Chap.2 : Applications linéaires

La plupart des notions de ce chapitre sont des notions vues en première année. Aucun des résultats de TSI 1 ne sera démontré dans ce chapitre, libre à vous de retrouver les démonstrations manquantes dans votre cours de première année.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps des scalaires et il sera égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev (pas nécessairement de dimension finie).

1 Définitions

Définition 1.1. *On dit qu'une application $f : E \to F$ est linéaire si :*

1. $\forall (x,y) \in E^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, f(\lambda x) = \lambda f(x)$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque 1.2. *Pas besoin de vérifier en plus que $f(0_E) = 0_F$, c'est automatiquement entraîné par ces deux propriétés.*

Proposition 1.3. *Caractérisation des applications linéaire). f est linéaire ssi $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$*

Application 1.4. *Soit* $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto (P(1), P'(1)) \end{cases}$.
Démontrer que f est une application linéaire.

Définition 1.5.
- *On appelle* ***endomorphisme*** *de E toute application linéaire $E \to E$.*
  On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- *On appelle* ***isomorphisme*** *entre E et F toute application linéaire bijective $E \to F$.*

- *On appelle **automorphisme** de E toute application linéaire bijective $E \to E$ ("auto=endo+iso").*
  On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Proposition 1.6. ***Opérations algébriques sur les applications linéaires.***
La somme de deux applications linéaires est linéaire, la multiplication d'une application linéaire par un scalaire aussi, et la composée de deux applications linéaires aussi.

Proposition 1.7. ***Linéarité de la réciproque.***
Si $f : E \to F$ est linéaire et bijective, alors sa réciproque $f^{-1} : F \to E$ est aussi linéaire (et bijective !).

2 Noyau et image

Définition 2.1. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Le **noyau** de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = 0_F$:*

$$Ker(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$$

Proposition 2.2. $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sev de E et f est injective ssi*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

Définition 2.3. *L'**image** de f, notée $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des $y \in F$ qui s'écrivent $y = f(x)$ avec $x \in E$ (c'est-à-dire les $y \in F$ ayant au moins un antécédent par f).*

$$Im(f) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\} = \{f(x), x \in E\}$$

Proposition 2.4. *Si E est de dimension finie et si $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ est une base de E alors :*

$$Im(F) = Vect(e_1, ..., e_n).$$

Proposition 2.5. $\mathrm{Im}(f)$ *est un s-e-v de F et f est surjective ssi* $\mathrm{Im}(f) = F$

Définition 2.6. *Si* $\mathrm{Im}(f)$ *est de dimension finie, on appelle **rang** de f la dimension de son image :*

$$rg(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Proposition 2.7. *Si E et F sont de dimension finie, si $f : E \to F$ est linéaire et si* $\dim(E) = \dim(F)$*, alors :*

f est injective ssi f est surjective.

Remarque 2.8. *Ce résultat est très utile pour montrer qu'une application linéaire en dimension finie est bijective : il suffit de vérifier que les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension, et que l'application est injective (par exemple).*

Théorème 2.9. ***Théorème du rang.***
Si $f : E \to F$ est linéaire et si E est de dimension finie, alors :

- $\mathrm{Im}(f)$ *est automatiquement de dimension finie ;*
- $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + rg(f)$.

Application 2.10. *Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par*

$$f(x, y, z, t) = (5x+12y+11z-49t, -3x-8y-5z+27t, -3x-9y-3z+24t, -x-3y-z+8t)$$

On admet que f est une application linéaire.

1. *Déterminer une base de $ker(f)$.*
2. *Déterminer une base de $Im(f)$.*
3. *$Ker(f)$ et $Im(f)$ sont-ils supplémentaires ?*

3 Représentation matricielle

On suppose ici que $f \in \mathscr{L}(E, F)$ avec E et F de dimensions finies.

Définition 3.1. *On appelle **matrice de f dans les bases** $\mathscr{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ (au départ) et $\mathscr{B}_F = (u_1, \cdots, u_n)$ (à l'arrivée) la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les p colonnes sont les coordonnées respectives de $f(e_1), \cdots, f(e_p)$ dans la base d'arrivée $\mathscr{B}_F = (u_1, \cdots, u_n)$.*
On la note $Mat_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$

Application 3.2. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto X^2P'' + P \end{array} \right.$.

1. *Démontrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.*

2. *Donner la matrice de f*
3. *Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.*
4. *f est-elle bijective ?*

Remarque 3.3. *En notant $\mathscr{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathscr{B}_F = (u_1, \cdots, u_n)$, on a donc*

$$Mat_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)) = \mathrm{Mat}_{(u_1,\cdots,u_n)}\left(f\left(e_1\right), \cdots, f\left(e_p\right)\right)$$

Proposition 3.4. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire et $\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F$ deux bases respectives de E et F. Alors, pour tout $x \in E$, on a :*

$$[f(x)]_{\mathscr{B}_F} = Mat_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \times [x]_{\mathscr{B}_E}$$

Proposition 3.5. *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, et si $\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G$ sont des bases respectives de E, F, G, alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times Mat_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$$

Proposition 3.6. *Une application linéaire $f : E \to F$ est bijective ssi sa matrice A dans n'importe quelles bases $\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F$ est inversible.*
Dans ce cas, A^{-1} est la matrice de $f^{-1} : F \to E$ (dans les bases $\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E$) :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(f))^{-1}$$

Théorème 3.7. ***Invariance du rang par changement de base.***
Le rang d'une application linéaire $f : E \to F$ est égal au rang de sa matrice dans n'importe quel couple de bases $(\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$.

Proposition 3.8. ***Sur la matrice d'une application linéaire.***
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F), \mathscr{B}_E, \mathscr{B}'_E$ deux bases de E, $\mathscr{B}_F, \mathscr{B}'_F$ deux bases de F. Alors :

$$Mat_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f) = (P_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}'_F})^{-1} \times Mat_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \times P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}$$

Application 3.9. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :*

$$f(x, y, z) = (x + y, z + 2x, z)$$

On admet que f est une application linéaire.

1. *Donner la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
2. *f est-elle un automorphisme ? Si c'est la cas, donner l'expression de $f^{-1}(x, y, z)$.*
3. *On admettra que $\mathscr{B} = ((1,0,0),(2,1,0),(1,0,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}'$.*

Application 3.10. *Soit $M = [m_{i,j}] \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que :*

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, m_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}.$$

$$\textit{Par convention } \binom{n}{k} = 0 \textit{ si } k > n.$$

1. *Déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ ayant M pour matrice dans la base canonique.*
2. *En déduire que $M \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ et déterminer M^{-1}.*

4 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition 4.1. *Soit f un endomorphisme de E, F un sous-espace vectoriel de E.*
*On dit que F est **stable** par f lorsque :*

$$\forall u \in \mathrm{F}, f(u) \in \mathrm{F}$$

Définition 4.2. *Soient des matrices carrées* $\mathrm{A}_1 \in \mathbb{M}_{p_1}(\mathbb{K}), \mathrm{A}_2 \in \mathbb{M}_{p_2}(\mathbb{K}), \ldots, \mathrm{A}_k \in \mathbb{M}_{p_k}(\mathbb{K})$*, et les* O *sont des matrices (en général rectangulaires) nulles, avec :*

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n.$$

Alors la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}_k \end{pmatrix}$ *est dite* ***diagonale par blocs****.*

Théorème 4.3. *Soit* φ *un endomorphisme de* E*,* $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_k$ *des sous-espaces vectoriels de* E*, stables par* φ*.*
Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_\mathrm{K}$*, alors, dans une base adaptée à cette somme directe, la matrice de* φ *est de la forme :* $\begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}_k \end{pmatrix}$

Remarque 4.4. *Les* A_i *sont les matrices des restrictions de* φ *aux* F_i*, dans leurs bases respectives.*

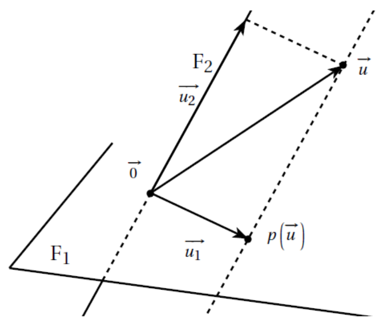
Exemple 4.5. *Supposons que* $E = F \bigoplus G$*. Lorsqu'on réalise une projection sur* F *parallèlement à* G*, alors* F *est stable par cette projection.*
On a la même chose pour la symétrie par rapport à F *parallèlement à* G*.*

5 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

5.1 Projecteurs

Définition 5.1. *Soient* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces supplémentaires de* E*, c'est-à-dire* $E = F_1 \oplus F_2$*.*
On appelle ***projecteur*** *sur* F_1 *parallèlement à* F_2 *(ou de direction* F_2*), l'application :*

$$f : \begin{cases} E = F_1 \oplus F_2 \to E \\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 \mapsto \overrightarrow{u}_1 \end{cases}$$



Proposition 5.2. *Soit un projecteur p. Alors :*

- *p est un endomorphisme de E ;*
- *$p \circ p = p$;*
- *$Ker(p) = F_2$ et $Im(p) = F_1$*

Théorème 5.3. *Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ alors :*

$$p \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow p \circ p = p$$

Dans ce cas, p est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$ et on a alors $E = Ker(p) \oplus Im(p)$.

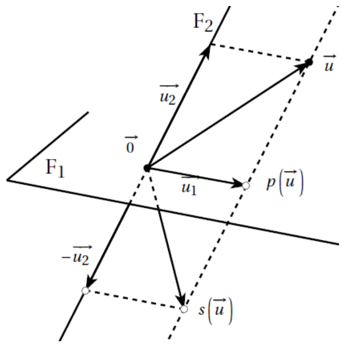
Application 5.4. *Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \frac{1}{3}(-x + 2y, -2x + 4y) \end{array} \right.$.*

1. *Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Démontrer que f est un projecteur.*
3. *Déterminer les éléments caractéristiques de f.*

5.2 Symétries

Définition 5.5. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E, c'est-à-dire $E = F_1 \oplus F_2$.*
On appelle ***symétrie vectorielle*** *par rapport à F_1 parallèlement à F_2 (ou de direction F_2), l'application s définie par :*

$$s : \left\{ \begin{array}{l} E = F_1 \oplus F_2 \to E \\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 \mapsto \overrightarrow{u}_1 - \overrightarrow{u}_2 \end{array} \right.$$



Proposition 5.6. *Soit s une symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2. Alors :*

- $s \in \mathscr{L}(E)$
- $s \circ s = id_E$
- $F_1 = Ker(s - id_E) = \{\overrightarrow{u} \in E, s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$ *et*

  $F_2 = Ker(s + id_E) = \{\overrightarrow{u} \in E, s(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}\}$
- $s \in GL(E)$ *donc* $Ker(s) = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$ *et* $Im(s) = E$

Proposition 5.7. *On note :*

- *p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2*
- *q le projecteur sur F_2 parallèlement à F_1*
- *s la symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2.*

Alors :

- $s = p - q$
- $q = id_E - p$
- $s = 2p - id_E$

Preuve :

Proposition 5.8. *Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Alors :*

$$s \text{ est une symétrie vectorielle} \Leftrightarrow s \circ s = id_E$$

*Plus généralement, une application vérifiant la relation $f \circ f = id$ est dite **involutive**.*

Application 5.9. *On admet que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ avec :*

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\} \text{ et } G = Vect(\{(1, 1, 1, 1,)\})$$

Expliciter la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

Application 5.10. *Soit* $\phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P(-X) \end{cases}$.

Démontrer que ϕ est une symétrie vectorielle dont on déterminera les éléments caractéristiques.