



南開大學
Nankai University

人工智能学院

《机器人学导论》课程大作业

姓名：石若川

学号：2111381

专业：智能科学与技术

2024 年 5 月 22 日

目录

1 问题描述	2
2 问题 1	3
2.1 建立 DH 参数表	3
2.2 正运动学模型推导	3
2.3 逆运动学模型推导	4
2.4 雅可比矩阵推导	5
2.5 动力学模型推导	6
3 问题 2	8
3.1 正运动学模型仿真验证	9
3.2 逆运动学模型仿真验证	11
3.3 正雅可比矩阵仿真验证	11
3.4 逆雅可比矩阵仿真验证	13
3.5 动力学模型仿真验证	13
4 问题 3	16
4.1 轨迹规划	16
4.2 曲线绘制	18
5 问题 4	19
6 问题 5	19
7 问题 6	20
7.1 PD 控制器设计	20
7.2 稳定性证明	20
7.3 仿真结果	20
8 问题 7	23
8.1 逆动力学控制器设计	23
8.2 仿真结果	23
9 问题 8	25
9.1 阻抗控制器设计	25
9.2 仿真结果	25
10 问题 9	27
11 总结	28

1 问题描述

SCARA 机器人的简化模型如图1.1所示，锁定其第三关节的旋转，将第三、四关节合并为一个移动关节，机器人简化为两个旋转自由度加一个移动自由度的三自由度机械臂（RRP，前两个是转动自由度、第三个是移动自由度）。

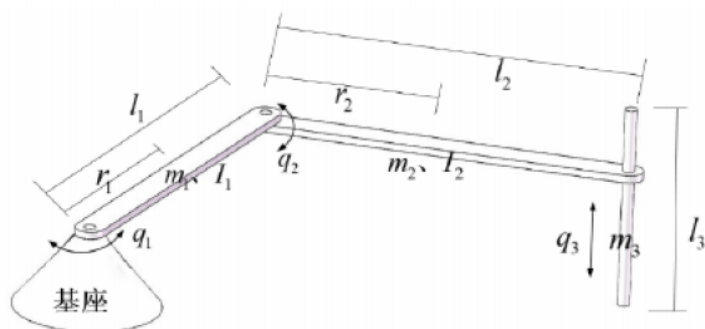


图 1.1: Scara 机器人简化模型

Scara 机器人简化模型及参数如下：

表 1: Scara 机器人简化模型各连杆参数

连杆	$m(kg)$	$l(m)$	$r(m)$	$I(kg \cdot m^2)$
1	2.4312	0.250	0.11860	0.03219
2	3.7860	0.250	0.14925	0.03376
3	0.5552	0.245	0	-

本大作业中将利用机器人学导论课程中所学习到的相关知识，完成以下问题的求解：

1. 根据 DH 法，构建该机器人关节坐标系，求取 DH 参数表，并推导该机器人正运动学模型、逆运动学模型、雅可比矩阵、及动力学模型，给出详细推导过程。
2. 基于 Matlab，完成该机械臂正运动学、逆运动学、雅可比、逆雅可比、动力学仿真软件，给出关节空间-笛卡尔空间之间三组位置、速度的（正逆）转换验证结果；设计一组恒定关节驱动力矩/力，持续时间 5 秒，计算周期 5ms，给出各关节加速度、速度、位置曲线（初始状态从“零”开始），且满足第 1、2 关节转动角度小于 180 度、关节 3 移动距离小于 0.2 米。提交 Matlab 程序代码。
3. $t = 0$ 时刻，机械臂的起始位置为 $q_0 = [0^\circ \ 0^\circ \ 0m]^\top$ ， $t = 5s$ 机械臂到达中间位置为 $q_{mid} = [20^\circ \ 40^\circ \ 0.1m]^\top$ 时，机械臂到达最终位置 $q_f = [30^\circ \ 60^\circ \ 0.15m]^\top$ ，使用两段三次曲线进行轨迹规划，绘制关节位置、速度以及加速度曲线。
4. 根据 3 得到的轨迹，绘制机械臂末端位姿（提示使用 `trplot` 函数，每隔 10 个步长绘制一次末端位姿）。
5. 根据 3 得到的轨迹，给出机械臂末端速度曲线。
6. 设计 PD 控制器，以动力学模型为被控对象，对 3 规划得到的轨迹进行跟踪，绘制结果曲线（包括关节位置、速度、加速度、控制量）。

7. 设计逆动力学控制器对 3 得到的轨迹进行跟踪，绘制结果曲线（包括关节位置、速度、加速度、控制量）。
8. 机器人初始位置为 $q_0 = [0^\circ \ 0^\circ \ 0m]^\top$ ，期望位置为 $q_d = [30^\circ \ 60^\circ \ 0.15m]^\top$ ，初始和期望关节速度、加速度均为 0。机械手末端的期望刚性和阻尼参数为 $K_X = \text{diag}([500, 500, 500])$ ， $K_B = \text{diag}([50, 50, 30])$ ，设计阻抗控制器，绘制出关节位置、速度、加速度以及控制力矩曲线。
9. 在 $t = 4 - 6s$ 对系统施加外力 $\tau = [2N \cdot m \ 2N \cdot m \ 3N]$ ，绘制阻抗控制器作用下的关节位置、速度、加速度以及控制力矩曲线。

2 问题 1

2.1 建立 DH 参数表

根据 Scara 机器人的简化模型，建立各关节的坐标系，如图2.2所示。Scara 机器人包括两个转动关节和一个移动关节，三个关节的 Z 轴相互平行。

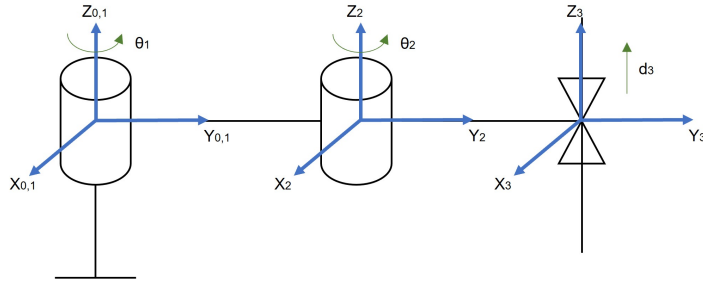


图 2.2: Scara 机器人关节坐标系

根据所建立的关节坐标系，Scara 机器人的 DH 参数表如下：

表 2: DH 参数表

关节	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	l_1	0	0	θ_2
3	l_2	0	d_3	0

2.2 正运动学模型推导

根据相邻两关节的坐标系变换方程

$${}^{i-1}_iT = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -d_i \sin \alpha_{i-1} \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & d_i \cos \alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可得每个关节的坐标系变换方程为

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 & L_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此可得 Scara 机器人的正运动学方程

$${}^0_3T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

2.3 逆运动学模型推导

已知机器人的正运动学模型（式1）和末端位姿，逆运动学的目的是根据机器人的末端位姿反推得到各关节角/位移 θ_1, θ_2, d_3 。

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

可以直接得到

$$d_3 = p_z \quad (3)$$

将 $\cos(\theta_1 + \theta_2) = r_{11}$ 代入 $l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = p_x$ 可得

$$\cos \theta_1 = \frac{p_x - l_2 r_{11}}{l_1} \quad (4)$$

同理，将 $\sin(\theta_1 + \theta_2) = r_{21}$ 代入 $l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = p_y$ 可得

$$\sin \theta_1 = \frac{p_y - l_2 r_{21}}{l_1} \quad (5)$$

由式4和5，可得

$$\theta_1 = \arctan 2\left(\frac{p_y - l_2 r_{21}}{l_1}, \frac{p_x - l_2 r_{11}}{l_1}\right) \quad (6)$$

由于

$$\theta_1 + \theta_2 = \arctan 2(r_{21}, r_{11}) \quad (7)$$

将式6代入式7得到

$$\theta_2 = \arctan 2(r_{21}, r_{11}) - \arctan 2\left(\frac{p_y - l_2 r_{21}}{l_1}, \frac{p_x - l_2 r_{11}}{l_1}\right) \quad (8)$$

由式3、6、8可得，Scara 机器人的逆运动学方程为

$$\begin{cases} \theta_1 = \arctan 2\left(\frac{p_y - l_2 r_{21}}{l_1}, \frac{p_x - l_2 r_{11}}{l_1}\right) \\ \theta_2 = \arctan 2(r_{21}, r_{11}) - \arctan 2\left(\frac{p_y - l_2 r_{21}}{l_1}, \frac{p_x - l_2 r_{11}}{l_1}\right) \\ d_3 = p_z \end{cases} \quad (9)$$

2.4 雅可比矩阵推导

已知机器人正运动学模型式1，可以利用直接微分法求得线速度雅可比矩阵和角速度雅可比矩阵。首先对 p_x, p_y, p_z 进行求导，可得

$$\begin{cases} v_x = \frac{dp_x}{dt} = -\dot{\theta}_1[l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] - \dot{\theta}_2 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ v_y = \frac{dp_y}{dt} = \dot{\theta}_1[l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)] + \dot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ v_z = \frac{dp_z}{dt} = \dot{d}_3 \end{cases} \quad (10)$$

定义角速度张成的斜对称矩阵 $S \triangleq \dot{R}R^T$ ，且 $S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$ ，可得

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \\ &= \dot{R}R^T = \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

将式10和11写为 $\dot{X} = J(q)\dot{q}$ 的形式，可得

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J\dot{q} = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

2.5 动力学模型推导

动力学模型是用来描述受力与运动状态（位置、速度、加速度等）随时间变化规律的数学模型。动力学模型可以以几种不同的形式表示，其中最常见包括拉格朗日动力学和牛顿-欧拉动力学。这些模型描述了机器人的运动方程，通常采用关节位置、速度和加速度作为输入，计算出相应的关节力/力矩或末端执行器的力/力矩。

在本作业中，使用拉格朗日动力学模型进行 Scara 机器人的动力学模型推导。机器人动力学方程可以写为：

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (13)$$

其中， $M(q)$ 为 $n \times n$ 的质量矩阵， $C(q, \dot{q})$ 是 $n \times n$ 的离心力和科氏力矩阵， $G(q)$ 是 $n \times 1$ 的重力矢量。

对于质量矩阵，拉格朗日动力学方程的结论是

$$M(q) = \sum_{i=1}^n (J_{vci}^T m_i J_{vci} + J_{\omega ci}^T I_{ci} J_{\omega ci}) \quad (14)$$

其中， J_{vci} 是关节 i 质心处的速度雅可比矩阵， $J_{\omega ci}$ 是关节 i 质心处的线速度雅可比矩阵， m_i 是关节 i 的质量， I_{ci} 是关节 i 的惯性张量。对于 J_{vci} 和 $J_{\omega ci}$ 的求解公式为

$$J_{vci} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{ci}}{\partial q_1} & \frac{\partial P_{ci}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial P_{ci}}{\partial q_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$J_{\omega ci} = [\bar{\varepsilon}_1 Z_1 \quad \bar{\varepsilon}_2 Z_2 \quad \cdots \quad \bar{\varepsilon}_i Z_i \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (16)$$

根据图2.3，可以得到关节 1、2、3 质心在基坐标系下的表示

$${}^0P_{c1} = \begin{bmatrix} r_1 \cos \theta_1 \\ -r_1 \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0P_{c2} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0P_{c3} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

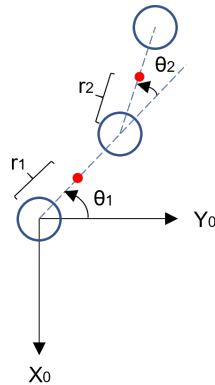


图 2.3: 关节质心在基坐标系示意图

由式15和17可得关节 1、2、3 质心的线速度雅可比矩阵为

$$J_{vc1} = \begin{bmatrix} -r_1 \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ r_1 \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$J_{vc2} = \begin{bmatrix} -l \sin \theta_1 - r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ -l_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & -r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$J_{vc3} = \begin{bmatrix} -l \sin \theta_1 - r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ -l_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & -r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

由式16可得关节 1、2、3 质心的角速度雅可比矩阵为

$$J_{wc1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{wc2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{wc3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

将式18、19、20和21代入式14可得

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} m_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} I_1 \\ &+ \begin{bmatrix} l_1^2 + r_2^2 + 2l_1 r_2 \cos \theta_2 & r_2^2 + l_1 r_2 \cos \theta_2 & 0 \\ r_2^2 + l_1 r_2 \cos \theta_2 & r_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} m_2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \\ &+ \begin{bmatrix} l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 & l_2^2 + l_1 l_2 \cos \theta_2 & 0 \\ l_2^2 + l_1 l_2 \cos \theta_2 & l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} m_3 \\ &= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

其中

$$\begin{cases} M_{11} = r_1^2 m_1 + (l_1^2 + r_2^2 + 2l_1 r_2 \cos \theta_2) m_2 + (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2) m_3 + I_1 + I_2 \\ M_{12} = M_{21} = (r_2^2 + l_1 r_2 \cos \theta_2) m_2 + (l_2^2 + l_1 l_2 \cos \theta_2) m_3 + I_2 \\ M_{22} = r_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + I_2 \\ M_{33} = m_3 \end{cases} \quad (23)$$

对于离心力和科氏力矩阵 $C(q, \dot{q})$ ，拉格朗日动力学方程的结论是其中的第 k, j 为

$$C_{kj} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{kj}}{\partial q_j} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \quad (24)$$

代入式22中的具体表达式，可得

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m_2 l_1 r_2 + m_3 l_1 l_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 & -(m_2 l_1 r_2 + m_3 l_1 l_2) \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 \\ (m_2 l_1 r_2 + m_3 l_1 l_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

对于重力矢量，拉格朗日动力学方程的结论为

$$G(q) = - \begin{bmatrix} J_{vc1}^T & J_{vc2}^T & \cdots & J_{vcn}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \vec{g} \\ m_2 \vec{g} \\ \vdots \\ m_n \vec{g} \end{bmatrix} \quad (26)$$

其中， $g = [0 \ 0 \ -g]^T$ 。代入式18、19、20可得

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3 g \end{bmatrix} \quad (27)$$

因此，Scara 机器人的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{d}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

其中， τ_1 、 τ_2 、 F_3 分别为关节 1、2、3 的力矩/力， M_{ij} 和 C_{ij} 具体表达式见式23和25。

3 问题 2

利用 Matlab 的 Robotics Toolbox 工具包可以对机器人进行仿真。首先根据表1定义各参数：

```
1 %% 参数定义
2 m1 = 2.4312; m2 = 3.7860; m3 = 0.5552;
3 l1 = 0.250; l2 = 0.250; l3 = 0.245;
4 r1 = 0.11860; r2 = 0.14925; r3 = 0;
5 i1 = 0.03219; i2 = 0.03376;
```

根据 DH 参数表2, 使用 Link 和 SerialLink 函数建立机器人模型, 如图3.4所示。

```

1 L(1)= Link('d', 0, 'a', 0, 'alpha', 0,'modified', ...
2     'I', [0 0 0;
3         0 0 0;
4         0 0 i1], ...
5     'r', [r1 0 0], ...
6     'm', m1, ...
7     'qlim', [-pi,pi] );
8 L(2)= Link('d', 0, 'a', l1, 'alpha', 0,'modified', ...
9     'I', [0 0 0;
10        0 0 0;
11        0 0 i2], ...
12     'r', [r2 0 0], ...
13     'm', m2, ...
14     'qlim', [-pi,pi] );
15 L(3)= Link('theta', 0, 'a', l2, 'alpha', 0,'modified', ...
16     'r', [r3 0 0], ...
17     'm', m3, ...
18     'qlim', [0, 0.2] );
19 RRP_robot = SerialLink(L(1:3),'name','RRP');
```

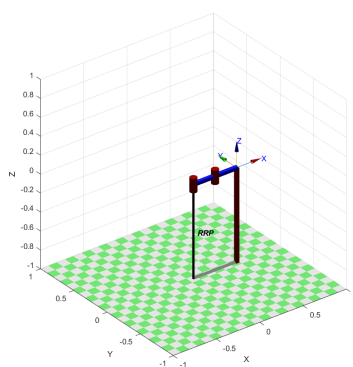


图 3.4: 机器人仿真模型

3.1 正运动学模型仿真验证

实验中设定三组关节空间, 分别为

$$q_1 = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad q_2 = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \quad q_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4} \\ 0.15 \end{bmatrix} \quad (29)$$

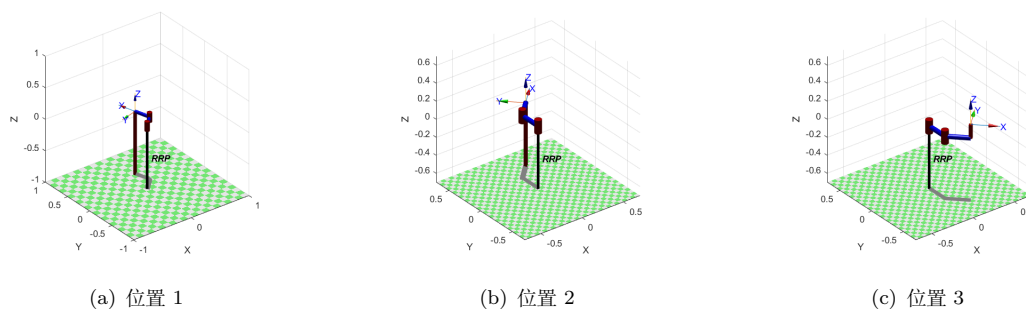


图 3.5: 测试位置

首先利用内置函数 `fkine` 进行正运动学求解，得到三组关节空间位置对应的笛卡尔空间位置分别为

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \begin{bmatrix} -0.2588 & -0.9659 & 0 & 0.1121 \\ 0.9659 & -0.2588 & 0 & 0.4183 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 p_2 &= \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0.1768 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0.4268 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 p_3 &= \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0.1768 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0 & -0.4268 \\ 0 & 0 & 1 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{30}$$

根据式1编写函数 `myfkine.m`，代码如下

```

1 function position = myfkine(q, l1, l2)
2     theta1 = q(1);
3     theta2 = q(2);
4     d3 = q(3);
5     position = [cos(theta1+theta2) -sin(theta1+theta2) 0
6                 l2*cos(theta1+theta2)+l1*cos(theta1);
7                 sin(theta1+theta2) cos(theta1+theta2) 0 l2*sin(theta1+theta2)+l1*sin(theta1);
8                 0 0 1 d3;
9                 0 0 0 1];
end

```

利用函数 `myfkine.m` 对设定的三个关节空间测试位置进行验证，结果如图3.6。可以看出，三个关节空间测试位置的运算结果均与内置函数 `fkine` 的结果一致，说明推导的正运动学模型1是正确的。

(a) 位置 1 (b) 位置 2 (c) 位置 3

(a) 位置 1 (b) 位置 2 (c) 位置 3

(31)

利用内置函数 `jacob0` 求得三组关节位置（式29）对应的雅可比矩阵 J_1, J_2, J_3

$$J_1 = \begin{bmatrix} -0.4183 & -0.2415 & 0 \\ 0.1121 & -0.0647 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} -0.4268 & -0.1768 & 0 \\ 0.1768 & 0.1768 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0.4268 & 0.1768 & 0 \\ 0.1768 & 0.1768 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

通过 $\dot{X} = J\dot{q}$ ，根据式31和式32求得机械臂末端笛卡尔空间的线速度和角速度

$$\dot{X}_1 = \begin{bmatrix} -0.0254 \\ -0.0948 \\ 0.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3927 \end{bmatrix} \quad \dot{X}_2 = \begin{bmatrix} -0.3775 \\ -0.1157 \\ 0.1000 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6545 \end{bmatrix} \quad \dot{X}_3 = \begin{bmatrix} 0.1756 \\ 0.0185 \\ -0.1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1047 \end{bmatrix} \quad (33)$$

根据式12编写函数 `myjacob.m`，代码如下

```
1 function J = myjacob(q, l1, l2)
2     theta1 = q(1); theta2 = q(2); d3 = q(3);
3     J = [-l1*sin(theta1) - l2*sin(theta1 + theta2), -l2*sin(theta1 + theta2), 0;
4           l1*cos(theta1) + l2*cos(theta1 + theta2), l2*cos(theta1 + theta2), 0;
5           0, 0, 1;
6           0, 0, 0;
7           0, 0, 0;
8           1, 1, 0];
9 end
```

利用函数 `myjacob.m` 对设定的三个关节空间测试位置求得对应位置的雅可比矩阵，结果如图3.8所示。测试结果与式32相同，说明了雅可比矩阵推导结果（式12）的正确性。

my_J1 =	my_J2 =	my_J3 =
-0.4183	-0.4268	0.4268
-0.2415	-0.1768	0.1768
0	0	0
0.1121	0.1768	0.1768
-0.0647	0	0
0	0	1.0000
0	0	0
0	0	0
0	0	0
1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	1.0000	0

(a) 位置 1

(b) 位置 2

(c) 位置 3

图 3.8: 正雅可比矩阵验证结果

根据 $\dot{X} = J\dot{q}$ ，利用编写函数 `myjacob.m` 的计算结果与三组关节速度（式31）得到正速度转换结果，如图3.9所示。测试结果与式33的一致，说明正速度转换的正确性。

my_dot_X1 =	my_dot_X2 =	my_dot_X3 =
-0.0254	0.3775	0.1756
-0.0948	-0.1157	0.0185
0.0500	0.1000	-0.1000
0	0	0
0	0	0
0.3927	-0.6545	0.1047
(a) 位置 1	(b) 位置 2	(c) 位置 3

图 3.9: 正雅可比验证结果

3.4 逆雅可比矩阵仿真验证

利用线速度雅可比逆矩阵可以实现笛卡尔空间到关节空间的速度转换，即

$$\dot{q} = J_v^{-1}v \quad (34)$$

根据式34编写函数 myinvjacob.m，代码如下

```

1 function dot_q = myinvjacob(J, dot_X)
2     v = dot_X(1:3);
3     J_v = J(1:3,:);
4     dot_q = inv(J_v)*v;
5 end

```

利用函数 myinvjacob.m,将三组机械臂末端笛卡尔空间的速度转换到关节空间,测试结果如图3.10所示。测试结果与设定的关节速度（式31）相同，说明逆雅可比矩阵的正确性。

my_dot_q1 =	my_dot_q2 =	my_dot_q3 =
-0.3927	-1.0472	0.6283
0.7854	0.3927	-0.5236
0.0500	0.1000	-0.1000
(a) 位置 1	(b) 位置 2	(c) 位置 3

图 3.10: 逆雅可比验证结果

3.5 动力学模型仿真验证

实验中使用式29中的 q_3 和式31中的 \dot{q}_3 ，验证动力学方程式28。根据式28编写函数 mydynamics.m 求解质量矩阵、离心力/科氏力矩阵和重力矢量，代码如下

```

1 function [M, C, G] = mydynamics(l1, l2, r1, r2, m1, m2, m3, I1, I2, theta2,
2     theta1_dot, theta2_dot)
3 %% 质量矩阵M
4 M = zeros(3, 3);

```

```

5 M11 = r1^2 * m1 + (l1^2 + r2^2 + 2*l1*r2*cos(theta2)) * m2 + (l1^2 + l2^2 +
    2*l1*l2*cos(theta2)) * m3 + I1 + I2;
6
7 M12 = (r2^2 + l1*r2*cos(theta2)) * m2 + (l2^2 + l1*l2*cos(theta2)) * m3 + I2;
8 M21 = M12;
9 M22 = r2^2 * m2 + l2^2 * m3 + I2;
10 M33 = m3;
11
12 M(1, 1) = M11;
13 M(1, 2) = M12;
14 M(2, 1) = M21;
15 M(2, 2) = M22;
16 M(3, 3) = M33;
17
18 %% 离心力与科氏力矩阵C
19 C = zeros(3, 3);
20
21 C11 = -(m2 * l1 * r2 + m3 * l1 * l2) * sin(theta2) * theta2_dot;
22 C12 = -(m2 * l1 * r2 + m3 * l1 * l2) * sin(theta2) * (theta1_dot + theta2_dot);
23 C21 = (m2 * l1 * r2 + m3 * l1 * l2) * sin(theta2) * theta1_dot;
24
25 C(1, 1) = C11;
26 C(1, 2) = C12;
27 C(2, 1) = C21;
28
29 %% 重力矢量
30 G = zeros(3, 1);
31
32 g = 9.81;
33 G(3) = m3 * g;
34
35 end

```

利用内置函数 `gravload`、`inertia` 和 `coriolis` 分别求取 q_3 和 \dot{q}_3 下的重力矩阵 M 、离心力/科氏力矩阵 C 和重力矢量 G ，结果如下

$$M = \begin{bmatrix} 0.7394 & 0.2772 & 0 \\ 0.2772 & 0.1528 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5552 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.0651 & -0.0130 & 0 \\ 0.0782 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.4465 \end{bmatrix} \quad (35)$$

利用编写函数 `mydynamics.m`，求取 q_3 和 \dot{q}_3 下的重力矩阵 M 、离心力/科氏力矩阵 C 和重力矢量 G ，结果如图3.11所示。测试结果与内置函数的结果（式35）一致，说明动力学模型的正确性。

my_M =			my_C =			my_G =		
0.7394	0.2772	0	0.0651	-0.0130	0	0	0	0
0.2772	0.1528	0	0.0782	0	0	0	0	0
0	0	0.5552	0	0	0	0	5.4465	0
(a) 质量矩阵 M			(b) 离心力/科氏力矩阵 C			(c) 重力矢量 G		

(a) 质量矩阵 M (b) 离心力/科氏力矩阵 C (c) 重力矢量 G

图 3.11: 动力学模型验证结果

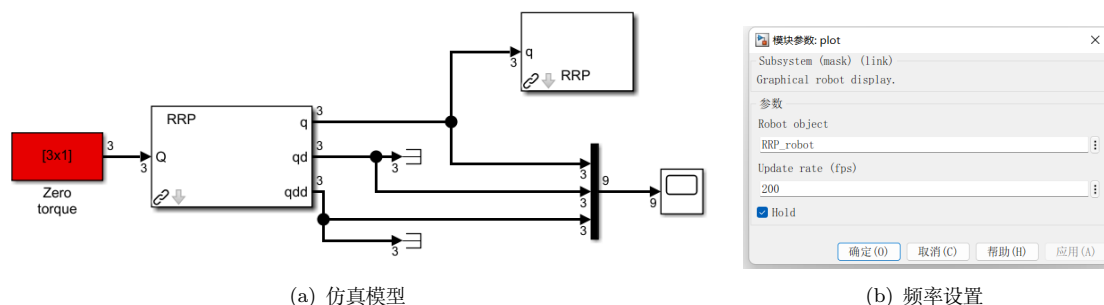
利用内置函数 `fdyn` 可以求出给定关节驱动力/力矩下的关节位置和速度，利用内置函数 `accel` 可以进一步求出关节的加速度。实验中设定恒定关节驱动力/力矩为 $[0.01, -0.01, 5.455]$ ，代码如下

```

1 % 给定力/力矩，绘制位移、速度、加速度
2 [t,q,qd] = RRP_robot.fdyn(5, @(robot, t, q, qd) [0.01,-0.01,5.455]); %
   给定恒定力/力矩[0.01,-0.01,5.455]
3 qdd = zeros(size(q));
4 for i=1:length(qdd)
5     qdd(i,:)=RRP_robot.accel(q(i,:),qd(i,:),[0.01,-0.01,5.455]); %求解角加速度
6 end

```

但是用该方法进行仿真无法控制计算周期，因此实验中又使用了 Simulink 进行动力学仿真。搭建的仿真模型如图3.12(a)所示，在 `plot` 模块中设定绘图频率为 200fps，即计算周期为 5ms。



(a) 仿真模型

(b) 频率设置

图 3.12: Simulink 动力学仿真

对 Simulink 的输出结果进行绘制，得到三个关节位置、线速度/角速度和线加速度/角加速度曲线，分别如图3.13、3.14和3.15所示。可以发现，图3.13表示在设定的关节驱动力/力矩下，可以满足在 5s 的仿真时间内，第 1、2 关节转动角度小于 180 度、关节 3 移动距离小于 0.2 米。由图3.14，机器人的关节 1 首先向正方向加速运动，随后速度维持在 0.25rad/s 左右；关节 2 首先向负方向加速运动，随后速度维持在 0.62rad/s 左右；关节 3 向正方向保持加速运动。由图3.15，机器人的关节 1 的初始角加速度为 0.23rad/s² 左右，随后逐渐正方向减小并在 2s 左右到达 0，加速度反方向增大至 -0.016rad/s² 左右后开始正方向增大；关节 2 的初始角加速度为 -0.56rad/s² 左右，随后反方向逐渐减小并在 2s 左右到达 0，加速度正方向增大至 0.035rad/s² 左右后开始反方向增大；关节 3 的加速度保持在 0.0153rad/s² 左右。

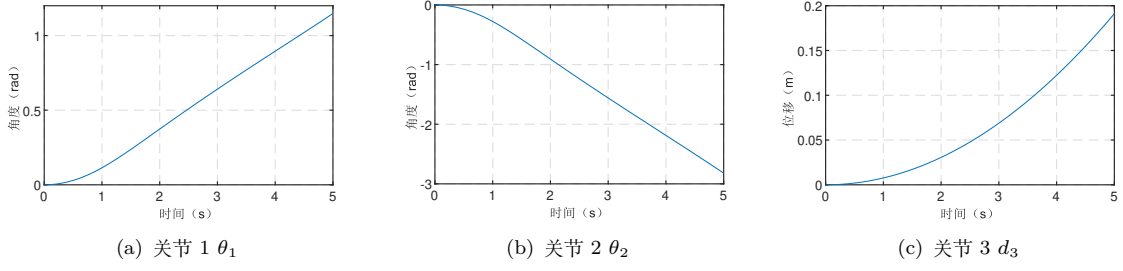


图 3.13: 关节位置曲线

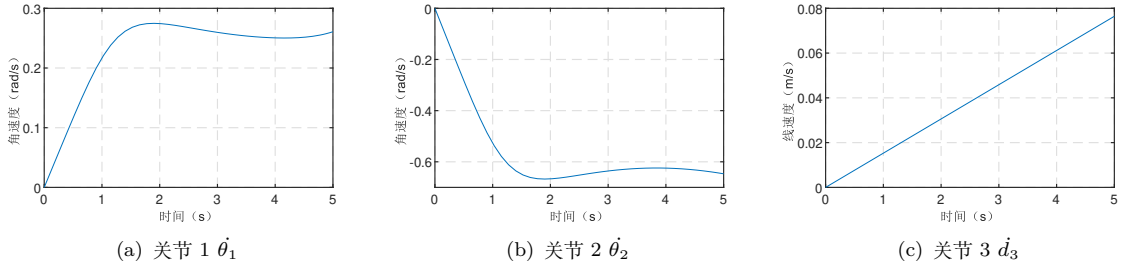


图 3.14: 关节线速度/角速度曲线

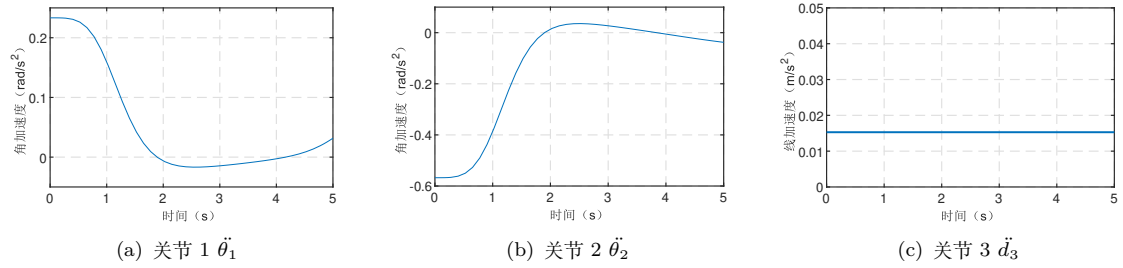


图 3.15: 关节线加速度/角加速度曲线

4 问题 3

4.1 轨迹规划

已知初始时刻 $t_0 = 0$ 的机械臂位置 $q_0 = [0^\circ \ 0^\circ \ 0m]^T$, 中间点时刻 $t_{mid} = 5s$ 的机械臂位置 $q_{mid} = [20^\circ \ 40^\circ \ 0.1m]^T$, 末端时刻 $t_f = 10s$ 的机械臂位置 $q_f = [30^\circ \ 60^\circ \ 0.15m]^T$. 使用两段三次函数进行轨迹规划, 为方便计算, 引入无量纲时间 $T = (t - t_{i-1})/\Delta t_i, \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

设第一段的轨迹为

$$q_1(t) = a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^2 + a_{13}T^3, \quad T = \frac{t}{5} \quad (36)$$

设第二段轨迹为

$$q_2(T) = a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2 + a_{23}T^3, \quad T = \frac{t-5}{5} \quad (37)$$

其中, a_{ij} 为 3×1 的向量, 分别表示三个关节轨迹的系数, $q_i(t)$ 为 3×1 的向量, 分别表示三个关节

的关节位置。对轨迹分别求一阶导和二阶导得到速度和角速度

$$v_i(t) = \frac{dh_i(t)}{dt} = \frac{dq_i(t)}{dT} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\Delta t_i} \frac{dq_i(t)}{dT}, i = 1, 2 \quad (38)$$

$$a_i(t) = \frac{dv_i(t)}{dt} = \frac{dv_i(t)}{dT} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\Delta t_i} \frac{dv_i(t)}{dT}, i = 1, 2 \quad (39)$$

根据 $t = 0, t = 5s, t = 10s$ 的位置, 可得

$$q_1(0) = a_{10} = q_0 \quad (40)$$

$$q_2(0) = a_{20} = q_{mid} \quad (41)$$

$$q_1(1) = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} = q_{mid} \quad (42)$$

$$q_2(1) = a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{23} = q_f \quad (43)$$

根据 $t = 0$ 和 $t = 10s$ 的速度为 0, 可得

$$v_1(0) = \frac{1}{5} a_{11} = 0 \quad (44)$$

$$v_2(1) = \frac{1}{5} (a_{21} + 2a_{22} + 3a_{23}) = 0 \quad (45)$$

根据 $t = 5s$ 的速度和加速度连续, 可得

$$\dot{q}_1(1) = \dot{q}_2(0) \Rightarrow a_{11} + 2a_{12} + 3a_{13} = a_{21} \quad (46)$$

$$\ddot{q}_1(1) = \ddot{q}_2(0) \Rightarrow 2a_{12} + 6a_{13} = 2a_{22} \quad (47)$$

将式40-47的方程组写为线性方程组 $Ax = b$ 的形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{10}^T \\ a_{11}^T \\ a_{12}^T \\ a_{13}^T \\ a_{20}^T \\ a_{21}^T \\ a_{22}^T \\ a_{23}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^T \\ q_{mid}^T \\ q_{mid}^T \\ q_f^T \\ 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} \end{bmatrix} \quad (48)$$

利用 Matlab 求解该线性方程组, 得到

$$\begin{aligned} a_{10} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & a_{11} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & a_{12} &= \begin{bmatrix} 0.6545 \\ 1.3090 \\ 0.1875 \end{bmatrix} & a_{13} &= \begin{bmatrix} -0.3054 \\ -0.6109 \\ -0.0875 \end{bmatrix} \\ a_{20} &= \begin{bmatrix} 0.3491 \\ 0.6981 \\ 0.1000 \end{bmatrix} & a_{21} &= \begin{bmatrix} 0.3927 \\ 0.7854 \\ 0.1125 \end{bmatrix} & a_{22} &= \begin{bmatrix} -0.2618 \\ -0.5236 \\ -0.0750 \end{bmatrix} & a_{23} &= \begin{bmatrix} 0.0436 \\ 0.0873 \\ 0.0125 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

将结果代入式36和37可得，关节 1 的轨迹为

$$q_1(T) = 0.6545T^2 - 0.3054T^3 \quad (49)$$

$$q_2(T) = 0.3491 + 0.3927T - 0.2618T^2 + 0.0436T^3 \quad (50)$$

关节 2 的轨迹为

$$q_1(T) = 1.3090T^2 - 0.6109T^3 \quad (51)$$

$$q_2(T) = 0.6981 + 0.7854T - 0.5236T^2 + 0.0873T^3 \quad (52)$$

关节 3 的轨迹为

$$q_1(T) = 0.1875T^2 - 0.0875T^3 \quad (53)$$

$$q_2(T) = 0.1 + 0.1125T - 0.075T^2 + 0.0125T^3 \quad (54)$$

4.2 曲线绘制

利用 Matlab 对求得的轨迹进行绘制，如图4.16、4.17和4.18所示。可以发现，图4.16中，三个关节在 $t = 0s$ 时位于给定的初始位置，在 $t = 5s$ 时到达指定的中间点位置，并在 $t = 10s$ 时到达指定的最终位置。图4.17说明三个关节在 10s 内先加速再减速，在 $t = 5s$ 时速度连续，避免了电机瞬间的速度变化，有利于保持关节稳定工作。图4.18说明三个关节的加速度在 10s 中经历了正向减小 \Rightarrow 反向增大 \Rightarrow 反向减小的过程，在 $t = 5s$ 时加速度连续但是出现了切换，可能会造成关节的不稳定，影响关节的正常工作。

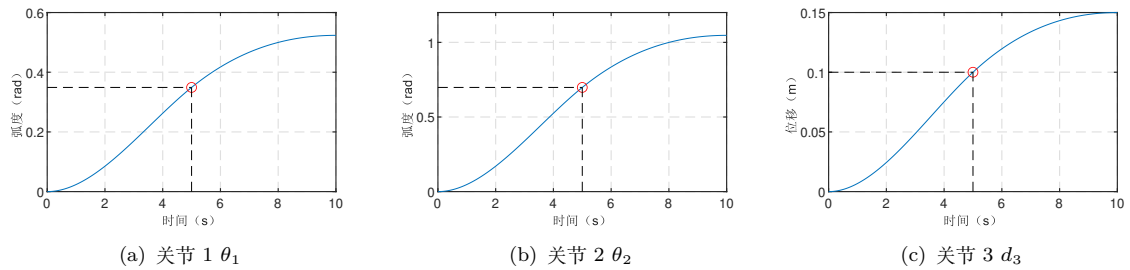


图 4.16: 关节位置曲线

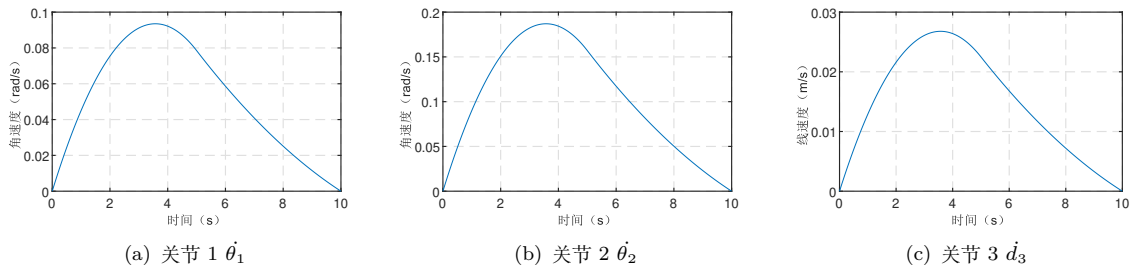


图 4.17: 关节线速度/角速度曲线

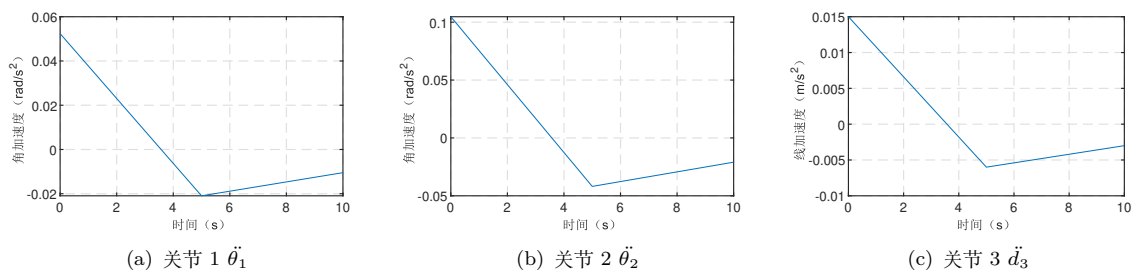


图 4.18: 关节线加速度/角加速度曲线

5 问题 4

实验中利用正运动学（式1）将问题 3 中得到的关节位置，转换到机械臂末端的笛卡尔空间中，利用 `trplot` 函数对机械臂末端位姿进行绘制，如图5.19所示。其中红色表示 X 轴，绿色表示 Y 轴，蓝色表示 Z 轴，机械臂的末端位姿由 $[x_0, y_0, z_0] = [0.5, 0.5, 0.5]$ 转换到 $[x_f, y_f, z_f] = [0.2165, 0.3750, 0.1500]$ 。

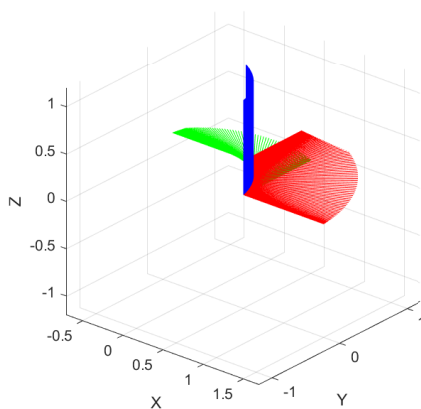


图 5.19: 机器人末端位姿

另外，实验中对机械臂末端的笛卡尔空间位置进行绘制，如图5.20所示，与图5.19的结果一致。

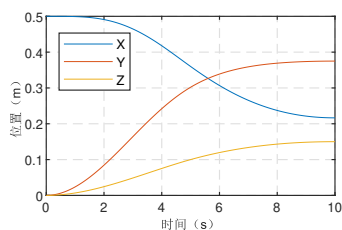


图 5.20: 机器人末端位姿曲线

6 问题 5

实验中利用雅可比矩阵（式12）将问题 3 中得到的关节速度，转换到机械臂末端的笛卡尔空间中，并对线速度和角速度曲线进行绘制，如图6.21所示。图6.21说明 XYZ 轴起始位置和终止位置的角速度

和线速度均为 0；(a) 说明运动过程中 X、Y 轴的角速度为 0，Z 轴的角速度先正向增大，后正向减小；(b) 说明 X、Y 轴的线速度先正向增大，后正向减小，Z 轴的线速度先反向增大，后反向减小。

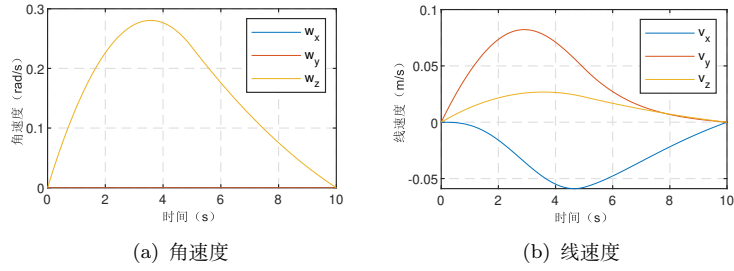


图 6.21: 关节速度曲线

7 问题 6

7.1 PD 控制器设计

实验中对机器人动力学方程 $M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$ 设计如下 PD 控制器

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_d \dot{\tilde{q}} + g(q) \quad (55)$$

其中， $\tilde{q} = q_d - q$ ， q_d 为需要跟踪的关节位置， K_p 和 K_d 为比例和微分的对角增益矩阵。

7.2 稳定性证明

定义正定的 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(\dot{q}^T M(q) \dot{q} + \tilde{q}^T K_p \tilde{q})$$

对 Lyapunov 函数进行求导

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - \dot{q}^T K_p \tilde{q} \\ &= \dot{q}^T [\tau - C(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q)] + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - \dot{q}^T K_p \tilde{q} \\ &= \dot{q}^T [\tau - K_p \tilde{q} - g(q)] + \frac{1}{2} \dot{q}^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q} \\ &= \dot{q}^T K_d \dot{\tilde{q}} = -\dot{q}^T K_d \dot{q} \leq 0 \end{aligned}$$

Lyapunov 函数的导数为负定的，因此该系统是渐进稳定的。

7.3 仿真结果

将 PD 控制器（式55）代入机器人动力学方程（式13），可得

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = K_p(q_d - q) + K_d(\dot{q}_d - \dot{q})$$

该方程为二阶微分方程，为方便求解引入状态向量 $x = [q, \dot{q}]^T$ ，将二阶微分方程转换为一阶微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M^{-1}(q)[K_p(q_d - q) + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q}] \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (56)$$

利用 Matlab 中的内置函数 ode45 即可对方程56进行求解，如下代码展示了求解过程。

```
1 [t, x] = ode45(@ (t, x) PD_control(t, x, RRP_robot, qd, dqd, Kp, Kd), 0:0.01:tf,
2   zeros(6, 1));
3
4 function dxdt = PD_control(t, x, RRP_robot, qd, dqd, Kp, Kd)
5     % 获得当前状态
6     n = fix(t*100)+1;
7     q = x(1:3);
8     dq = x(4:6);
9
10    % 计算期望位置和期望速度的偏差
11    e = qd(:,n) - q;
12    de = dqd(:,n) - dq;
13
14    % 计算控制力矩
15    tol = Kp * e + Kd * de;
16
17    % 计算动力学方程
18    M = RRP_robot.inertia(q');
19    C = RRP_robot.coriolis(q', dq');
20
21    ddq = inv(M) * (tol - C * dq);
22
23    % 构造状态向量的导数
24    dxdt = [dq; ddq];
end
```

实验中经过 PD 参数调参，最终使用的比例和微分增益为

$$K_p = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad K_d = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

在该 PD 控制器下，利用 Matlab 求得的关节位置、速度、加速度、控制量分别如图7.22、7.23、7.24和7.25所示。结果表明，该 PD 控制器在关节位置和速度的跟踪上，响应速度很快，误差很小，可

以达到很好的跟踪效果。由于微分运算会放大误差，所以在加速度的跟踪上，曲线出现了一定幅度的震荡，在关节 1 和 2 上这一问题更加明显。

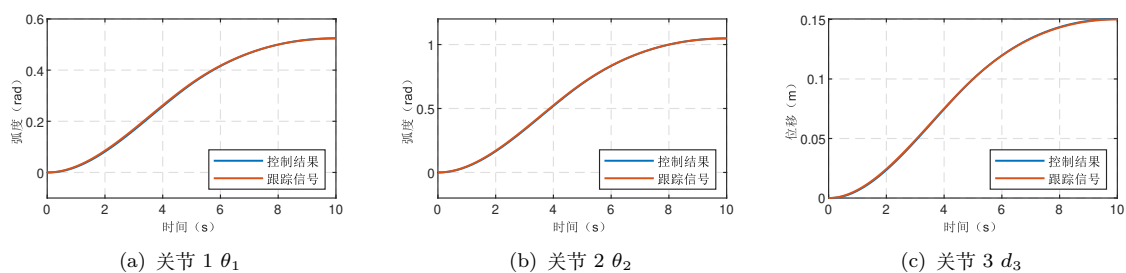


图 7.22: 关节位置跟踪结果

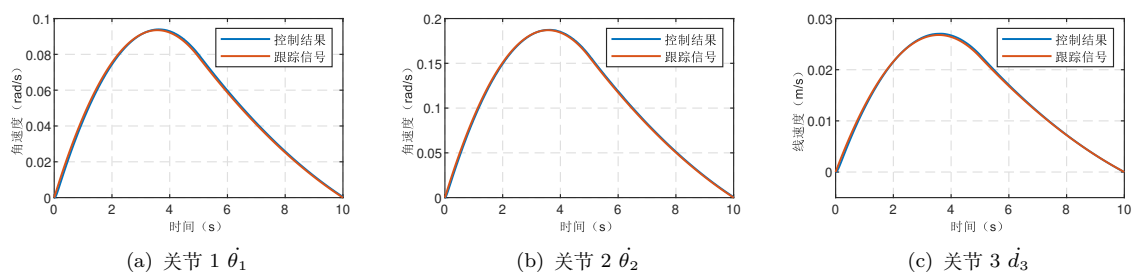


图 7.23: 关节线速度/角速度跟踪结果

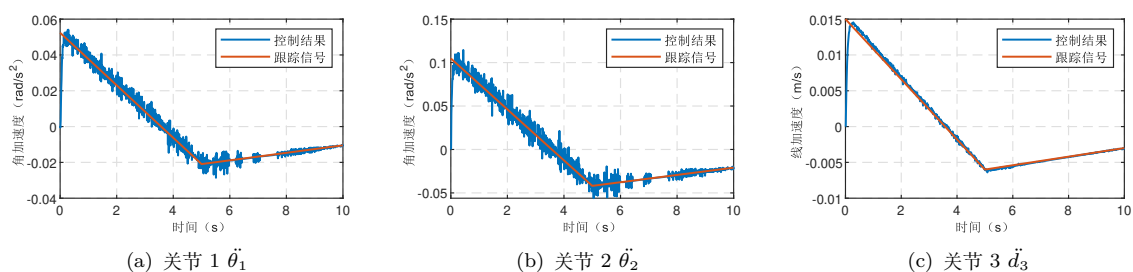


图 7.24: 关节线加速度/角加速度跟踪结果

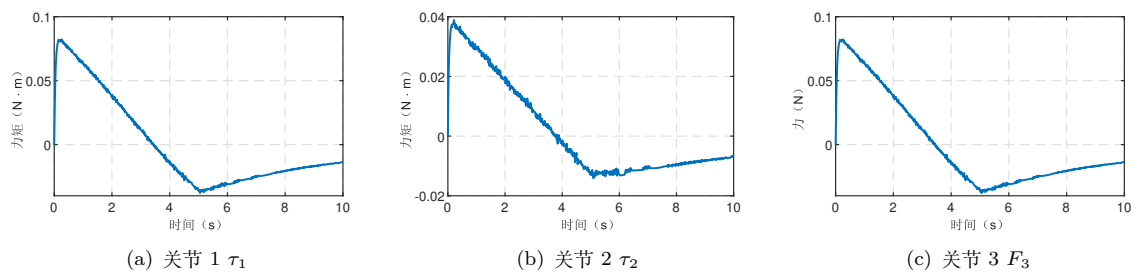


图 7.25: 关节控制量曲线

8 问题 7

8.1 逆动力学控制器设计

精确已知动力学方程的前提下，可以使用逆动力学的方法设计控制器。实验中对机器人动力学方程 $M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$ 设计如下逆动力学控制器

$$\tau = M(q)\eta_q + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) \quad (57)$$

将式57代入机器人动力学方程（式13）可得

$$\ddot{q} = \eta_q \quad (58)$$

此时可以将 η_q 理解为经逆动力学控制改造后，新系统的输入。设计 $\eta_a = K_0\tilde{q} + K_1\dot{\tilde{q}} + \ddot{q}_d$ ，式中 $\tilde{q} = q_d - q$ ， K_0 和 K_1 为对角增益矩阵。代入式58，可得

$$\ddot{\tilde{q}} + K_1\dot{\tilde{q}} + K_0\tilde{q} = 0 \quad (59)$$

该方程也是二阶微分方程，与 PD 控制器一样，引入状态向量 $x = [q, \dot{q}]^T$ ，将二阶微分方程转换为一阶微分方程组

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ K_0(q_d - q) + K_1(\dot{q}_d - \dot{q}) + \ddot{q}_d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (60)$$

8.2 仿真结果

实验中经过调参，最终使用的增益参数为

$$K_0 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \quad K_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

在该逆动力学控制器下，利用 Matlab 求得的关节位置、速度、加速度、控制量分别如图8.26、8.27、8.28和8.29所示。结果表明，该逆动力学控制器在位置、速度和加速度上均可达到很好的跟踪效果。特别是在加速度的跟踪上，逆动力学控制器并没有出现 PD 控制器的震荡问题，这说明逆动力学控制器相比 PD 控制器的优越性。

PD 控制器和逆动力学控制器是机器人控制中常用的两种控制策略，经过实验中的比较和验证，发现 PD 控制器和逆动力学各有优缺点：

- PD 控制器：优点在于其设计简单，不需要机器人精确的动力学模型，实现和调试较为容易。缺点在于在高精度和高动态性能要求的任务中效果有限，可能会出现稳态误差。
- 逆动力学控制器：优点在于可以实现精确的轨迹跟踪，适用于复杂和高动态性能的任务，提供了较高的精度和响应速度。缺点在于需要精确的机器人动力学模型，建模复杂且容易受到参数不确定性的影响，计算量大，实现复杂。

因此，PD 控制器适用于简单、对精度要求不高的任务。而逆动力学控制器适用于复杂、高动态性能和高精度要求的任务，但需要精确的动力学模型和较高的计算资源。实际使用中，需要根据具体的应用需求和系统特性，选择合适的控制策略。

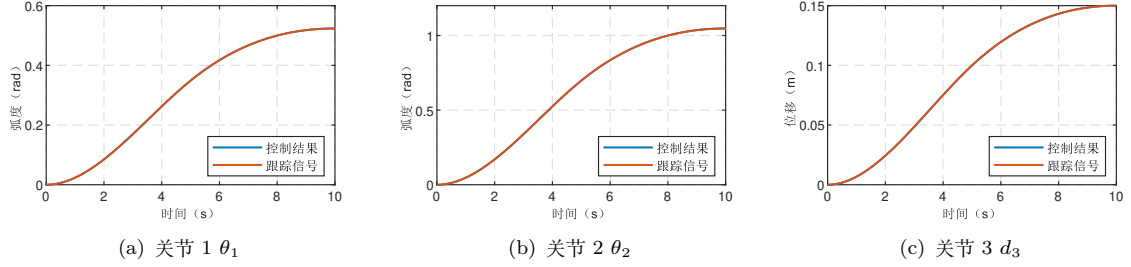


图 8.26: 关节位置跟踪结果

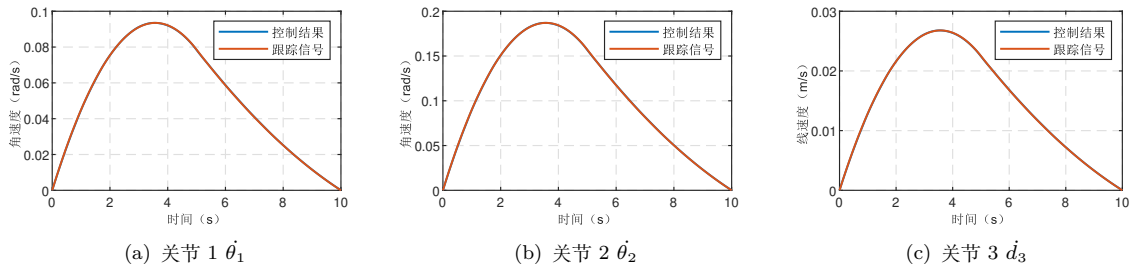


图 8.27: 关节线速度/角速度跟踪结果

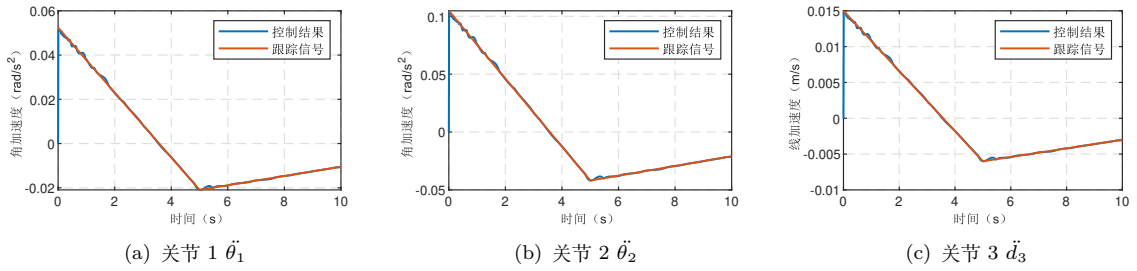


图 8.28: 关节线加速度/角加速度跟踪结果

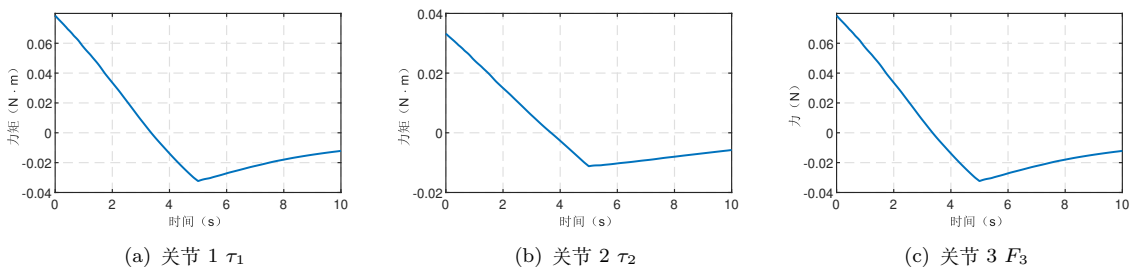


图 8.29: 关节控制量曲线

9 问题 8

9.1 阻抗控制器设计

实验中对机器人动力学方程 $M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$ 设计如下阻抗控制器

$$\tau = K_q \tilde{q} + K_w \dot{\tilde{q}} + g(q) \quad (61)$$

其中, $K_q = J^T(q)K_X J(q)$, $K_w = J^T(q)K_B J(q)$ 。 K_X 为期望关节刚度矩阵, K_B 为阻尼矩阵, 实验中设置如下

$$K_X = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{bmatrix} \quad K_B = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

将式61代入机器人动力学方程（式13）可得

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = K_q(q_d - q) + K_w(\dot{q}_d - \dot{q})$$

该方程也是二阶微分方程, 与 PD 控制器和逆动力学控制器一样, 引入状态向量 $x = [q, \dot{q}]^T$, 将二阶微分方程转换为一阶微分方程组

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M^{-1}[K_q(q_d - q) + K_w(\dot{q}_d - \dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (62)$$

9.2 仿真结果

在该阻抗控制器下, 利用 Matlab 对求得的关节位置、速度、加速度、控制量分别如图9.31、9.32、9.33和9.34所示。结果表明, 该阻抗控制器可以在 2s 左右稳定在期望的关节位置、速度和加速度。但是在关节位置、速度和加速度的控制上, 阻抗控制器与 PD 控制器、逆动力学控制器相比, 关节 1、2 上出现较大的超调量和较长的调整时间。

实验中还使用 PD 控制器与阻抗控制器进行对比。为了清晰地展示机械臂末端的笛卡尔空间位置, 实验中通过正运动学将关节位置映射到笛卡尔空间, 如图9.30所示。可以发现, 与 PD 控制器相比, 阻抗控制下机械臂末端在笛卡尔空间中的位置控制也具有一定的超调量。

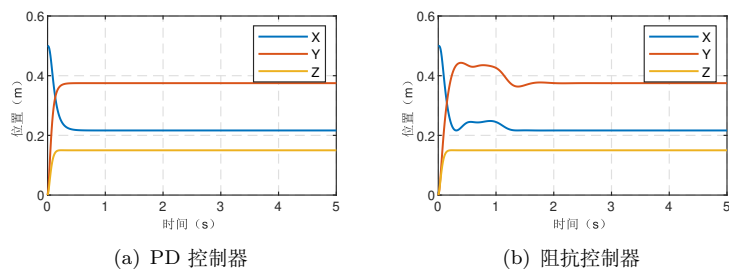


图 9.30: 机械臂末端的笛卡尔空间位置曲线

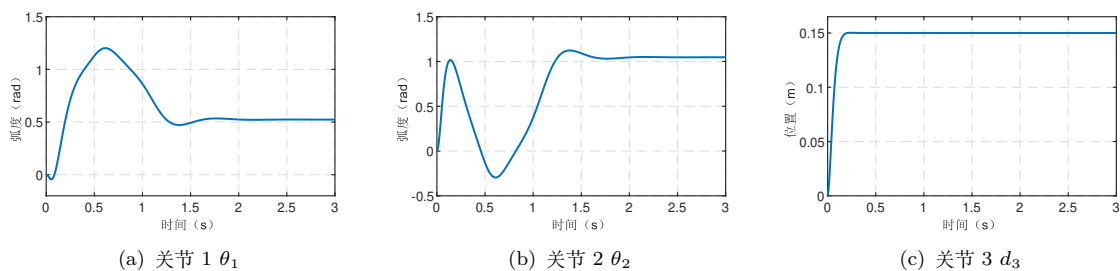


图 9.31: 关节位置控制结果

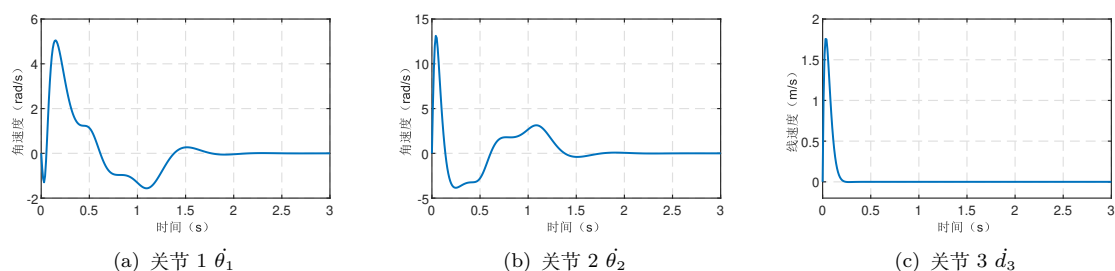


图 9.32: 关节线速度/角速度控制结果

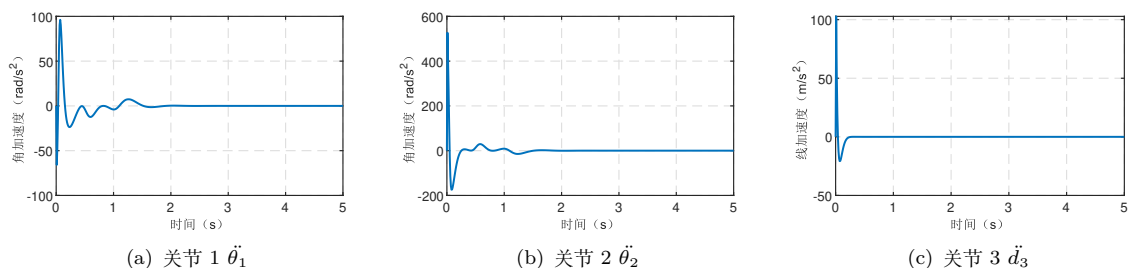


图 9.33: 关节线加速度/角加速度控制结果

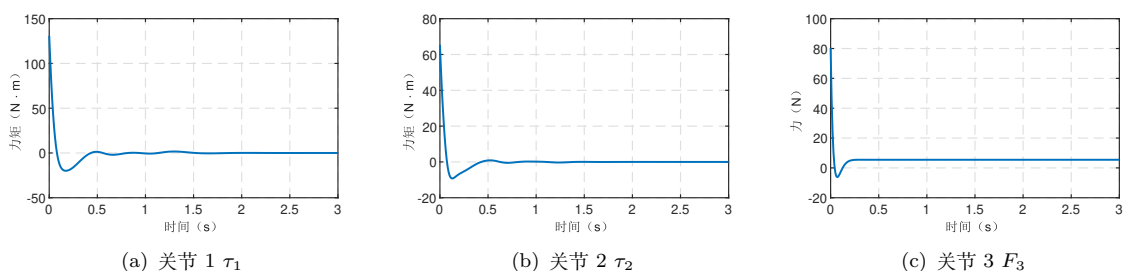


图 9.34: 关节控制量曲线

这一现象是由于 PD 控制器和逆动力学控制器属于位置控制器，阻抗控制器属于力控制器。位置控制器假设机械臂是完全刚性的，不具有弹性，以获得精确的位置控制。在这种假设下，机械臂与环境产生接触后，会导致很大的力变化。而阻抗控制器则可以通过调整关节刚性矩阵 K_X ，使得末端执行器具有合适的阻抗特性（弹性），以满足接触力的要求，使得末端执行器与环境的接触更加柔顺。通

过设计合适的 K_X 、 K_B ，机械臂与环境不接触的情况下可以实现正常的位置跟踪，在与环境接触的情况下实现稳定的柔顺控制。也就是说，阻抗控制牺牲了一部分位置控制的精确性，从而使机械臂获得了一定阻抗特性。

10 问题 9

在问题 8 的基础上，在 $t = 4 - 6s$ 时向三个关节添加了外力 $\tau' = [2N \cdot m \ 2N \cdot m \ 3N]$ 。机械臂末端的笛卡尔空间位置曲线如图10.35所示，关节位置、速度、加速度、控制量分别如图10.36、10.37、10.38和10.39所示。结果表明，在外力的作用下，阻抗控制中的关节空间和笛卡尔空间中的各曲线在 $4 - 6s$ 中均出现了一定的起伏，但是可以很快地恢复稳定。这说明阻抗控制能够在与环境接触的情况下实现柔顺控制。而 PD 控制的起伏较小，说明机械臂与环境接触时表现出高刚性，阻尼和弹性很小。在实际情况下，若高刚性机械臂与高刚性的环境接触，会造成机器人或环境的损坏。因此，阻抗控制在机械臂和环境接触的情况中是十分必要的。

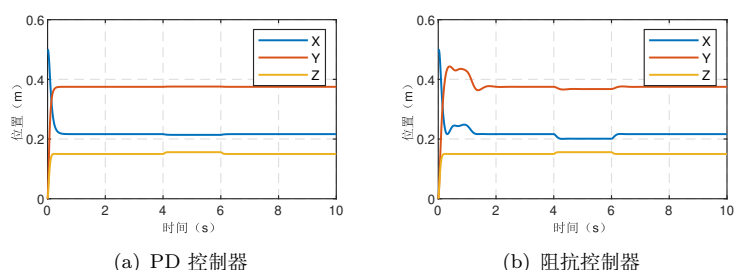


图 10.35: 受外力作用下机械臂末端的笛卡尔空间位置曲线

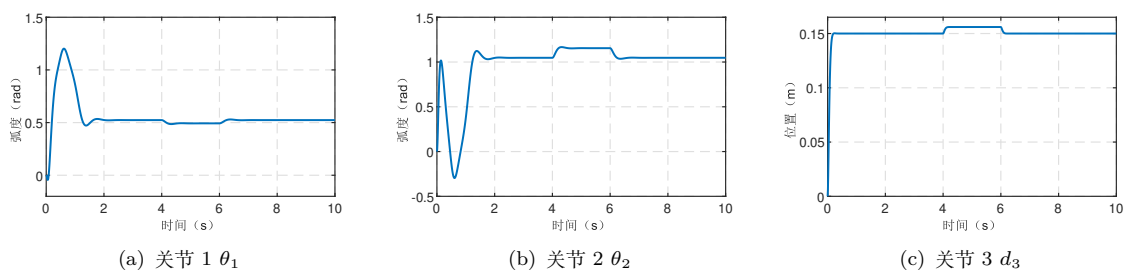


图 10.36: 关节位置控制结果

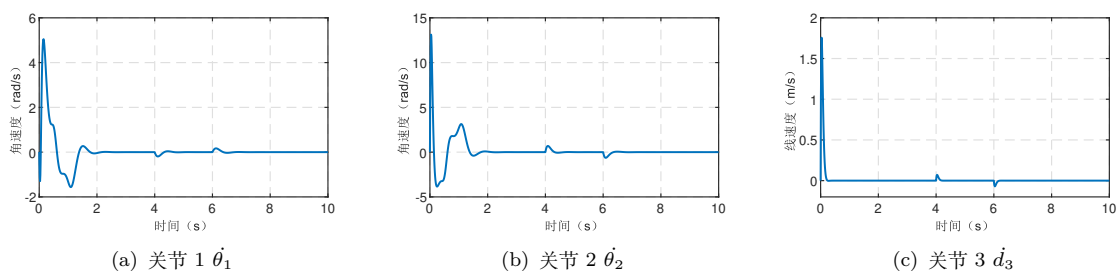


图 10.37: 关节线速度/角速度控制结果

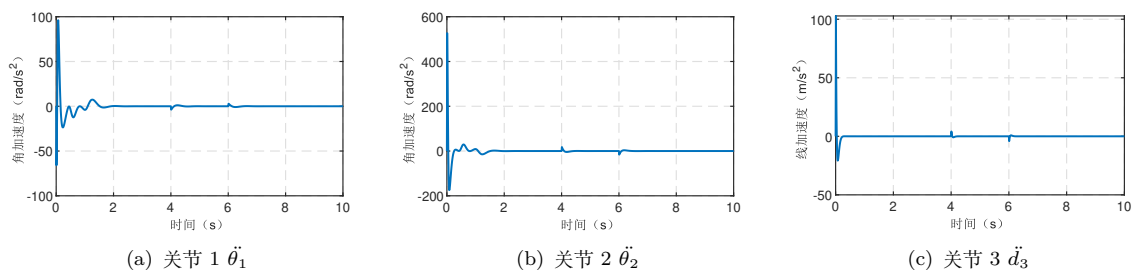


图 10.38: 关节线加速度/角加速度控制结果

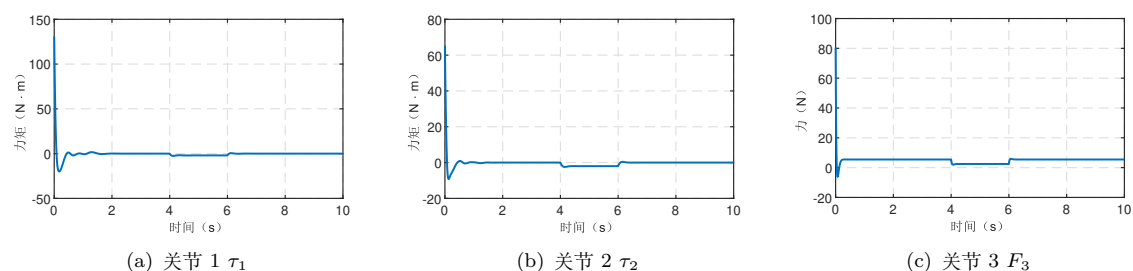


图 10.39: 关节控制量曲线

11 总结

在《机器人学导论》课程的大作业中，以 Scara 机器人为载体，完成了本课程中学习主要内容的仿真实验。实验中主要包括了以下内容：

- 机器人运动学：DH 参数表、正运动学、逆运动学、雅可比矩阵的推导。
- 机器人动力学：动力学模型（拉格朗日法）的推导。
- 机器人轨迹规划：基于多项式函数的点到点轨迹规划。
- 机器人控制：PD 控制、逆动力学控制、阻抗控制。

通过本课程大作业，我将课堂中学到的机器人学知识运用实验仿真，学习并掌握了 Matlab 下 Robotics Toolbox 工具箱的使用，利用该工具箱完成了大作业要求的 9 个任务，加强了我对课堂知识的理解。

最后，非常感谢《机器人学导论》课程的任课老师韩老师和助教柴老师的指导与帮助。在这门课中我学习到了机器人学相关的基础知识和分析方法，受益匪浅，为日后的更深入的研究打下了坚实基础。