

考虑边重  $(n, \{e\})$  下的最小生成树  $I$ ，假设  $I$  不是最小高度的连通子图。那么会有一对节点  $u$  和  $r$ ，以及两条  $u$ - $r$  路径  $f_i, f_i^*$ （用边集表示），因此  $f_i$  是  $I$  中的  $u$ - $r$  路径，但  $f_i^*$  的高度较小。换句话说， $f_i$  上有一条边  $e' \in (u', r')$ ，它的高度是  $I$  中所有边的最大值。

现在，如果我们考虑  $(f_i, f_i^*) \cup \{e'\}$  中的边，它们包含一条（可能自交的） $u'$ - $r'$  路径；我们可以沿着  $f_i$  从  $u'$  走到  $u$ ，然后沿着  $f_i^*$  从  $u$  走到  $r$ ，再沿着  $f_i$  从  $r$  走到  $r'$ ，从而构建这样一条路径。因此  $(f_i, f_i^*) \cup \{e'\}$  包含一条简单路径  $Q$ 。但是  $Q \cup \{e'\}$  是一个循环，其中  $e'$  是最重的边，这与循环特性相矛盾。因此， $I$  一定是一个最小高度的连通子图。

现在考虑一个连通的子图  $H = (U, f_i')$ ，它不包含  $I$  的所有边；让  $e = (u, r)$  是不属于  $f_i'$  的  $I$  边。从  $I$  中删除  $e$  会将  $I$  分割成两个相连的部分；而这两个部分代表将  $U$  分割成集合  $A$  和  $B$ 。边  $e$  是最小高度边，其一端在  $A$  中，另一端在  $B$  中。由于  $H$  中任何一条从  $u$  到  $r$  的路径都必须穿过  $A$  到  $B$  的某一点，而且不能使用  $e$ ，因此它的高度必须大于  $n$ 。由此可见， $H$  不可能是最小高度连接子图。