四川师范大学本科毕业论文

特征值与特征向量的另类求解办法及其在物理学中的应用

学生姓名	胡新逸
院系名称	物理与电子工程学院
专业名称	物理学
班　　级	2018 级 3 班
学　　号	2018070306
指导教师	程才
完成时间	2022 年 4 月 25 日

特征值与特征向量的另类求解办法及其在物理学中的应用

物理学专业

学生姓名 胡新逸　**指导教师** 程才

摘要　特征值与特征向量是矩阵理论中非常重要的部分，是简化相关复杂问题的一种有效途径。

本文分三个部分来讨论如何求解方阵的特征值与特征向量。第一部分从线性代数课本入手，先计算特征值λ，再将其代入齐次线性方程中求出特征向量x。分别以二阶（$A_{2\times2}$）、三阶（$A_{3\times3}$）、四阶（$A_{4\times4}$）方阵的特征值与特征向量的求解过程为例进行演绎说明；第二部分介绍如何用线性代数中矩阵的知识来理解量子力学，知道特征值和特征向量在量子力学中分别表示本征值和波函数。将二阶（$A_{2\times2}$）和三阶（$A_{3\times3}$）矩阵的求解应用到物理学中的泡利矩阵和盖尔曼矩阵中，分别求出它们的本征值和本征态。此外，从定态薛定谔方程出发，根据齐次线性方程组是否有非零解的条件，具体推导了量子力学著名的久期方程；第三部分主要介绍用其它方法来求解特征值与特征向量。首先，通过原理图直观地展示求解过程,并利用具体例子来演示求解的过程。其次，将新方法应用到物理中两类特殊矩阵（泡利矩阵、盖尔曼矩阵）的求解中，并利用 Matlab 程序的结果进行验证，进一步总结出另类求解方法的优缺点。最后介绍新方法求解特征向量在物理学中的应用。

本文将从传统的二阶、三阶和四阶方阵的特征值与特征向量的求解过程，过渡到泡利矩阵、盖尔曼矩阵的求解，并演示久期方程的推导，最终对另类方法求解特征值与特征向量进行了全面的论述和演绎。

关键词：特征值　特征向量　泡利矩阵　盖尔曼矩阵　久期方程　另类求解方法

Alternative solution methods for eigenvalues and eigenvectors and their applications in physics

Specialty: Physics

Undergraduate: Xinyi Hu **Supervisor:** Cai Cheng

ABSTRACT Eigenvalues and eigenvectors are very important parts of matrix theory. And it is an effective way to simplify related complex problems.

This paper is divided into three parts to discuss how to solve the eigenvalues and eigenvectors of square matrix. The first part starts from the textbook of linear algebra, first calculates the eigenvalue (λ), and then substitutes it into the homogeneous linear equation to obtain the eigenvector (x). Taking the solution of eigenvalues and eigenvectors of second-order ($\lambda_{2\times2}$), third-order ($\lambda_{3\times3}$), and fourth-order ($\lambda_{4\times4}$) square matrices as examples for deduction explanation. The second part introduces how to use the knowledge of matrix in linear algebra to understand quantum mechanics, knowing that eigenvalues and eigenvectors represent eigenvalues and wave functions, respectively. Applying the solution of second-order matrix and third-order matrix to Pauli matrix and Gellman matrix in physics respectively, and obtain their eigenvalues and eigenvectors. In addition, starting from the Schrodinger equation, according to the condition of whether the homogeneous linear equations have non-zero solutions, the well-known secular equation of quantum mechanics is specifically deduced. The third part mainly introduces other methods to solve the eigenvalues and eigenvectors. Firstly, the solution process is intuitively displayed through the schematic diagram, and a specific example is used to demonstrate the solution process. Secondly, the new method is applied to the solution of two kinds of special matrices (Pauli matrix and Gellman matrix) in physics, and the advantages and disadvantages of alternative solution methods are further summarized. Finally, the application of the new method to solve eigenvectors in physics is introduced.

This paper will transition from the traditional solution process of eigenvalues and eigenvectors of second-order, third-order and fourth-order square matrices to the solution of Pauli matrix and Gellman matrix, and demonstrate the derivation of secular equation. Finally the alternative method for solving eigenvalues and eigenvectors is comprehensively discussed and deduced.

Key words: eigenvalue eigenvector Pauli matrix Gellman matrix duration equation Alternative solution method

目　录

特征值与特征向量的另类求解办法
及其在物理学中的应用

1 绪论

1.1 研究背景和意义

1.1.1 研究背景

矩阵在数学研究和应用方面有非常重要的作用。而特征值与特征向量是矩阵理论的重要组成部分，在高等代数以及其它科技领域中有非常广泛的应用。同时它也贯穿了高等代数的许多重要方面，例如在线性代数[1]中,求矩阵的幂、判定矩阵对角化、求解特征值的反问题、判定矩阵合同关系、用正交变换法将二次型化为标准型以及判定实二次型的正定性等问题都可以借助于它们得以实现。

在此之前已经有很多专家学者利用特征值与特征向量这一工具解决问题。例如，利用它们求线性递推关系中的通项公式[2]；运用它们可以探讨其在力学、生物学、经济发展与环境污染的增长之间的关系[3]；特征向量的正交化和单位化以及特征值在多元统计分析法中有很重要的作用[4]；将矩阵理论应用到量子力学中，那么，矩阵的特征向量和特征值可以分别表示波函数和本征值[5]。

1.1.2 研究意义

在矩阵运算中利用特征值和特征向量的作用可以使问题更简单；用正交变换法可以将二次型化为标准型；还有二次型的最值问题以及矩阵的高次幂和反求解问题都涉及到特征值与特征向量的相关知识；此外，在例题解析中运用一些特征值与特征向量的性质和方法，可以使问题更简单、运算上更方便。说明特征值与特征向量在解决实际问题时有很大的优越性。

1.2 国内外研究现状

对于如何求解矩阵的特征值与特征向量这一问题，最常用的是线性代数课本上的方法，即先计算矩阵的特征值λ，再将其代入齐次线性方程中求解特征向量x。此外还有利用矩阵的初等变换求解特征值，利用新公式计算特征向量，即先计算特征值，再将特征值代入新公式直接求出特征向量中的某一元素。第一种方法求解特征向量时需要解齐次线性方程组，而另外两种方法则可以根据公式直接求解，计算更简便。

1.3 研究的主要内容

通过阅读教材【线性代数】和在中国知网、百度百科搜集阅读有关特征值与特征向量的相关文献，知道关于 n 阶方阵的特征值与特征向量如何求解。求解特征值与特征向量的方法并不唯一：最常见的是用特征方程求解特征值进而求特征向量法[1]，而另类解

方法可直接利用公式求出特征向量。然后整理有关特征值与特征向量的求解方法的资料，掌握教材上现有的求解特征值与特征向量的方法以及相关论文上的特征值与特征向量的另类求解方法，分析两类方法的求解过程中异同以及相应的优缺点。

第一部分从线性代数课本入手，通过计算矩阵的特征值λ，再将其代入齐次线性方程组$(\mathrm{A}-\lambda_i \mathrm{E})\mathrm{x}=0$中，而方程组的非零解，就是特征值$\lambda_i$的对应的特征向量。分别以二阶$(A_{2\times2})$、三阶$(A_{3\times3})$、四阶$(A_{4\times4})$方阵的求解为例演示求解过程。

第二部分先介绍如何用线性代数理解量子力学，特征值和特征向量在量子力学中分别表示本征值和波函数，即λ_i对应$\vec{\nu_i}$，利用线性代数中的矩阵来进一步理解量子力学相关内容。线性代数课本中对称矩阵的数学表达式为$\mathrm{A}=A^T$，可对应于量子力学中厄米矩阵即矩阵形式的共轭转置等于它自身$\mathrm{A}=A^{\dagger}$；数学中的特征向量的正交性对应于量子力学中的波函数正交性，故所求解的特征向量需用施密特正交变换方法。其中，$A_{2\times2}$阶矩阵求解可应用到物理中求解泡利矩阵σ_x、σ_y、σ_z的本征值和本征态，$A_{3\times3}$阶矩阵求解可应用到物理中求解盖尔曼矩阵λ_1、λ_2、λ_3、λ_4、λ_5、λ_6、λ_7、λ_8的本征值和本征态。其次，将数学中的特征方程与量子力学中的久期方程相联系，并从齐次线性方程组是否有非零解的条件出发，具体推导了二者的关系。

第三部分主要介绍特征值与特征向量的另类求解方法。根据参考文献知道一种可以直接求解特征向量的公式，首先根据原理图直观展示求解过程，然后将新方法应用到物理中两类特殊矩阵的求解中，并利用 Matlab 程序的结果进行验证，进一步总结出另类求解方法的优缺点。最后介绍新方法直接求解特征向量在物理学中的应用。

2 线性代数教材

定义[1]：

设 A 是 n 阶方阵，如果数λ和 n 维非零列向量x使关系式

$$\mathrm{Ax} = \lambda \mathrm{x}$$

成立，那么，这样的数λ称为方阵A的特征值，非零向量x称为方阵A对应于特征值λ的特征向量。

Ax=λx也可写成

$$(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E})\mathrm{x} = 0$$

这是 n 个未知数,n 个方程的齐次线性方程组，它有非零解的充分必要条件是系数行列式

$$|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}| = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

上式是以λ为未知数的一元 n 次方程，也称为方阵 A 的特征方程，其左端$|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}|$是关于λ的 n 次多项式，记作f(λ)，称为方阵 A 的特征多项式。由此可知，矩阵A的特征值就是特征方程的根。特征方程在复数范围内恒有解，其个数为方程的次数（重根按重数计算），因此，n 阶方阵 A 在复数范围内有 n 个特征值。

设$\lambda = \lambda_i$为方阵 A 的一个特征值，则由方程

$$(\mathrm{A} - \lambda_i \mathrm{E})\mathrm{x} = 0$$

可求得非零解$\mathrm{x} = p_i$那么p_i便是A的对应于特征值λ_i的特征向量。

求解特征值与特征向量的具体步骤如下：

先计算矩阵A的特征多项式 $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E})$,然后求出特征方程 det（$\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}$） $= 0$的全部根λ_i，最后将每个特征值λ_i代入齐次线性方程$(\mathrm{A} - \lambda_i \mathrm{E})\mathrm{x} = 0$中，求出非零解，所得结果就是对应于特征值$\lambda_i$的特征向量。

2.1 二阶方阵求解

例 1 求方阵$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$的特征值和特征向量

解： A 的特征多项式为

$$|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = 8 - 6\lambda + \lambda^2 = (4 - \lambda)(2 - \lambda)$$

所以 A 的特征值为$\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = 4$

当$\lambda_1 = 2$时，对应的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得$x_1 = x_2$，所以对应的特征向量可取为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

当$\lambda_2 = 4$时，对应的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix} 3-4 & -1 \\ -1 & 3-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得$x_1 = -x_2$，所以对应的特征向量可取为

$$p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2 三阶方阵求解

例 3 求矩阵$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$的特征值与特征向量

2.2.1 利用特征方程求解

解：　A 的特征多项式为

$$\begin{aligned} |\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}| &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -4 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda-2)^2 \end{aligned}$$

所以 A 的特征值为$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

当$\lambda_1 = -1$时，解方程$(\mathrm{A}+\mathrm{E})\mathrm{x} = 0$，由

$$\mathrm{A}+\mathrm{E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的特征向量满足

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对应的特征向量可取为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

当$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$时，解方程$(\mathrm{A} - 2\mathrm{E})\mathrm{x} = 0$，由

$$\mathrm{A} - 2\mathrm{E} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的特征向量满足

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对应的特征向量可取为

$$p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.2.2 施密特正交化

将$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$时所得特征向量，利用施密特正交方式进行正交变换，使所求得的特征向量两两正交

令

$$b_1 = p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = p_2 - \frac{[p_2, b_1]}{[b_1, b_1]} b_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = p_3 - \frac{[p_3, b_1]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[p_3, b_2]}{[b_2, b_2]} b_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{3} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.3 四阶方阵求解

例 4　求矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$的特征值与特征向量

2.3.1 利用特征方程求解

解：特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&0&1\\0&-\lambda&1&0\\0&1&-\lambda&0\\1&0&0&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\quad r_4\leftrightarrow r_2\quad}}_{c_4\leftrightarrow c_2}\begin{vmatrix}-\lambda&1&0&0\\1&-\lambda&0&0\\0&0&-\lambda&1\\0&0&1&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda^2-1)^2$$
$$=[(\lambda+1)(\lambda-1)]^2$$

A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=\lambda_4=1$

当$\lambda_1=\lambda_2=-1$时，解方程$(A+E)x=0$，由

$$A+E=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

对应的特征向量为

$$p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

当$\lambda_3=\lambda_4=1$时，解方程$(A-E)x=0$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

对应的特征向量为

$$p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ p_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

3 物理学中特殊矩阵与久期方程

一个矢量集合

$$\{e_k, e_k \epsilon V\}_{k=1}^{K}$$

是一组基，当且仅当线性空间[1]中的任一矢量υ总存在一个标量集合

$$\{\upsilon_k, \upsilon_k \epsilon F\}_{k=1}^{K}$$

有

$$\upsilon = \sum_{k=1}^{K} \upsilon_k e_k = (e_1, \dots, e_K)\begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \vdots \\ \upsilon_K \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \vdots \\ \upsilon_K \end{pmatrix}$$

是矢量υ在基

$$\{e_k, e_k \epsilon V\}_{k=1}^{K}$$

下的分量形式。

线性代数中对称矩阵表述为矩阵的转置与原矩阵相等，数学表达式为$\mathrm{A} = A^T$；而量子力学中厄米矩阵表述为矩阵的转置共轭等于原矩阵，表达式为$\mathrm{A} = A^{\dagger}$；线性代数中标准正交基是正交归一的；量子力学中选作基底的矢量也必须是是正交归一($< \vec{v_i}, \vec{v_j} >= \delta_{ij}$)和完备($\psi = \sum_n C_n \psi_n$)的，在解题过程中需要将所得到的特征向量进行施密特正交化，再归一化才能得到本征态。

在量子力学[5]中，用右矢来表示希尔伯特空间中的某个态$\psi(\mathrm{x})$，即$|\psi>$，也可表示为列向量。

$$|\mathrm{x}>= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则

$$<\mathrm{x}| = (x_1^*, \dots, x_n^*)$$

对偶空间$C^{n,*}$中的矢量一般记作

$$<\alpha| = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*), \alpha_i^* \epsilon C^{n,*}$$

且

$$<\alpha|\mathrm{x}>= \sum_{i=1}^{n}, \alpha_i^* x_i$$

这是一种相加运算。

矩阵的特征向量p_i和特征值λ_i分别在量子力学中表示波函数（本征态）$|\psi>$和本征值v_i。

3.1 泡利矩阵，SU(2)

泡利矩阵是一组幺正厄米复矩阵，出现在量子力学的泡利方程中，用于描述磁场和自旋之间的相互作用，所有的泡利矩阵都是厄米矩阵。

三个矩阵分别为：

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}，\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}，\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

求泡利矩阵的本征值和本征态（二阶矩阵的求解）

解： 可以很容易看出，所有泡利矩阵的本征值都是 1 和−1

对于$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$来说，$\sigma_x$的特征多项式为：

$$|\sigma_x - \nu E| = \begin{vmatrix} 0-v & 1 \\ 1 & 0-v \end{vmatrix} = v^2 - 1 = (v+1)(v-1)$$

所以σ_x的本征值为$v_1 = -1$，$v_2 = 1$

当$v_1 = 1$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix} 0-(-1) & 1 \\ 1 & 0-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得$\psi_1 = -\psi_2$，对应的本征态可取为$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，将其归一化，则本征态为

$$|x = -1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

同理, 当$v_2 = 1$时，对应的本征态为

$$|x = +1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对于$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$和$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，显然它们的本征值都是 1 和−1，同理可得它们的本征态分别为

$$|y = -1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|y = +1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|z = -1 >= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|z = +1 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.2 盖尔曼矩阵，SU(3)

盖尔曼矩阵[7]（Gell-Mann matrices）是八个线性独立且零迹的厄米矩阵，是为了分析强相互作用的味对称性而提出的（u，d，s 夸克之间的 SU(3)对称性），广泛应用于强子分类。

八个矩阵分别为

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}，\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}，\lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}，\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}，\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}，\lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

求盖尔曼矩阵的本征值和本征态（三阶矩阵的求解）

解： 对于$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$来说，$\lambda_1$的特征多项式为

$$\begin{aligned}|\lambda_1-v\mathrm{E}|&=\begin{vmatrix}0-v&1&0\\1&0-v&0\\0&0&0-v\end{vmatrix}\\&=(-v)^3-(-v)\\&=(-v)(v^2-1)\\&=(-v)(v+1)(v-1)\end{aligned}$$

所以λ_1的本征值为$v_1=-1$，$v_2=0$，$v_3=1$

当$v_1=-1$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\psi_1+\psi_2\\\psi_1+\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得$\psi_1=-\psi_2,\psi_3=0$，本征态可取为$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，将其归一化可得，

$$|\lambda_{1v}=-1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

当$v_2=0$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得$\psi_1 = \psi_2 = 0$，对应的本征态可取为

$$|\lambda_{1v} = 0 >= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

当$v_3 = 1$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\psi_1 + \psi_2 \\ \psi_1 - \psi_2 \\ -\psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得$\psi_1 = \psi_2, \psi_3 = 0$，本征态可取为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{1v} = +1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对于$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$来说，$\lambda_2$的特征多项式为

$$\begin{aligned} |\lambda_2 - v\mathrm{E}| &= \begin{vmatrix} 0 - v & -i & 0 \\ i & 0 - v & 0 \\ 0 & 0 & 0 - v \end{vmatrix} \\ &= (-v)^3 - (-v) \\ &= (-v)(v^2 - 1) \\ &= (-v)(v + 1)(v - 1) \end{aligned}$$

所以λ_2的本征值为$v_1 = -1$，$v_2 = 0$，$v_3 = 1$

当$v_1 = -1$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1 - i\psi_2 \\ i\,\psi_1 + \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得$\psi_1 = i\psi_2, \psi_3 = 0$，对应的本征态可取为$\begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{2v}=-1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-i\\-1\\0\end{pmatrix}$$

当$v_2=0$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得$\psi_1=\psi_2=0$，对应的本征态可取为

$$|\lambda_{2v}=0>=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

当$v_3=1$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}-1&-i&0\\i&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-\psi_1-i\psi_2\\i\psi_1-\psi_2\\-\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得$\psi_1=-i\psi_2,\psi_3=0$，所以本征态可取为$\begin{pmatrix}-i\\1\\0\end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{2v}=+1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-i\\1\\0\end{pmatrix}$$

对于$\lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$来说，$\lambda_1$的特征多项式为

$$|\lambda_3-v\mathrm{E}|=\begin{vmatrix}1-v&0&0\\0&-1-v&0\\0&0&0-v\end{vmatrix}$$
$$=(-v)(1-v)(-1-v)$$

所以λ_3的本征值为$v_1=-1$，$v_2=0$，$v_3=1$

当$v_1=-1$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\psi_1\\0\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得$\psi_1=\psi_3=0$，本征态可取为

$$|\lambda_{3v}=-1>=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

当$v_2=0$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得$\psi_1=\psi_2=0$，本征态可取为

$$|\lambda_{3v}=0>=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

当$v_3=1$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得$\psi_2=\psi_3=0,$，本征态可取为

$$|\lambda_{3v}=+1>=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

对于$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$来说，$\lambda_1$的特征多项式为

$$\begin{aligned}|\lambda_4-v\mathrm{E}|&=\begin{vmatrix}0-v&0&1\\0&0-v&0\\1&0&0-v\end{vmatrix}\\&=(-v)^3-(-v)\\&=(-v)(v^2-1)\\&=(-v)(v+1)(v-1)\end{aligned}$$

所以λ_4的本征值为$v_1=-1$，$v_2=0$，$v_3=1$

当$v_1=-1$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\psi_1+\psi_3\\\psi_2\\\psi_1+\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得$\psi_1=-\psi_3,\psi_2=0$，对应的本征态可取为$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{4v}=-1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

当$v_2=0$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得$\psi_1=\psi_3=0$，对应的本征态可取为

$$|\lambda_{4v}=0>=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

当$v_3=1$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-\psi_1+\psi_3\\-\psi_2\\\psi_1-\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得$\psi_1=\psi_3,\psi_2=0$，对应的本征态可取为$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{4v}=+1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

对于$\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}$来说，$\lambda_5$的特征多项式为

$$\begin{aligned}|\lambda_5-v\mathrm{E}|&=\begin{vmatrix}0-v&0&-i\\0&0-v&0\\i&0&0-v\end{vmatrix}\\&=(-v)^3-(-v)\\&=(-v)(v^2-1)\\&=(-v)(v+1)(v-1)\end{aligned}$$

所以λ_5的本征值为$v_1=-1$，$v_2=0$，$v_3=1$

当$v_1=-1$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}1&0&-i\\0&1&0\\i&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\psi_1-i\psi_3\\\psi_2\\i\psi_1+\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得$\psi_1=i\psi_3,\psi_3=0$，对应的本征态可取为$\begin{pmatrix}-i\\0\\-1\end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{5v}=-1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-i\\0\\-1\end{pmatrix}$$

当$v_2=0$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-i\psi_3\\0\\i\psi_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得$\psi_1=\psi_3=0$，对应的本征态可取为

$$|\lambda_{5v}=0>=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

当$v_3=1$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}-1&0&-i\\0&-1&0\\i&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-\psi_1-i\psi_3\\-\psi_2\\i\psi_1-\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解得$\psi_1=i\psi_3,\psi_2=0$，对应的本征态可取为$\begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{5v}=+1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix}$$

对于$\lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$来说，$\lambda_6$的特征多项式为

$$\begin{aligned}|\lambda_6-v\mathrm{E}|&=\begin{vmatrix}0-v&0&0\\0&0-v&1\\0&1&0-v\end{vmatrix}\\&=(-v)^3-(-v)\\&=(-v)(v^2-1)\\&=(-v)(v+1)(v-1)\end{aligned}$$

所以λ_6的本征值为$v_1=-1$，$v_2=0$，$v_3=1$

当$v_1=-1$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2+\psi_3 \\ \psi_2+\psi_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得$\psi_2=-\psi_3,\psi_1=0$，对应的本征态可取为$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{6v}=-1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

当$v_2=0$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_3 \\ \psi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得$\psi_2=\psi_3=0$，对应的本征态可取为

$$|\lambda_{6v}=0>=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

当$v_3=1$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\psi_1 \\ -\psi_2+\psi_3 \\ \psi_2-\psi_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得$\psi_2=\psi_3,\psi_1=0$，对应的本征态可取为$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{6v}=+1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对于$\lambda_7=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$来说，$\lambda_7$的特征多项式为

$$\begin{aligned} |\lambda_7-v\mathrm{E}| &= \begin{vmatrix} 0-v & 0 & 0 \\ 0 & 0-v & -i \\ 0 & i & 0-v \end{vmatrix} \\ &=(-v)^3-(-v) \\ &=(-v)(v^2-1) \\ &=(-v)(v+1)(v-1) \end{aligned}$$

所以λ_7的本征值为$v_1=-1$，$v_2=0$，$v_3=1$

当$v_1=-1$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -i\\ 0 & i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2-i\psi_3\\ i\psi_2+\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

解得$\psi_2=i\psi_3,\psi_1=0$，对应的本征态可取为$\begin{pmatrix}0\\ -i\\ -1\end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{7v}=-1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\ -i\\ -1\end{pmatrix}$$

当$v_2=0$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\ -i\psi_3\\ i\psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

解得$\psi_2=\psi_3=0$，对应的本征态可取为

$$|\lambda_{7v}=0>=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

当$v_3=1$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -i\\ 0 & i & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-\psi_1\\ -\psi_2-i\psi_3\\ i\psi_2-\psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

解得$\psi_2=-i\psi_3,\psi_1=0$，对应的本征态可取为$\begin{pmatrix}0\\ -i\\ 1\end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{7v}=+1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\ -i\\ 1\end{pmatrix}$$

对于$\lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$来说，$\lambda_8$的特征多项式为

$$|\lambda_8 - v\mathrm{E}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} - v & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} - v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} - v \end{vmatrix}$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{3}} - v)^2 (\frac{-2}{\sqrt{3}} - v)$$

所以λ_8的本征值为$v_1 = \frac{-2}{\sqrt{3}}$，$v_2 = v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

当$v_1 = \frac{-2}{\sqrt{3}}$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}\psi_1 \\ \sqrt{3}\psi_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得$\psi_1 = \psi_2 = 0$，对应的本征态可取为

$$|\lambda_{8v} = \frac{-2}{\sqrt{3}} >= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

当$v_2 = v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$时，对应的本征态应满足

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得$\psi_3 = 0$，对应的本征态可取为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，将其归一化可得，

$$|\lambda_{8v} = +\frac{1}{\sqrt{3}} >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 或 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.3 久期方程

线性代数中根据方程A $\vec{x} = \lambda\vec{x}$可推出$(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})\vec{x} = 0$，要使$\vec{x}$有非零解，则$|\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}| = 0$。而如果取$(\vec{\iota}, \vec{\jmath}, \vec{k})$为基底，那么得到的特征向量$\vec{x}$可直接用基底线性表示，其系数为$\lambda_i$。

将其应用在量子力学中不含时的薛定谔方程$\mathrm{H}\psi = \mathrm{E}\psi$，那么某个定态薛定谔方程为可以写为

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n，\mathrm{n} = 1,2 \ldots$$

将其变形，得

$$(\widehat{H}-\mathrm{E})\psi=0$$

由本征函数的完备性可知

$$\psi=\sum_{n} c_n\psi_n\,,(\mathrm{n}=1,2\ldots)$$

$$=(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$$

那么，

$$(\widehat{H}-\mathrm{E})(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=0$$

方程左右两边同时乘以ψ_1^*，

$$\psi_1^*(\widehat{H}-\mathrm{E})(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=0$$

$$\psi_1^*(\widehat{H}-\mathrm{E})(C_1\psi_1+C_2\psi_2+\cdots+C_n\psi_n)=0$$

$$C_1[\psi_1^*\widehat{H}\psi_1-\psi_1^*\mathrm{E}\psi_1]+C_2[\psi_1^*\widehat{H}\psi_2-\psi_1^*\mathrm{E}\psi_2]+\cdots+C_n[\psi_1^*\widehat{H}\psi_n-\psi_1^*\mathrm{E}\psi_n]=0$$

由波函数的正交归一性可得，

$$C_n\psi_1^*\mathrm{E}\psi_n=0，\mathrm{n}\neq 1$$

令

$$H_{ij}=\psi_i^*\widehat{H}\psi_j$$

则

$$(H_{11}-E)C_1+H_{12}C_2+\cdots+H_{1n}C_n=0$$

同理，分别在等式两边同时乘以ψ_2^*，ψ_3^*、⋯，ψ_n^*，

可以得到

$$H_{21}C_1+(H_{22}-E)C_2+\cdots+H_{2n}C_n=0$$
$$\cdots$$
$$H_{n1}C_1+H_{n2}C_2+\cdots+(H_{nn}-E)C_n=0$$

将其写成齐次线性方程组

$$\begin{cases}(H_{11}-E)C_1+H_{12}C_2+\cdots+H_{1n}C_n=0\\H_{21}C_1+(H_{22}-E)C_2+\cdots+H_{2n}C_n=0\\\cdots\\H_{n1}C_1+H_{n2}C_2+\cdots+(H_{nn}-E)C_n=0\end{cases}$$

要使得$(C_1, C_2, \ldots, C_n)$不为零向量，那么该方程组有非零解的充分必要条件是系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} H_{11}-E & H_{22} & \ldots & H_{22} \\ H_{22} & H_{22}-E & \ldots & H_{22} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ H_{22} & H_{22} & \ldots & H_{22}-E \end{vmatrix} = 0$$

此方程称为久期方程，而该方程组由系数所构成的行列式称为久期行列式。

4 特征值与特征向量的另类求解方法

4.1 另类求解方法

4.1.1 用矩阵的初等变换求特征值与特征向量[6]

方法：

（1）对方阵 A，设

$$f_1(\lambda)=(\lambda E-A^T)$$

对 $(f_1(\lambda)\quad E_n)$ 作初等行变换，化成

$$(\mathrm{D}(\lambda)\quad P(\lambda))$$

其中$\mathrm{D}(\lambda)$ 为上三角阵，则$\mathrm{D}(\lambda)$主对角线上的元素乘积的λ的多项式的根即为 A 的特征根λ_i

（2）对矩阵 A 的任一特征根λ_i代入$(\mathrm{D}(\lambda)\quad P(\lambda))$

若$\mathrm{D}(\lambda_i)$中非零行向量构成一满秩矩阵，则$\mathrm{D}(\lambda_i)$行向量中零向量所对应的$\mathrm{P}(\lambda_i)$中的行向量ξ_i即为λ_i的特征向量；否则继续施行初等行变换，使得$\mathrm{D}(\lambda_i)$中非零行向量构成一满秩矩阵，则$\mathrm{D}(\lambda_i)$中零行向量所对应的$\mathrm{P}(\lambda_i)$中的行向量ξ_i即为λ_i的特征向量。

这种求解方法与课本上利用矩阵的初等变换求解的区别在于:

课本上利用矩阵的初等行变换解线性方程组，先将线性方程组的系数写成矩阵，将矩阵化成行最简形后，可以得到基础解系，随后可写出特征向量；而直接利用矩阵的初等变换求解特征值与特征向量这一方法主要是对矩阵进行初等变换，使包含特征值的矩阵构成一满秩矩阵后，可以利用满秩矩阵的性质直接写出特征值，再将特征值代入变换后的矩阵中，写出特征向量。

例 3 求矩阵$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$的特征值与特征向量

解：

$$\begin{aligned}(f(\lambda)\quad E_3)&=\begin{pmatrix}\lambda+2&0&4&1&0&0\\-1&\lambda-2&-1&0&1&0\\-1&0&\lambda-3&0&0&1\end{pmatrix}\\&\sim\begin{pmatrix}1&2-\lambda&1&0&-1&0\\1&0&3-\lambda&0&0&-1\\\lambda+2&0&4&1&0&0\end{pmatrix}\\&\sim\begin{pmatrix}1&2-\lambda&1&0&-1&0\\0&\lambda-2&2-\lambda&0&1&-1\\0&(\lambda+2)(\lambda-2)&2-\lambda&1&\lambda+2&0\end{pmatrix}\\&\sim\begin{pmatrix}1&2-\lambda&1&0&-1&0\\0&\lambda-2&2-\lambda&0&1&-1\\0&0&(\lambda-2)(\lambda+1)&1&0&\lambda+2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由此可得特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$

当$\lambda = 2$时，

$$(\mathrm{D}(2) \quad P(2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

则特征向量为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

当$\lambda = -1$时，

$$(\mathrm{D}(-1) \quad P(-1)) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

特征向量为

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将所得特征向量进行施密特正交化，

令

$$b_1 = p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = p_2 - \frac{[p_2, b_1]}{[b_1, b_1]} b_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = p_3 - \frac{[p_3, b_1]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[p_3, b_2]}{[b_2, b_2]} b_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{3} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 4　求矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$的特征值与特征向量

解：

$$(f(\lambda) \quad E_4)=\begin{pmatrix}\lambda&0&0&-1&1&0&0&0\\0&\lambda&-1&0&0&1&0&0\\0&-1&\lambda&0&0&0&1&0\\-1&0&0&\lambda&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-\lambda&0&0&0&-1\\0&1&-\lambda&0&0&0&-1&0\\0&\lambda&-1&0&0&1&0&0\\\lambda&0&0&-1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-\lambda&0&0&0&-1\\0&1&\lambda&0&0&0&-1&0\\0&0&\lambda^2-1&0&0&1&\lambda&0\\0&0&0&\lambda^2-1&1&0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

由此可得特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=\lambda_4=1$

当$\lambda=-1$时，

$$(D(-1) \quad P(-1))=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0&0&-1\\0&1&-1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1&0&0&-1\end{pmatrix}$$

则特征向量为

$$p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \ p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

当$\lambda=1$时，

$$(D(1) \quad P(1))=\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0&0&0&-1\\0&1&1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

则特征向量为

$$p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \ p_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

4.1.2 另类求解公式及理解

$$|v_{ij}|^2 \prod_{k=1,k\neq i}^{n} \left(\lambda_i(A) - \lambda_k(A)\right) = \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_i(A) - \lambda_k(M_j))$$

$$v_{ij} = \pm \sqrt{\frac{\prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_i(A) - \lambda_k(M_j))}{\prod_{k=1,k\neq i}^{n} (\lambda_i(A) - \lambda_k(A))}}$$

这是三个研究粒子物理学的科学家以及大名鼎鼎的数学家陶哲轩等人在 2019 年提出的利用新的方法[7]求特征向量，不需要解齐次线性方程组，即已知特征值，一个方程式就可以求出特征向量。公式中，v_{ij}是特征值λ_i对应特征向量的第j个元素，$\lambda_i(A)$为矩阵A的第i个特征向量，M_j为是矩阵A的第j个余子式，$\lambda_k(M_j)$则是该主子式的第k个特征值。需要注意的是，特征向量的平方才是确定的值，而特征向量本身前面有正负号需要具体判定才行。

在线性代数中，特征值和特征向量都是矩阵的本质。将矩阵A看成n维线性空间下某个线性变换，那么线性变换的某个变化方向就是某个对应的特征值

如果将矩阵 A 和它的特征值λ_i分别比作运动和运动的速度，那么，特征向量p_i就是运动的方向。特征向量p_i在某个矩阵 A 的作用下作伸缩运动，而运动后的结果表现为伸长还是缩短则由特征值λ_i确定。如果$\lambda_i < 0$，那么特征值λ_i所对应的所有特征向量p_i都将反向延长；如果$0 < \lambda_i < 1$，那么特征值λ_i所对应的所有特征向量p_i缩短；如果$\lambda_i > 1$，那么特征值λ_i所对应的所有特征向量p_i都变长。

其次，在线性代数[1]中，左乘一个初等矩阵是对应着进行一次初等行变换，右乘一个初等矩阵对应进行一次初等列变换，实际的作用体现在对常规坐标系进行了迁移。那么，对于普通三维坐标系下的向量x，它在矩阵 A 描述的线性空间中表示与其本身仅进行拉伸或缩放的效果相同，而满足这种特殊性的矩阵x就是特征矩阵，则特征值就对应伸缩量。

所以对于方程$\mathrm{Ax} = \lambda\mathrm{x}$就可以理解为向量x在几何空间中经过矩阵A的线性变换后得到向量λx。由此可知，向量x经过矩阵A变换后，仅仅是大小发生变化，即大小伸缩了λ倍。总之，特征向量将复杂的矩阵乘法转换成了简单的数乘。

4.1.3 例题

例 5　计算矩阵$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$的特征值与特征向量

解：

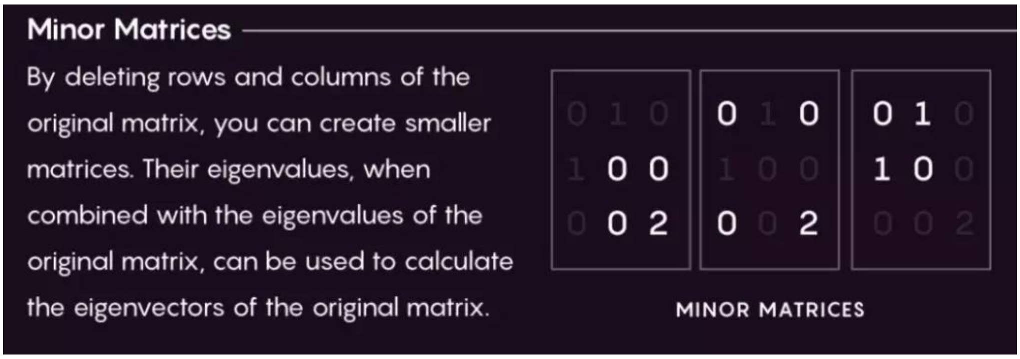

图 4. 1 将原矩阵的某一行和列删除得到小矩阵

将原始矩阵的某一行和列删除，可以得到原始矩阵的子矩阵。将子矩阵的特征值与原始矩阵的特征值相结合，可以用来计算原始矩阵的特征向量。

如对矩阵$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$来说，

$$|\mathrm{M}-\lambda\mathrm{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\1&-\lambda&0\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1)$$

所以$\lambda_1=2$，$\lambda_{,2}=1$，$\lambda_3=-1$

而 M 的$\mathrm{n}-1$阶子阵分别为

$M_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$

$M_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$

$M_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$

令

$$(\vec{A},\vec{B},\vec{C})=\begin{pmatrix}v_{11}&v_{21}&v_{31}\\v_{12}&v_{22}&v_{32}\\v_{13}&v_{23}&v_{33}\end{pmatrix}$$

由公式

$$|v_{ij}|^2\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\big(\lambda_i(A)-\lambda_k(A)\big)=\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_i(A)-\lambda_k(M_j))$$

可得

$$v_{11}{}^2\prod_{2}^{3}\big(\lambda_i(A)-\lambda_k(A)\big)=\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_i(A)-\lambda_k(M_j))$$

$$v_{11}{}^2(2-1)[2-(-1)]=(2-0)(2-2)$$

$$v_{11}=0$$

$$v_{12}{}^2(2-1)[2-(-1)]=(2-0)(2-2)$$
$$v_{12}=0$$
$$v_{13}{}^2(2-1)[2-(-1)]=(2-1)[2-(-1)]$$
$$v_{13}{}^2=1$$
$$v_{21}{}^2(1-2)[1-(-1)]=(1-0)(1-2)$$
$$v_{21}{}^2=\frac{1}{2}$$
$$v_{22}{}^2(1-2)[1-(-1)]=(1-0)(1-2)$$
$$v_{22}{}^2=\frac{1}{2}$$
$$v_{23}{}^2(1-2)[1-(-1)]=(1-1)[1-(-1)]$$
$$v_{23}=0$$
$$v_{31}{}^2(-1-2)(-1-1)=(-1-0)(-1-2)$$
$$v_{31}{}^2=\frac{1}{2}$$
$$v_{32}{}^2(-1-2)(-1-1)=(-1-0)(-1-2)$$
$$v_{32}{}^2=\frac{1}{2}$$
$$v_{33}{}^2(-1-2)(-1-1)=(-1-1)[-1-(-1)]$$
$$v_{33}=0$$

所以本征态中可取为

$$A=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

将其归一化可得

$$A=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

而

$$\mathrm{M}\vec{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}\vec{A}=2\vec{A},\lambda_1=2$$

$$\mathrm{M}\vec{B}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}\vec{B}=1\vec{B},\lambda_2=1$$

$$\mathrm{M}\vec{C}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}\vec{C}=-1\vec{C},\lambda_3=-1$$

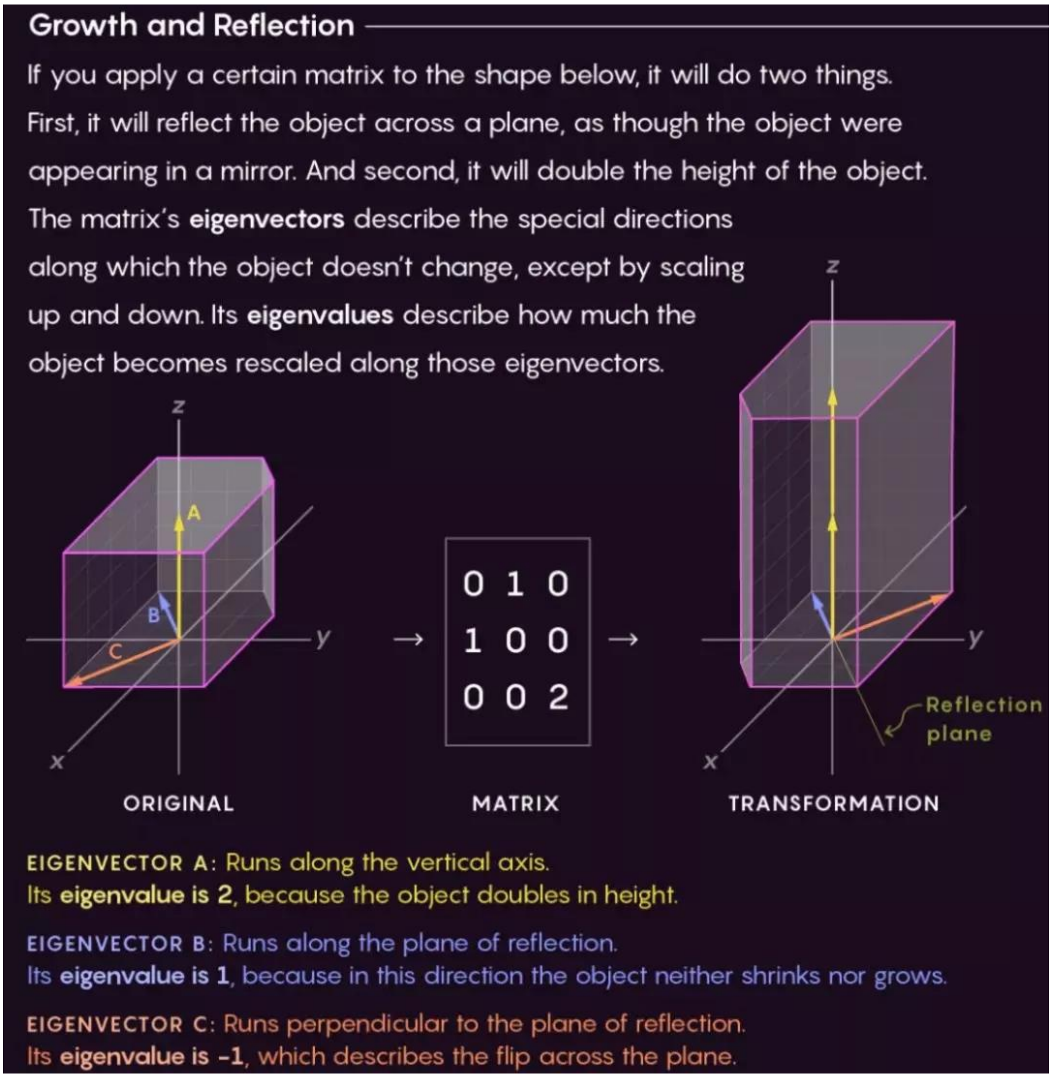

图 4.2 将矩阵 M 应用到以上形状的物理意义

如图所示，将这个矩阵应用到上面的形状上，它会做两件事。首先，它会将物体反射到平面上，就好像物体是出现在镜子里。第二，它将使物体的高度翻倍。矩阵的特征向量分解特殊方向对象不会改变的地方，除非通过缩放上下。特征值描述了对象将沿着这些特征向量重新标度。

特征向量 A：沿着垂直轴运行。它的特征值是 2，因为物体的高度加倍；

特征向量 B：沿着反射面运行。它的特征值是 1，因为在这个方向上，物体既不收缩也不生长；

特征向量 C：垂直于反射面。它的特征值是-1，它描述了平面上的翻转；

4.2 泡利矩阵

将新方法应用到求解泡利矩阵中，则

对于$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$来说，$\sigma_x$的特征多项式为

$$|\sigma_x - \nu E| = \begin{vmatrix} 0 - v & 1 \\ 1 & 0 - v \end{vmatrix} = (-v)^2 - 1 = v^2 - 1 = (v+1)(v-1)$$

所以σ_x的本征值为$v_1 = -1$，$v_2 = 1$

而σ_x的$\mathrm{n}-1$阶子阵分别为

$M_{\sigma_x 1} = [0]$，对应的特征值为$\lambda_1 = 0$

$M_{\sigma_x 2} = [0]$，对应的特征值为$\lambda_1 = 0$

$$(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}$$

由公式

$$|v_{ij}|^2 \prod_{k=1, k\neq i}^{n} \big(\lambda_i(A) - \lambda_k(A)\big) = \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_i(A) - \lambda_k(M_j))$$

可得

$$v_{11}{}^2 \prod_{2}^{2} \big(\lambda_i(A) - \lambda_k(A)\big) = \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_i(A) - \lambda_k(M_j))$$

$$v_{11}{}^2(-1-1) = -1 - 0$$

$$v_{11}^2 = \frac{1}{2}$$

$$v_{12}{}^2(-1-1) = -1 - 0$$

$$v_{12}^2 = \frac{1}{2}$$

$$v_{21}{}^2(1-(-1)) = 1 - 0$$

$$v_{21}^2=\frac{1}{2}$$
$$v_{22}{}^2(1-(-1))=1-0$$
$$v_{22}^2=\frac{1}{2}$$
本征态中可取为
$$|\mathrm{x}=-1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\binom{-1}{1}$$
$$|\mathrm{x}=+1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\binom{1}{1}$$
对于$\sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$和$\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，显然它们的本征值都是 1 和−1，

$M_{\sigma_y 1}=[0]$，对应的特征值为$\lambda_1=0$

$M_{\sigma_y 2}=[0]$，对应的特征值为$\lambda_1=0$
$$(\vec{y},\overrightarrow{y_2})=\begin{pmatrix}v_{11} & v_{21}\\ v_{12} & v_{22}\end{pmatrix}$$
由公式
$$|v_{ij}|^2\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\left(\lambda_i(A)-\lambda_k(A)\right)=\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_i(A)-\lambda_k(M_j))$$
可得
$$v_{11}{}^2\prod_{2}^{2}\left(\lambda_i(A)-\lambda_k(A)\right)=\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_i(A)-\lambda_k(M_j))$$
$$v_{11}{}^2(-1-1)=-1-0$$
$$v_{11}^2=\frac{1}{2}$$
$$v_{12}{}^2(-1-1)=-1-0$$
$$v_{12}^2=\frac{1}{2}$$
$$v_{21}{}^2(1-(-1))=1-0$$
$$v_{21}^2=\frac{1}{2}$$
$$v_{22}{}^2(1-(-1))=1-0$$
$$v_{22}^2=\frac{1}{2}$$
故本征态中可取为

$$|\mathrm{y}=-1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\binom{-i}{-1}$$

$$|\mathrm{y}=+1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\binom{-i}{1}$$

$M_{\sigma_z 1}=[-1]$，对应的特征值为$\lambda_1=-1$

$M_{\sigma_z 2}=[1]$，对应的特征值为$\lambda_1=1$

$$(\overrightarrow{z_1},\overrightarrow{z_2})=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}$$

由公式

$$|v_{ij}|^2\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\left(\lambda_i(A)-\lambda_k(A)\right)=\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_i(A)-\lambda_k(M_j))$$

可得

$$v_{11}{}^2\prod_{2}^{2}\left(\lambda_i(A)-\lambda_k(A)\right)=\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_i(A)-\lambda_k(M_j))$$
$$v_{11}{}^2(-1-1)=-1-(-1)$$
$$v_{11}^2=0$$
$$v_{12}{}^2(-1-1)=-1-1$$
$$v_{12}^2=1$$
$$v_{21}{}^2(1-(-1))=1-(-1)$$
$$v_{21}^2=1$$
$$v_{22}{}^2(1-(-1))=1-1$$
$$v_{22}^2=0$$

故本征态中可取为

$$|\mathrm{z}=-1>=\binom{0}{1}$$

$$|\mathrm{z}=+1>=\binom{1}{0}$$

4.3 盖尔曼矩阵

将新方法应用到求解盖尔曼矩阵中，则

对矩阵$\lambda_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$来说，$\lambda_1$的特征多项式为

$$|\lambda_1-v\mathrm{E}|=\begin{vmatrix} 0-v & 1 & 0 \\ 1 & 0-v & 0 \\ 0 & 0 & 0-v \end{vmatrix}$$

$$= (-v)^3 - (-v)$$
$$= (-v)(v^2 - 1)$$
$$= (-v)(v+1)(v-1)$$

所以λ_1的本征值为$v_1 = -1$，$v_2 = 0$，$v_3 = 1$

而λ_1的$\mathrm{n}-1$阶子阵分别为

$M_{\lambda_1 1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$M_{\lambda_1 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$M_{\lambda_1 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1 = -1$，$\lambda_{,2} = 1$

令

$$\left(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\right) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{pmatrix}$$

由公式

$$|v_{ij}|^2 \prod_{k=1, k\neq i}^{n} \left(\lambda_i(A) - \lambda_k(A)\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\lambda_i(A) - \lambda_k(M_j)\right)$$

可得

$${v_{11}}^2(-1-0)(-1-1) = (-1-0)(-1-0)$$
$$v_{11}^2 = \frac{1}{2}$$
$${v_{12}}^2(-1-0)(-1-1) = (-1-0)(-1-0)$$
$$v_{12}^2 = \frac{1}{2}$$
$${v_{13}}^2(-1-0)(-1-1) = (-1-(-1))(-1-1)$$
$$v_{13} = 0$$

本征态中可取为$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{1v} = -1 >= \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$${v_{21}}^2(0-(-1))(0-1) = 0-0$$
$$v_{21} = 0$$
$${v_{22}}^2(0-(-1))(0-1) = 0-0$$
$$v_{22} = 0$$
$${v_{23}}^2(0-(-1))(0-1) = (0-(-1))(0-1)$$
$$v_{23}^2 = 1$$

本征态中可取为

$$|\lambda_{1v}=0>=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$v_{31}{}^2(1-(-1))(1-0)=(1-0)(1-0)$$

$$v_{31}{}^2=\frac{1}{2}$$

$$v_{32}{}^2(1-(-1))(1-0)=(1-0)(1-0)$$

$$v_{32}{}^2=\frac{1}{2}$$

$$v_{33}{}^2\big(1-(-1)\big)(1-0)=(1-(-1))(1-1)$$

$$v_{33}=0$$

本征态中可取为$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{1v}=+1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

同理，对于$\lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$来说，$\lambda_2$的特征多项式为

$$|\lambda_2-v\mathrm{E}|=\begin{vmatrix}0-v&-i&0\\i&0-v&0\\0&0&0-v\end{vmatrix}$$
$$=(-v)(v+1)(v-1)$$

所以λ_2的本征值为$v_1=-1$，$v_2=0$，$v_3=1$

λ_2的$\mathrm{n}-1$阶子阵分别为

$M_{\lambda_2 1}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0$

$M_{\lambda_2 2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0$

$M_{\lambda_2 3}=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=-1$，$\lambda_{,2}=1$

根据新公式计算可得

$$v_{11}{}^2(-1-0)(-1-1)=(-1-0)(-1-0)$$

$$v_{11}^2=\frac{1}{2}$$

$$v_{12}{}^2(-1-0)(-1-1)=(-1-0)(-1-0)$$

$$v_{12}^2=\frac{1}{2}$$

本征态中可取为$\begin{pmatrix}-i\\-1\\0\end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{2v}=-1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-i\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$${v_{13}}^2(-1-0)(-1-1)=(-1-(-1))(-1-1)$$

$$v_{13}=0$$

$${v_{21}}^2(0-(-1))(0-1)=0-0$$

$$v_{21}=0$$

$${v_{22}}^2(0-(-1))(0-1)=0-0$$

$$v_{22}=0$$

$${v_{23}}^2(0-(-1))(0-1)=(0-(-1))(0-1)$$

$$v_{23}^2=1$$

本征态中可取为

$$|\lambda_{2v}=0>=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$${v_{31}}^2(1-(-1))(1-0)=(1-0)(1-0)$$

$${v_{31}}^2=\frac{1}{2}$$

$${v_{32}}^2(1-(-1))(1-0)=(1-0)(1-0)$$

$${v_{32}}^2=\frac{1}{2}$$

$${v_{33}}^2\big(1-(-1)\big)(1-0)=(1-(-1))(1-1)$$

$$v_{33}=0$$

本征态中可取为$\begin{pmatrix}-i\\1\\0\end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{2v}=+1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-i\\1\\0\end{pmatrix}$$

对于$\lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$来说，$\lambda_1$的特征多项式为

$$|\lambda_3-v\mathrm{E}|=\begin{vmatrix}1-v&0&0\\0&-1-v&0\\0&0&0-v\end{vmatrix}$$
$$=(-v)(1-v)(-1-v)$$

λ_3的本征值为$v_1=-1$，$v_2=0$，$v_3=1$

λ_3的$\mathrm{n}-1$阶子阵分别为

$M_{\lambda_3 1}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$

$M_{\lambda_3 2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$

$M_{\lambda_3 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1 = -1$，$\lambda_{,2} = 1$

根据新公式计算可得

$$v_{11}{}^2(-1-0)(-1-1) = (-1-(-1))(-1-0)$$
$$v_{11} = 0$$
$$v_{12}{}^2(-1-0)(-1-1) = (-1-0)(-1-1)$$
$$v_{12}^2 = 1$$
$$v_{13}{}^2(-1-0)(-1-1) = (-1-(-1))(-1-1)$$
$$v_{13} = 0$$

本征态中可取为

$$|\lambda_{3v} = -1 >= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{21}{}^2(0-(-1))(0-1) = (0-(-1))(0-0)$$
$$v_{21} = 0$$
$$v_{22}{}^2(0-(-1))(0-1) = (0-0)(0-1)$$
$$v_{22} = 0$$
$$v_{23}{}^2(0-(-1))(0-1) = (0-(-1))(0-1)$$
$$v_{23}^2 = 1$$

本征态中可取为

$$|\lambda_{3v} = 0 >= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_{31}{}^2\big(1-(-1)\big)(1-0) = (1-(-1))(1-0)$$
$$v_{31}{}^2 = 1$$
$$v_{32}{}^2(1-(-1))(1-0) = (1-0)(1-1)$$
$$v_{32} = 0$$
$$v_{33}{}^2\big(1-(-1)\big)(1-0) = (1-(-1))(1-1)$$
$$v_{33} = 0$$

本征态中可取为

$$|\lambda_{3v} = +1 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对于$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$来说，$\lambda_1$的特征多项式为

$$|\lambda_4 - v\mathrm{E}| = \begin{vmatrix} 0-v & 0 & 1 \\ 0 & 0-v & 0 \\ 1 & 0 & 0-v \end{vmatrix}$$
$$= (-v)^3 - (-v)$$

$$= (-v)(v^2 - 1)$$
$$= (-v)(v + 1)(v - 1)$$

所以λ_4的本征值为$v_1 = -1$，$v_2 = 0$，$v_3 = 1$

λ_4的$\mathrm{n} - 1$阶子阵分别为

$M_{\lambda_4 1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$M_{\lambda_4 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = 1$

$M_{\lambda_4 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1 = \lambda_{,2} = 0$

根据新公式计算可得

$$v_{11}{}^2(-1-0)(-1-1) = (-1-0)(-1-0)$$
$$v_{11}{}^2 = \frac{1}{2}$$
$$v_{12}{}^2(-1-0)(-1-1) = (-1-(-1))(-1-1)$$
$$v_{12} = 0$$
$$v_{13}{}^2(-1-0)(-1-1) = (-1-0)(-1-0)$$
$$v_{13}^2 = \frac{1}{2}$$

本征态中可取为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{4v} = -1 >= \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$v_{21}{}^2(0-(-1))(0-1) = 0-0$$
$$v_{21} = 0$$
$$v_{22}{}^2(0-(-1))(0-1) = (0-(-1))(0-1)$$
$$v_{22}^2 = 1$$
$$v_{23}{}^2(0-(-1))(0-1) = 0-0$$
$$v_{23} = 0$$

本征态中可取为

$$|\lambda_{4v} = 0 >= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{31}{}^2\big(1-(-1)\big)(1-0) = (1-0)(1-0)$$

$$v_{31}{}^2 = \frac{1}{2}$$

$$v_{32}{}^2\big(1-(-1)\big)(1-0) = (1-(-1))(1-1)$$

$$v_{32} = 0$$

$$v_{33}{}^2\big(1-(-1)\big)(1-0)=(1-0)(1-0)$$
$$v_{33}=0$$
本征态中可取为$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，将其归一化可得,
$$|\lambda_{4v}=+1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$
对于$\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}$来说，$\lambda_5$的特征多项式为
$$|\lambda_5-v\mathrm{E}|=\begin{vmatrix}0-v&0&-i\\0&0-v&0\\i&0&0-v\end{vmatrix}$$
$$=(-v)(v+1)(v-1)$$
所以λ_5的本征值为$v_1=-1$，$v_2=0$，$v_3=1$

λ_5的$\mathrm{n}-1$阶子阵分别为

$M_{\lambda_5 1}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0$

$M_{\lambda_5 2}=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$

$M_{\lambda_5 3}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=\lambda_{,2}=0$

根据新公式计算可得
$$v_{11}{}^2(-1-0)(-1-1)=(-1-0)(-1-0)$$
$$v_{11}{}^2=\frac{1}{2}$$
$$v_{12}{}^2(-1-0)(-1-1)=(-1-(-1))(-1-1)$$
$$v_{12}=0$$
$$v_{13}{}^2(-1-0)(-1-1)=(-1-0)(-1-0)$$
$$v_{13}^2=\frac{1}{2}$$
本征态中可取为$\begin{pmatrix}-i\\0\\-1\end{pmatrix}$，将其归一化可得,
$$|\lambda_{5v}=-1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-i\\0\\-1\end{pmatrix}$$
$$v_{21}{}^2(0-(-1))(0-1)=0-0$$
$$v_{21}=0$$
$$v_{22}{}^2(0-(-1))(0-1)=(0-(-1))(0-1)$$
$$v_{22}^2=1$$

$$v_{23}{}^2(0-(-1))(0-1)=0-0$$
$$v_{23}=0$$

本征态中可取为

$$|\lambda_{5v}=0>=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$v_{31}{}^2\big(1-(-1)\big)(1-0)=(1-0)(1-0)$$

$$v_{31}{}^2=\frac{1}{2}$$

$$v_{32}{}^2\big(1-(-1)\big)(1-0)=(1-(-1))(1-1)$$

$$v_{32}=0$$

$$v_{33}{}^2\big(1-(-1)\big)(1-0)=(1-0)(1-0)$$

$$v_{33}=0$$

本征态中可取为$\begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{5v}=+1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix}$$

对于$\lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$来说，$\lambda_6$的特征多项式为

$$|\lambda_6-v\mathrm{E}|=\begin{vmatrix}0-v&0&0\\0&0-v&1\\0&1&0-v\end{vmatrix}$$
$$=(-v)(v+1)(v-1)$$

λ_6的本征值为$v_1=-1$，$v_2=0$，$v_3=1$

λ_6的$\mathrm{n}-1$阶子阵分别为

$M_{\lambda_6 1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=1$

$M_{\lambda_6 2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0$

$M_{\lambda_6 3}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=\lambda_{,2}=0$

根据新公式计算可得

$$v_{11}{}^2(-1-0)(-1-1)=(-1-(-1))(-1-1)$$
$$v_{11}=0$$
$$v_{12}{}^2(-1-0)(-1-1)=(-1-0)(-1-0)$$

$$v_{12}^2=\frac{1}{2}$$
$$v_{13}{}^2(-1-0)(-1-1)=(-1-0)(-1-0)$$
$$v_{13}^2=\frac{1}{2}$$
本征态中可取为$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，将其归一化可得,
$$|\lambda_{6v}=-1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$
$$v_{21}{}^2(0-(-1))(0-1)=(0-(-1))(0-1)$$
$$v_{21}^2=1$$
$$v_{22}{}^2(0-(-1))(0-1)=0-0$$
$$v_{22}=0$$
$$v_{23}{}^2(0-(-1))(0-1)=0-0$$
$$v_{23}=0$$
本征态中可取为
$$|\lambda_{6v}=0>=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$v_{31}{}^2\big(1-(-1)\big)(1-0)=(1-(-1))(1-1)$$
$$v_{31}=0$$
$$v_{32}{}^2\big(1-(-1)\big)(1-0)=(1-0)(1-0)$$
$$v_{32}{}^2=\frac{1}{2}$$
$$v_{33}{}^2\big(1-(-1)\big)(1-0)=(1-0)(1-0)$$
$$v_{33}=0$$
本征态中可取为
$$|\lambda_{6v}=+1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$
对于$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix}$来说，$\lambda_7$的特征多项式为
$$|\lambda_7-v\mathrm{E}|=\begin{vmatrix}0-v&0&0\\0&0-v&-i\\0&i&0-v\end{vmatrix}$$
$$=(-v)(v+1)(v-1)$$
所以λ_7的本征值为$v_1=-1$，$v_2=0$，$v_3=1$

λ_7的$\mathrm{n}-1$阶子阵分别为

$M_{\lambda_7 1}=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=1$

$M_{\lambda_7 2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0$

$M_{\lambda_7 3}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=\lambda_{,2}=0$

根据新公式计算可得

$$v_{11}{}^2(-1-0)(-1-1)=(-1-(-1))(-1-1)$$
$$v_{11}=0$$
$$v_{12}{}^2(-1-0)(-1-1)=(-1-0)(-1-0)$$
$$v_{12}^2=\frac{1}{2}$$
$$v_{13}{}^2(-1-0)(-1-1)=(-1-0)(-1-0)$$
$$v_{13}^2=\frac{1}{2}$$

本征态中可取为$\begin{pmatrix}0\\ -i\\ -1\end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{7v}=-1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\ -i\\ -1\end{pmatrix}$$
$$v_{21}{}^2(0-(-1))(0-1)=(0-(-1))(0-1)$$
$$v_{21}^2=1$$
$$v_{22}{}^2(0-(-1))(0-1)=0-0$$
$$v_{22}=0$$
$$v_{23}{}^2(0-(-1))(0-1)=0-0$$
$$v_{23}=0$$

本征态中可取为

$$|\lambda_{7v}=0>=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$v_{31}{}^2\big(1-(-1)\big)(1-0)=(1-(-1))(1-1)$$

$$v_{31}=0$$

$$v_{32}{}^2\big(1-(-1)\big)(1-0)=(1-0)(1-0)$$

$$v_{32}{}^2=\frac{1}{2}$$

$$v_{33}{}^2\big(1-(-1)\big)(1-0)=(1-0)(1-0)$$

$$v_{33}=0$$

本征态中可取为$\begin{pmatrix}0\\-i\\1\end{pmatrix}$，将其归一化可得,

$$|\lambda_{7v}=+1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\-i\\1\end{pmatrix}$$

对于$\lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$来说，$\lambda_8$的特征多项式为

$$|\lambda_8-v\mathrm{E}|=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}-v&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}-v&0\\0&0&\frac{-2}{\sqrt{3}}-v\end{vmatrix}$$
$$=(\frac{1}{\sqrt{3}}-v)^2(\frac{-2}{\sqrt{3}}-v)$$

所以λ_8的本征值为$v_1=\frac{-2}{\sqrt{3}}$，$v_2=v_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$

λ_8的$\mathrm{n}-1$阶子阵分别为

$M_{\lambda_8 1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=\frac{-2}{\sqrt{3}}$，$\lambda_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$M_{\lambda_8 2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=\frac{-2}{\sqrt{3}}$，$\lambda_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$M_{\lambda_8 3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，对应的特征值为$\lambda_1=\lambda_{,2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

根据新公式计算可得

$$v_{11}{}^2\frac{1}{\sqrt{3}}(-2-1)(-2-1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(-2-(-2))(-2-1)$$
$$v_{11}=0$$
$$v_{12}{}^2\frac{1}{\sqrt{3}}(-2-1)(-2-1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(-2-(-2))(-2-1)$$
$$v_{12}=0$$
$$v_{13}{}^2\frac{1}{\sqrt{3}}(-2-1)(-2-1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(-2-1)(-2-1)$$
$$v_{13}^2=1$$

本征态中可取为

$$|\lambda_{8v}=\frac{-2}{\sqrt{3}}>=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$v_{21}{}^2\frac{1}{\sqrt{3}}(1-(-2))(1-1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1-(-2))(1-1)$$
$$v_{21}=0$$

$$v_{22}{}^{2}\frac{1}{\sqrt{3}}(1-(-2))(1-1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1-(-2))(1-1)$$
$$v_{22}=0$$
$$v_{23}{}^{2}\frac{1}{\sqrt{3}}(1-(-2))(1-1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1-1)(1-1)$$
$$v_{23}^{2}=0$$

本征态中可取为

$$|\lambda_{8v}=+\frac{1}{\sqrt{3}}>=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$v_{31}{}^{2}\frac{1}{\sqrt{3}}(1-(-2))(1-1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1-(-2))(1-1)$$
$$v_{31}=0$$
$$v_{32}{}^{2}\frac{1}{\sqrt{3}}(1-(-2))(1-1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1-(-2))(1-1)$$
$$v_{32}=0$$
$$v_{33}{}^{2}\frac{1}{\sqrt{3}}(1-(-2))(1-1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1-1)(1-1)$$
$$v_{33}^{2}=0$$

则本征态中可取为

$$|\lambda_{8v}=+\frac{1}{\sqrt{3}}>=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

4.4 对新方法的评价及意义

4.4.1 新方法与传统方法的比较及评价

利用传统方法求解特征值和特征向量在计算过程中需要借助行列式的相关性质和矩阵的相关运算，由特征方程求特征值是比较困难的，主要表现在计算量较大和计算过程复杂，存在明显缺陷，但是一定能够计算出结果，并且很容易理解。

利用矩阵的初等行变换求解时,只需对特征矩阵$(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E})$进行矩阵的初等行变换，在求对应的特征向量时，也只用进行矩阵运算，这种方法与传统方法相较，计算过程比较简单，而且运算规范、不易出错，但不一定能够计算出最终结果，并且不容易理解。

传统求解方法，先求出特征多项式，随后求解特征方程，将所得特征根带入齐次线性方程中解出非零解，这个非零解就是特征向量。这一方法求解特征向量是依据特征值求出的;而用矩阵的初等变换求解则是先将包含特征值的矩阵和单位矩阵组成的矩阵进行初等行变换，直到非零行向量构成满秩矩阵，则零向量所对应的行的行向量即为特征值对应的特征向量;

二者的不同之处在于，求解的原理不同，前者先解特征方程，求出特征根，再将特征值带入齐次线性方程组中求解特征向量，后者只利用初等行变换，先写出特征值，再

写出特征向量。

$$|v_{ij}|^2 \prod_{k=1,k\neq i}^{n} \left(\lambda_i(A) - \lambda_k(A)\right) = \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_i(A) - \lambda_k(M_j))$$

若要利用该公式计算某个n阶矩阵的特征向量，需要三个步骤：计算原矩阵的所有特征值；计算n个$n-1$阶子阵的所有特征值；确定特征向量分量符号；新方法的非凡之处在于，任何情况下，不需要知道矩阵中的任何元素，就可以计算出你想要的任何东西。且其计算结果为特征向量的元素的平方，与量子力学中波函数的平方，即玻恩的统计解释紧密联系，具有实际的应用价值。新方法是针对 Hermitian 阵而言，并非所有的方阵都适用。此外，虽然应用新公式求特征向量是可行的，但是便利与否则不能确定，因为仅仅是求范数就需要n^2个特征值，且特征值不能有重根，最后还需要确定正负号。此外，无论对原矩阵还是原矩阵的子矩阵来说，当特征值出现重复或者大小接近时，使用新公式求特征向量容易发生数值问题。

4.4.2 新方法的意义

利用新公式计算得到的结果$|v_{ij}|^2$表示特征值λ_i对应特征向量的第j个元素的平方，所以新方法很容易得到特征向量模的平方，且每个特征向量膜的平方和等于 1。将新公式应用在物理学中，可求得波函数ψ的模的平方$|\psi|^2$，而$\psi^*\psi = |\psi|^2$，这表示某一本征态出现的可能性，也称为几率，且所有几率相加等于 1，这与玻恩的统计诠释[9]有关联。而利用新公式可以很容易求得某一本征态出现的几率，这是新公式在物理学中的重要应用。

5 总结与展望

关于如何求解以及更加简单地求解特征值与特征向量这一问题，本文首先介绍了线性代数课本上所提到的传统求解，即先求特征值，再将所求的特征值代入齐次线性方程中解出对应的特征向量，并将二阶、三阶矩阵的求解应用到物理学中两类特殊矩阵中，得到了它们的本征值和本征向量。随后又将特征方程应用到量子力学中，利用齐次线性方程组是否有非零解的条件，推导得到了久期方程。此外，又介绍了两种新的求解方法求解特征值与特征向量，分别是利用矩阵的初等变换求特征值和利用新公式直接求解。然后将新公式计算得到的结果与利用Matlb程序得到的结果相比较，验证了公式的正确性。用矩阵的初等变换求特征值在计算过程中，有时碰巧完成了特征向量的计算，与传统方法相比计算过程更加简单。而新公式求解的结果是特征值所对应的特征向量中的元素的平方和，还需要进一步判定符号，但是所得结果却能很好地与物理学中的几率问题相联系，这无疑具有非常重要的实际意义。

通过对矩阵的特征值与特征向量的研究，我了解到很多课本以外的数学和物理知识，也深刻体会到物理和数学之间的紧密联系。而对于矩阵的特征值与特征向量的理论研究和应用探究，未来通过学者的不懈努力与探究，我相信这一理论将会更加成熟，同时随着科技的不断进步和发展，应用也将更加广泛。

参考文献

[1] 同济大学数学系.工程数学.线性代数[M].高等教育出版社，2014(06):120-138.

[2] 王秀芬.线性递推关系中特征值与特征向量的应用[J].潍坊学院学报,2004(04):36-37.

[3] 王蓉,廖小莲.特征值与特征向量及其应用案例[J].教育现代化,2018,5(27):258-261.

[4] 李林阳.特征值与特征向量在多元统计分析方法中的应用[J].数码世界,2019(05):55.

[5] 曾谨言.量子力学教程[M].科学出版社，2014,1.

[6] 汪庆丽.用矩阵的初等变换求矩阵的特征值与特征向量[J].岳阳师范学院学报(自然科学版),2001(03):12-14.

[7] DENTON P B, PARKE S J, TAO T, et al. Eigenvectors from eigenvalues: A survey of basic identity in linear algebra [J]. arXiv: 1908.03795v1 [math. RA] 10 Aug 2019.

[8] Mark Thomson. Modern Particle Physics. Cambridge University Press, 2013.

[9] 玻恩对波函数的统计解释[J].科学,2007,59(01):52.

附录

注：由于手算和计算机之间的不同，所得结果有误差，但它们得到的结果均化成小数后，小数点后六位都是相同的，故所得结果在误差允许的范围内是相同的。

985/1393 = 0.707106963388370423

$1/\sqrt{2}$ = 0.707106781186547524

-1351/1170 = -1.1547008547008547

$-2/\sqrt{3}$ = -1.1547008547008547

780/1351 = 0.577350111028867505

$1/\sqrt{3}$ = 0.577350269189625764

```
>> help eig
eig - 特征值和特征向量
    此 MATLAB 函数 返回一个列向量，其中包含方阵 A 的特征值。
    e = eig(A)
    [V,D] = eig(A)
    [V,D,W] = eig(A)
    e = eig(A,B)
    [V,D] = eig(A,B)
    [V,D,W] = eig(A,B)
    [___] = eig(A,balanceOption)
    [___] = eig(A,B,algorithm)
    [___] = eig(___,eigvalOption)
    另请参阅 balance, condeig, eigs, hess, qz, schur
    eig 的文档
    名为 eig 的其他函数
>> format rat
>> x=[0,1,0;1,0,0;0,0,2]
x =
       0              1              0
       1              0              0
       0              0              2
```

```
>> [m,n]=eig(x)
m =
    -985/1393        985/1393           0
    985/1393       985/1393             0
        0               0               1
n =
      -1                0               0
       0                1               0
       0                0               2
>> diag(n)
ans =
      -1
       1
       2
```

这是矩阵$M=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$的特征值$\lambda_1=-1$，$\lambda_{,2}=1$，$\lambda_3=2$与特征向量

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

```
>> x=[0,1;1,0]
x =
       0                1
       1                0
>> [m,n]=eig(x)
m =
    -985/1393        985/1393
     985/1393        985/1393
```

```
n =
      -1           0
       0           1
>> diag(n)
ans =
      -1
       1
```

这是矩阵$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$的特征值$v_1 = -1$，$v_2 = 1$与特征向量

$$|\mathrm{x} = -1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{x} = +1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
>> x=[0,-i;i,0]
x =
       0       +    0i            0       -    1i
       0       +    1i            0       +    0i
>> [m,n]=eig(x)
m =
       0       -  985/1393i          0       -  985/1393i
   -985/1393   +    0i            985/1393   +     0i
n =
      -1           0
       0           1
>> diag(n)
ans =
      -1
       1
```

这是矩阵$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$的特征值$v_1 = -1$，$v_2 = 1$与特征向量

$$|\mathrm{y} = -1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{y}=+1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}$$

```
>> x=[1,0;0,-1]
x =
        1              0
        0             -1
>> [m,n]=eig(x)
m =
        0              1
        1              0
n =
       -1              0
        0              1
>> diag(n)
ans =
       -1
        1
```

这是矩阵$\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$的特征值$v_1=-1$，$v_2=1$与特征向量

$$|\mathrm{z}=-1>=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{z}=+1>=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

```
>> x=[0,1,0;1,0,0;0,0,0]
x =
  列 1 至 2
        0              1
        1              0
        0              0
  列 3
        0
```

```
         0
         0
>> [m,n]=eig(x)
m =
  列 1 至 2
    -985/1393           0
     985/1393           0
         0              1
  列 3
     985/1393
     985/1393
         0
n =
  列 1 至 2
        -1              0
         0              0
         0              0
  列 3
         0
         0
         1
>> diag(n)
ans =
        -1
         0
         1
```

这是矩阵$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的特征值$v_1 = -1$，$v_2 = 0$，$v_3 = 1$与特征向量

$$|\lambda_{1v} = -1 >= \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{1v} = 0 >= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{1v} = +1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

```
>> x=[0,-i,0;i,0,0;0,0,0]
x =
  列 1
         0           +    0i
         0           +    1i
         0           +    0i
  列 2
         0           -    1i
         0           +    0i
         0           +    0i
  列 3
         0           +    0i
         0           +    0i
         0           +    0i
>> [m,n]=eig(x)
m =
  列 1
         0           -  985/1393i
     -985/1393       +    0i
         0           +    0i
  列 2
         0           +    0i
         0           +    0i
         1           +    0i
  列 3
         0           -  985/1393i
      985/1393       +    0i
         0           +    0i
n =
```

列 1 至 2

```
    -1          0
     0          0
     0          0
```

列 3

```
     0
     0
     1
```

```
>> diag(n)
ans =
    -1
     0
     1
```

这是矩阵$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的特征值$v_1 = -1$，$v_2 = 0$，$v_3 = 1$与特征向量

$$|\lambda_{2v} = -1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{2v} = 0 >= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{2v} = +1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
>> x=[1,0,0;0,-1,0;0,0,0]
x =
```

列 1 至 2

```
     1          0
     0         -1
     0          0
```

列 3

```
     0
     0
```

```
    0
>> [m,n]=eig(x)
m =
  列 1 至 2
    0         0
    1         0
    0         1
  列 3
    1
    0
    0
n =
  列 1 至 2
   -1         0
    0         0
    0         0
  列 3
    0
    0
    1
>> diag(n)
ans =
   -1
    0
    1
```

这是矩阵$\lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$的特征值$v_1=-1$，$v_2=0$，$v_3=1$与特征向量

$$|\lambda_{3v}=-1>=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{3v}=0>=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{3v}=+1>=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

```
>> x=[0,0,1;0,0,0;1,0,0]
x =
         0                  0                  1
         0                  0                  0
         1                  0                  0
>> [m,n]=eig(x)
m =
      985/1393              0              985/1393
         0                 -1                 0
     -985/1393              0              985/1393
n =
        -1                  0                  0
         0                  0                  0
         0                  0                  1
>> diag(n)
ans =
        -1
         0
         1
```

这是矩阵$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$的特征值$v_1=-1$，$v_2=0$，$v_3=1$与特征向量

$$|\lambda_{4v}=-1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{4v}=0>=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{4v}=+1>=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

```
>> x=[0,0,-i;0,0,0;i,0,0]
```

```
x =
        0  +  0i              0  +  0i              0     -    1i
        0  +  0i              0  +  0i              0     +    0i
        0  +  1i              0  +  0i              0     +    0i
>> [m,n]=eig(x)
m =
        0- 985/1393i        0 +0i              0  - 985/1393i
        0 + 0i              0 - 1i             0 +  0i
    -985/1393 + 0i          0 + 0i           985/1393 + 0i
n =
       -1              0              0
        0              0              0
        0              0              1
>> diag(n)
ans =
       -1
        0
        1
```

这是矩阵$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$的特征值$v_1 = -1$，$v_2 = 0$，$v_3 = 1$与特征向量

$$|\lambda_{5v} = -1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{5v} = 0 >= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{5v} = +1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
>> x=[0,0,0;0,0,1;0,1,0]
x =
        0              0              0
        0              0              1
```

```
         0                   1                    0
>> [m,n]=eig(x)
m =
         0                   1                    0
    -985/1393                0                985/1393
     985/1393                0                985/1393
n =
        -1                   0                    0
         0                   0                    0
         0                   0                    1
>> diag(n)
ans =
        -1
         0
         1
```

这是矩阵$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$的特征值$v_1 = -1$，$v_2 = 0$，$v_3 = 1$与特征向量

$$|\lambda_{6v} = -1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{6v} = 0 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{6v} = +1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
>> x=[0,0,0;0,0,-i;0,i,0]
x =
         0   +   0i          0 + 0i          0   +   0i
         0   +   0i          0 + 0i          0   -   1i
         0   +   0i          0 + 1i          0   +   0i
>> [m,n]=eig(x)
m =
```

```
        0 +     0i              1   +  0i               0   +  0i
        0 -  985/1393i          0   +  0i               0   -  985/1393i
        -985/1393 + 0i          0   +  0i               985/1393 + 0i
n =
       -1                0                 0
        0                0                 0
        0                0                 1
>> diag(n)
ans =
       -1
        0
        1
```

这是矩阵$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$的特征值$v_1 = -1$，$v_2 = 0$，$v_3 = 1$与特征向量

$$|\lambda_{7v} = -1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{7v} = 0 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{7v} = +1 >= \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
>> x=[1/sqrt(3),0,0;0,1/sqrt(3),0;0,0,-2/sqrt(3)]
x =
      780/1351           0                 0
        0             780/1351             0
        0                0             -1351/1170
>> [m,n]=eig(x)
m =
        0                0                 1
        0                1                 0
        1                0                 0
```

```
n =
    -1351/1170          0                0
         0          780/1351             0
         0              0            780/1351
>> diag(n)
ans =
    -1351/1170
      780/1351
      780/1351
```

这是矩阵$\lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$的特征值$v_1=\frac{-2}{\sqrt{3}}$，$v_2=v_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$与特征向量

$$|\lambda_{8v}=\frac{-2}{\sqrt{3}}>=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{8v}=+\frac{1}{\sqrt{3}}>=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}或\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

致谢

时光飞逝，岁月荏苒，转眼间我的大学生活也将接近尾声。回首大学四年，从大一的懵懂无畏到即将毕业的彷徨迷惘，一路走来，伴着酸甜苦辣咸，但很幸运，有陪伴我的朋友、关爱我的老师和关心我的家人，因为有你们，我的大学生活没有单调无助，反而丰富多彩。

转眼间到了大四的论文写作之际，在这个漫长的过程中，室友们和我一起挑灯夜战，一起讨论，互相帮助；家人和朋友给予我很多关心和鼓励；老师和同学给我很多关爱和指导。在此，我要向你们表达我的谢意。

首先，我要感谢我的指导老师程才, 程老师学识渊博，治学严谨。从最初的开题报告到提供相关论文参考资料，再到确定论文的框架与论文的撰写，直至最终的定稿，程老师都给了我很多的指导和建议。

其次，我要感谢物理与电子工程学院的所有领导和老师，因为有他们的悉心教导和无微不至的关怀，所以四年中我不仅学到了很多专业知识，包括力学、热学、光学、电磁学等等，还感受到了师生之间浓浓的情谊。

最后，感谢我的同学和朋友们的一直以来的陪伴，感谢你们对我的包容和关心，虽然即将分别，踏上各自的旅途，但我永远不会忘记你们。另外，我还要感谢我的亲人，感谢你们一直以来对我的支持和鼓励，是你们的爱和关心让我更加勇敢和坚定。

毕业在即，在今后的工作和生活中，我会带着老师的教诲、朋友的祝福、家人的关心继续不懈努力和奋斗。