Méthode de Gauss

1 Écriture du script

Il s'agit d'écrire un programme sous Python capable de résoudre un système de Cramer. Comme nous l'avons vu en cours, il s'agit essentiellement de réaliser trois tâches :

— Rechercher un pivot dans une matrice triangulaire

— Échanger des lignes

— Effectuer une opération de transvection $L_i \leftarrow L_i + kL_j$

Exercice 1.1. *Écrire une fonction chercher _ pivot* (A, i) *qui reçoit en paramètre une matrice* A *et un indice* i *et qui renvoie un indice* $j \geq i$ *tel que* $|a_{j,i}|$ *soit maximal.*

Exercice 1.2. *Écrire une fonction* ***echange_lignes (A, i, j)*** *qui :*

— *reçoit en paramètres une matrice* A *et deux entiers naturels* i *et* j

— *renvoie une matrice dont les lignes sont les mêmes que celles de* A *sauf les* $i^{\text{ème}}$ *et* $j^{\text{ème}}$ *lignes qui sont permutées.*

Exercice 1.3. *Écrire une fonction* ***transvection (A, i, j, k)*** *qui :*

— *reçoit en paramètres une matrice* A*, deux entiers naturels* i *et* j*, ainsi qu'un nombre réel* k

— *renvoie une matrice dont les lignes sont les mêmes que celles de* A *à l'exception de la* $i^{\text{ème}}$ *ligne qui vaudra* $L_i \leftarrow L_i + kL_j$

Exercice 1.4. *Écrire une fonction* ***remontee (A)*** *qui :*

— *reçoit en paramètre une matrice triangulaire inférieure* A *(qui aura* n *lignes et* $n+1$ *colonnes, pourquoi ?)*

— *renvoie une matrice* X *à* n *lignes dont les coefficients sont les coordonnées de la solution du système.*

Exercice 1.5. *Écrire une fonction* ***resolution(A, Y)*** *qui :*

— *reçoit en paramètre une matrice carrée* A *et une matrice colonne* Y *(* A *et* Y *ont le même nombre de lignes).*

— *Renvoie une matrice colonne* X *telle que* $AX = Y$

Exercice 1.6. *Résoudre le système* $\begin{cases} 2x+2y-3z=2 \\ -2x-y-3z=-5 \\ 6x+4y+4z=16 \end{cases}$ *en utilisant la fonction resolution* (A, Y).

Vérifier le résultat par le calcul.

Exercice 1.7. 1. *Que vaut* $12\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-1$ *? Qu'en pense Python ?*

2. *Résoudre « à la main » le système suivant :* $\begin{cases} x+\frac{1}{4}y+z=0 \\ x+\frac{1}{3}y+2z=0. \\ y+12z=1 \end{cases}$
3. *Résoudre ce système en utilisant la fonction* ***resolution (A, Y)****. Que remarque-t-on ? Pourquoi ?*

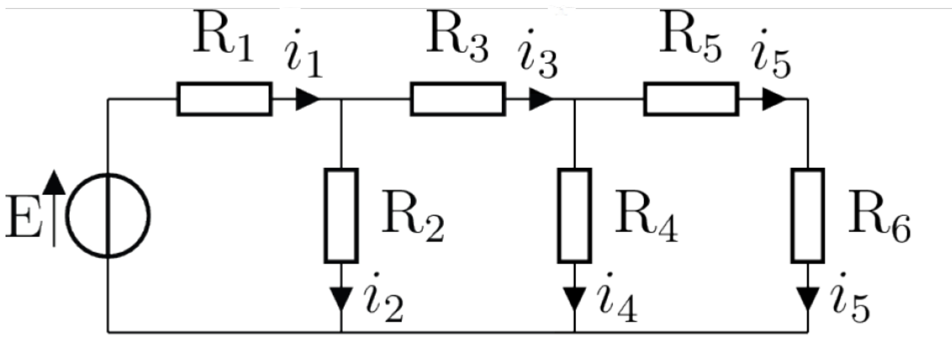
Exercice 1.8. 1. *Résoudre « à la main » le système suivant :*

$$\begin{cases} x+\left(10^{15}+1\right)y+z=1 \\ x+\left(1+10^{-15}\right)y+2z=0 \\ 10^{15}y+z=0 \end{cases}$$

2. *Résoudre ce système en utilisant la fonction resolution* (A, Y).
3. *Que remarque-t-on ? Pourquoi ?*

2 Application

Exercice 2.1. *Réseau en électrocinétique*



On considère le circuit ci-dessus où les trois lois des mailles et deux lois des nœuds s'écrivent :

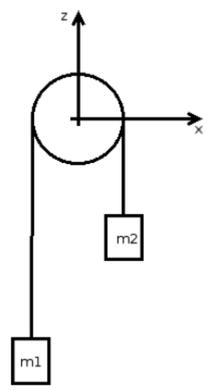
$\mathrm{E}=\mathrm{R}_1 i_1+\mathrm{R}_2 i_2 \quad \mathrm{R}_2 i_2=\mathrm{R}_3 i_3+\mathrm{R}_4 i_4$
$\mathrm{R}_4 i_4=\mathrm{R}_5 i_5+\mathrm{R}_6 i_5 \quad i_1=i_2+i_3$ *et* $i_3=i_4+i_5$.

Les valeurs des paramètres E *et* R *sont respectivement :*

$$\mathrm{E} = 5,0 \text{ V}, \mathrm{R}_1 = 100\Omega, \mathrm{R}_2 = \mathrm{R}_3 = 220\Omega, \textit{ et } \mathrm{R}_4 = \mathrm{R}_5 = \mathrm{R}_6 = 100\Omega.$$

Écrire une fonction ***reseau_electrocinetique ()*** *qui renvoie les valeurs des 5 courants* i_1 *à* i_5*.*

Exercice 2.2. *On considère le système mécanique ci-dessous :*



où $\mathrm{I}_\Delta = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, m_1 = 100 \text{ g}$*,* $m_2 = 200$ *g et* $\mathrm{R} = 10$ cm *(rayon de la poulie).*

Le but est de déterminer les tensions T_1 *et* T_2 *ainsi que l'accélération angulaire* $\ddot{\theta}$ *de la poulie.*
L'écriture des deux relations fondamentales de la dynamique pour les deux masses ainsi que du théorème du moment cinétique scalaire pour la poulie donne les équations

$$-m_1\mathrm{R}\ddot{\theta} = \mathrm{T}_1 - m_1 g \quad m_2\mathrm{R}\ddot{\theta} = \mathrm{T}_2 - m_2 g \quad \textit{et} \quad \mathrm{I}_\Delta\ddot{\theta} = \mathrm{R}\left(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2\right)$$

Écrire une fonction ***poulie_a_deux_masses()*** *qui renvoie les valeurs de* $\ddot{\theta}, \mathrm{T}_1$ *et* T_2*, respectivement en rad.* s^{-2}*, newton et newton.*
On rappelle que $g = 9,81$ m.s^{-2}.