Aula 27: Modelos Matemáticos de Sensores e Atuadores para Controle de Atitude: Modelos para Sensores Solares: Sensores Digitais.

Sensores Digitais

Como indicado na Aula 05, sensores digitais de um e de dois eixos estão fortemente relacionados, o primeiro consistindo em um *componente de comando* (*A*) e um *componente da medida* (*B*) e o segundo consistindo em dois componentes de medida codificados em código Gray (*A* e *B*) como mostra esquematicamente a Fig. 4.

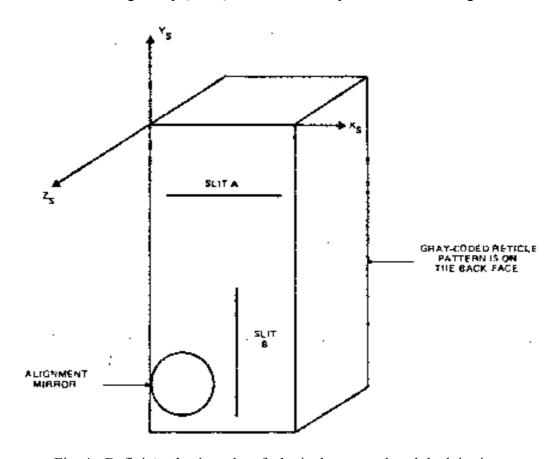


Fig. 4 - Definição de eixos de referência do sensor de sol de dois eixos.

Alinhamento de sensores Digitais. O alinhamento de sensores digitais consiste em dois processos distintos. O alinhamento interno é executado pelo fabricante do sensor para assegurar que as fendas do sensor, os padrões de reticulado codificados em código Gray e a forma do espelho de alinhamento, constituem uma unidade própria. O alinhamento externo da unidade sensora relativamente aos eixos de referência de atitude do satélite é executado pelo fabricante do satélite. Nesta seção, somente o alinhamento externo é modelado e supõe que não há nenhum erro no alinhamento interno.

O espelho do alinhamento é usado orientar a linha de visada (*boresight*) do sensor. Outro parâmetro de alinhamento é a rotação do sensor em torno do eixo de visada. Para sensores de um eixo, a fenda de entrada do componente de comando é geralmente paralela ao eixo de rotação do satélite. Na maioria dos casos, os sensores de dois eixos são montados de forma que uma fenda de medida (ou *A* ou *B*) está paralela ao plano *X-Y* do satélite (veja Fig. 5).

Define-se o eixo Z do sensor, Z_S , como a normal ao plano que contém o espelho de alinhamento e as fendas de entrada de ambos os componentes. O eixo Z_S é a linha de visada do sensor e é o *zero ótico* de ambos os componentes, A e B. Os eixos do sensor X_S e Y_S são perpendiculares ao Z_S , como definido na Fig. 4 e na Tabela 1. Observe que alguns dos parâmetros internos de alinhamento poderiam ser modelados tratando sensores de dois eixos como sendo dois sensores de um eixo alinhados independentemente, embora não usemos esse modelo aqui.

Tabela 1 – Definição dos Eixos de Referência para Sensores Digitais

Eixo	Modelos de um eixo	Modelos de dois eixos
Z_S	Normal ao plano contendo as fendas de comando e de medida. É também o eixo óptico	Normal ao plano contendo as fendas A e B. É também o eixo óptico nulo de ambos os
X_S	nulo de ambos os componentes. Paralelo a fenda de comando. Sentido positivo	Paralelo a fenda de medida do componente <i>A</i> .
	definido pela saída do detector localizado em baixo do reticulado em código Gray. O ângulo Solar é medido ao longo do eixo X_S	Sentido positivo definido pela saída do componente <i>B</i> .
Y_S	Paralelo a fenda de medida.	Paralelo a fenda de medida do componente <i>B</i> . Sentido positivo definido para completar sistema ortogonal definido pela regra da mão direita e consistente com a saída do componente <i>A</i> . Observe que o último requisito
		depende do alinhamento interno do sensor e pode requerer inversão do sinal da saída do componente A.

A orientação de um sensor de um eixo com a linha de visada localizada em ($\varphi' = \varphi + \delta \varphi$, $\delta \lambda$), desalinhado ligeiramente da posição nominal (φ , 0), e girado de um ângulo $\delta \psi$ em torno da linha de visada, é mostrada na Fig. 5. A transformação que gira um vetor do sistema do sensor para o sistema do satélite pode ser expressa como a transposta de uma matriz de rotação 3-2-3 de Euler com ângulos $\theta_1 = \varphi'$, $\theta_2 = 90^\circ - \delta \lambda$, e $\theta_3 = \delta \psi^1$ onde $\delta \lambda$, $\delta \varphi$, e $\delta \psi$ são pequenos ângulos de desalinhamento e o valor nominal 0° de θ_3 é escolhido de modo que a saída do sensor seja positiva no sentido +Z. A matriz de rotação para pequenos ângulos de rotação pode ser aproximada por

$$A_{SS1} = \begin{bmatrix} \delta \lambda \cos \phi' - \delta \psi \sin \phi' & -\sin \phi' & \cos \phi' \\ \delta \lambda \sin \phi' + \delta \psi \cos \phi' & \phi' & \sin \phi' \\ -1 & \delta \psi & \delta \lambda \end{bmatrix}. \tag{8}$$

A orientação de um sensor de dois eixos com a linha de visada localizada em (φ, λ) pode ser expressa, da mesma forma, como a transposta de uma matriz de rotação 3-2-3 de Euler com ângulos $\theta_1 = \varphi$, $\theta_2 = 90^{\circ} - \lambda$, e $\theta_3 = 90^{\circ} + \delta \psi$, onde $\delta \psi$, é um pequeno ângulo de desalinhamento em torno da linha de visada. A matriz de rotação para pequenos ângulos de rotação pode ser aproximada por

_

 $^{^{1}}$ $\delta\lambda$ é positivo se a linha de visada está acima do plano *X-Y* do satélite; $\delta\psi$ é uma rotação positiva do sensor em torno da linha de visada.

$$A_{SS2} = \begin{bmatrix} -\sin\phi - \delta\psi \sin\lambda \cos\phi & \delta\psi \sin\phi - \sin\lambda \cos\phi & \cos\phi \cos\lambda \\ \cos\phi - \delta\psi \sin\lambda \sin\phi & -\delta\psi \cos\phi - \sin\lambda \sin\phi & \sin\phi \cos\lambda \\ \delta\psi \cos\lambda & \cos\lambda & \sin\lambda \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Observe que no exemplo mostrado, a posição nominal da fenda A é paralela ao plano X-Y do satélite e o eixo Z do satélite está no plano Y-Z do sensor.

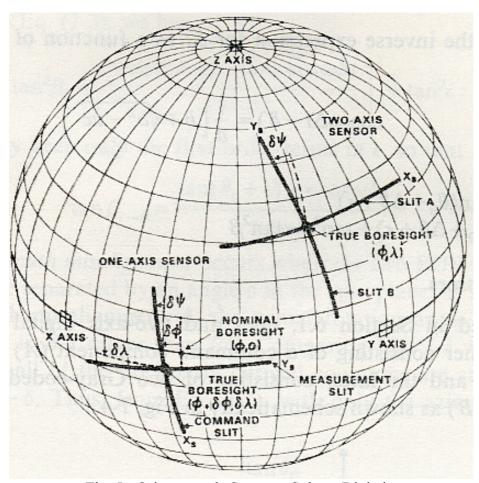


Fig. 5 - Orientação de Sensores Solares Digitais.

Sensor Digital de um Eixo. A geometria de um raio incidente em um bloco de material com índice de refração n é ilustrada na Fig. 6. A *lei de Snell* que relaciona o ângulo de incidência, θ , com o ângulo de refração, θ' , é

$$n\sin\theta' = \sin\theta,\tag{10}$$

onde o índice de refração do espaço é a unidade. Os detectores abaixo do padrão do reticulado do sensor geram uma saída digitalizada e com sinal, N, proporcional à deflexão, x, tal que

$$x = kN, \tag{11}$$

onde k é o tamanho do passo do reticulado. De (10) e (11) usando trigonometria, tem-se

$$\sin \theta = n \sin \theta' = \frac{nkN}{\sqrt{(kN)^2 + h^2}}.$$
 (12)

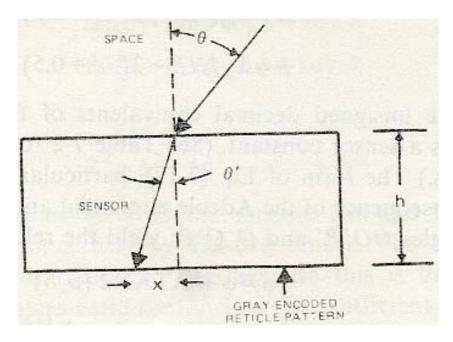


Fig. 6 - Sistema Óptico do Sensor Solar de um Eixo.

Expandindo (12) numa série trigonométrica em $\varepsilon = x/h = kN/h << 1$ e retendo termos até ε^5 , obtem-se

$$\theta \approx n\varepsilon - n(3 - n^2)\varepsilon^3 / 6 + n(15 - 10n^2 + 3n^4)\varepsilon^5 / 40.$$
 (13)

onde θ está em radianos. Um objetivo do projeto de sensores digitais é uma relação linear entre a saída do sensor, N, e o ângulo medido. Para um material com n $\approx \sqrt{3}$, o dependente do termo em ε^3 se torna insignificante, obtendo-se o seguinte resultado aproximado

$$\theta \cong nkN/h. \tag{14}$$

Uma simplificação adicional útil resulta se a geometria do reticulado for escolhida tal que $180nk/(\pi h) = 1$. Neste caso, $\theta = N$, onde θ é expressado agora em graus.

Quando a medida do ângulo do Sol, θ , é feita, o vetor do Sol, no referencial do sensor, é. $(-\sin\theta, 0, \cos\theta)$. No referencial do satélite, o vetor do Sol é

$$\vec{V}_B = A_{SS1} \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{15}$$

A partir do qual o azimute e a elevação do Sol no referencial do satélite pode ser calculado.

Sensores Digitais de Dois Eixos. A obtenção das equações de redução de dados para sensores de dois eixos da Adcole é análoga àquela para os sensores de um eixo [Adcole,

1975]. A geometria é mostrada na Fig. 7. Observe que OZ_S é o zero ótico (ou boresight) de ambos os sensores, A e B. O raio refratado (OP') é deflexionado pela barra com índice de refração n e atinge o retículo em código Gray no ponto P' com coordenadas (b, a). A aplicação da lei de Snell fornece

$$n\sin\theta' = \sin\theta, \quad \varphi = \varphi'.$$
 (16)

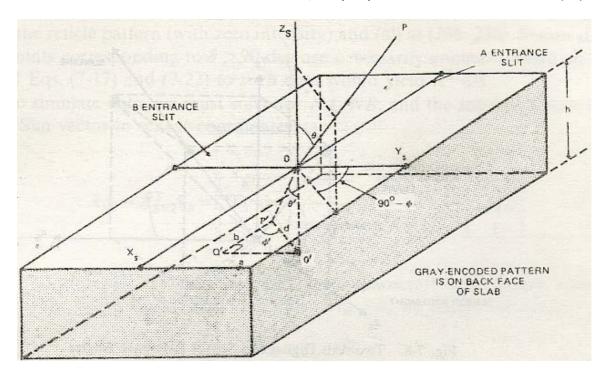


Fig. 7 – Óptica do Sensor Solar de dois Eixos.

Pela analogia com (11), as saídas dos componentes A e B denotados por NA e NB, respectivamente, são convertidas em deslocamentos através de

$$a = k_m(NA - 2^{m-1} + 0.5), b = k_m(NB - 2^{m-1} + 0.5).$$
 (17)

NA e NB são equivalentes decimais, sem sinais, de m bits em código Gray de saída do sensor e k_m é uma constante do sensor (veja a Tabela 2 para valores representativos das constantes do sensor). A forma de (17), particularmente a soma de 0,5 a NA e NB, é uma consequência do procedimento de alinhamento e calibração da Adcole.

Dos triângulos retângulos OO'P' e O'Q'P' obtem-se as relações

$$\varphi = \varphi' = \text{ATAN2}(a, b), \tag{18}$$

$$\tan \theta' = \frac{d}{h} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{h},\tag{19}$$

onde a função ATAN2 é usada em (18) para resolver a ambigüidade do quadrante. Substituindo (16) em (19) e rearranjando, tem-se

$$\theta = \arctan \frac{n\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{h^2 - (n^2 - 1)(a^2 + b^2)}} < 90^{\circ}.$$
 (20)

Os ângulos φ e θ são o azimute e a co-elevação, respectivamente, do vetor solar nas coordenadas do sensor, que têm o pólo positivo ao longo do *boresight* do sensor e o meridiano de referência ao longo do eixo $+X_S$. O vetor do Sol pode ser transformado em coordenadas do satélite usando-se (9). Os dados do sensor solar digital de dois eixos em geral são reparametrizados em termos dos ângulos entre as projeções da linha solar sobre os planos Y_S – Z_S e X_S – Z_S , e o eixo Z_S , como ilustram as Figs. 8 e 9. Os ângulos α e β são rotações em torno de $-X_S$ e Y_S , respectivamente, dados por

$$\tan\beta = \tan\theta\cos\varphi = nb/R, \qquad \tan\alpha = \tan\theta\sin\varphi = na/R, \tag{21}$$

onde

$$R^{2} = h^{2} - (n^{2} - 1)(a^{2} + b^{2}).$$
(22)

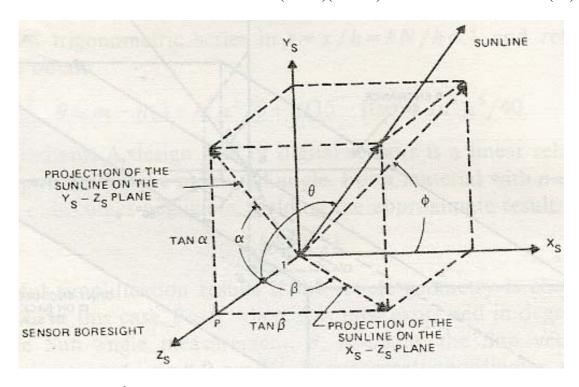


Fig. 8 - Ângulos de Referência do Sensor Solar Digital de dois Eixos.

O campo de visada especificado do sensor de dois eixos de $128^{\circ} \times 128^{\circ}$ da Adcole é "quadrado" como ilustra a Fig. 9. O FOV efetivo é geralmente considerado circular com 64° de raio porque este é o máximo ângulo de incidência que garante dados válidos (i.e., intensidade suficiente) independente de φ . Para ângulos solares próximos dos cantos do FOV, $\varphi = \pm 45$ ou ± 135 , dados válidos são obtidos para θ até $71^{\circ 2}$. Pode-se demonstrar (seção 2.3 do Wertz) que cinco sensores de dois ângulos podem ser distribuídos para fornecer uma cobertura de 4π sr com um ângulo máximo θ de 63,5°. Observa-se que este resultado é válido para sensores digitais de dois eixos independente do alinhamento do sensor em torno da linha de visada. Para um sensor de 8 *bits* com n = 1,4553, as coordenadas de vários pontos da grade dentro do FOV, expressos como (NA, NB), é

_

² De (22), tem-se $\varphi = 45^{\circ}$ e $\beta = 64^{\circ}$; logo, $\tan \theta = \tan \beta / \cos 45^{\circ} = \tan 64^{\circ} / \cos 45^{\circ}$ ou $\theta = 70.97^{\circ}$.

mostrado em Fig. 8. Para $n \neq 1$, as linhas de α e β constantes $n\tilde{\alpha}o$ são linhas de NA ou NB constantes e, em particular, o ponto da grade que corresponde a $[\alpha, \beta] = [64^{\circ}, 0^{\circ}]$ é (255, 127,5) e $[64^{\circ}, 64^{\circ}]$ é (226, 226). A linha de visada (boresight) está no centro dos quatro pontos da grade (127, 127), (127, 128), (128, 127) e (128, 128). Devido ao meio refrativo do sensor, um raio normal à linha de visada em $\theta = 90^{\circ}$ e $\varphi = 45^{\circ}$ atingirá o reticulado (com intensidade zero) e cai em (236, 236). Os dados do sensor com os pontos de grade que correspondem a $\theta > 90^{\circ}$ são necessariamente anômalos e uma aplicação de (17) e (22) a tais dados forneceria $R^2 < 0$.

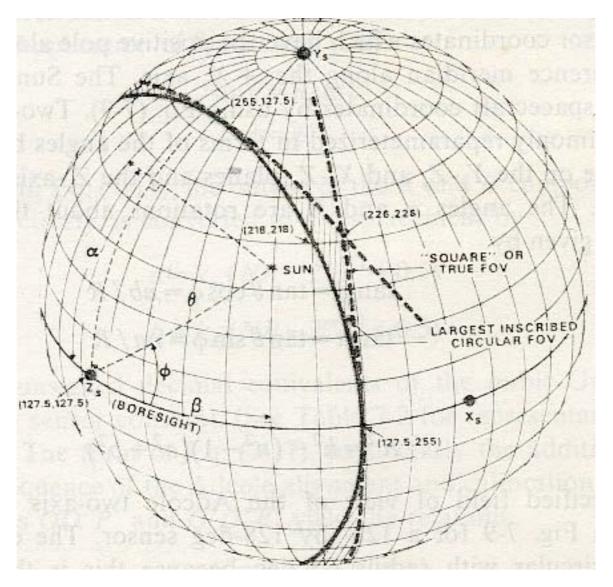


Fig. 9 – Campo de Visada do Sensor Solar Digital de dois Eixos. Veja texto para uma explanação das coordenadas.

Para simular dados, devem-se obter NA, NB e o sensor selecionado em termos do vetor do Sol no referencial do sensor

$$\vec{V}_{SS} = A_{SS2}^T \vec{V}_B = \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + 1}} \begin{bmatrix} \tan \beta \\ \tan \alpha \\ 1 \end{bmatrix}.$$
 (23)

Onde \vec{V}_B e \vec{V}_{SS} são o vetor solar nas coordenadas do satélite e do sensor, respectivamente. Usando (21), (22) e Fig. 8, obtém-se

$$a = Y_S \gamma^{1/2}, \qquad b = X_S \gamma^{1/2},$$
 (24)

onde

$$\gamma = \frac{h^2}{n^2 - X_s^2 - Y_s^2} \ge 0. \tag{25}$$

Finalmente, a saída do sensor é

$$NA = INT(a/k_m + 2^{m-1}), \qquad NB = INT(b/k_m + 2^{m-1}),$$
 (26)

onde INT(x) é a parte integral de x e NA e NB são o código Gray para o padrão do reticulado. O sol é visível a um sensor específico (embora a intensidade pode estar abaixo do limiar de ATA) se γ e Z_S forem positivos. O sensor selecionado para configuração multi-sensores é determinado pela saída de ATA, isto é, o sensor com maior Z_S (positivo).

Para estimação de estado, as saídas angulares do sensor digital podem se calculadas usando (26) mas a identificação do sensor, para configuração multi-sensores, não pode ser prevista confiavelmente. O sensor real selecionado é uma função dos ajustes precisos dos limiares sempre que o Sol está perto do horizonte da Terra ou está entre os campos de visada de sensores adjacentes. A identificação do sensor deve ser usada meramente validar dados do sensor para a estimação do estado.

Sensores Solares Finos. A operação do Sensor Solar fino descrito na Aula 6 é ilustrada no Fig. 10 (compare com o Fig. 9). Na figura, o eixo horizontal foi expandido para ilustrar o efeito do diâmetro angular do Sol (32 arcmin) (perto da Terra), que requer o uso de um sensor analógico ao invés de um digital fino. A luz solar incidindo nas fendas de entrada, afastadas de s, produz a corrente de fotocélula mostrada esquematicamente na Fig. 10(d). O sinal de saída quase senoidal é uma conseqüência do tamanho finito do Sol. Se quatro padrões de reticulado são deslocados de s/4 a corrente da fotocélula, I, abaixo de cada padrão, pode ser escrita em função de $x = 2\pi w/s$ onde $w = t \tan \alpha$, t é a distância entre os dois padrões do reticulado, e α é o ângulo do Sol. I é dada por

$$I_1 = f(2\pi w/s); I_2 = f(2\pi w/s + \pi/2); I_3 = f(2\pi w/s + \pi); I_4 = f(2\pi w/s + 3\pi/2),$$
 (27)

onde os ângulos são medidos em radianos. A eletrônica do sensor solar obtém a quantidade arctan $y = \arctan[(I_1 - I_3)/(I_2 - I_4)]$, que é relacionada ao ângulo do Sol por

$$\arctan y = 2\pi t \tan \alpha / s + \text{termos menores}.$$
 (28)

A equação (28) pode ser obtida como segue. A função f(x) é periódica com período s e tem um máximo em $x = \pi/2$. Devido ao fato de f(x) ser simétrica em relação à $x = \pi/2$, ela pode ser expandida em uma série de Fourier de co-senos [Markley, 1977]

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos(x - \pi/2) + a_2 \cos(2x - \pi) + a_3 \cos(3x - 3\pi/2) + \dots$$

= $a_0 + a_1 \sin x - a_2 \cos 2x - a_3 \sin 3x + \dots$ (29)

A eletrônica do sensor solar fino obtém as quantidades $I_1 - I_3$, $I_2 - I_4$, $y = (I_1 - I_3)/(I_2 - I_4)$ e arctan y, que são aproximadas como se segue

$$I_1 - I_3 = a_1[\sin x - \sin(x + \pi)] - a_2[\cos 2x - \cos 2(x + \pi)] - a_3[\sin 3x - \sin 3(x + \pi)] + ... = 2a_1\sin x[1 - a_3(4\cos^2 x - 1)/a_1] + ...$$
(30a)

$$I_2 - I_4 = 2a_1 \cos x [1 + a_3(4\cos^2 x - 3)/a_1] + \dots$$
 (30b)

$$y \approx \tan x [1 - 4a_3(2\cos^2 x - 1)/a_1] = \tan x [1 - 4a^3\cos 2x/a_1].$$
 (30c)

(30c) pode ser reescrita numa forma mais conveniente

$$\arctan y = x - \arctan \varepsilon,$$
 (30d)

onde ε é um pequeno termo de erro. Tomando a tangente de ambos os lados de (30d) e usando a relação trigonométrica

$$tan(a+b) = (tana \pm tanb)/(1 -/+ tanatanb),$$
(31a)

obtém-se

$$\tan(x - \varepsilon)/(1 + \varepsilon \tan x) = \tan x - \varepsilon (1 + \tan^2 x) + O(\varepsilon^2). \tag{31b}$$

Comparando (31b) com (30c) para obter ε , tem-se

$$\arctan y \approx x - \arctan(a_3 \sin 4x/a_1) \approx x - a_3 \sin 4x/a_1,$$
 (32)

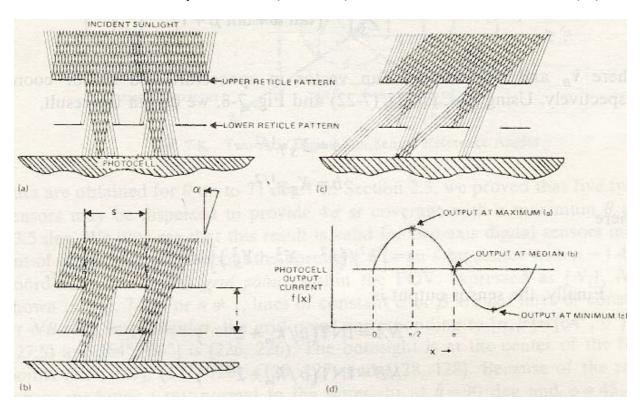


Fig. 10 - Representação esquemática da corrente de saída da fotocélula do sensor solar fino; raios vindos de diferentes direções representam a luz dos lados opostos do Sol (o espraiamento angular destes raios está extremamente exagerado).

Para $w = t \tan \alpha$ pequeno, obtém-se

$$\arctan y = 2\pi t \tan \alpha / s - (a_3/a_1)\sin(8\pi t \tan \alpha / s), \tag{33}$$

que é o resultado desejado.

Assim, se a saída da fotocélula é representada adequadamente pelos três primeiros termos da série de co-senos de Fourier, a saída da eletrônica do sensor solar fino, arctany, é dado por um termo proporcional à tangente do ângulo do raio incidente, α , mais um termo senoidal de erro.

Na prática, a inversa de (33) é requisitada para processamento de dados do sensor. A saída digital do sensor, NA, é relacionada à saída analógica, por

$$\arctan y = k_1(NA) + k_2, \tag{34}$$

onde k_1 e k_2 são constantes do sensor. (33) pode ser reescrita como

$$\tan \alpha = (s/2\pi t)(k_1NA + k_2) + (a_3/a_1)(s/2\pi t)\sin(8\pi t \tan \alpha/s). \tag{35}$$

Definindo as constantes do sensor

$$A_1 = sk_2/2\pi t,\tag{36a}$$

$$A_2 = sk_1/2\pi t, \tag{36b}$$

$$A_3 = sa_3/2\pi t a_1, (36c)$$

então, sucessivas aproximações de α , $\alpha^{(n)}$, são dadas por

$$\tan \alpha^{(0)} = A_1 + A_2 N A,$$

$$\tan \alpha^{(n+1)} = \tan \alpha^{(n)} + A_3 \sin(8 \pi t \tan \alpha^{(n)} / s),$$
(37a)
(37b)

$$\tan \alpha^{(n+1)} = \tan \alpha^{(n)} + A_3 \sin(8\pi t \tan \alpha^{(n)}/s), \tag{37b}$$

ou para a mesma ordem de (33)

$$\tan \alpha \approx A_1 + A_2 NA + A_3 \sin(A_4 NA + A_5).$$
 (37c)

Para IUE, a saída do sensor é codificada em palavras de 14 bits (0-16.383) e o campo de visada de ±32° é medido com um bit menos significativo de 14 segundos de arco. A função de transferência é a seguinte [Adcole, 1977]

$$\alpha = \alpha_0 + \arctan[A_1 + A_2NA + A_3\sin(A_4NA + A_5) + A_6\sin(A_7NA + A_8)],$$

$$\beta = \beta_0 + \arctan[B_1 + B_2NB + B_3\sin(B_4NB + B_5) + B_6\sin(B_7NB + B_8)].$$
 (38)

onde NA e NB denotam a saída digitalizada do sensor; os parâmetros A_i , o B_i , α_0 e β_0 são obtidos pela calibração em Terra; e α e β são definidos na Fig. 8. Os parâmetros que definem a espessura da placa, índice de refração, alinhamento e resolução variam dependendo do modelo do sensor e da específica calibração. A Tabela 2 lista os valores que são representativos e convenientes para análises de simulação e de erros (veja também a Tabela 1 da Aula 03).

Tabela 2 - Constantes representativas para os Sensores Solares Digitais manufaturados pela Adcole Corporation

PROPERTY	SYMBOL	VALUE
RANSFER FUNCTIONS 6 AND 8*		aido by lattatresu
INDEX OF REFRACTION	n	1.4553
SLAB THICKNESS		0.56896 CM
RESOLUTION (7-BIT MODEL)	k	0.006985 CM/UNIT
RESOLUTION (8-BIT MODEL)	k	0.0034925 CM/UNIT
ODEL 18960* (IUE) (14-BIT OUTPUT)		310252 315412511 OI
CALIBRATION CONSTANTS	A ₁ , B ₁	-0.624869
fine Sun sensor electron	A ₂ , B ₂	7.6278 × 10 ⁻⁵
	A3. A6. 83. 86	<10 ⁻⁴
	A4. 84	0.703125 DEG/COUNT
	A 7. B 7	1,40625 ^{††} DEG/COUNT
	A ₅ , A ₈ , B ₅ , B ₈	ARBITRARY, 0 TO 360 DEG
ALIGNMENT ANGLES	α ₀ , β ₀	<0.1 DEG

^{*}Ver Tabela 1 – Aula 03. †Corresponde a 32 períodos de oscilação sobre o campo de visada de $\pm 32^{\circ}$. ††Corresponde a 64 períodos de oscilação sobre o campo de visada de $\pm 32^{\circ}$.