bounded (above or below), positive or negative (ultimately), increasing, decreasing, or alternating, and convergent or divergent. Hint: $e < \pi$.

$$(i)\left\{4-\frac{(-1)^n}{n}\right\}, \qquad (ii)\left\{\frac{e^n}{\pi^n}\right\}$$

Yukarıda verilen dizilerin sınırlı, artan/azalan pozitif/negatif/değişen, ya da yakınsak veya ıraksak olduğunu belirleyiniz. İpucu: $e < \pi$.

A) (i) Bounded below, positive, increasing and diverges to infinity.
(ii) Bounded, positive, decreasing and converges to '0'.
(i) Alttan sınırlı, pozitif, artan ve sonsuza ıraksayan.
(ii) Sınırlı, pozitif, azalan ve '0'a yakınsak.

B) (i) Bounded, positive and convergences to '4'.
(ii) Bounded, positive, decreasing and converges to 'e/π'.
(i) Sınırlı, pozitif, ve '4'e yakınsak.
(ii) Sınırlı, pozitif, azalan ve 'e/π'e yakınsak.

C) (i) Bounded, positive, decreasing and converges to '0'.
(ii) Bounded, positive, decreasing and converges to '0'.
(i) Sınırlı, pozitif, azalan ve '0'a yakınsak.
(ii) Sınırlı, pozitif, azalan ve '0'a yakınsak.

D) (i) Bounded, alternating and converges to '0'.
(ii) Bounded, positive, decreasing and converges to '0'.
(i) Sınırlı, değişen ve '0'a yakınsak.
(ii) Sınırlı, pozitif, azalan ve '0'a yakınsak.

✓E) (i) Bounded, positive and converges to '4'.
(ii) Bounded, positive, decreasing and converges to '0'.
(i) Sınırlı, pozitif, ve '4'e yakınsak.
(ii) Sınırlı, pozitif, azalan ve '0'a yakınsak.

(i) $\left\{4-\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{5, \frac{7}{2}, \frac{13}{3}, \ldots\right\}$ $\therefore$ Bounded, positive, converges to 4.

(ii) $\left\{\frac{e^n}{\pi^n}\right\} = \left\{\frac{e}{\pi}, \left(\frac{e}{\pi}\right)^2, \left(\frac{e}{\pi}\right)^3, \ldots\right\}$ $\therefore$ Bounded, positive, decreasing, converges to 0. $(e<\pi)$.

2. Determine whether the given positive series are convergent or divergent. Mark the true statement for all.(No partial credit)
(Verilen pozitif serilerin yakınsak mı yoksa ıraksak mı olduğunu belirleyin. Tümü için doğru ifadeyi işaretleyin. (Kısmi kredi yok))
convergent: yakınsak divergent: ıraksak

I- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$, II- $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{3}{e})^{k-1}$ III- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{4^k k!}$ IV- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2}{2^k}\right)^k$ V- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+2k+1}{k^2-1}$

A) I-convergent.	II-convergent	III-convergent	IV-convergent	V-divergent
✓B) I-convergent	II- divergent	III- convergent	IV-convergent	V-divergent
C) I-convergent	II-convergent	III-divergent	IV-convergent	V-convergent
D) I-convergent	II-divergent	III-divergent	IV-convergent	V-divergent
E) I-divergent	II-convergent	III.convergent	IV-divergent	V-convergent
F) I-divergent	II-convergent	III-divergent	IV-convergent	V-divergent

I - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$, p.s.t , $p = 3/2 > 1$, convergent.

II - $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{e}\right)^{k-1}$, geometric series, $\frac{3}{e} > 1$, divergent.

III - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{4^k k!}$, $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{4^{k+1}(k+1)!} \cdot \frac{4^k k!}{k^k}$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k (k+1)}{4 \cdot \cancel{4^k} \cdot (k+1)\cancel{k!}} \cdot \frac{\cancel{4^k} \cdot \cancel{k!}}{k^k}$

$= \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \cdot \frac{1}{4} = \frac{e}{4} < 1$, convergent.

IV - $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2}{2^k}\right)^k$, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k^2}{2^k}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{2^k} = 0 < 1$,

convergent.

V - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+2k+1}{k^2-1}$, $\lim_{k\to\infty} a_k = 3 \neq 0$, divergent.

3. For what values of x does the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x-5)^n}{6^n (2n+1)}$ (i) converge absolutely? (ii) converge conditionally?

x in hangi değerleri için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x-5)^n}{6^n (2n+1)}$ serisi (i) mutlak yakınsaktır? (ii) şartlı yakınsaktır?

A) (i) on the interval $[-\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$, (ii) at $x = \frac{11}{2}$.
(i) $[-\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$ aralığında, (ii) $x = \frac{11}{2}$
B) (i) on the interval $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$, (ii) at $x = -\frac{1}{2}$ and $x = \frac{11}{2}$
(i) $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$ aralığında, (ii) $x = -\frac{1}{2}$ ve $x = \frac{11}{2}$
C) (i) on the interval $[-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}]$, (ii) nowhere
(i) $[-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}]$ aralığında, (ii) hiçbiryerde
✓D) (i) on the interval $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$, (ii) at $x = \frac{11}{2}$
(i) $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$ aralığında, (ii) $x = \frac{11}{2}$
E) (i) on the interval $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$, (ii) for $x < -\frac{1}{2}$
(i) $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$ aralığında, (ii) $x < -\frac{1}{2}$

(i) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(2x-5)^{n+1}}{6^{n+1}(2n+3)} \cdot \frac{6^n (2n+1)}{(-1)^n (2x-5)^n} \right| = \frac{|2x-5|}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} < 1$$

$|2x-5| < 6 \Rightarrow -6 < 2x-5 < 6 \rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{11}{2}$

(ii) At $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (-6)^n}{6^n (2n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

At $x = \frac{11}{2} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 6^n}{6^n (2n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

The interval of converge absolutely $\Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{11}{2}$
Converge conditionally $\Rightarrow x = \frac{11}{2}$.

4. Determine the exact sum of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n4^n}$.

Hint : Use $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ for $-1 < x \le 1$.

($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n4^n}$ serisinin toplamını bulunuz.)

İpucu: $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ $(-1 < x \le 1)$ eşitliğini kullanın.

A) $3 - \ln 2$ B) $1 + \ln 2$ ✓C) $\frac{1}{3} + \ln(\frac{4}{3})$ D) $\frac{1}{3} - \ln(\frac{4}{3})$ E) $\frac{1}{4} + \ln(\frac{5}{4})$

$\left|\frac{1}{4}\right| < 1 \qquad -1 < -\frac{1}{4} \le 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)} - \ln\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4-1} + \ln\left(\frac{4}{4-1}\right)$$

5. i) Find the Maclaurin series expansion for $f(x) = \frac{1}{1+5x}$ by using substitution.

ii) By using by part (i), find the Maclaurin series expansion for $g(x) = \frac{x^3}{1+5x}$

i) $f(x) = \frac{1}{1+5x}$ *in Maclaurin seri açılımını yerine koyma ile bulunuz.*

ii) $g(x) = \frac{x^3}{1+5x}$ *in Maclaurin seri açılımını (i) kısmını kullanarak bulunuz.*

A) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(5)^{n+1}x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(5)^n x^{n-1}$

B) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(5)^n x^{n+3}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(5x)^n$

C) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(5x)^{n-1}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(5)^n x^{n+3}$

D) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(5x)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(5)^n x^{n-1}$

✓E) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(5x)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(5)^n x^{n+3}$

(i) $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

$\frac{1}{1+5x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (5x)^n$

(ii) $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 5^n \cdot x^{n+3}$

6. For what value of k do the four points $A(-1,-1,-3)$, $B(-2,1,-4)$, C(-4,-1,-2) and $D(k-2,-2,0)$ all lie in a plane?

(k'nın hangi değeri için dört nokta, $A(-1,-1,-3)$, $B(-2,1,-4)$, C(-4,-1,-2) ve $D(k-2,-2,0)$ aynı düzlemdedir?)

A) 3 B) −3 C) 5 ✓D) −6 E) 6 F) 9

$\vec{AB} = \langle -1, 2, -1 \rangle$

$\vec{AC} = \langle -3, 0, 1 \rangle$

$\vec{AD} = \langle k-1, -1, 3 \rangle$

$(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 0 \Rightarrow k = -6$

7. Let $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 1\rangle$ and $\mathbf{w} = \langle 3, 6, 2\rangle$. If the projection of $\mathbf{u}$ along $\mathbf{v}$ is $\langle 2, -2, 2\rangle$ and $\mathbf{u}$ is parallel to $\mathbf{w}$, then find the length of $\mathbf{u}$.

($\mathbf{v} = \langle 1, -1, 1\rangle$ ve $\mathbf{w} = \langle 3, 6, 2\rangle$ olsun. Eğer $\mathbf{u}$'nun $\mathbf{v}$ vektörü üzerindeki izdüşümü $\langle 2, -2, 2\rangle$ ise ve $\mathbf{u}$ vektörü $\mathbf{w}$ vektörüne paralel ise, $\mathbf{u}$'nun uzunluğunu bulunuz.)

A) $6\sqrt{105}$ B) $3\sqrt{30}$ C) 6 D) 18/5 E) $\sqrt{3}$ ~~F)~~ 42 ✓

The projection of u along v is

$$\frac{(u.v)}{\|v\|^2}.\,v = \left(\frac{x-y+z}{3}\right)\langle +1,-1,1\rangle = \langle 2,-2,2\rangle.$$

$\therefore\ x-y+z=6.$ Since u is parallel to w,

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z}{2} = k$$

$u = \langle x, y, z\rangle = k\langle 3, 6, 2\rangle$

$x-y+z = 3k-(3k+3k)+3k-k = k(3-4) = 6 \Rightarrow k=-6$

$\|u\| = |k|.\sqrt{3^2+6^2+2^2} = |-6|.\sqrt{49} = 42.$

8.

$$L:\quad x = -1+2t, \quad y = 1-t, \quad z = 3+t$$

Find the <u>x-coordinate</u> of the point on the line L that is closest to the point $(1, 0, 7)$.

(L doğrusu üzerinde bulunan ve $(1, 0, 7)$ noktasına en yakın olan noktanın <u>x-koordinatını</u> bulunuz.)

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1 ~~F)~~ 2 ✓

$\langle 2,-1,1\rangle$ is a direction vector of L.

let (x,y,z) be the closest pt. on L to the point $(1,0,7)$.

$\langle 2,-1,1\rangle$ and $\langle x-1, y, z-7\rangle$ are orthogonal.

$\therefore\ \langle x-1, y, z-7\rangle . \langle 2,-1,1\rangle = 0$

$2x-2-y+z-7=0$

$2x-y+z=9$

$2(-1+2t)-(1-t)+(3+t)=9$

$\therefore\ 6t=9 \qquad x=-1+2t = -1+3 = 2$

9. i) Specify the domain of the function $f(x,y) = ln(x+y)$ (fonksiyonunun tanım kümesini belirleyiniz.)
ii) Describe the levels curves of the function $f(x,y) = ln(x+y)$ (fonksiyonunun seviye eğrilerini ifade ediniz.)

A) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $y > -x$,
(Tanım kümesi: $y > -x$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir)
ii) Level curves are straight lines $x + y = e^C$ parallel to the line $x + y = 0$.
($x + y = 0$ doğrusuna paralel, denklemleri $x + y = e^C$ olan doğrular seviye eğrileridir.)

B) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $y > x$,
(Tanım kümesi: $y > x$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir)
ii) Level curves are straight lines $x - y = e^C$ parallel to the line $x - y = 0$.
($x - y = 0$ doğrusuna paralel, denklemleri $x - y = e^C$ olan doğrular seviye eğrileridir.)

C) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $y \geq x$,
(Tanım kümesi: $y \geq x$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir)
ii) Level curves are straight lines $x + y = C$ parallel to the line $x + y = 0$.
($x + y = 0$ doğrusuna paralel, denklemleri $x + y = C$ olan doğrular seviye eğrileridir.)

D) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $y > -x$,
(Tanım kümesi: $y > -x$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir)
ii) Level curves are straight lines $x - y = C$ parallel to the line $x - y = 0$.
($x - y = 0$ doğrusuna paralel, denklemleri $x - y = C$ olan doğrular seviye eğrileridir.)

E) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $x > 0, y > 0$,
(Tanım kümesi: $x > 0, y > 0$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir)
ii) Level curves are straight lines $x - y = e^C$ parallel to the line $x - y = 0$.
($x - y = 0$ doğrusuna paralel, denklemleri $x - y = e^C$ olan doğrular seviye eğrileridir.)

(i) $f(x,y) = ln(x+y) \Rightarrow (x+y) > 0 \quad y > -x$

(ii) $f(x,y) = C \Rightarrow ln(x+y) = C \quad x+y = e^C$

it represents some straight lines parallel to the line $x+y=0$.

10. Evaluate the following limits (Aşağıdaki limitleri değerlendiriniz):
i) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$, ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$, iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2})$

A) i) 0, ii) 1, iii) 1
B) i) 2, ii) the limit does not exist (limit yok), iii) 0
✓C) i) 0, ii) the limit does not exist (limit yok), iii) 0
D) i) 0, ii) 0, iii) 1
E) i) 2, ii the limit does not exist (limit yok), iii) the limit does not exist (limit yok)

(i) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x-y) = 0$

(ii) $x=0 \Rightarrow f(x,y) = f(0,y) = \frac{0-y}{0+y} = -1$
$y=0 \Rightarrow f(x,y) = f(x,0) = \frac{x-0}{x+0} = 1$
$\Big\}$ limit does not exist.

(iii) $|x^2-y^2| < x^2+y^2$ $\quad \left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| < 1 \quad \Rightarrow |xy| \left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| < |xy|$

$\therefore -|xy| < xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) < |xy|$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy| = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = 0.$

MAT/MATH 102, Vize (Midterm), Group B, 16.04.2022, 10:00 - 12:00

İsim ve Soyisim (Name and Surname) : ____________________

Öğrenci No(Student ID number): : ____________________

Bölüm (Department) : ____________________

* This is a closed book and closed notes exam (Bu sınavda kitap ve not kullanılamaz).
* No calculators, no talking and no questions (Hesap makinası, konuşmak ve soru sormak yasaktır).
*This is a multiple choice exam. In the table below, please fill in the circle corresponding to the correct answer in each question. (Bu çoktan seçmeli bir sınavdır. Verilen tabloda her soru için doğru şıkkı işaretleyiniz.)
*Only the answers on the front page will be considered when calculating exam grade. (Sınav notu hesaplanırken sadece ön sayfadaki cevaplar dikkate alınacaktır.)

Questions (Group **B**)	Answers
1	(A) (B) (C) ● (E)
2	(A) (B) ● (D) (E) (F)
3	● (B) (C) (D) (E)
4	(A) (B) ● (D) (E)
5	(A) (B) ● (D) (E)
6	● (B) (C) (D) (E) (F)
7	● (B) (C) (D) (E) (F)
8	(A) (B) (C) (D) ● (F)
9	● (B) (C) (D) (E)
10	● (B) (C) (D) (E)
Total	

Questions - Group B

1. Determine whether the given sequences are bounded (above or below), positive or negative (ultimately), increasing, decreasing, or alternating, and convergent or divergent. Hint: $e/\sqrt{\pi} > 1$.

$$(i) \left\{ \frac{2n}{n^2+1} \right\}, \qquad (ii) \left\{ \frac{e^n}{\pi^{n/2}} \right\}$$

Yukarıda verilen dizilerin sınırlı, artan/azalan pozitif/negatif/değişen, ya da yakınsak veya ıraksak olduğunu belirleyiniz. İpucu: $e/\sqrt{\pi} > 1$.

A) (i) Bounded below, positive, increasing and diverges to infinity.
(ii) Bounded below, positive, increasing and diverges to infinity.
(i) Alttan sınırlı, pozitif, artan ve sonsuza ıraksayan.
(ii) Alttan sınırlı, pozitif, artan ve sonsuza ıraksayan.

B) (i) Bounded, positive, decreasing and converges to '2'.
(ii) Bounded below, positive, increasing and diverges to infinity.
(i) Sınırlı, pozitif, azalan ve '2' ye yakınsak.
(ii) Alttan sınırlı, pozitif, artan ve sonsuza ıraksayan.

C) (i) Bounded, positive, decreasing and converges to '0'.
(ii) Bounded, positive, increasing and converges to '$e/\sqrt{\pi}$'.
(i) Sınırlı, pozitif, azalan ve '0' a yakınsak.
(ii) Sınırlı, pozitif, artan ve '$e/\sqrt{\pi}$' ye yakınsak.

D) (i) Bounded, positive, decreasing and converges to '0'.
(ii) Bounded below, positive, increasing and diverges to infinity.
(i) Sınırlı, pozitif, azalan ve '0' a yakınsak.
(ii) Alttan sınırlı, pozitif, artan ve sonsuza ıraksayan.

E) (i) Bounded, positive, increasing and converges to '2'.
(ii) Bounded, positive, increasing and converges to 'e'.
(i) Sınırlı, pozitif, artan ve '2' ye yakınsak.
(ii) Sınırlı, pozitif, artan ve 'e' ye yakınsak.

2. Determine whether the given positive series are convergent or divergent. Mark the true statment for all.(No partial credit)
(Verilen pozitif serilerin yakınsak mı yoksa ıraksak mı olduğunu belirleyin. Tümü için doğru ifadeyi işaretleyin. (Kısmi kredi yok))
convergent: yakınsak divergent: ıraksak

I. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\pi}}$, **II.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{e}{\pi})^{k-1}$ **III.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$ **IV.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2}{3^k}\right)^k$ **V.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2k+1}{2k^2-1}$

A)	I-convergent	II-convergent	III-convergent	IV-convergent	V-divergent
B)	I-convergent	II-divergent	III-convergent	IV-convergent	V-divergent
C)	I-convergent	II-convergent	III-divergent	IV-convergent	V-divergent
D)	I-divergent	II-convergent	III-convergent	IV-divergent	V-convergent
E)	I-convergent	II-divergent	III-divergent	IV-divergent	V-divergent
F)	I-divergent	II-convergent	III-divergent	IV-convergent	V-divergent

3. For what values of x does the series $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x-3)^n}{6^n(2n+1)}$ (i) converge absolutely? (ii) converge conditionally?

x in hangi değerleri için $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x-3)^n}{6^n(2n+1)}$ serisi (i) mutlak yakınsaktır? (ii) şartlı yakınsaktır?

A) (i) on the interval $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$, (ii) at $x = \frac{9}{2}$
   (i) $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ aralığında, (ii) $x = \frac{9}{2}$
B) (i) on the interval $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$, (ii) at $x = -\frac{3}{2}$ and $x = \frac{9}{2}$
   (i) $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ aralığında, (ii) $x = -\frac{3}{2}$ ve $x = \frac{9}{2}$
C) (i) on the interval $[-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}]$, (ii) nowhere
   (i) $[-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}]$ aralığında, (ii) hiçbiryerde
D) (i) on the interval $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$, (ii) for $x < -\frac{3}{2}$
   (i) $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ aralığında, (ii) $x < -\frac{3}{2}$
E) (i) on the interval $[-\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$, (ii) at $x = \frac{9}{2}$
   (i) $[-\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ aralığında, (ii) $x = \frac{9}{2}$

4. Determine the exact sum of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n3^n}$.

Hint : Use $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ for $-1 < x \leq 1$.

($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n3^n}$ serisinin toplamını bulunuz.)

İpucu: $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ $(-1 < x \leq 1)$ eşitliğini kullanın.

A) $3 - \ln 2$ B) $\frac{1}{2} - \ln(\frac{3}{2})$ C) $\frac{1}{2} + \ln(\frac{3}{2})$ D) $\frac{1}{3} + \ln(\frac{4}{3})$ E) $\frac{1}{4} + \ln(\frac{5}{4})$

5. i) Find the Maclaurin series expansion for $f(x) = \frac{1}{1+3x}$ by using substitution.

ii) By using by part (i), find the Maclaurin series expansion for $g(x) = \frac{x^2}{1+3x}$.

i) $f(x) = \frac{1}{1+3x}$ *in Maclaurin seri açılımını yerine koyma ile bulunuz.*

ii) $g(x) = \frac{x^2}{1+3x}$ *in Maclaurin seri açılımını (i) kısmını kullanarak bulunuz.*

A) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3x)^{n-1}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3)^n x^{n+1}$

B) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3)^n x^{n+2}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3x)^n$

C) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3x)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3)^n x^{n+2}$

D) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3x)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3)^n x^{n-1}$

E) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3)^{n+1}x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3)^n x^{n-1}$

6. For what value of k do the four points $A(2,2,0)$, $B(1,4,-1)$, C(-1,2,1) and $D(k+1,1,3)$ all lie in a plane?

(k'nın hangi değeri için dört nokta, $A(2,2,0)$, $B(1,4,-1)$, C(-1,2,1) ve $D(k+1,1,3)$ aynı düzlemdedir?)

A) -6 B) 4 C) -4 D) -5 E) 6 F) 3

7. Let $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 1 \rangle$ and $\mathbf{w} = \langle 2, 5, 1 \rangle$. If the projection of $\mathbf{u}$ along $\mathbf{v}$ is $\langle 2, -2, 2 \rangle$ and $\mathbf{u}$ is parallel to $\mathbf{w}$, then find the length of $\mathbf{u}$.
($\mathbf{v} = \langle 1, -1, 1 \rangle$ ve $\mathbf{w} = \langle 2, 5, 1 \rangle$ olsun. Eğer $\mathbf{u}$'nun $\mathbf{v}$ vektörü üzerindeki izdüşümü $\langle 2, -2, 2 \rangle$ ise ve $\mathbf{u}$ vektörü $\mathbf{w}$ vektörüne paralel ise, $\mathbf{u}$'nun uzunluğunu bulunuz.)

A) $3\sqrt{30}$ B) $6\sqrt{105}$ C) $18/5$ D) 6 E) 42 F) $\sqrt{3}$

8.

$$L: \quad x = -1 + 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 3 + t$$

Find the <u>x-coordinate</u> of the point on the line L that is closest to the point $(1, 0, 4)$.

(L doğrusu üzerinde bulunan ve $(1, 0, 4)$ noktasına en yakın olan noktanın <u>x-koordinatını</u> bulunuz.)

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1 F) 2

9. i) Specify the domain of the function $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ (fonksiyonunun tanım kümesini belirleyiniz.)
ii) Describe the levels curves of the function $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ (fonksiyonunun seviye eğrilerini ifade ediniz.)

A) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $x^2 + y^2 > 1$,
(Tanım kümesi: $x^2 + y^2 > 1$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir)
ii) Level curves are circles centered at the origin with radii $\sqrt{e^C + 1}$ where C is a reel number.
(Seviye eğrileri, $C \in \mathbb{R}$ olmak üzere yarıçapı $\sqrt{e^C + 1}$, merkezi orijin olan çemberlerdir).

B) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $x^2 + y^2 < 1$,
(Tanım kümesi: $x^2 + y^2 < 1$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir)
ii) Level curves are circles centered at the origin with radii $\sqrt{C + 1}$ where C is a reel number.
(Seviye eğrileri, $C \in \mathbb{R}$ olmak üzere yarıçapı $\sqrt{C + 1}$, merkezi orijin olan çemberlerdir).

C) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $x^2 + y^2 \geq 1$,
(Tanım kümesi: $x^2 + y^2 \geq 1$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir)
ii) Level curves are circles centered at the origin with radii $\sqrt{e^C + 1}$ where C is positive number.
(Seviye eğrileri, C pozitif bir sayı olmak üzere yarıçapı $\sqrt{e^C + 1}$, merkezi orijin olan çemberlerdir).

D) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $x^2 + y^2 > 0$,
(Tanım kümesi: $x^2 + y^2 > 0$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir)
ii) Level curves are circles centered at the origin with radii $\sqrt{e^C}$ where C is positive number.
(Seviye eğrileri, C pozitif bir sayı olmak üzere yarıçapı $\sqrt{e^C}$, merkezi orijin olan çemberlerdir)

E) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $x^2 + y^2 \leq 1$,
(Tanım kümesi: $x^2 + y^2 \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir)
ii) Level curves are circles centered at the origin with radii $\sqrt{e^C - 1}$ where C is a reel number.
(Seviye eğrileri, $C \in \mathbb{R}$ olmak üzere yarıçapı $\sqrt{e^C - 1}$, merkezi orijin olan çemberlerdir).

10. Evaluate the following limits (Aşağıdaki limitleri değerlendiriniz):

$$\text{i)} \lim_{(x,y)\to(\ln 2,0)} e^{x-y}, \quad \text{ii)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad \text{iii)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\left(\frac{1}{y}\right)$$

A) i) 2, ii) the limit does not exist (limit yok), iii) 0
B) i) 2, ii) 0, iii) 0
C) i) $\frac{1}{2}$, ii) the limit does not exist (limit yok), iii) 1
D) i) $\frac{1}{2}$, ii) 0, iii) 0
E) i) -2, ii) the limit does not exist (limit yok), iii) the limit does not exist (limit yok)

MAT/MATH 102, Vize (Midterm), Group A, 16.04.2022, 10:00 - 12:00

İsim ve Soyisim (Name and Surname) : ______________________

Öğrenci No(Student ID number): : ______________________

Bölüm (Department) : ______________________

* This is a closed book and closed notes exam (Bu sınavda kitap ve not kullanılamaz).
* No calculators, no talking and no questions (Hesap makinası, konuşmak ve soru sormak yasaktır).
*This is a multiple choice exam. In the table below, please fill in the circle corresponding to the correct answer in each question. (Bu çoktan seçmeli bir sınavdır. Verilen tabloda her soru için doğru şıkkı işaretleyiniz.)
*Only the answers on the front page will be considered when calculating exam grade. (Sınav notu hesaplanırken sadece ön sayfadaki cevaplar dikkate alınacaktır.)

Questions (Group **A**)	Answers
1	A B C D E
2	A B C D E F
3	A B C D E
4	A B C D E
5	A B C D E
6	A B C D E F
7	A B C D E F
8	A B C D E F
9	A B C D E
10	A B C D E
Total	

Questions - Group A

1. Determine whether the given sequences are bounded (above or below), positive or negative (ultimately), increasing, decreasing, or alternating, and convergent or divergent.

$$(i)\left\{\frac{2n^2}{n^2+1}\right\}, \qquad (ii)\left\{\frac{(-1)^n n}{e^n}\right\}$$

Yukarıda verilen dizilerin sınırlı, artan/azalan pozitif/negatif/değişen, ya da yakınsak veya ıraksak olduğunu belirleyiniz.

A) (i) Bounded, positive, increasing and converges to '1'.
(ii) Bounded, positive and converges to 'e'.
(i) Sınırlı, pozitif, artan ve '1'e yakınsak.
(ii) Sınırlı, pozitif, ve 'e' ye yakınsak.

B) (i) Bounded, positive, decreasing and converges to '0'.
(ii) Bounded, positive and converges to 'e^{-1}'.
(i) Sınırlı, pozitif, azalan ve '0'a yakınsak.
(ii) Sınırlı, pozitif ve 'e^{-1}'e yakınsak.

C) (i) Bounded, positive, increasing and converges to '2'.
(ii) Bounded below, positive, increasing and diverges to infinity.
(i) Sınırlı, pozitif, artan ve '2' ye yakınsak.
(ii) Alttan sınırlı, pozitif, ve sonsuza ıraksayan.

D) (i) Bounded, positive, decreasing and converges to '2'.
(ii) Bounded, alternating and converges to '0'.
(i) Sınırlı, pozitif, azalan ve '2' a yakınsak.
(ii) Sınırlı, değşien, ve '0' a yakınsak.

E) (i) Bounded, positive, increasing and converges to '2'.
(ii) Bounded, alternating and converges to '0'.
(i) Sınırlı, pozitif, artan ve '2' ye yakınsak.
(ii) Sınırlı, değişen, ve '0' a yakınsak.

2. Determine whether the given positive series are convergent or divergent. Mark the true statment for all. (No partial credit)
(Verilen pozitif serilerin yakınsak mı yoksa ıraksak mı olduğunu belirleyin. Tümü için doğru olan şıkkı işaretleyin. (Kısmi kredi yok))
convergent: yakınsak divergent: ıraksak

I. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^e}$, **II.** $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{\pi}{e})^{k-1}$ **III.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$ **IV.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2}{4^k}\right)^k$ **V.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2k+1}{5k^2+1}$

A) I-convergent II-convergent III-convergent IV-convergent V-divergent
B) I-convergent II-divergent III-convergent IV-convergent V-divergent
C) I-convergent II-convergent III-divergent IV-convergent V-convergent
D) I-divergent II-convergent III-convergent IV-divergent V-convergent
E) I-convergent II-divergent III-divergent IV-divergent V-divergent
F) I-divergent II-convergent III-divergent IV-convergent V-divergent

3. For what values of x does the series $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x-1)^n}{6^n(2n+1)}$ (i) converge absolutely? (ii) converge conditionally?

x in hangi değerleri için $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x-1)^n}{6^n(2n+1)}$ serisi (i) mutlak yakınsaktır? (ii) şartlı yakınsaktır?

A) (i) on the interval $[-\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$, (ii) at $x = \frac{7}{2}$
   (i) $[-\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ aralığında, (ii) $x = \frac{7}{2}$
B) (i) on the interval $(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$, (ii) at $x = -\frac{5}{2}$ and $x = \frac{7}{2}$
   (i) $(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ aralığında, (ii) $x = -\frac{5}{2}$ ve $x = \frac{7}{2}$
C) (i) on the interval $[-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$, (ii) nowhere
   (i) $[-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$ aralığında, (ii) hiçbir yerde
D) (i) on the interval $(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$, (ii) for $x < -\frac{5}{2}$
   (i) $(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ aralığında, (ii) $x < -\frac{5}{2}$
E) (i) on the interval $(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$, (ii) at $x = \frac{7}{2}$
   (i) $(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ aralığında, (ii) $x = \frac{7}{2}$

4. Determine the exact sum of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n2^n}$.

Hint: Use $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ for $-1 < x \leq 1$.

($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n2^n}$ serisinin toplamını bulunuz.)

İpucu: $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ $(-1 < x \leq 1)$ eşitliğini kullanın.

A) $3 - \ln 2$ B) $1 + \ln 2$ C) $\frac{1}{2} + \ln(\frac{3}{2})$ D) $\frac{1}{3} + \ln(\frac{4}{3})$ E) $\frac{1}{4} - \ln(\frac{5}{4})$

5. i) Find the Maclaurin series expansion for $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ by using substitution.

ii) By using by part (i), find the Maclaurin series expansion for $g(x) = \frac{x}{1+2x}$.

i) $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ in Maclaurin seri açılımını yerine koyma ile bulunuz.

ii) $g(x) = \frac{x}{1+2x}$ in Maclaurin seri açılımını (i) kısmını kullanarak bulunuz.

A) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2)^n x^{n+1}$

B) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2)^n x^{n+1}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n$

C) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^{n-1}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2)^n x^{n+1}$

D) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2)^n x^{n-1}$

E) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2)^{n+1} x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2)^n x^{n-1}$

6. For what value of k do the four points $A(0,0,-2)$, $B(-1,2,-3)$, $C(-3,0,-1)$ and $D(k-1,-1,1)$ all lie in a plane?

(k'nın hangi değeri için dört nokta, $A(0,0,-2)$, $B(-1,2,-3)$, $C(-3,0,-1)$ ve $D(k-1,-1,1)$ aynı düzlemdedir?)

A) 6 B) 5 C) -5 D) -4 E) -6 F) 3

7. Let $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 1\rangle$ and $\mathbf{w} = \langle -1, 2, -2\rangle$. If the projection of $\mathbf{u}$ along $\mathbf{v}$ is $\langle 2, -2, 2\rangle$ and $\mathbf{u}$ is parallel to $\mathbf{w}$, then find the length of $\mathbf{u}$.
($\mathbf{v} = \langle 1, -1, 1\rangle$ ve $\mathbf{w} = \langle -1, 2, -2\rangle$ olsun. Eğer $\mathbf{u}$'nun $\mathbf{v}$ vektörü üzerindeki izdüşümü $\langle 2, -2, 2\rangle$ ise ve $\mathbf{u}$ vektörü $\mathbf{w}$ vektörüne paralel ise, $\mathbf{u}$'nun uzunluğunu bulunuz.)

A) 6 B) $\sqrt{3}$ C) 42 D) $3\sqrt{30}$ E) 18/5 F) $6\sqrt{105}$

8.

$$L: \quad x = -1 + 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 3 + t$$

Find the <u>x-coordinate</u> of the point on the line L that is closest to the point $(1, 0, 1)$.

(L doğrusu üzerinde bulunan ve $(1, 0, 1)$ noktasına en yakın olan noktanın <u>x-koordinatını</u> bulunuz.)

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1 F) 2

9. i) Specify the domain of the function $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ (fonksiyonunun tanım kümesini belirleyiniz).
ii) Describe the levels curves of the function $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ (fonksiyonunun seviye eğrilerini ifade ediniz.)

A) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $x^2+y^2<4$
(Tanım kümesi: $x^2+y^2<4$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir),
ii) Level curves are circles centered at the origin with radii $\sqrt{4-\frac{1}{C^2}}$ where C is positive number
(Seviye eğrileri, C pozitif bir sayı olmak üzere yarıçapı $\sqrt{4-\frac{1}{C^2}}$, merkezi orijin olan çemberlerdir).

B) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $x^2+y^2\leq 4$
(Tanım kümesi: $x^2+y^2\leq 4$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir),
ii) Level curves are circles centered at the origin with radii $\sqrt{4-\frac{1}{C^2}}$ where C is positive number
(Seviye eğrileri, C pozitif bir sayı olmak üzere yarıçapı $\sqrt{4-\frac{1}{C^2}}$, merkezi orijin olan çemberlerdir).

C) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $x^2+y^2<4$
(Tanım kümesi: $x^2+y^2<4$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir),
ii) Level curves are circles centered at the origin with radii $\sqrt{4-C^2}$ where C is positive number
(Seviye eğrileri, C pozitif bir sayı olmak üzere yarıçapı $\sqrt{4-C^2}$, merkezi orijin olan çemberlerdir).

D) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $x^2+y^2>4$
(Tanım kümesi: $x^2+y^2>4$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir),
ii) Level curves are circles centered at the origin with radii $\sqrt{4-\frac{1}{C^2}}$ where C is positive number (Seviye eğrileri, C pozitif bir sayı olmak üzere yarıçapı $\sqrt{4-\frac{1}{C^2}}$, merkezi orijin olan çemberlerdir).

E) i) Domain: set of all (x,y) satisfying $x^2+y^2>4$,
(Tanım kümesi: $x^2+y^2>4$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesidir),
ii) Level curves are circles centered at the origin with radii $\sqrt{4-C^2}$ where C is positive number
(Seviye eğrileri, C pozitif bir sayı olmak üzere yarıçapı $\sqrt{4-C^2}$, merkezi orijin olan çemberlerdir).

10. Evaluate the following limits (Aşağıdaki limitleri değerlendiriniz):

$$\text{i)} \lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}, \quad \text{ii)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}, \quad \text{iii)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin(\frac{1}{x})$$

A) i) $\frac{1}{2}$, ii) the limit does not exist (limit yok), iii) 0
B) i) -2, ii) the limit does not exist (limit yok), iii) 1
C) i) -2, ii) -1, iii) 1
D) i) $\frac{1}{2}$, ii) -1, iii) 0
E) i) -2, ii) the limit does not exist (limit yok), iii) the limit does not exist (limit yok)