2023级代数与几何期末考试(回忆版)

2023年12月29日 10:30~12:30

回忆:limbo,寅默,Hdao,群u,群u,群u群u,群u,群u,…… 排版:一块肥皂

本试卷考试时间120分钟,共17题,共50分,共4页.

注意事项:

1. 答题前,考生先将自己的学院、姓名、学号填写清楚.
2. 请按照题号在试卷各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸上答题无效.
3. 作图可先使用铅笔画出,确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.
4. 保持试卷清洁,不要弄破.
5. 考试结束后,将试卷交回.

注:

本试卷以det代指行列式,rank代指秩,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$代指矩阵的转置,$\boldsymbol{A}^{-1}$代指矩阵的逆,$\boldsymbol{A}^{*}$代指矩阵的伴随.

一、填空题(本大题共6小题,每小题2分,共12分. 在题中所给横线填上正确答案)

1. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}^{2023}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2024}=$ ______.

2. 在空间直角坐标系$O-xyz$,点$A(1,0,1),B(1,1,1),C(1,2,7)$,以$O,A,B,C$为顶点的四面体体积为 ______.

3. $\boldsymbol{A}$是3阶方阵,$\boldsymbol{X}$是3维列向量,$\boldsymbol{X},\boldsymbol{AX},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$线性无关并构成了$\mathbb{R}^3$的一组基,则$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$在该基下的坐标为 ______.

4. 在空间直角坐标系$O-xyz$下,$2x^2+4y^2-3z=0$表示的二次曲面为 ______.

5. 3阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{bmatrix}$,3维列向量$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$,若$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$无解,则实数$a$的值为 ______.

6. 若3阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&k\end{bmatrix}$正定,则实数$k$的取值范围为 ______.

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

7. 已知向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 线性相关，且矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\boldsymbol{P}$，则下列说法正确的是

A. $\boldsymbol{P}$ 列满秩　　B. $\boldsymbol{P}$ 不列满秩

C. $\boldsymbol{P}$ 行满秩　　D. $\boldsymbol{P}$ 不行满秩

8. 下列说法错误的是

A. n 维向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关，对其正交化后得到 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$，则 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)$ 是正交矩阵

B. 若 $\boldsymbol{A}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是正交矩阵，则 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关

C. 已知向量组 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 可以被向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 线性无关，则 $s\leqslant r$

D. 有一组 n 维向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，其为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基的充要条件为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关

9. 下列说法正确的是

A. 二次型的标准型到规范型的变换唯一

B. 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价

C. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值均对应相等，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似

D. 正定矩阵的逆矩阵也是正定矩阵

10. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为四阶方阵，$\det(\boldsymbol{A})=2$，则 $\det(-\boldsymbol{A}^*)=$

A. -8　　B. 8　　C. -16　　D. 16

11. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是

A. $\det(\boldsymbol{A})=0$

B. 其所有解构成线性空间

C. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

D. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷解

12. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价，则下列说法错误的是

A. 假设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为方阵，则 $\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{B})$

B. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 能化成相同的等价标准型

C. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$

D. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 具有相同的形状

三、解答题(本大题共 5 小题,共 26 分. 解答应写出文字说明、证明过程和演算步骤)

13.(5 分)已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 4 阶实方阵,且 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\-1&0&1&0\\2&0&0&8\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$,求 $\boldsymbol{B}^*$.

14.(5 分)已知三维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}5\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\t\\1\end{bmatrix}$,且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$.

(1)求实数 t 的值;

(2)设向量空间 $\boldsymbol{V}=\operatorname{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,求 $\mathbb{R}^3$ 的一组基,其中要包含 $\boldsymbol{V}$ 的基底.

15.（5 分）已知 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}\frac{31}{6}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{7}{6}\\ 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}5\\ \frac{2}{3}\\ -1\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ 均在 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解空间中，且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&2&2&b\\0&5&2&1\\3&d&7&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a\\-c\\c\\12\end{bmatrix}$，求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的所有解.

16.（5 分）已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素和均为 -2，且 $\operatorname{rank}(3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=1$，试求 $\boldsymbol{A}^*$ 的所有特征值及对应的特征向量.

17.（6 分）已知 n 元二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 的正负惯性指数之和为 2，且有 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

（1）若 $n=4$，当 k 取何值时，$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 与单位阵合同；

（2）若 $n=4$，求 f 的规范型；

（3）若 $n=3$，试判断 $f=-2$ 表示何种二次曲面.