Chap.7 : Probabilités sur un univers dénombrable

Table des matières

En première année, vous avez travaillé uniquement sur des expériences dont le nombre d'issues possibles était fini.

Dans ce chapitre, nous étendrons tous les résultats que vous avez vus en TSI1 au cas des univers dénombrables.

Définition 0.1. *Ensemble dénombrable.*
*Un ensemble Ω est dit **dénombrable** s'il existe une bijection*

$$\mathbb{N} \to \Omega$$

Concrètement, Ω est dénombrable si on peut énumérer ses éléments comme une suite :

$$\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$$

Remarque 0.2. *Un ensemble dénombrable est donc infini, mais la réciproque est fausse.*
Il existe en effet des ensembles infinis "trop gros" pour que l'on puisse "compter leurs éléments".

Exemple 0.3.
- $\mathbb{N} = \{n/n \in \mathbb{N}\}$ *est évidemment dénombrable.*
- $\mathbb{Z} = \{n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{-n/n \in \mathbb{N}\}$ *est dénombrable.*
- *L'ensemble de tous les entiers pairs :* $\{2k/k \in \mathbb{N}\}$, *est dénombrable.*
- *Tous les ensembles finis sont dénombrables.*
- $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Aucune démonstration ne sera faite dans ce chapitre, vous pouvez retrouver les démonstrations, pour le cas fini, dans vos cours de première année.

1 Rappels de vocabulaire

1.1 Expérience aléatoire

Définition 1.1. *On appelle **expérience aléatoire**, toute expérience dont le résultat ne peut être déterminé a priori, c'est-à-dire qui dépend du hasard.*

Exemple 1.2.
1. *Si on lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et que l'on note le résultat, on effectue une expérience aléatoire.*
   Par la suite nous appellerons cette expérience, l'expérience (1).
2. *Lorsqu'on lance une pièce équilibré plusieurs fois de suite jusqu'à obtenir pour la première fois "pile" et que l'on note le numéro du lancer où cela s'est produit, on réalise aussi une expérience aléatoire.*
   Par la suite nous appellerons cette expérience, l'expérience (2).

1.2 Univers

Définition 1.3. *On appelle* ***univers*** *de l'expérience aléatoire, l'ensemble* Ω *des issues ou résultats possibles de l'expérience.*
Les éléments de Ω *se notent souvent* ω.

Exemple 1.4.
- *Dans l'expérience (1), l'univers est* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- *Lorsqu'on lance une pièce une fois et que l'on regarde si elle tombe sur pile ou face, l'univers est* $\Omega = \{$ *pile, face* $\}$
- *Si on choisit 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, l'univers est l'ensemble de toutes les parties à 5 éléments des 32 cartes.*
  Attention ! ! ! *Ici, il n'y a pas d'ordre... On a alors :*
$$|\Omega| = \binom{32}{5} = 201376$$
- *Si on lance trois fois de suite un dé à 6 faces et que l'on note les trois résultats, on réalise une expérience dont l'univers est* $\Omega = \{(x, y, z)/x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. *Attention, ici l'ordre est important. On a ici* $|\Omega| = 6^3 = 216$.
- *Si on choisit, au hasard, un mot de la langue française, on réalise une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble de tous les mots de la langue française.*

Toutes ces expériences ont des univers finis.

Exemple 1.5.
- *On s'intéresse maintenant à l'univers de l'expérience* (2).
  On lance donc une pièce plusieurs fois jusqu'à obtenir pour la première fois pile. Ce premier pile peut apparaitre à n'importe quel numéro de lancer, mais en théorie il peut aussi ne jamais apparaitre.
  En étant rigoureux, on devrait donc écrire que l'univers de notre expérience est :
$$\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}.$$
  Toutefois, on peut démontrer que la probabilité de ne jamais obtenir pile est nulle.
  Autrement dit, il est presque impossible de ne pas obtenir pile.
  Ainsi, pour simplifier les calculs et les notations, on écrira plutôt
$$\Omega = \mathbb{N}^*.$$
  Cet abus de notation est souvent utilisé et il est inutile de le justifier à chaque fois.
- *Si on choisit au hasard un nombre réel compris entre 0 et 2 , on réalise une expérience aléatoire dont l'univers est* $\Omega = [0; 2]$. *Cet univers n'est pas dénombrable.*

1.3 Événement

Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire, certains faits liés à cette expérience peuvent se produire ou non : on les appelle des **événements**.

Exemple 1.6.
- *Dans l'expérience (1), on peut par exemple considérer l'événement, que nous noterons A_1 : " le nombre obtenu est pair".*
  L'événement A_1 est réalisé lorsque le résultat est 2,4 ou 6.
  On écrit alors $A_1 = \{2, 4, 6\}$. -
- *Dans l'expérience* (2)*, on note A_2 l'événement "le nombre obtenu est pair".*
  On a $A_2 = \{2n/n \in \mathbb{N}^*\}$.

Définition 1.7. *Un **événement** est une partie de l'univers Ω de l'expérience aléatoire.*
L'ensemble des parties de Ω, donc l'ensemble des événements, est noté $\mathscr{P}(\Omega)$.

Remarque 1.8. *Lorsque l'univers Ω est fini on a*

$$|\mathscr{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}.$$

Ce résultat a été vu en première année.

Définition 1.9. *Comme un événement est une partie de Ω, on peut appliquer aux événements tout le vocabulaire de la théorie des ensembles.*
Soient A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire.

- *L'**événement contraire** de A est l'événement " A n'est pas réalisé"(c'est-à-dire non A).*
  Il est représenté par le complémentaire de A dans Ω que l'on note $\bar{A}$.
- *L'événement "A et B sont réalisés" est représenté par l'intersection $A \cap B$.*
- *L'événement "A ou B est réalisé" est représenté par la réunion $A \cup B$.*
- *On dit que les événements A et B sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.*
- *On dit que A implique B, si la réalisation de A entraine la réalisation de B, c'est-à-dire si $A \subset B$.*
- *Un événement qui est toujours réalisé est appelé un événement certain, il est donc représenté par l'ensemble Ω.*
- *Un événement qui n'est jamais réalisé est appelé un **événement impossible**, il est représenté par l'ensemble vide $\emptyset$.*
- *Les événements qui sont représentés par un singleton $\{\omega\}$ sont appelés des **événements élémentaires**.*

Exemple 1.10. *Dans l'expérience (1), l'événement "obtenir 2" se note $\{2\}$, c'est un événement élémentaire.*

1.4 Système complet d'événements

Définition 1.11. *Soit Ω un ensemble. On appelle système complet d'événements de Ω toute famille $(A_i)_{i\in I}$ (I est une partie de $\mathbb{N}$ finie ou non) d'éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que :*

1. *Les événements A_i sont deux à deux incompatibles ;*
2. $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$

Exemple 1.12.
- *Dans l'expérience* (2), *on avait* $\Omega = \mathbb{N}^*$.
  On note A l'événement "obtenir un nombre pair", et B l'événement "obtenir un nombre impair"
  Alors (A, B) est un système complet d'événements.
  On dit aussi que les événements A et B forment un système complet d'événements.
- *La famille infinie d'événements $(\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots) = (\{n\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le système complet d'événements composé des événements élémentaires.*

2 Espaces probabilisés

2.1 Espace probabilisé fini

Définition 2.1. *Soit Ω un univers fini. On appelle probabilité définie sur cette espace, toute application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0; 1]$ qui vérifie :*

1. $P(\Omega) = 1$.
2. *Si A et B sont deux événements incompatibles, alors :*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

.

*Le couple (Ω, P) s'appelle un **espace probabilisé fini** et pour tout événement A, le réel $P(A)$ (compris entre 0 et 1) s'appelle la **probabilité de l'événement** A.*

2.2 Espace probabilisé dénombrable

Définition 2.2. *Soit Ω un univers dénombrable. On appelle probabilité sur Ω tout application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0; 1]$ vérifiant :*

1. $P(\Omega) = 1$
2. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors :*

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Le couple (Ω, P) s'appelle un ***espace probabilisé*** *et pour tout événement A, le réel $P(A)$ (compris entre 0 et 1) s'appelle la* ***probabilité de l'événement*** *A.*

Remarque 2.3.
- *Cette définition sous-entend que la série $\sum P(A_n)$ est convergente.*
- *Les espaces probabilisés finis sont des cas particuliers des espaces probabilisés dénombrables.*
  Toutes les propriétés et formules vues en TSI 1 sur les espaces probabilisés finis restent valables pour les espaces probabilisés dénombrables, nous allons donner leurs énoncés ainsi que quelques exemples.

3 Calculer une probabilité

3.1 Propriétés de base

Proposition 3.1. *Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soient A et B deux événements.*
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, *donc* $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
- *Si* $A \subset B$ *alors* $P(A) \leqslant P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Proposition 3.2. *Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit $(A_i)_{i \in I}$ (I partie de $\mathbb{N}$) un système complet d'événements. Alors :*

$$\sum_{i \in I} P(A_i) = 1$$

.

3.2 Utilisation des événements élémentaires

Proposition 3.3. *Soit Ω un univers dénombrable : $\Omega = \{\omega_n / n \in \mathbb{N}\}$.*
- *Une application $P : \mathscr{P}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ définit une probabilité sur Ω si, et seulement si, elle vérifie :*
  1. $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) \in [0; 1]$.
  2. *La série $\sum P(\{\omega_n\})$ est convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(\{\omega_n\}) = 1$.*
- *Si P est une probabilité sur Ω, alors pour tout événement A, la série $\sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ est convergente et on a :*

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

.

Méthode 3.4.
- *Le premier point de cette propriété permet de répondre aux questions du type "Montrer que P définit une probabilité sur $\Omega \gg$". Il suffira de vérifier que $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) \geqslant 0$ et que la série $\sum P(\{\omega_n\})$ est convergente et sa somme vaut 1.*
- *Le second point permet de calculer la probabilité de n'importe quel événement lorsqu'on connait uniquement les probabilités des événements élémentaires.*

Application 3.5. *On considère un générateur de nombres aléatoires qui donne l'entier $n \in \mathbb{N}$ avec la probabilité*

$$P(\{n\}) = \mathrm{e}^{-2}\frac{2^n}{n!}$$

1. *Vérifier que P définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}$.*
2. *Calculer la probabilité de l'événement B : " obtenir un entier pair".*

Définition 3.6. *On dit que deux événements sont* ***équiprobables*** *s'ils ont la même probabilité.*

Proposition 3.7. *On suppose que $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ est un univers fini. Si tous les événements élémentaires sont équiprobables alors nécessairement on a : $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$. On en déduit que pour tout événement A :*

$$P(A) = \sum_{i/\omega_i \in A} P(\omega_i) = \frac{|A|}{n}$$

Exemple 3.8. *Dans l'expérience (1) comme le dé est équilibré chaque face a une probabilité $\frac{1}{6}$ de se produire.*
Les événements élémentaires sont donc équiprobables.
Ainsi l'événement A_1 : "obtenir un nombre pair" est donc de probabilité :

$$P(A_1) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

Application 3.9. *n lancers d'un dé*
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers d'un dé cubique bien équilibré.

1. *Proposer un espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$ *qui modélise cette expérience aléatoire.*
2. *Calculer la probabilité des deux événements suivants :*
   - A *: "on n'obtient aucun "6" lors des* n *lancers."*
   - B *"on obtient une seule fois "6" lors des* n *lancers.*

4 Probabilité conditionnelle

4.1 Définition

Définition 4.1. *Soit* (Ω, P) *un espace probabilisé et* A *un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement* B*, on appelle* ***probabilité conditionnelle de*** B ***sachant*** A *le réel :*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

On la note aussi $P(B \mid A)$*.*

Théorème 4.2. *Soit* (Ω, P) *un espace probabilisé et* A *un événement de probabilité non nulle.*
Alors, l'application $P_A : B \mapsto P_A(B)$ *est une probabilité sur* Ω *appelée* ***probabilité conditionnelle relative à*** A *ou encore probabilité sachant* A*.*

Application 4.3. ***Deux lancers consécutifs d'une pièce.***
On lance deux fois consécutivement une pièce équilibrée.

1. *Quelle est la probabilité que les deux lancers donnent Face sachant que le premier est Face ?*
2. *Et sachant qu'au moins l'un des deux est Face ?*

Application 4.4. *Un sachet de 100 bonbons contient 40 bonbons acidulés, les autres bonbons sont à la guimauve. 18 des bonbons à la guimauve sont au parfum orange et 10 bonbons sont acidulés et au parfum orange.*
Les bonbons qui ne sont pas au parfum orange sont à la fraise.
On choisit un bonbon au hasard dans ce sachet. On note :

- *A l'événement "le bonbon est acidulé"*
- *G l'événement "le bonbon est à la guimauve "*
- *F l'événement "le bonbon est à la fraise"*
- *O l'événement "le bonbon est à l'orange".*

Dresser un arbre de probabilité.

4.2 Formules

Dans toute la suite, (Ω, P) désigne un espace probabilisé dénombrable et I une partie de $\mathbb{N}$ finie ou non.

4.2.1 Formule des probabilités composées

Théorème 4.5. ***Formule des probabilités composées.***
Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'événements tels que :

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right) \neq 0.$$

Alors on a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(A_1\right) \times P_{A_1}\left(A_2\right) \times P_{A_1 \cap A_2}\left(A_3\right) \times \cdots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}\left(A_n\right)$$

Remarque 4.6.

- *Pour deux événements on retrouve* $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
- *La démonstration se fait par récurrence sur* n.

Application 4.7. *On considère les tirages de 4 cartes sans remise dans un jeu de 52 .*
Calculer la probabilité de tirer les 4 as.

Application 4.8. ***Tirage sans remise de*** n ***boules.***
Une urne contient n *boules blanches et* n *boules noires, toutes indiscernables.*
On tire successivement et sans remise n *boules dans cette urne.*
Calculer la probabilité de l'événement E *: "on tire au moins une boule blanche".*

4.2.2 Formule des probabilités totales

Théorème 4.9. ***Formule des probabilités totales.***
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.
Alors pour tout événement B, la série $\sum P(A_n \cap B)$ est convergente et on a :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Méthode 4.10. *La formule des probabilités totales est très présente dans les exercices de probabilités.*
Il est donc indispensable de la connaitre parfaitement.
En particulier, la formule des probabilités totales permet, dans des exercices faisant intervenir des expériences qui se répètent, d'obtenir une relation de récurrence entre la valeur d'une probabilité à l'expérience n et à l'expérience $n-1$.

Application 4.11. *On dispose de deux pièces : la pièce A donne face avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et la pièce B donne face avec la probabilité $\frac{2}{3}$.*
On choisit une des pièces au hasard. On la lance.

- *Si on obtient face, on conserve la pièce que l'on vient de lancer,*
- *sinon on change de pièce.*

On effectue ainsi une suite de lancers.
On note A_n l'événement "jouer avec la pièce A au $n^{\text{ième}}$ lancer".
Le but est de calculer $p_n = P(A_n)$.

1. *Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.*
2. *On définit la suite (q_n) par $q_n = p_n - \frac{2}{5}$.*
   Montrer que la suite (q_n) est géométrique.
3. *En déduire l'expression de p_n en fonction de n.*

4.2.3 Formule de Bayes

Théorème 4.12. ***Formule de Bayes.***
Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, on a :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$

Proposition 4.13. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.*
Soient, de plus, A et B deux événements de probabilités non nulles. On a :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\, P_{A_n}(B)}$$

Il n'est pas indispensable de retenir par cœur cette formule car elle découle directement de la formule de Bayes et de la formule des probabilités totales.

Application 4.14. ***Faux négatifs / faux positifs.***
Dans une population, on note $p \in [0;1]$ la proportion d'individus atteints du VIH.
On tire un individu au hasard et on lui fait passer un test de séropositivité. Il arrive que le test donne de faux résultats :

- *si l'individu est séropositif (malade), la probabilité que le test donne un résultat négatif ("faux-négatif") est notée p_1.*
- *si l'individu est séronégatif (sain), la probabilité que le test donne un résultat positif ("faux-positif") est notée p_2.*

Bien entendu, p_1 et p_2 sont proches de 0, mais on va voir que si p est également proche de 0 , il va y avoir une dissymétrie dans l'interprétation des résultats du test.

1. *Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que l'individu soit réellement séropositif ?*
2. *Sachant que le test est négatif, quelle est la probabilité que l'individu soit réellement séronégatif ?*
3. ***Application :*** *pour les tests dits "de 4e génération", on dispose des données suivantes (source 2018) :*

$$p_1 = 10^{-3}, \quad p_2 = 5 \times 10^{-3}$$

Soit 1 faux-négatif pour 1000 et 5 faux-positifs pour 1000).
Comparer les deux probabilités précédentes si on suppose $p = 10^{-4}$. Interpréter.

Des résultats obtenus, on déduit que si l'on peut légitimement avoir des doutes lorsque le test est positif, on a par contre une très grande fiabilité lorsqu'il est négatif.
On se passe donc en pratique d'un deuxième test lorsque le premier est négatif, mais il faut absolument poursuivre les investigations lorsqu'il est positif.

5 Indépendance d'événements

Définition 5.1. *On dit que deux événements A et B sont* ***indépendants*** *pour la probabilité P si*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Remarque 5.2. *Lorsque $P(B) \neq 0$, cela revient à dire que :*

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A),$$

C'est-à-dire que $P(A)$ ne dépend pas de la réalisation ou non de l'événement B.
Si $P(A) \neq 0$, alors cela revient aussi à $P(B) = P_A(B)$.
Et si $P = P(B) = 0$, alors les événements ne se réalisent (presque) jamais, et sont bien indépendants au sens de la définition donnée.

Proposition 5.3. *Soit A et B deux événements. Si $P(B) \neq 0$ alors :*

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants } \Leftrightarrow P_B(A) = P(A) \; .$$

Proposition 5.4. ***Indépendance et complémentaire.***
Soient A et B deux événements. Alors on a équivalence entre :

1. *A et B sont indépendants.*
2. *A et $\bar{B}$ sont indépendants.*
3. *$\bar{A}$ et B sont indépendants.*
4. *$\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.*

Définition 5.5. *Soient $A_1, \ldots, A_n n$ événements.*

- *On dit que les événements sont* ***deux à deux indépendants*** *pour la probabilité* $\boldsymbol{P}$ *si pour tout $i \neq j A_i$ et A_j sont indépendants.*
- *On dit que les événements sont* ***mutuellement indépendants*** *pour la probabilité* $\boldsymbol{P}$ *ou tout simplement indépendants pour la probabilité* $\boldsymbol{P}$ *si pour tout ensemble I d'indices choisis dans $\{1, \ldots, n\}, P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P\left(A_i\right)$*

Remarque 5.6. • *L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux.*

- *Dans un exercice, si l'on vous dit que l'on répète de façon identique une expérience, cela signifie que les événements liés à l'expérience numéro n sont indépendants de ceux liés l'expérience numéro $p (n \neq p)$.*
- ***ATTENTION!!!*** *Pour une famille de plus de trois événements, l'indépendance deux à deux n'entraine pas forcément l'indépendance mutuelle.*

Proposition 5.7. ***Indépendance mutuelle et complémentaires.***
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. Pour chaque $i \in I$, on pose :

$$B_i = A_i \text{ ou } \overline{A_i}.$$

Si la famille $(A_i)_{i\in I}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants, alors la famille $(B_i)_{i\in I}$ aussi.

Application 5.8. *On lance deux fois de suite un dé cubique équilibré. On note A l'événement "obtenir 1 au premier lancer ", B l'événement "obtenir 2 au deuxième lancer", et C l'événement "obtenir le même résultat aux deux lancers".*

1. *Ces trois événements sont-il indépendants deux à deux ?*
2. *Ces trois événements sont-il mutuellement indépendants ?*

Les événements A et B sont indépendants car les deux lancers sont indépendants.
L'événement $A \cap C$ signifie qu'on a obtenu 1 aux deux lancers donc :

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36} \text{ et } P(A) = \frac{1}{6} \text{ et } P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Donc A et C sont indépendants et, de même, B et C sont indépendants.
Ainsi les événements (A, B, C) sont indépendants deux à deux. Mais ils ne sont pas mutuellement indépendants car :

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \text{ et } P(A) \times P(B) \times P(C) \neq 0$$