ALJABAR LINEAR

MFM Data Science Indonesia

SISTEM PERSAMAAN LINIER

Sistem Persamaan Linier

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$
$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$$
$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$$

Sistem persamaan linier di atas memiliki solusi $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, dan $x_3 = 3$ karena nilai-nilai tersebut memenuhi semua persamaan. Sistem tersebut dapat direpresentasikan sebagai persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer (OBE)

Misalkan kita mempunyai sistem persamaan linier sebagai berikut :

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$
$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$$
$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$$

Kemudian bentuk ke dalam matriks berikut untuk dapat dilakukan OBE

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

DATA SCIENCE INDONESIA

Operasi Baris Elementer (OBE)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -2 kali baris pertama ke baris kedua untuk memperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -3 kali baris pertama ke baris ketiga untuk memperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris kedua dengan $\frac{1}{2}$ untuk memperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer (OBE)

Tambahkan -3 kali baris kedua ke baris ketiga untuk memperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Kalikan baris ketiga dengan -2 untuk memperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -1 kali baris kedua ke baris pertama untuk memperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer (OBE)

Tambahkan $-\frac{11}{2}$ kali baris ketiga ke baris pertama dan $\frac{7}{2}$ kali baris ketiga ke baris kedua untuk memperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solusi $x = 1$, $y = 2$, dan $z = 3$ telah diperoleh

DATA SCIENCE INDONESIA

Bentuk Eselon

Matriks dalam **bentuk eselon baris tereduksi** (*reduced row-echelon form*) harus memiliki sifat-sifat berikut :

1. Jika suatu baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka bilangan taknol pertama pada baris itu adalah 1. bilangan 1 ini disebut 1 utama.
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini akan dikelompokkan bersama pada bagian paling bawah dari matriks.
3. Jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi.
4. Setiap kolom yang memiliki 1 utama memiliki nol pada tempat-tempat lainnya.

Matriks yang memiliki tiga sifat pertama di atas disebut dalam **bentuk eselon baris** (*row-echelon form*)

DATA SCIENCE INDONESIA

Bentuk Eselon

Eselon Baris

- $\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Eselon Baris Tereduksi

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solusi Sistem Persamaan Linier

$$a. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian $(\boldsymbol{a})$

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah

$$x_1 = 5$$
$$x_2 = -2$$
$$x_3 = 4$$

Solusi Sistem Persamaan Linier

$b.\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian $(\boldsymbol{b})$

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah

$$x_1 + 4x_4 = -1$$
$$x_2 + 2x_4 = 6$$
$$x_3 + 3x_4 = 2$$

Karena x_1, x_2, dan x_3 bersesuaian dengan 1 utama pada matriks, maka ketiganya disebut dengan variabel utama dan variabel lain yang bukan utama disebut sebagai variabel bebas.

Dari bentuk persamaan-persamaan ini, kita bisa menentukan nilai sebarang untuk variabel bebas x_4, misalnya t. Jadi akan terdapat tak terhingga banyaknya solusi dengan solusi umumnya dinyatakan dalam bentuk

$x_1 = -1 - 4t$, $x_2 = 6 - 2t$, $x_3 = 2 - 3t$, dan $x_4 = t$

Solusi Sistem Persamaan Linier

$c.\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian (c)

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

Karena persamaan ini tidak dapat dipenuhi, maka sistem ini tidak memiliki solusi.

MATRIKS

Matriks

Suatu matriks (matrix) adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ukuran dari suatu matriks dinyatakan dari jumlah baris dan kolomnya. Sebagai contoh, matriks A di atas memiliki ukuran 2×2.

DATA SCIENCE INDONESIA

Operasi pada Matriks

- Penjumlahan
  - $C = A + B$
- Pengurangan
  - $C = A - B$
- Perkalian dengan skalar
  - $C = b(A)$
- Perkalian matriks
  - $C = AB$
- Trace
  - $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

DATA SCIENCE INDONESIA

Operasi pada matriks

Perkalian dengan Skalar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Maka

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Transpose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Operasi pada Matriks

Penjumlahan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Perkalian

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Maka

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 14 \\ 16 & 30 \end{bmatrix}$$

Operasi pada Matriks

Dengan mengasumsikan bahwa matriks-matriks berikut mempunyai ukuran matriks sedemikian rupa sehingga operasi-operasi yang disebutkan dapat dilakukan, arutan-aturan aritmatika matriks berikut dapat berlaku.

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $A(B - C) = AB - AC$
- $(B - C)A = BA - CA$

- $a(B + C) = aB + aC$
- $a(B - C) = aB - aC$
- $(a + b)C = aC + bC$
- $(a - b)C = aC - bC$
- $a(bC) = (ab)C$
- $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Identitas dan Invers

Matriks identitas adalah matriks yang entri-entri pada diagonal utama bernilai 1 dan 0 pada entri lainnya. Kita notasikan I_n sebuah matriks persegi berukuran n, $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, maka

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Misalkan A merupakan matriks persegi dengan jumlah kolom n dan jumlah baris n. Matriks invers dari A dinotasikan dengan A^{-1} sedemikian sehingga

$$A^{-1}A = I_n$$

Contoh :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DATA SCIENCE INDONESIA

Invers Matriks dengan OBE

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \overbrace{1 \quad\; 2 \quad\; 3}^{\text{matrix A}} & & & 1 & 0 & 0 \\ 2 \quad\; 5 \quad\; 3 & & & 0 & 1 & 0 \\ 1 \quad\; 0 \quad\; 8 & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

applying ERO gives

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{5 \quad -2 \quad -1}_{\text{inverse of } A} & & \end{array}\right]$$

Determinan

Fungsi determinan adalah fungsi bernilai riil dari variabel matriks. Untuk menghitung determinan matriks, input yang dibutuhkan adalah matriks berukuran $n \times m$ (matriks persegi) dan menghasilkan nilai determinan berupa bilangan riil.

Determinan

Matriks 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Matriks 3×3

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Teorema

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka $\det(\boldsymbol{A})$ adalah hasilkali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut yaitu $\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

Contoh :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

maka $\det(\boldsymbol{A}) = 5 \times 3 = 15$

DATA SCIENCE INDONESIA

Sifat-Sifat Determinan

- $\det(A \pm B) \neq det(A) \pm det(B)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

VEKTOR

Vektor

Vektor merupakan sebuah besaran yang memiliki arah. Vektor dapat juga dinyatakan secara geometrik sebagai ruas garis terarah pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3.

Dalam penulisannya, jika vektor berawal dari titik A dan berakhir di titik B bisa ditulis dengan sebuah huruf kecil yang diatasnya terdapat tanda berupa garis atau panah seperti $\bar{v}$ atau $\vec{v}$ atau juga: $\overrightarrow{AB}$.

Bisa juga ditulis dengan huruf kecil biasa dan dicetak tebal $\mathbf{v}$. Artinya vektor $\vec{v}$ adalah vektor yang berawal dari titik A menuju titik B.

Operasi pada vektor

Panjang vektor (length)

Misal $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$

Maka

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Penjumlahan vektor

Misal $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)$

Maka

$$\mathbf{u}+\mathbf{p} = (u_1 + p_1, u_2 + p_2, u_3 + p_3)$$

Misal $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$
Maka
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Operasi pada Vektor

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah vektor-vektro pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3, dan k dan l adalah skalar, maka hubungan-hubungan berikut berlaku.

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
- $k(l\mathbf{u}) = (\mathrm{kl})\mathbf{u}$
- $(\mathrm{k}+\mathrm{l})\mathbf{u} = \mathrm{k}\mathbf{u} + \mathrm{l}\mathbf{u}$

- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0$
- $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathrm{k}\mathbf{u} + \mathbf{kv}$
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

EIGEN

EIGEN

Jika $\boldsymbol{A}$ sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol $\mathrm{x} \in R^n$ disebut **vektor eigen (eigenvector)** dari $\boldsymbol{A}$ jika $\boldsymbol{A}\mathrm{x}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari x, sehingga

$$\boldsymbol{A}\mathrm{x}=\lambda\mathrm{x}$$

Untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut dengan **nilai eigen (eigen value)** dari $\boldsymbol{A}$, dan x disebut vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$.

DATA SCIENCE INDONESIA

Mencari Nilai Eigen

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks $\boldsymbol{A}$, $n \times n$, kita menuliskan kembali $\boldsymbol{A}\mathrm{x}=\lambda\mathrm{x}$ sebagai :

$$\boldsymbol{A}\mathrm{x}=\lambda\mathbf{I}\mathrm{x}$$

$$(\lambda \boldsymbol{I} - A)\mathrm{x}=0$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi tak nol dari persamaan ini. Maka persamaan tersebut akan memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$$

Persamaan ini disebut juga persamaan karakteristik (characteristic equation) matriks $\boldsymbol{A}$; skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$.

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Contoh :

Vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ merupakan vektor eigen dari $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ yang terkait dengan nilai eigen $\lambda = 3$, karena

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$

DATA SCIENCE INDONESIA

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Contoh :

Tentukan nilai eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian.

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Nilai-nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$ harus memenuhi persamaan

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

Kemudian diperoleh $(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$, dengan demikian nilai-nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$ adalah

$$\lambda = 4,\ \lambda = 2 + \sqrt{3}, \text{dan } \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

DATA SCIENCE INDONESIA

Terima Kasih

DATA
SCIENCE
INDONESIA