Chap.16 : Fonctions de plusieurs variables

14 mars 2023

Table des matières

Dans ce chapitre on s'intéresse à des fonctions f définies sur Ω une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. En pratique, vous ne rencontrerez que des fonctions définies sur des parties de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 0.1.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^{+*} \times [1; +\infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \longmapsto & xy\mathrm{e}^z + \ln(x)\sqrt{y-1} \end{array}$$

On a par exemple $f(1, 2, -1) = 2\mathrm{e}^{-1}$.

1 Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n, n \leq 3$

1.1 Norme et distance

Définition 1.1. *On appelle* ***produit scalaire euclidien*** *de* $\mathbb{R}^n$*, et on note* $\langle . \mid \cdot \rangle$*, l'application de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$\forall \vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \text{ et } \vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n.$$

On appelle ***norme euclidienne*** *de* $\mathbb{R}^n$*, et on note* $\|.\|$*, l'application de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$\forall \vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2} = \sqrt{\langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle}$$

Remarque 1.2. *La norme euclidienne est la norme que l'on utilise en TSI 1 en géométrie du plan* ($n = 2$) *ou de l'espace* ($n = 3$) *: ce calcul correspond à ce qu'on obtient en mesurant à la règle la longueur d'un représentant d'un vecteur.*

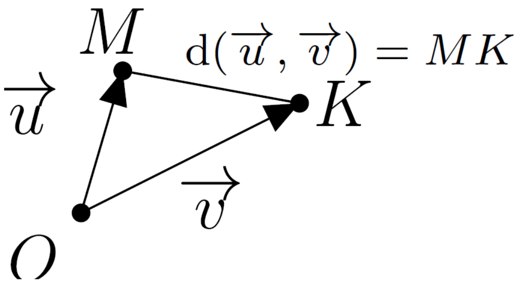
Proposition 1.3.

1. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \mid \vec{u}\|$.
2. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = (0, \ldots, 0)$.
3. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$. *(Inégalité triangulaire)*

Définition 1.4. *On appelle* ***distance euclidienne*** *de* $\mathbb{R}^n$*, et on note* $\mathrm{d}(.,.)$*, l'application de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$\forall \vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n, \vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n, \ \mathrm{d}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Remarque 1.5. *En dimension 2 ou 3 , si on note* $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{OK}$ *alors* $\mathrm{d}(\vec{u}, \vec{v})$ *est égale à la longueur du segment* $[MK]$.



Proposition 1.6. $\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

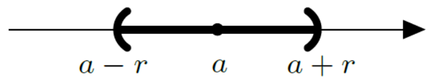
- $\mathrm{d}(\vec{u},\vec{v}) = \mathrm{d}(\vec{v},\vec{u})$ *et* $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \mathrm{d}(\lambda\vec{u},\lambda\vec{v}) = |\lambda|\mathrm{d}(\vec{u},\vec{v})$
- $\mathrm{d}(\vec{u},\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$
- $\mathrm{d}(\vec{u},\vec{v}) \leqslant \mathrm{d}(\vec{u},\vec{w}) + \mathrm{d}(\vec{w},\vec{v})$. *(Inégalité triangulaire)*

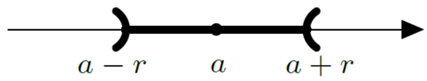
1.2 Parties ouvertes, parties fermées

Définition 1.7. *Soit* $a \in \mathbb{R}^n$ *et* $r \in \mathbb{R}^{+*}$.

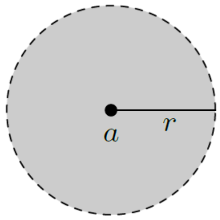
- *On appelle* ***boule ouverte de centre*** a ***et de rayon*** r, *et on note* $\mathscr{B}_o(a,r)$, *l'ensemble :*
$$\mathscr{B}_o(a,r) = \{u \in \mathbb{R}^n / \mathrm{d}(a,u) < r\}.$$
- *On appelle* ***boule fermée de centre*** a ***et de rayon*** r, *et on note* $\mathscr{B}_f(a,r)$, *l'ensemble :*
$$\mathscr{B}_f(a,r) = \{u \in \mathbb{R}^n / \mathrm{d}(a,u) \leqslant r\}.$$

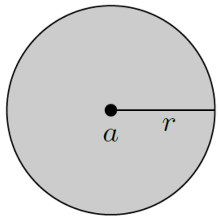
Remarque 1.8.
- *En dimension 1 une boule est en fait un intervalle (fermé ou ouvert).*





- *En dimension 2 la boule de centre* $a = (a_1, a_2)$ *et de rayon* r *est en fait un disque (avec son bord ou non).*





Définition 1.9. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.*

- *On dit que A est une **partie ouverte** de $\mathbb{R}^n$ si A est l'ensemble vide, ou si pour tout $a \in A$ il existe $r > 0$ tel que $\mathscr{B}_o(a, r) \subset A$.*
- *On dit que A est une **partie fermée** de $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, le complémentaire de A dans $\mathbb{R}^n$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 1.10. *En particulier, les boules ouvertes sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$ et les boules fermées sont des parties fermées de $\mathbb{R}^n$.*
Pour « vulgariser », une partie ouverte est soit l'ensemble vide soit un domaine U tel que, autour de chaque point de U, on peut tracer une boule (parfois très petite) qui soit incluse dans U.

Définition 1.11. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que A est une **partie bornée** de $\mathbb{R}^n$ si, et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ tels que :*

$$A \subset \mathscr{B}_f(a, r).$$

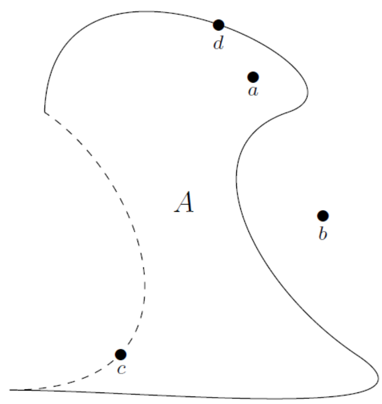
1.3 Intérieur, extérieur

Définition 1.12. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ et a un élément de $\mathbb{R}^n$.*

- *On dit que a est un **point intérieur** à **A** s'il existe une partie ouverte U de $\mathbb{R}^n$ telle que $a \in U$ et $U \subset A$.*
- *On dit que a est un **point extérieur** à **A** s'il est intérieur au complémentaire de A.*
- *On dit que a est un **point adhérent** à **A** si pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ tel que $a \in U$, on a : $U \cap A \neq \emptyset$.*

Exemple 1.13. *Sur la figure ci-dessous :*

- *a est un point intérieur à A ;*
- *b est un point extérieur à A ;*
- *c et d ne sont ni intérieurs, ni extérieurs à A ;*
- *a, c et d sont des points adhérents à A.*



Définition 1.14. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On appelle* ***frontière*** *ou* ***bord*** *de A l'ensemble des points adhérents à A qui ne sont pas intérieurs à A.*

Remarque 1.15.
- *Un point adhérent à A n'appartient pas forcément à A.*
- *Tous les points de A sont adhérents à A.*
- *Tous les points de A ne sont pas forcément intérieurs à A : il y a des points qui ne sont ni intérieurs ni extérieurs à A, ce sont les points de la frontière de A.*
- *Dans la figure précédente, la frontière de A est la réunion du trait plein et du trait pointillé.*

2 Limite, continuité

Dans cette partie, f désigne une fonction définie sur Ω une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2.1 Définitions

Définition 2.1. *Soit a un point adhérent à Ω.*

- *On dit que f admet une limite en a lorsqu'il existe un réel ℓ vérifiant :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall u \in \Omega, \quad \|u - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(u) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

  On note alors $\lim\limits_{u \to a} f(u) = \ell$.

- *On dit que f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a lorsque :*

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall u \in \Omega, \|u - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow f(u) \geqslant A.$$

  On note alors :

$$\lim_{u \to a} f(u) = +\infty \ .$$

- *On dit que f tend vers $-\infty$ en a lorsque :*

$$\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall u \in \Omega, \|u - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow f(u) \leqslant A$$

  On note alors :

$$\lim_{u \to a} f(u) = -\infty \ .$$

Définition 2.2. *Soit $a \in \Omega$. On dit que f est* ***continue en*** *a lorsque :*

$$\lim_{u \to a} f(u) = f(a).$$

De plus on dit que f est continue sur Ω lorsque f est continue en tout point de Ω.

Remarque 2.3. *L'étude de la continuité d'une fonction de plusieurs variables n'est pas un attendu du programme.*
On dispose des mêmes outils pour calculer une limite qu'en TSI1 (opérations élémentaires, composition, croissances comparées...) mais attention on ne peut pas " fixer une variable puis l'autre" pour étudier la continuité.
Voici un exemple pour illustrer cela :

Exemple 2.4. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

On a, pour tout $x \neq 0, f(x,0) = \frac{x\times 0}{x^2+0^2} = 0$ donc :

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$$

et évidemment de même $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$.
Or $f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) \neq 0$.
*La fonction f **n'est donc pas continue en** $(0,0)$ mais pourtant si on étudie "une variable après l'autre" on a l'impression que cela fonctionne.*

2.2 Propriétés

Proposition 2.5. *L'ensemble des fonctions continues sur Ω forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Cela signifie que toute combinaison linéaire de deux fonctions continues est une fonction continue.

Proposition 2.6. *Soit $a \in \Omega$ et f et g deux fonctions définies sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continues en a.*
Alors $f \times g$ est continue en a et si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.

Proposition 2.7. *Soit $a \in \Omega, f$ une fonction définie sur Ω, continue en a et à valeurs dans $B \subset \mathbb{R}$, et enfin g une fonction définie sur B, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continue en $f(a)$.*
Alors $g \circ f$ est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continue en a.

Remarque 2.8. *En résumé, tout comme les fonctions d'une variable, la somme, le produit, le quotient ou la composée de deux fonctions continues est continue.*

Théorème 2.9. *Soit f une fonction continue sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et K une partie fermée et bornée de Ω.*
Alors f est bornée sur K et atteint ses bornes sur K.
Autrement dit, il existe a et b deux éléments de K tels que :

$$\forall x \in K \quad f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$$

Remarque 2.10. *Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce théorème correspond la propriété qui dit que :*
"l'image d'un segment par une fonction continue est un segment" ou encore "une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes".

3 Calcul différentiel

Dans cette partie f désigne une fonction définie sur U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.1. *Soient $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ et $i \in \{1, \dots, n\}$. On appelle $i^{\text{ème}}$ **application partielle** de f en a, la fonction notée f_{x_i} ou f_i définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall t \in I, \quad f_{x_i}(t) = f\left(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n\right)$$

Exemple 3.2. *Reprenons la fonction du premier exemple de ce chapitre définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times [1; +\infty[\times \mathbb{R}$ par :*

$$f(x, y, z) = xy\mathrm{e}^z + \ln(x)\sqrt{y-1}.$$

La première application partielle de f en $(1, 2, 3)$ est la fonction

$$f_x : t \mapsto 2t\mathrm{e}^3 + \ln(t)$$

définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.1 Dérivées partielles

3.1.1 D'ordre 1

Définition 3.3. *Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ et $i \in \{1, \dots, n\}$. On dit que f admet **une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à** x_i en a si, et seulement si, l'application partielle f_{x_i} est dérivable en a_i.*
Cela revient à dire que le quotient

$$\frac{f\left(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n\right) - f\left(a_1, \dots, a_n\right)}{t - a_i}$$

admet une limite finie lorsque t tend vers a_i.
*Cette limite est alors notée $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}$ ou $\partial_i f(a)$ et s'appelle la $i^{\text{ème}}$ **dérivée partielle de f en** a ou dérivée partielle de f par rapport à x_i en a.*

Définition 3.4. *La fonction qui à tout élément a associe le réel $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a)$ est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $\partial_i f$ et s'appelle* ***la*** $i^{\text{ème}}$ ***dérivée partielle*** *de f ou encore la* ***dérivée partielle de f par rapport à x_i.***
C'est une fonction définie sur U ou une partie de U et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.5. *Si toutes les applications $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont définies et continues sur U, on dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.*

Remarque 3.6.

- *La dérivée partielle de f par rapport à x_i en $a = (a_1, \ldots, a_n)$ est égale à la dérivée de l'application partielle f_{x_i} en a_i.*
- *Les applications partielles sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer tous les résultats d'opérations sur les fonctions dérivables et $\mathscr{C}^1$ pour démontrer qu'une fonction de plusieurs variables est dérivable par rapport à l'une ou l'autre de ses variables ou qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$.*

Méthode 3.7. *Pour calculer la dérivée partielle de f par rapport à x_i, il faut considérer que dans l'expression de f seule x_i est la variable et toutes les autres "lettres" sont en fait des constantes.*
On applique alors les formules de dérivation connues depuis le lycée !

Application 3.8. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x, y) = y\mathrm{e}^{-x^2-y}.$$

Calculer les dérivées partielles par rapport à chacune des variables.

Application 3.9. *Reprenons la fonction du premier exemple de ce chapitre définie sur $\Omega = \mathbb{R}^{+*} \times [1; +\infty[\times \mathbb{R}$ par :*

$$f(x, y, z) = xy\mathrm{e}^z + \ln(x)\sqrt{y-1}.$$

Calculer les dérivées partielles par rapport à chacune des variables.

Remarque 3.10. *La notion de dérivée partielle est utilisée en physique et S2I.*
Vous y rencontrerez aussi la notion de différentielle (utilisée comme outil de calcul) dont l'étude théorique est hors programme en mathématiques.

Théorème 3.11. *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et $a \in U$. Alors au voisinage de a :*

$$f(x) = f(a)+(x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+\ldots+(x_n - a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)+o\left(\|(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)\|\right)$$

Cette égalité s'appelle le ***développement limité d'ordre 1*** *de f en a.*

3.1.2 D'ordre 2

Lorsqu'on décide de dériver une fonction de n variables on obtient n dérivées partielles. Ces dérivées partielles sont elles-mêmes des fonctions de n variables que l'on peut tenter de dériver par rapport à chacune de ses variables.
On obtient alors $n \times n$ fonctions que l'on appelle des dérivées secondes.

Par exemple on peut dériver une fois par rapport à x_i, on obtient donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ puis on décide de dériver cette fonction par rapport à x_j.
On obtient alors une dérivée seconde que l'on note $\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}}$.

Il faudra faire bien attention à l'ordre des variable indiqué sous la dérivée. On commence par celle de droite pour ensuite aller progressivement vers la gauche.

Si on dérive deux fois de suite par rapport à la même variable x_i, on notera $\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}}$.

Application 3.12. *Reprenons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x, y) = y\mathrm{e}^{-x^2-y}.$$

Calculer les 4 dérivées secondes de cette fonction f.

Remarque 3.13. *On peut remarquer dans cette application que les dérivées dites " croisées" sont égales :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

Définition 3.14. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U si toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 existent et sont continues sur U.

Proposition 3.15. *Soient f et g deux fonctions définies et de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.*

- *Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $af + bg$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.*
- *La fonction $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.*
- *Si g ne s'annule par sur U, la fonction $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.*

Théorème 3.16. ***Théorème de Schwarz***
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert U alors :

$$\forall a \in U, \quad \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Remarque 3.17. *En pratique vous ne rencontrerez presque uniquement des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ donc les dérivées "croisées" seront presque toujours égales.*

3.2 Gradient

Définition 3.18. *Soit f une fonction définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in U$.*
*On appelle **gradient de f en a**, et on note $\boldsymbol{\nabla_a f}$, le vecteur de $\mathbb{R}^n$ suivant :*

$$\nabla_a f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Application 3.19. *Calculons le gradient en* $(1,1,1)$ *de la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}^3$ *par :*

$$f(x,y,z) = x^2\cos(yz)\mathrm{e}^{x-z}.$$

Définition 3.20. *Soit* f *une fonction définie et de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$*.*
On appelle ***gradient*** *de* f*, et on note* $\boldsymbol{\nabla f}$*, l'application suivante :*

$$\begin{aligned} \nabla f : \quad U &\mapsto \mathbb{R} \\ a &\mapsto \nabla_a f \end{aligned}$$

Proposition 3.21. *Avec la notation du gradient le développement limité à l'ordre 1 de* f *en* a *devient :*

$$f(x) = f(a) + \langle x-a \mid \nabla_a f\rangle + o(\|x-a\|)$$

3.3 Composées classiques

Les propriétés suivantes sont extrêmement importantes pour vos exercices.
Si vous ne voulez pas apprendre les formules par cœur il faut être capable de les retrouver très vite!!!

Proposition 3.22. *Soit* f *une fonction définie et de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^2$*.*
Soit u *et* v *deux fonctions définies et de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *telles que :*

$$\forall t \in I, (u(t), v(t)) \in U.$$

Alors la fonction $g : t \mapsto f(u(t), v(t))$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I *et pour tout* $t \in I$ *:*

$$g'(t) = u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))$$

Proposition 3.23. *Soient g et h deux fonctions définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.*
Soit f une fonction définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $f(g(u,v),h(u,v))$ existe pour tout $(u,v)\in U$.
Alors l'application $\varphi:(u,v)\mapsto f(g(u,v),h(u,v))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(g(u,v),h(u,v))+\frac{\partial h}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(g(u,v),h(u,v))\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(g(u,v),h(u,v))+\frac{\partial h}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(g(u,v),h(u,v))\end{array}\right.$$

Remarque 3.24. *La principale application de ces propriétés sera la résolution d'équations aux dérivées partielles que nous étudierons dans la partie IV.*

Application 3.25. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ et dont les variables sont les coordonnées cartésiennes (x,y).*
On souhaite passer aux coordonnées polaires définies par :

$$\left\{\begin{array}{l}x=r\cos(\theta)\\ y=r\sin(\theta)\end{array}\right.\qquad \textit{avec } (r,\theta)\in\mathbb{R}^+\times[0;2\pi[.$$

On définit donc une nouvelle fonction g par :

$$g(r,\theta)=f(r\cos(\theta),r\sin(\theta)).$$

On dit que g est l'expression de la fonction f en coordonnées polaires.
Calculer les dérivées partielles de la fonction g en fonction de celles de la fonction f.

Remarque 3.26. *Cet exercice de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires est un grand classique, que ce soit en maths ou en physique et SII.*
C'est un exemple à connaitre par cœur.

4 Équations aux dérivées partielles

On dispose d'une équation dans laquelle l'inconnue est f une fonction de plusieurs variables et faisant intervenir des dérivées partielles de f.
Par exemple :

$$(x-y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Vous ne devez pas connaitre de méthode générale pour ce genre d'équation. L'énoncé va vous guider, le plus souvent en vous indiquant un changement de variables à effectuer qui va simplifier l'équation.
Les équations auxquelles on se ramènera le plus souvent seront de ce type :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff$ il existe une fonction A de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(x,y) = A(y)$.
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff$ il existe une fonction B de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(x,y) = B(x)$.
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(y) \iff$ il existe une fonction A de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(x,y) = g(y)x + A(y)$.
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h(x) \iff$ il existe une fonction B de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(x,y) = h(x)y + B(x)$.

Méthode 4.1. *L'énoncé vous présente une équation aux dérivées partielles qu'il souhaite vous amener à résoudre.*
Le plus souvent la fonction inconnue est notée f et ses variables sont x, y et z.
Si l'équation n'est pas évidente à résoudre, l'énoncé vous indiquera alors un changement de variable à effectuer.
Pour expliquer la méthode nous appellerons u, v et w les nouvelles variables définies par l'énoncé. Voici les étapes à suivre :

1. *Nouvelle fonction inconnue :*
   On pose une nouvelle fonction g définie par : $g(u,v,w) = f(x,y,z)$. Dans cette égalité on remplace, en utilisant le changement de variable donné dans l'énoncé, soit les x, y et z soit les u, v et w. (Voir les exemples ci-dessous pour comprendre les deux situations)
2. *Calcul des dérivées partielles :*
   On calcule les dérivées partielles de g en fonction de celles de f ou les dérivées partielles de f en fonction de celles de g. (Voir les exemples ci-dessous pour les deux situations)
3. *Changement de fonction dans l'équation :*
   On utilise les calculs fait à l'étape précédente pour modifier l'équation de l'énoncé.
4. *Résolution de l'équation avec les nouvelles variables*
5. *Conclusion*

Remarque 4.2. *Le plus important est de bien savoir démarrer, c'est-à-dire poser la nouvelle fonction inconnue g.*
Il suffit de retenir qu'il faut poser $g(u, v, w) = f(x, y, z)$.
Ensuite il suffit d'utiliser le changement de variable donné dans l'énoncé. C'est la forme de ce changement de variable qui vous aidera à savoir s'il faut plutôt remplacer les x, y, z ou les u, v, w!

Application 4.3. *Trouver les fonctions $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ telles que :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

en utilisant le changement de variable :

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2}. \end{cases}$$

Application 4.4. *On pose $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\right\}$.*
Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x, y) \in U, \quad -y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

en utilisant les coordonnées polaires.

Application 4.5. *Trouver les fonctions $f \in \mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ telles que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

en utilisant le changement de variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x + y \\ v = 3x - y \end{array} \right. .$$

5 Extremums d'une fonction de deux variables

5.1 Définitions, propriétés

Définition 5.1. *Soit f une fonction définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$.*

- *On dit que f admet un **minimum global** en **a** si :*

$$\forall u \in \Omega, \quad f(u) \geqslant f(a).$$

- *On dit que f admet un* ***minimum local*** *en a s'il existe $r > 0$ tel que :*

$$\forall u \in \mathscr{B}(a, r) \cap \Omega, \quad f(u) \geqslant f(a).$$

- *On dit que f admet un* ***maximum global*** *en a si :*

$$\forall u \in \Omega, \quad f(u) \leqslant f(a).$$

- *On dit que f admet un* ***maximum local*** *en a s'il existe $r > 0$ tel que :*

$$\forall u \in \mathscr{B}(a, r) \cap \Omega, \quad f(u) \leqslant f(a).$$

Remarque 5.2. *On rappelle le Théorème 2.9 :*

Soit f une fonction continue sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et K une partie fermée et bornée de Ω.
Alors f est bornée sur K et atteint ses bornes sur K.
Autrement dit, il existe a et b deux éléments de K tels que :

$$\forall x \in K \quad f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$$

Définition 5.3. *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur une partie ouverte U de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in U$.*
On dit que ***a*** *est un* ***point critique*** *de* ***f*** *si :*

$$\nabla_a f = (0, \ldots, 0).$$

Un point critique est un point en lequel toutes les dérivées partielles de f s'annulent.

Application 5.4. *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2xy - 4y.$$

Déterminer le ou les points critiques de f.

Théorème 5.5. *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur une partie ouverte U de $\mathbb{R}^2$ et a un point de U.*
Si f admet un extremum local en a alors a est un point critique de f.

Remarque 5.6. ***Attention ! ! !*** *La réciproque à ce théorème est en générale fausse.*
Il peut exister des points critiques de f qui ne sont pas des extremums locaux.

5.2 Méthode de recherche des extremums globaux sur une partie fermée et bornée

Dans toute cette partie f est une fonction définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur une partie U fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

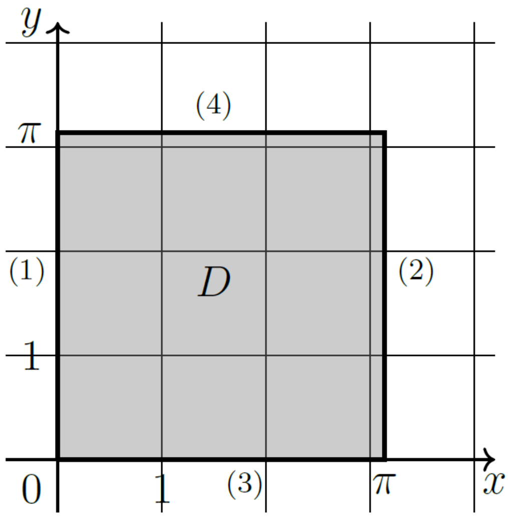
Nous savons que cette fonction f est bornée et atteint ses bornes.
On souhaite donc trouver le maximum et le minimum de f sur U.

Méthode 5.7.

1. *On se place tout d'abord sur l'intérieur de U (c'est une partie ouverte) et on cherche sur cette partie les points critiques de f.*
   Sur l'intérieur de U les seuls candidats possibles pour être le maximum ou le minimum sont les points critiques.
   On calcule ensuite la valeur de f en ces points.
2. *On étudie f sur la frontière de U, et on y détermine le maximum et le minimum.*
3. *On compare les valeurs obtenues dans 1 . et 2 . pour déterminer le maximum et le minimum global de f sur U.*

Application 5.8. *Déterminer les extremums globaux sur $D = [0; \pi] \times [0; \pi]$ de la fonction f définie par :*

$$f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y).$$



6 Applications géométriques

6.1 Courbes du plan

On se place dans cette partie dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Définition 6.1. *Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.*
On appelle ***courbe du plan d'équation*** *$f(x,y)=0$ l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan dont les coordonnées vérifient l'équation $f(x,y)=0$.*

Remarque 6.2. *Vous devez savoir reconnaitre une équation de droite et une équation de cercle :*

- *Équation de droite :*

$$ax+by=c \text{ ,avec } (a,b,c)\in\mathbb{R}^3.$$

- *Équation de cercle :*

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \text{ (c'est le cercle de centre } A(a,b) \text{ et de rayon } r\text{).}$$

Lorsque cela est possible vous pourrez aussi vous ramener à une équation du type $y=g(x)$ et donc à une étude classique de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 6.3. *Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et soit Γ la courbe du plan d'équation $f(x,y)=0$.*
Soit de plus $M(a,b)$ un point de Γ.
On dit que $M(a,b)$ est un ***point régulier*** *de Γ si, et seulement si :*

$$\nabla_{(a,b)}f\neq\overrightarrow{0}$$

Remarque 6.4. *Si un point $M(a,b)$ n'est pas régulier alors (a,b) est un point critique de f.*
On dit aussi que M est un point singulier ou stationnaire.

Proposition 6.5. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et soit Γ la courbe du plan d'équation $f(x,y) = 0$.*
Soit de plus $M(a,b)$ un point régulier de Γ.
La ***tangente à*** Γ ***au point*** *$M(a,b)$ est la droite passant par $M(a,b)$ et orthogonale au vecteur $\nabla_{(a,b)}f$.*
Une équation cartésienne est donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \times (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \times (y-b) = 0.$$

Preuve :

Application 6.6. *On considère la courbe Γ d'équation cartésienne :*

$$\sin(x)\mathrm{e}^y - x^2\cos(y) = 0.$$

Donner une équation cartésienne de la tangente au point $O(0,0)$.

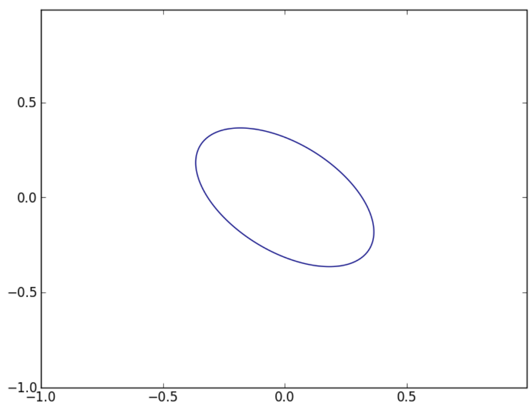
Remarque 6.7. *Pour tracer des courbes d'équation $f(x,y) = k$ sous Python :*

- *On importe la bibliothèque* ***matplotlib***
- *On fait une grille en x et en y sur laquelle on calcule les valeurs de f.*
- *On emploie ensuite la fonction contour en mettant dans une liste les valeurs de k pour lesquelles on veut tracer la courbe d'équation $f(x,y) = k$. Ici, $k = 0$.*

Par exemple, pour tracer la courbe du plan d'équation $x^2+y^2+xy-\frac{1}{10} = 0$:

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np


def f(x,y) :
    return x**2 + y**2 + x*y-1/10

f=np.vectorize(f)
X = np.arange(-1, 1, 0.01)
Y = np.arange(-1, 1, 0.01)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
Z = f(X, Y)
plt.contour(X, Y, Z, [0])
plt.show()
```

On obtient :



Proposition 6.8. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Si $\nabla_{(a,b)} f \neq 0$ alors $\nabla_{(a,b)} f$ est orthogonal aux lignes de niveau $f(x,y) = \lambda$ et il est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.*

Remarque 6.9. *Cette propriété est en lien avec l'étude des lignes équipotentielles et des lignes de champ en physique.*

6.2 Surfaces

On se place dans cette partie dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

6.2.1 Définitions, plan tangent

Définition 6.10. *Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.*

*On appelle **surface d'équation** $f(x,y,z)=0$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation :*

$$f(x,y,z)=0.$$

Remarque 6.11.

- *Il faut savoir reconnaitre l'équation d'un plan :*

$$ax+by+cz=d$$

  avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4)$.
- *La représentation graphique d'une fonction $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est la surface d'équation :*

$$z=g(x,y)$$

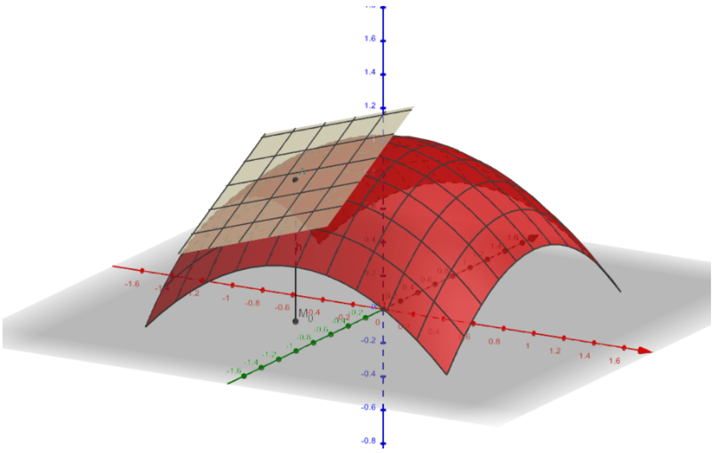
  ou encore $z-g(x,y)=0$.

Définition 6.12. *Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et soit S la surface d'équation $f(x,y,z)=0$. Soit de plus $M(a,b,c)$ un point de S.*
On dit que $M(a,b,c)$ est un point régulier de S lorsque :

$$\nabla_{(a,b,c)}f\neq\overrightarrow{0}$$

Proposition 6.13. *Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et soit S la surface d'équation $f(x,y,z)=0$.*
Soit de plus $M(a,b,c)$ un point régulier de S.
Le plan tangent à S au point $M(a,b,c)$ est le plan passant par $M(a,b,c)$ et orthogonal au vecteur $\nabla_{(a,b,c)}f$.
Une équation cartésienne est donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\times(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\times(y-b)+\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\times(z-c)=0.$$



Méthode 6.14. *De même que pour l'équation cartésienne de la tangente à une courbe du plan, pour obtenir une équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ au point $M(a, b, c)$ il suffit d'écrire :*

$$\left\langle \overrightarrow{MN} \mid \nabla_M f \right\rangle = 0 \qquad \text{avec } N(x, y, z)$$

Application 6.15. *Soit la surface S d'équation $\sqrt{x^2 + y^2 + 2} + z - 1 = 0$. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S au point $M(1, 1, -1)$.*

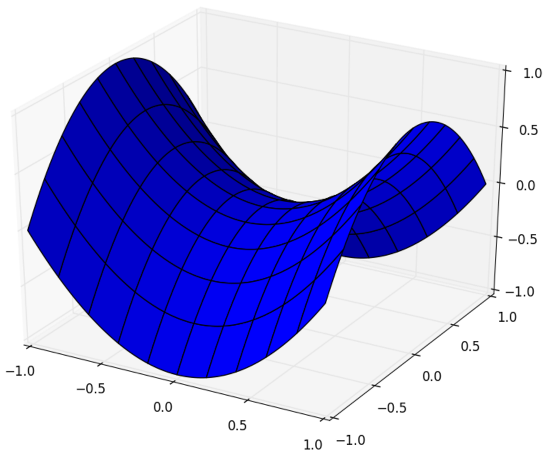
Remarque 6.16. *Pour tracer une surface d'équation $z = f(x, y)$ sous Python :*

- *On importe la bibliothèque **mpl_toolkits.mplot3d***
- *On réalise d'abord une grille en (x, y)*
- *On calcule les valeurs de z correspondant aux points de cette grille.*
- *On fait ensuite le tracé avec la fonction **plot_surface**.*

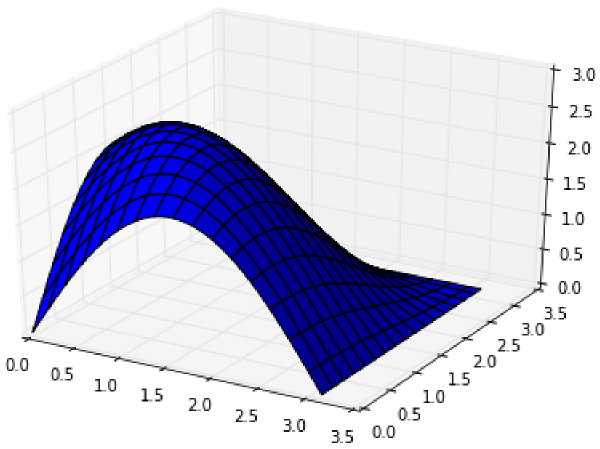
Par exemple, pour tracer la courbe du plan d'équation $x^2 + y^2 + xy - \frac{1}{10} = 0$:

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

ax = Axes3D(plt.figure())
def f(x,y) :
    return x**2 - y**2

f=np.vectorize(f)
X = np.arange(-1, 1, 0.02)
Y = np.arange(-1, 1, 0.02)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
Z = f(X, Y)
ax.plot_surface(X, Y, Z)
plt.show()
```

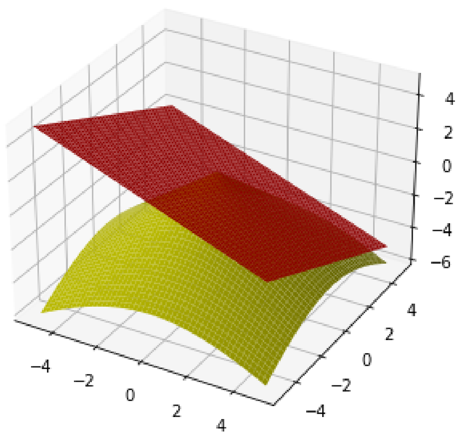
On obtient :



Revenons sur l'application 5.8 : voici la surface correspondante sur le domaine $D = [0;\pi] \times [0;\pi]$;



Remarque 6.17. *Concernant l'application* **??**, *voici la surface avec le plan tangent en* $M(1, 1, -1)$ *:*



6.2.2 Position d'une surface d'équation $z = g(x, y)$ par rapport à son plan tangent

Explications :

Dans ce cas particulier on a $f(x, y, z) = g(x, y) - z$ et donc :

$$\nabla_{(x,y,z)} f = \left(\tfrac{\partial g}{\partial x}(x, y), \tfrac{\partial g}{\partial y}(x, y), -1\right) \neq \overrightarrow{0} \text{ pour tout } (x, y, z).$$

Ainsi tous les points de S sont réguliers et au point $M(a, b, g(a, b))$ le plan tangent a pour équation :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)(y - b) + (-1) \times (z - g(a, b)) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = g(a, b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Inutile d'apprendre cela par cœur, il est préférable de savoir le retrouver rapidement.
Ainsi pour étudier la position de la surface par rapport à son plan tangent il nous faut étudier le signe de :

$$\Delta(x,y) = g(x,y) - \Big(g(a,b) + \tfrac{\partial g}{\partial x}(a,b)(x-a) + \tfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)(y-b)\Big)$$

Méthode 6.18. *On considère la surface S d'équation $z = g(x,y)$ et on souhaite étudier la position locale de la surface par rapport à son plan tangent P au point $M(a,b,g(a,b))$.*
1. Équation cartésienne du plan tangent :
On pose $f(x,y,z) = g(x,y) - z$.S est donc la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$.
On calcule $\nabla_M f$ (On pourra remarquer que $\nabla_M f$ sera toujours de la forme $(.,.,-1)$.
On donne l'équation du plan tangent à S en M :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,g(a,b))\times(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,g(a,b))\times(y-b)+(-1)\times(z-g(a,b)) = 0$$

et on met cette équation sous la forme $z = h(x,y)$.

2. Position relative de S et P :
On calcule $\Delta(x,y) = g(x,y) - h(x,y)$ et on souhaite connaître le signe de $\Delta(x,y)$ au voisinage de (a,b).
Deux possibilités :

- *Le signe de $\Delta(x,y)$ s'obtient facilement et on le justifie proprement...*
- *$\Delta(x,y)$ semble changer de signe au voisinage de (a,b).*
  Dans ce cas, on calcule Δ pour des valeurs bien choisies et pour lesquelles on voit clairement le changement de signe de Δ.
  Par exemple au voisinage de $(0,0)$, on testera souvent $\Delta(x,0)$, ou $\Delta(0,y)$, ou $\Delta(x,x)$...

Application 6.19. *On s'intéresse à la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$g(x,y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

Déterminer la position de la surface S d'équation $z = g(x,y)$ par rapport au plan tangent en O.