

(a) 算法是这样的

- 按完成时间不递减的顺序排列所有工序
- 而某些进程仍未被覆盖：在第一个未覆盖进程的结束时间插入状态检查

首先，在覆盖所有进程之前，算法不会停止；在每次迭代中，至少有一个未覆盖的进程被覆盖，因此算法会终止。因此，它确实能计算出一套有效的状态检查，覆盖所有敏感进程。

其次，我们将通过一个 "保持领先" 类型的论证来证明，该算法计算出的状态检查集合具有尽可能小的规模。我们把上述算法计算出的状态检查集合称为  $S$ 。我们将通过归纳法证明，在  $[t_{i-1}, t_i]$  的  $i$  个状态检查区间内， $S$  也至少会有  $i$  次状态检查。

- 基本情况：'必须在不晚于第一次状态检查的情况下进行状态检查，因为敏感进程会在此时结束。
- 归纳步骤：假设在  $t_{i-1}$  的  $i$  个状态检查之前， $S$  中至少有  $i$  个状态检查。我们已经知道，根据我们的算法，导致插入  $(i+1)$ -th 状态检查  $t_{i+1}$  的过程没有被前面的所有  $i$  个状态检查覆盖，所以  $S$  必须在  $t_{i-1}$  和  $(i+1)$  状态检查  $t_{i+1}$  之间放入一个状态检查来覆盖该过程。因此，在  $(i+1)$  状态检查之前， $S$  至少有  $i+1$  次状态检查。

因此，我们知道算法是正确的。

对所有进程的开始和结束时间进行排序的运行时间为  $O(n \log n)$ ，然后插入所有状态检查的运行时间为  $O(n)$ 。为了在线性时间内完成这项工作，我们需要保留一个数组，记录迄今为止已覆盖的进程，以及一个队列，记录自上次状态检查以来我们看到的所有进程的 开始时间。当我们第一次看到某个未覆盖进程的结束时间时，我们会插入一次状态检查，并将当前队列中的所有进程标记为已覆盖。这样，在这部分算法的运行过程中，每个进程的工作时间都是不变的。

(b) 这种说法是正确的。

让我们用  $S$  来表示我们的算法所提供的解。由于  $S$  是一组没有两个进程同时运行的敏感进程的 最大大小，因此只要找到  $|S|$  这样的 "不相交" 进程就能证明  $|S| = n$ 。我们在 (a) 部分的算法实际上提供了这样一组不相交的进程：其完成时间导致插入状态检查的进程是不相交的

，因为每个进程都没有被前面所有的状态检查覆盖。

---

!ex559.1T6.225