Segunda Prova de Teoria da Computação — 2016/2
Prof. José de Oliveira Guimarães — DComp — Campus de Sorocaba da UFSCar

Ao final da prova, entregue APENAS a folha de respostas. A folha de questões não será considerada. Utilize quantas folhas de reposta forem necessárias. Não é necessário entregar as questões em ordem. Utilize lápis ou caneta, mas faça letra legível. Na correção, símbolos ou palavras ilegíveis não serão considerados.

Justifique todas as respostas.

Se você estudou com algum colega para esta prova, não se sente ao lado dele pois é possível que acidentalmente vocês produzam respostas semelhantes para alguma questão. Provas de alunos que fizeram a prova próximos uns dos outros com respostas semelhantes caracterizam cópia de questões. Lembro-os de que todos os envolvidos na utilização de métodos ilegais na realização desta prova receberão zero de nota final da disciplina (e não apenas nesta prova).

Coloque o seu nome na folha de resposta, o mais acima possível na folha, seguido do número da sua coluna de carteiras. A primeira carteira é a mais perto da porta e a última a mais perto das janelas. Não precisa colocar o RA.

1. (4,5) Seja L uma linguagem para a qual existe uma MT M_L tal que:

$$x \in L \Longrightarrow M_L(x) \leqslant 0$$

$$x \notin L \Longrightarrow M_L(x) > 0$$

Seja K uma linguagem computacionalmente enumerável. Faça o que pedem os itens abaixo.

(a) (1,5) L é computável? Prove.

(b) (1,5) $L \cup K$ é c.e. pela prova abaixo. Infelizmente estão falando algumas partes que você deve preencher e colocar na resposta. Escreva apenas "①. texto ②. texto ...", um número em cada linha.

Sendo K uma linguagem c.e., existe uma MT M_K tal que:

$$x \in K \Longrightarrow M_K(x) = 1$$

$$x \notin K \Longrightarrow M_K(x) \uparrow$$

Seja M a MT descrita a seguir. M toma uma entrada x. M ① M_L com entrada x. Se a saída de M_L for ②, M para retornando 1. Senão M simula a execução de M_K com entrada x. M retorna ③. Obviamente se M_K não parar M nunca irá parar também. Pela definição de computacionalmente enumerável, M prova que $L \cup K$ é c.e.

(c) (1,5) Se K não é computável, K^c não é c.e. Novamente um professor relapso colocou apenas parte da prova. Preencha as partes faltantes e coloque na resposta.

Nesta prova usaremos a seguinte proposição: "Se L e L^c são ① então L e L^c são ②".

Provaremos por ③. Suponha que K^c é c.e. Então, pela proposição acima temos que K é computável pois K e K^c são c.e. Contradição, pois assumimos que K não é computável.

2. (8,0) Sobre MTs, responda os itens abaixo. Note que apenas os dois primeiros itens precisam de justificativa.

(a) (2,0) A codificação de uma MT universal U é o número $2^{20} + 3$. A MT M_0 decide o conjunto dos números pares. Qual a saída de U sendo chamada com a entrada $\langle M_0 \rangle \sqcup \langle U \rangle$? Justifique.

(b) (1,5) $L(M_0)$ pertence a P? E a NP? Justifique com palavras. Note que M_0 pode tomar um tempo exponencial para executar.

(c) (1,5) Seja $N = (Q, \Sigma, I, q)$ uma MTND de duas fitas. Então I é subconjunto de qual conjunto? Defina duas das instruções de N de tal forma que fique demonstrado, por estas duas instruções, que N não é uma MT determinística. Não é necessário justificar, apenas apresente as duas instruções.

(d) (1,5) Uma MT de uma única fita possui apenas a instrução

$$(q_0, 0, q_s, 1, P)$$

Faça a codificação desta única instrução. Assuma que o alfabeto é $\Sigma = \{0, 1, \triangleright, \sqcup, \square\}$. Não é necessário seguir as regras dadas na apostila. Mas lembre-se que uma codificação é uma função injetora e, dado um número $n \in \mathbb{N}$, deve ser possível descobrir se n corresponde a uma MT e qual MT é esta. Não é preciso justificar formalmente, mas deixe claro o raciocínio que você seguiu (os passos para chegar na resposta).

(e) (1,5) A relação $\sim$ é a relação de equipotência entre conjuntos. Seja $\Sigma_3 = \{0, 1, 2\}$, $\Sigma_0 = \{0\}$, $\mathbb{N}$ o conjunto dos naturais, F_n o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ o conjunto das partes de $\mathbb{N}$. Diga quais dos conjuntos $\Sigma_3^\star$, $\Sigma_0^\star$, F_n, $\mathbb{N}$ e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ são equipotentes entre si. Coloque todas as relações possíveis em uma mesma linha. Isto é, se os conjuntos fossem A, B, C, D e E, a resposta poderia ser

$$A \sim B \sim E$$

$$C \sim D$$

Mas a resposta NÃO poderia ser dada neste formato:

$$A \sim B, C \sim D, A \sim E, B \sim E$$

Não é necessário justificar.

Resumo:

Uma máquina de Turing determinística (MT ou MTD) é uma quadrupla (Q, Σ, I, q) na qual Q e Σ são conjuntos chamados de conjuntos de estados e de símbolos, I é um conjunto de instruções, $I \subset Q \times \Sigma \times Q \times \Sigma \times D$, $D = \{-1, 0, 1\}$ e $q \in Q$ é chamado de estado inicial. Há dois estados especiais: q_s e q_n, todos elementos de Q e todos diferentes entre si. Neste texto convenciona-se que o estado inicial será q_0 a menos de menção em contrário. Exige-se que $\{0, 1, \rhd, \sqcup, \square\} \subset \Sigma$. Uma instrução é da forma (q_i, s_j, q_l, s_k, d) na qual $s_k \neq \square$ e $q_i \notin \{q_s, q_n\}$. Se $(q, s, q'_0, s'_0, d_0), (q, s, q'_1, s'_1, d_1) \in I$, então $q'_0 = q'_1$, $s'_0 = s'_1$ e $d_0 = d_1$. Q, Σ e I são conjuntos finitos.

O símbolo $\square$ é o branco utilizado para as células ainda não utilizadas durante a execução e $\sqcup$ é utilizado para separar dados de entrada e saída.

Símbolos: Máquina de Turing Não Determinística (MTND), Máquina de Turing (MT), Máquina de Turing Determinística (MTD). A menos de menção em contrário, uma MT é uma MTD. Todas as linguagens utilizadas são subconjuntos de $\{0, 1\}^\star$.

Uma linguagem L é computável (recursiva) se existe uma MT M de decisão tal que

$$x \in L \text{ sse } M(x) = 1$$

Isto é, M decide L.

Uma linguagem L é ou computacionalmente enumerável, c.e. (recursivamente enumerável, r.e.) se existe uma MT M tal que se $x \in L$ então $M(x) = 1$. Se $x \notin L$, $M(x) \uparrow$. Dizemos que M *aceita* L.

Uma linguagem L pertence a TIME(f) se existe uma MT M de decisão que toma uma entrada x e que termina a sua execução depois de um número de passos menor ou igual a $cf(n)$ tal que $x \in L$ sse $M(x) = 1$. Ou seja, M executa em tempo $cf(n)$. Uma linguagem L pertence a SPACE(f) se existe uma MT M que toma uma entrada x e que termina a sua execução depois de utilizar um número de células menor ou igual a $cf(n)$ nas fitas de trabalho (todas exceto a de entrada e a de saída). Ou seja, M executa em espaço $cf(n)$. NTIME(f) e NSPACE(f) têm definições análogas, mas que usam MTND´s.

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(n^k)$$

$$\mathrm{NP} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(n^k)$$