UYGULAMA HAFTA 8

Section 12.3-Kısmi Türevler

Section 12.4-Yüksek Mertebeden Türevler

Section 12.5-Zincir Kuralı

HATIRLATMALAR

Birinci Kısmi Türev: $f(x,y)$ fonksiyonunun x ve y değişkenlerine göre birinci kısmi türevleri

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) = f_1(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = f_2(x,y) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

ile verilen $f_1(x,y)$ ve $f_2(x,y)$ fonksiyonlarıdır (bu limitler mevcut ise).

Bir Yüzeyin Teğet Düzleminin Denklemi: Bir $\bar{f}(x,y,z) = 0$ yüzeyinin bir (x_0,y_0,z_0) noktasındaki teğet düzleminin denklemi, $\vec{\bigtriangledown}\bar{f}(x_0,y_0,z_0) =< a,b,c >$ olmak üzere $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$ dır. Burada $\vec{\bigtriangledown}\bar{f} =< \bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z >$ gradyant vektör olarak adlandırılır, yüzeyin her noktasına dik bir vektör üretir.

Yüksek Mertebeden Kısmi Türev: f fonksiyonunun f_x ve f_y kısmi türevlerinin de x ve y değişkenlerine göre kısmi türevleri var ise bu türevlere f nin ikinci mertebeden kısmi türevleri denir. Buna göre f nin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$f_{11} = f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$
$$f_{12} = f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$f_{21} = f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$
$$f_{22} = f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

şeklindedir.

Zincir Kuralı: $z = f(x,y)$ şeklinde tanımlanan $f : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. f, f_x, f_y fonksiyonları B üzerinde sürekli ve $x = g(u,v), y = h(u,v)$ fonksiyonlarının u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri varsa $z = f(g(u,v),h(u,v))$ fonksiyonunun da u ile v değişkenlerine göre kısmi türevleri vardır ve

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

şeklindedir.

Aşağıda belirtilen fonksiyonların tüm birinci kısmi türevlerini bulunuz ve verilen noktada hesaplayınız.

5) $z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, $(-1, 1)$

Sol.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-1,1)} = -\frac{1}{(-1)^2+1^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(-1,1)} = -\frac{1}{(-1)^2+1^2} = -\frac{1}{2}.$$

6) $w = \ln(1+e^{xyz})$, $(2, 0, -1)$

Sol.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{yz\,e^{xyz}}{1+e^{xyz}} \Rightarrow \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(2,0,-1)} = \frac{0.(-1)\,e^{2.0.(-1)}}{1+e^{2.0.(-1)}} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{xz\,e^{xyz}}{1+e^{xyz}} \Rightarrow \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{(2,0,-1)} = \frac{2.(-1)\,e^{2.0.(-1)}}{1+e^{2.0.(-1)}} = -1$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{xy\,e^{xyz}}{1+e^{xyz}} \Rightarrow \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{(2,0,-1)} = \frac{2.0.\,e^{2.0.(-1)}}{1+e^{2.0.(-1)}} = 0$$

7) $f(x,y) = \sin(x\sqrt{y})$, $\left(\frac{\pi}{3}, 4\right)$

Sol.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{y}\cos(x\sqrt{y}) \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\pi/3,4)} = \sqrt{4}\,\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{4}\right)}_{-1/2} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}\cos(x\sqrt{y}) \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\pi/3,4)} = \frac{\pi/3}{2.\sqrt{4}}\cos\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{4}\right) = -\frac{\pi}{24}.$$

9) $w = x^{(y \ln z)}$, $(e, 2, e)$

Sol.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y \ln z \, x^{(y \ln z - 1)} \Rightarrow \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(e,2,e)} = 2 \ln e \cdot e^{(2\ln e - 1)} = 2e$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \ln z \, x^{(y \ln z)} \ln x \Rightarrow \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{(e,2,e)} = \ln e \cdot e^{(2\ln e)} \ln e = e^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = y \cdot \frac{1}{z} \cdot x^{(y \ln z)} \ln x \Rightarrow \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{(e,2,e)} = \frac{2}{e} e^{(2\ln e)} \ln e = 2e$$

12) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2y^2}{x-y} , & x \neq y \\ 0 , & x = y \end{cases}$ fonksiyonunun birinci

kısmi türevlerini $(0,0)$ noktasında hesaplayınız.

Sol.

$$f_1(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h} \quad \text{idi} . \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

O halde $(x,y) = (0,0)$ için,

$$f_1(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2 - 2.0^2}{h-0} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h^2} = 1 .$$

$$f_2(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x,y)}{k} \quad \text{idi} . \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

O halde $(x,y) = (0,0)$ için,

$$f_2(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, 0+k) - f(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{0^2 - 2k^2}{0-k} - 0}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{2k^2}{k^2} = 2.$$

16) $f(x,y) = e^{xy}$ fonksiyonunun $(2,0)$ noktasında teğet düzleminin ve normal doğrusunun denklemlerini bulunuz.

Sol.

$z = f(x,y) = e^{xy} \Rightarrow \bar{f}(x,y,z) = e^{xy} - z$

$z = f(0,2) = e^{0 \cdot 2} = 1 \Rightarrow (2,0,1)$ yüzey üzerindedir. (teğet nokta)

$\nabla \bar{f}(2,0,1) = \langle \bar{f}_x(2,0,1), \bar{f}_y(2,0,1), \bar{f}_z(2,0,1) \rangle.$

$\bar{f}_x = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = y e^{xy} \Rightarrow \bar{f}_x(2,0,1) = 0 \cdot e^{2 \cdot 0} = 0$

$\bar{f}_y = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = x e^{xy} \Rightarrow \bar{f}_y(2,0,1) = 2 \cdot e^{2 \cdot 0} = 2$

$\bar{f}_z = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = -1 \Rightarrow \bar{f}_z(2,0,1) = -1$

$\Rightarrow \nabla \bar{f}(2,0,1) = \langle 0, 2, -1 \rangle \rightarrow$ düzleme dik bir vektör.

$\Rightarrow$ Teğet düzlemin denklemi; $(2,0,1)$ noktası için

$0(x-2) + 2 \cdot (y-0) - 1 \cdot (z-1) = 0$ (düzlem denk. formülü)

$\Rightarrow 2y - z + 1 = 0 \Rightarrow z = 2y + 1.$

$\nabla \bar{f}(2,0,1) = \langle 0, 2, -1 \rangle$ bulacağımız doğruya paraleldir.

O halde $(2,0,1)$ noktası için normal doğrunun denklemi

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-1}{-1}$$ (uzayda doğru denk. formülü)

Yani $x = 2, \quad \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ -dir.

4) $z=\sqrt{3x^2+y^2}$ fonksiyonunun tüm ikinci kısmi türevlerini bulunuz.

Sol.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(3x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(3x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{3x^2+y^2}}$$

• $$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{3\sqrt{3x^2+y^2} - \left(3x/\sqrt{3x^2+y^2}\right)\cdot 3x}{\left(\sqrt{3x^2+y^2}\right)^2} = \frac{3y^2}{(3x^2+y^2)^{3/2}}$$

• $$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{0\cdot\sqrt{3x^2+y^2} - \left(y/\sqrt{3x^2+y^2}\right)\cdot 3x}{\left(\sqrt{3x^2+y^2}\right)^2}$$

$$= -\frac{3xy}{(3x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Check.

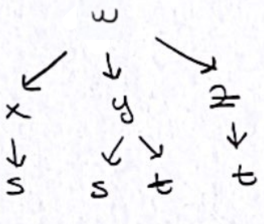
• $$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{3x^2+y^2} - \left(y/\sqrt{3x^2+y^2}\right)\cdot y}{\left(\sqrt{3x^2+y^2}\right)^2} = \frac{3x^2}{(3x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Aşağıdaki alıştırmalarda belirtilen türevler için zincir kuralının uygun versiyonlarını yazınız.

2) $x=g(s)$, $y=h(s,t)$ ve $z=k(t)$ olmak üzere $w=f(x,y,z)$ ise $\frac{\partial w}{\partial t}$?

Sol.

Şu diyagramdan faydalanabiliriz.



O halde,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{0} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

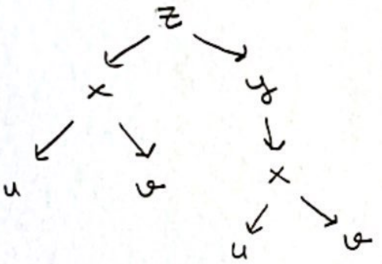
$$= \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= f_2(x,y,z)\,h_2(s,t) + f_3(x,y,z)\,k'(t).$$

3) $y=f(x)$ ve $x=h(u,v)$ olmak üzere $z=g(x,y)$ ise

$\frac{\partial z}{\partial u}$?

Sol.



O halde;

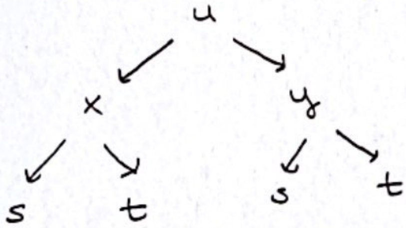
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$= g_1(x,y)\,h_1(u,v) + g_2(x,y)\,f'(x)\,h_1(u,v).$$

6) $u=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=e^{st}$ ve $y=1+s^2\cos t$ ise $\frac{\partial u}{\partial t}$ -yi hesaplamak için farklı iki yöntem kullanınız.

Sol.

1. yöntem (Zincir kuralı)



$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,s e^{st} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,(-s^2\sin t).$$

$$= \frac{x s e^{st} - y s^2 \sin t}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{s e^{2st} - s^2(1+s^2\cos t)\sin t}{\sqrt{e^{2st}+(1+s^2\cos t)^2}}$$

2. Yöntem

x ve y-yi u-da yerine koyma.

$$u=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{e^{2st}+(1+s^2\cos t)^2}$$

$$\Rightarrow \quad u=\sqrt{e^{2st}+1+2s^2\cos t+s^4\cos^2 t}$$

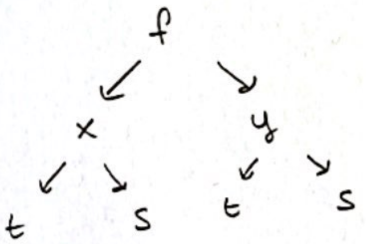
s-ye ve t-ye bağlı durumda.

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\,\frac{2se^{2st}-2s^2\sin t-2s^4\cos t\sin t}{\sqrt{e^{2st}+1+2s^2\cos t+s^4\cos^2 t}}$$

$$=\frac{se^{2st}-s^2(1+s^2\cos t)\sin t}{\sqrt{e^{2st}+(1+s^2\cos t)^2}}.$$

17) $x=t\sin s$ ve $y=t\cos s$ ise $\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}f(x,y)$-yi bulunuz.
(f sürekli kısmi türevlere sahip)

Sol.



$$\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}(f_1\sin s+f_2\cos s)$$

$$=\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\sin s+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\sin s+\cos s\cdot f_1$$

$$+\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\cos s+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\cos s-\sin s\cdot f_2$$

$$=f_{11}\,t\cos s\sin s-f_{12}\,t\sin s\sin s+\cos s\,f_1$$

$$+f_{21}\,t\cos s\cos s-f_{22}\,t\sin s\cos s-\sin s\cdot f_2$$

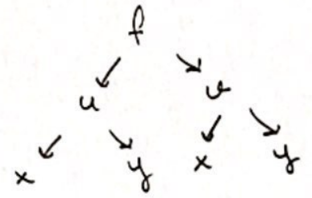
$$=\cos s\,f_1-\sin s\,f_2+t\cos s\sin s\,(f_{11}-f_{22})+t(\cos^2 s-\sin^2 s)\,f_{12}$$

$(f_{12}=f_{21}\cdot \Rightarrow f$ tüm mertebelerde sürekli$)$

18) $\dfrac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2} f(2x+3y, xy)$ -yi f fonksiyonunun kısmi türevleri cinsinden yazınız. (f sürekli kısmi türevlere sahip)

Sol.

$u = 2x+3y$, $v = xy$ olsun.



$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= 3f_1 + x f_2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3\frac{\partial f_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + 3\frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$+ x\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= 9f_{11} + 3x f_{12} + 3x f_{21} + x^2 f_{22}$$

$$= 9f_{11} + 6x f_{12} + x^2 f_{22}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= 9\left(\frac{\partial f_{11}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_{11}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + 6\left[f_{12} + \left(\frac{\partial f_{12}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_{12}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)x\right] + \left[2x f_{22} + \left(\frac{\partial f_{22}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_{22}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)x^2\right]$$

$$= 9(f_{111}\cdot 2 + \underline{f_{112}}\cdot y) + 6(f_{12} + 2x\underline{f_{121}} + xy\,\underline{f_{122}})$$

$$+ (2x f_{22} + 2x^2 \underline{f_{221}} + x^2 y f_{222})$$

$$= 18 f_{111} + (12x + 9y) f_{112} + (6xy + 2x^2) f_{122} + x^2 y f_{22}$$

$$+ 6 f_{12} + 2x f_{22}$$

$f_{221} = (f_2)_{21} = (f_2)_{12} = f_{212} = (f_{21})_2 = (f_{12})_2 = f_{122}.$