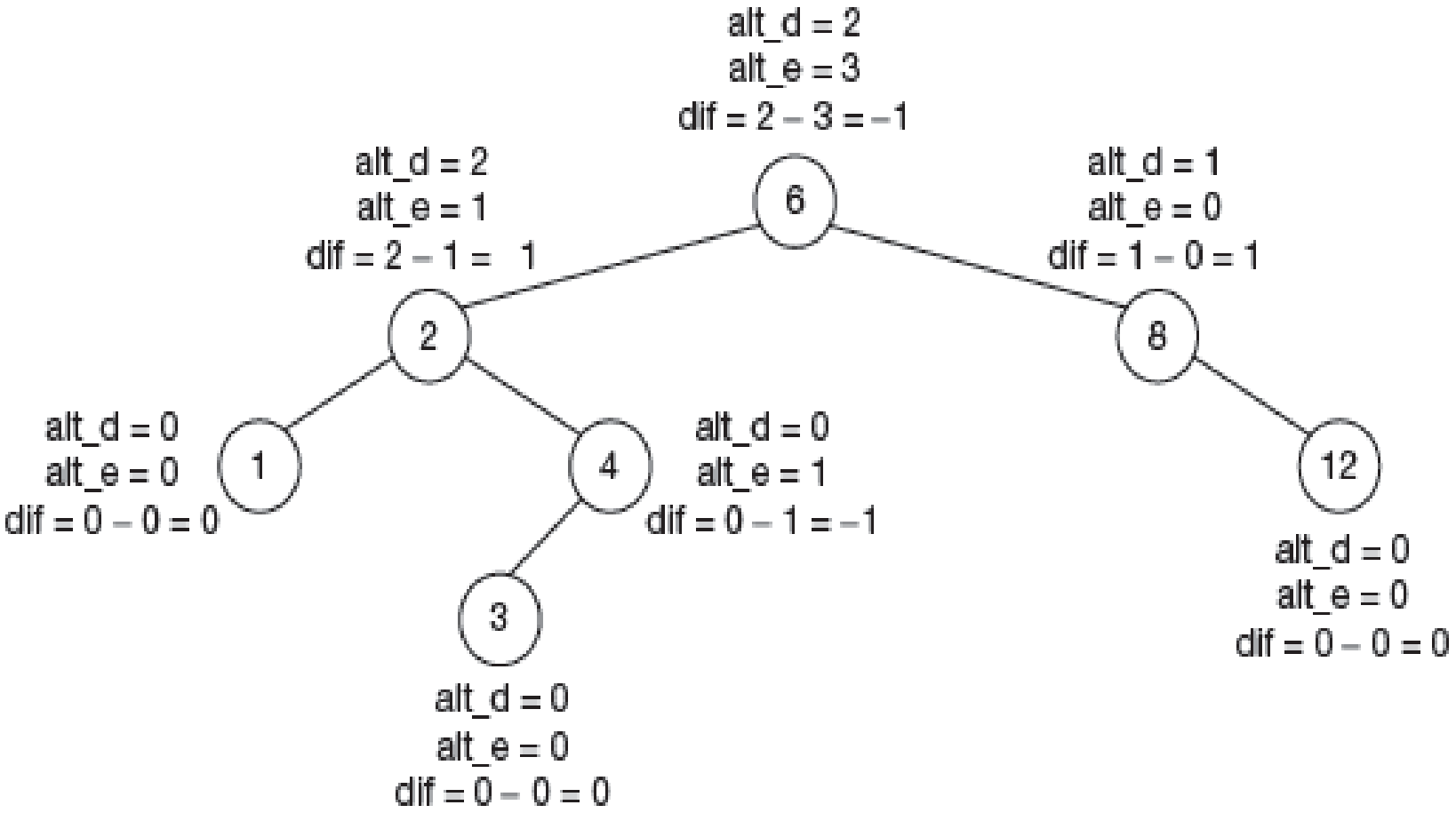
UTFPR – COCIC
Ciência da Computação
Algoritmos e Estruturas de Dados 2

Árvores binária com balanceamento– Árvores AVL

Árvores AVL

- Estrutura de dados criada em *1962* por dois russos Adelson-Velsky e Landis.
- Motivação
  - Árvores binárias de pesquisa (semi-)balanceadas apresentam desempenho ótimo para operações básicas.
- AVL é uma árvore binária de pesquisa **balanceada**.
  - **Toda** árvore AVL é binária de pesquisa mas o contrário não ocorre.
  - Como balanceamento é assegurado?
- Em uma AVL, **todo nó** apresenta o fator de balanceamento (FB): *diferença de altura* entre suas sub-árvores direita e esquerda
  - DEVE SER sempre **1**, **0** ou **–1**.

Árvore AVL - exemplo



Árvores AVL

- Operações (e.g. inserção, remoção) sobre AVLs
  - **Assumem** que a árvore é AVL antes da modificação
  - Não podem fazer com que árvore deixe de ser AVL após execução
    - Deve corrigir o FB de cada nó sempre que preciso.
- Correções ocorrem através de *rotações* em nós com FBs desbalanceados
- As rotações estendem os algoritmos de inserção e remoção em árvores binárias de pesquisa que já conhecemos.

Árvore AVL: Inserção

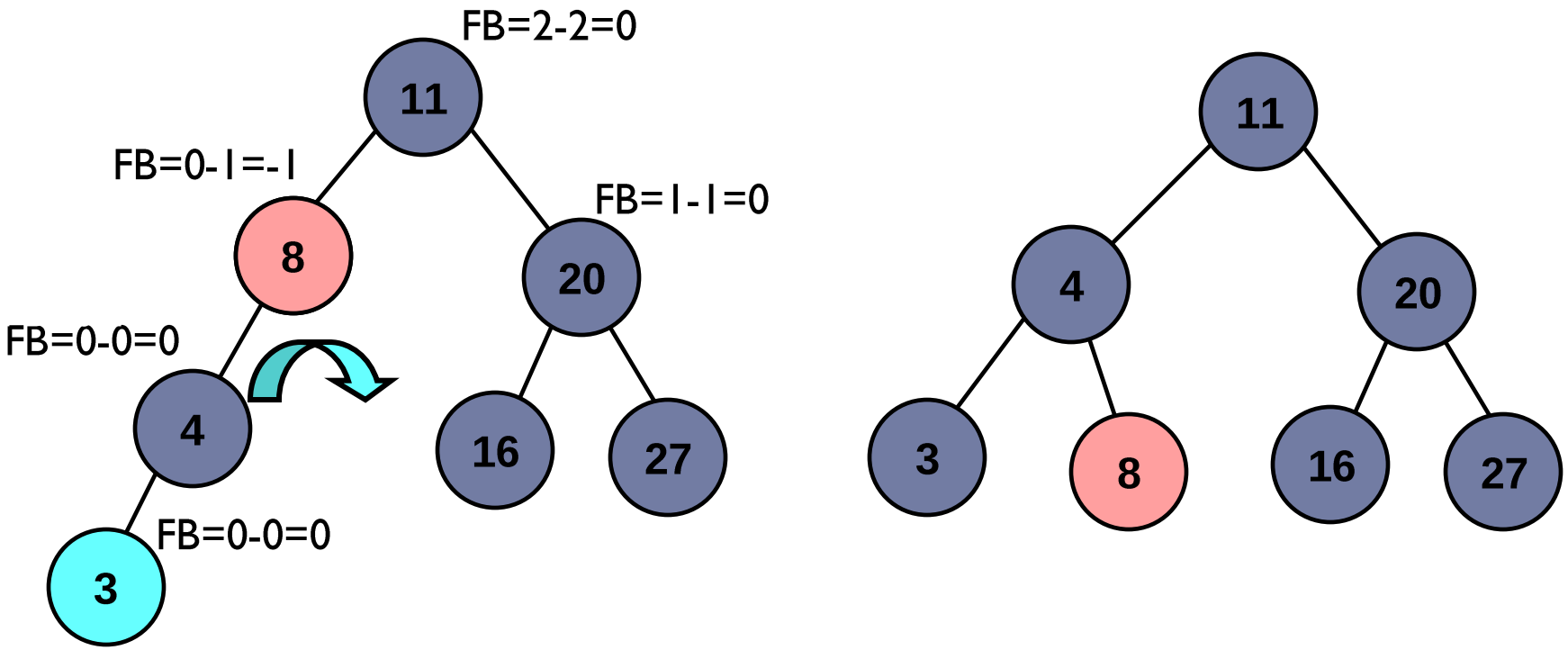
- 1. Uso do algoritmo de inserção da árvore binária de pesquisa tradicional para:
  - Achar posição do nó a ser inserido na árvore
  - Efetivar a inserção no local achado
- 2. Assegurar que a árvore continua sendo AVL
  - Usar retorno da recursão p/ assegurar FB de todos os nós: desde o inserido até o raíz.
  - Se condição AVL para o FB de um nó quebrar aplica um tipo de rotação adequado
    - Rotação simples
    - Rotação dupla

Inserção AVL:Rotação simples à direita

FB=AlturaDireita - AlturaEsquera

Insira a chave "3"

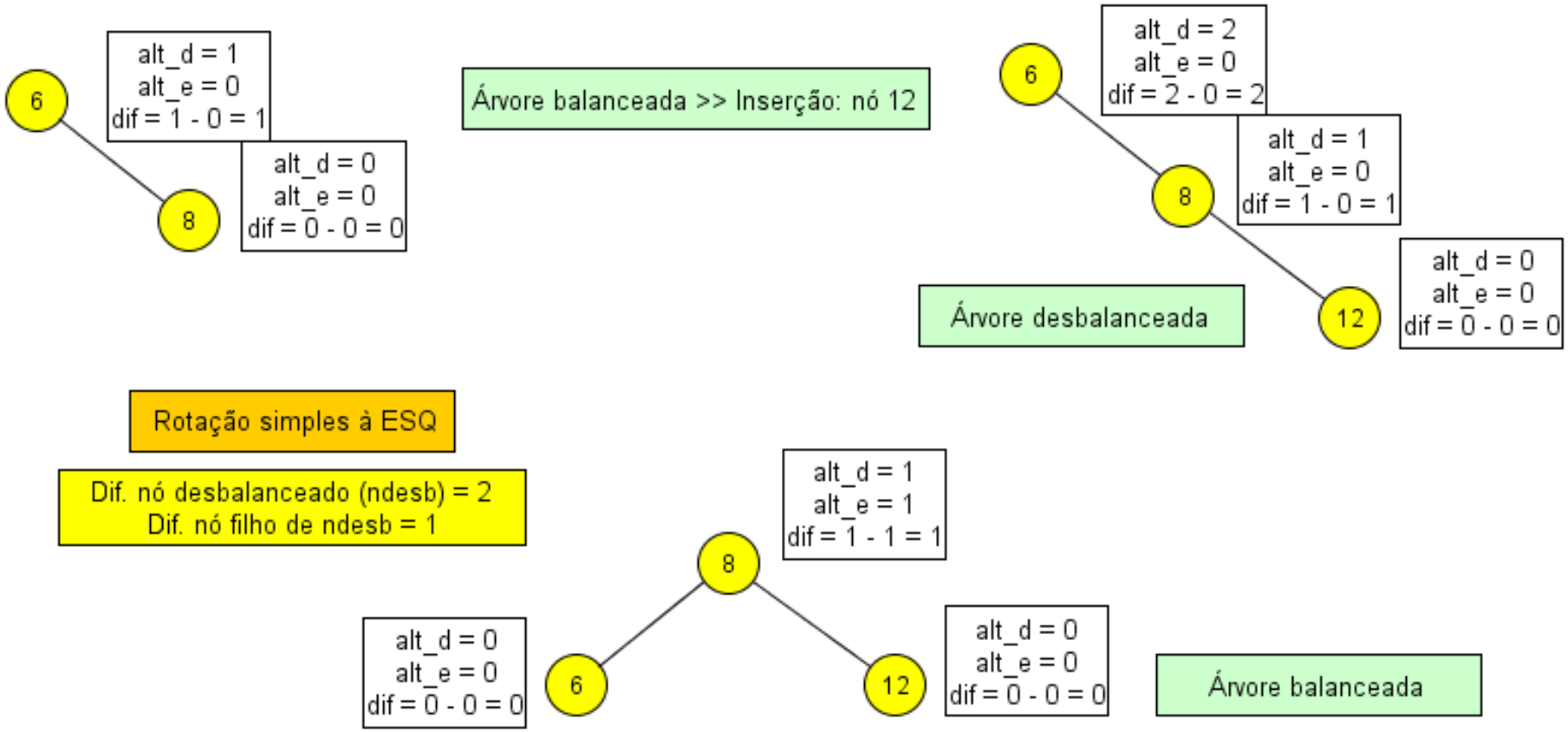
Rotação simples à direita: 8 vira filho DIREITO de 4 (seu filho esquerdo)



Adaptado de: Ruli Manurung, "Data Structures and algorithms, IKI 10100, 2007.

AVL – Rotação simples à esquerda

Ideia similar à da direita:

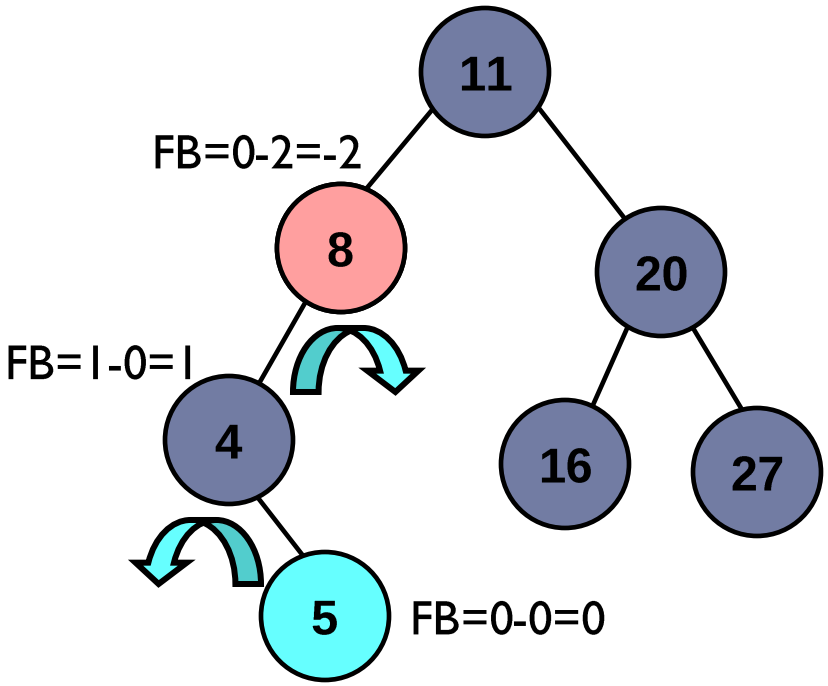


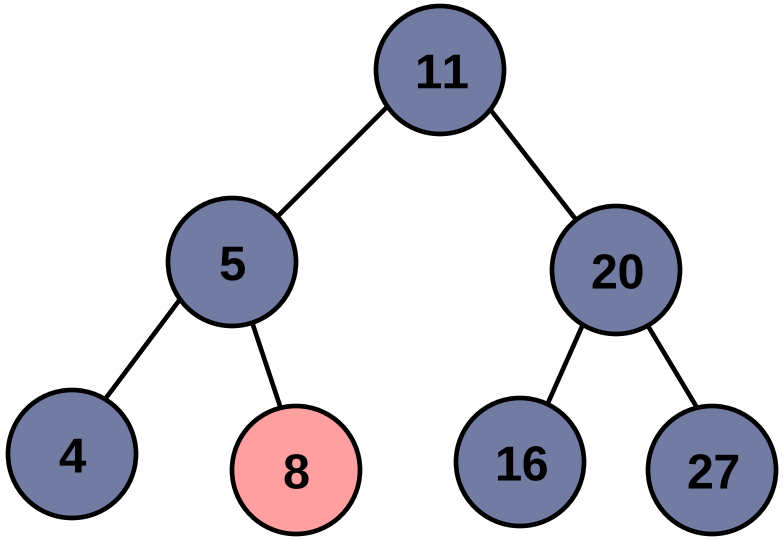
Inserção AVL:Rotação dupla

FB=AlturaDireita - AlturaEsquera

Insira chave "5"

Rotação dupla:
- 4 vira filho esquerdo de 5
- 8 vira filho direito de 5





Adaptado de: Ruli Manurung, "Data Structures and algorithms, IKI 10100, 2007.

Rotações simples na inserção: Síntese

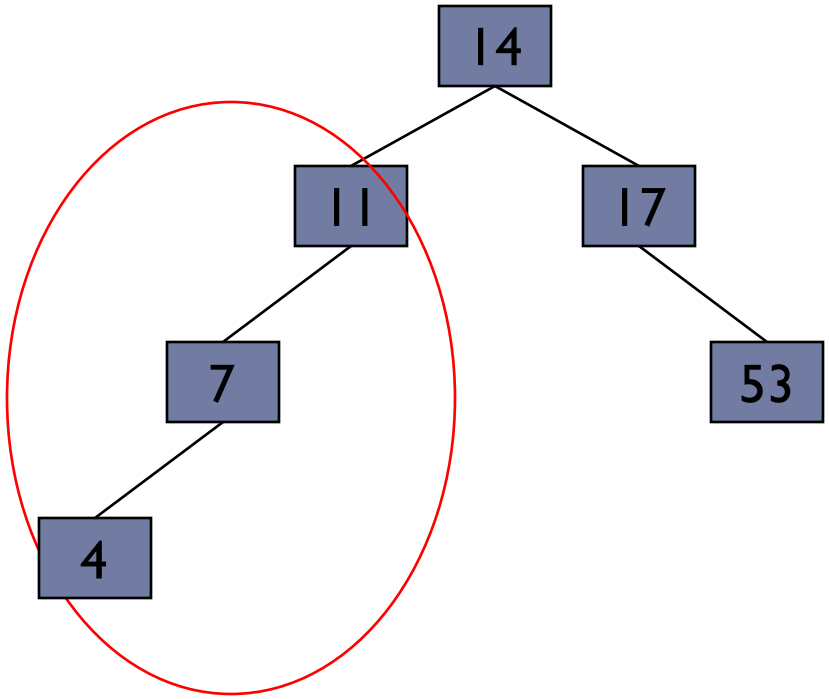
- Seja X o nó cujo FB fugia à regra após uma inserção na sua sub-árvore X->T1, por exemplo.
- Rotação simples à esquerda:
  - X torna-se filho esquerdo do nó raiz de T1 (juntamente com seus filhos, se for o caso)
  - Se o nó raiz de T1 tiver filhos à esquerda, esses serão filhos à direita de X.
- Rotação simples à direita (juntamente com seus filhos, se for o caso)
  - X torna-se filho direito do nó raiz de T1.
  - Se o nó raiz de T1 tiver filhos à direita, esses serão filhos à esquerda de X.

Rotação dupla - Síntese

- Seja X o nó cujo FB fugiu à regra após uma inserção em sua sub-árvore X->T1, por exemplo.
- A primeira rotação sempre se referirá ao nó raiz de T1
  - Simples à esquerda ou simples à direita
- A segunda rotação rotação sempre se referirá ao nó X
  - Simples à esquerda ou simples à direita

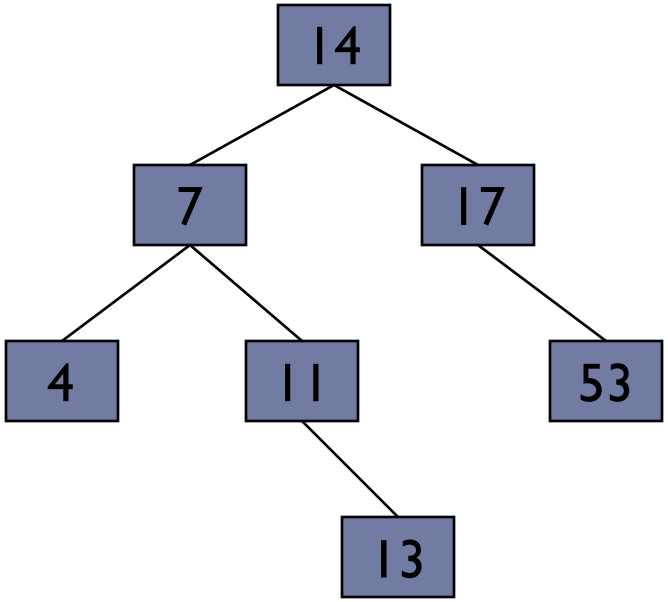
Exercício

- Obtenha uma árvore AVL através da inserção da seguinte sequência de valores:
  - **14, 17, 11, 7, 53, 4, 13, 12, 10,9**

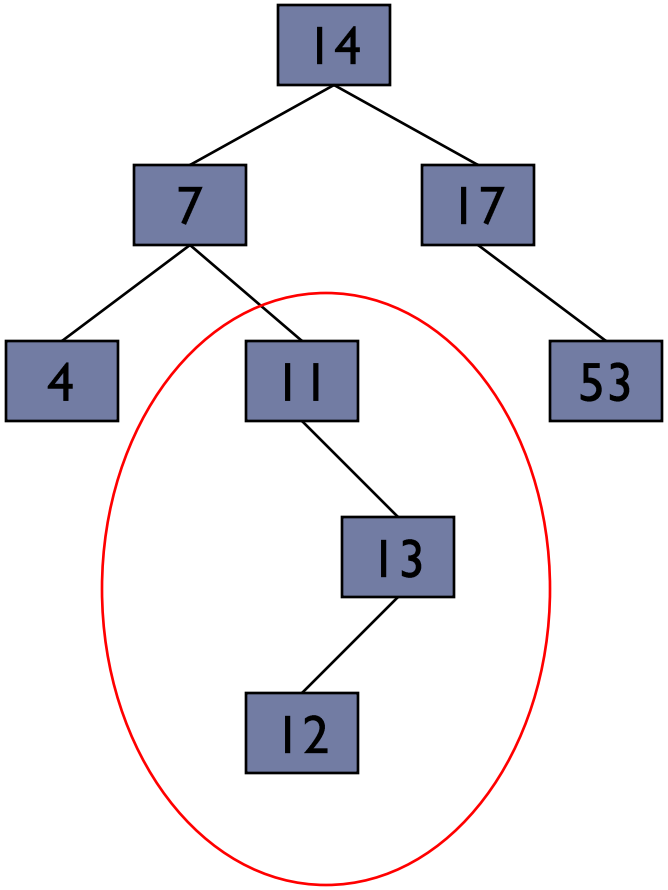


Exercício

- Obtenha uma árvore AVL através da inserção da seguinte sequência de valores:
  - **14, 17, 11, 7, 53, 4, 13**

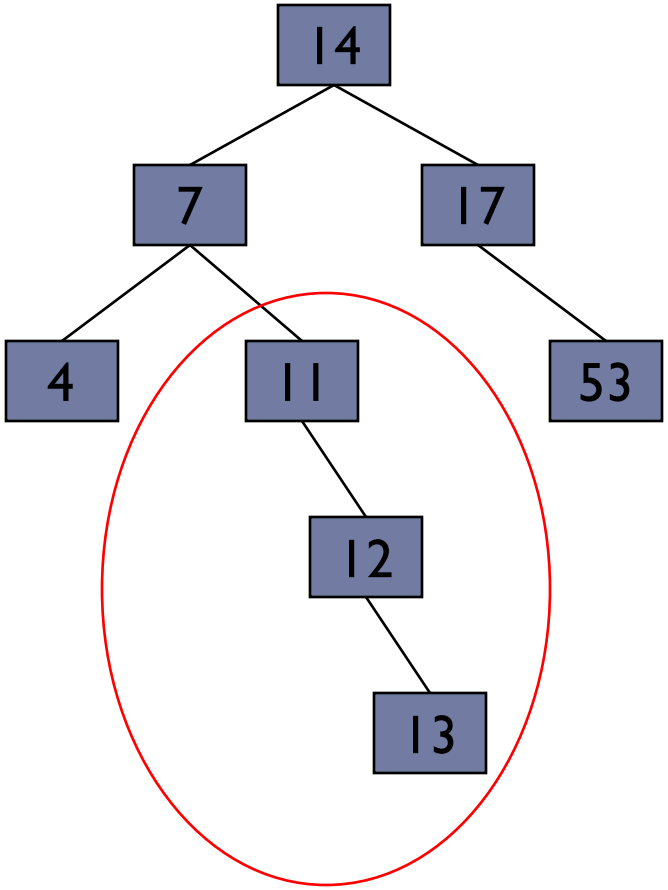


E se inseríssemos “12”?

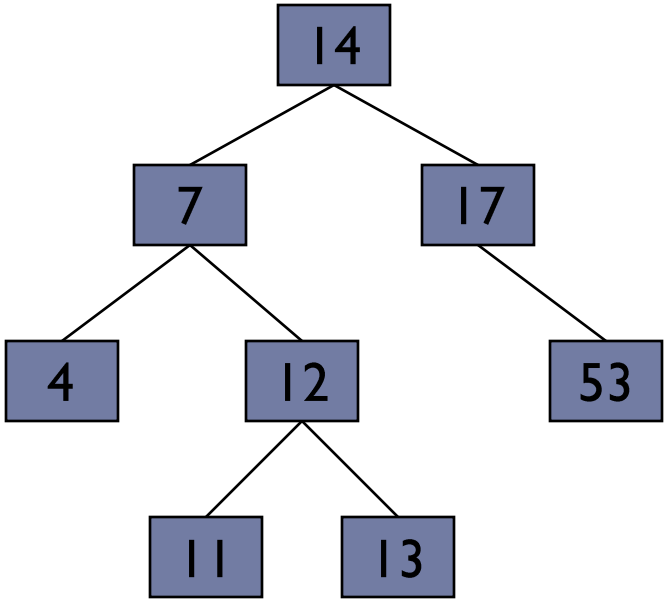


E se inseríssemos “12”?

Aplicamos rotação dupla



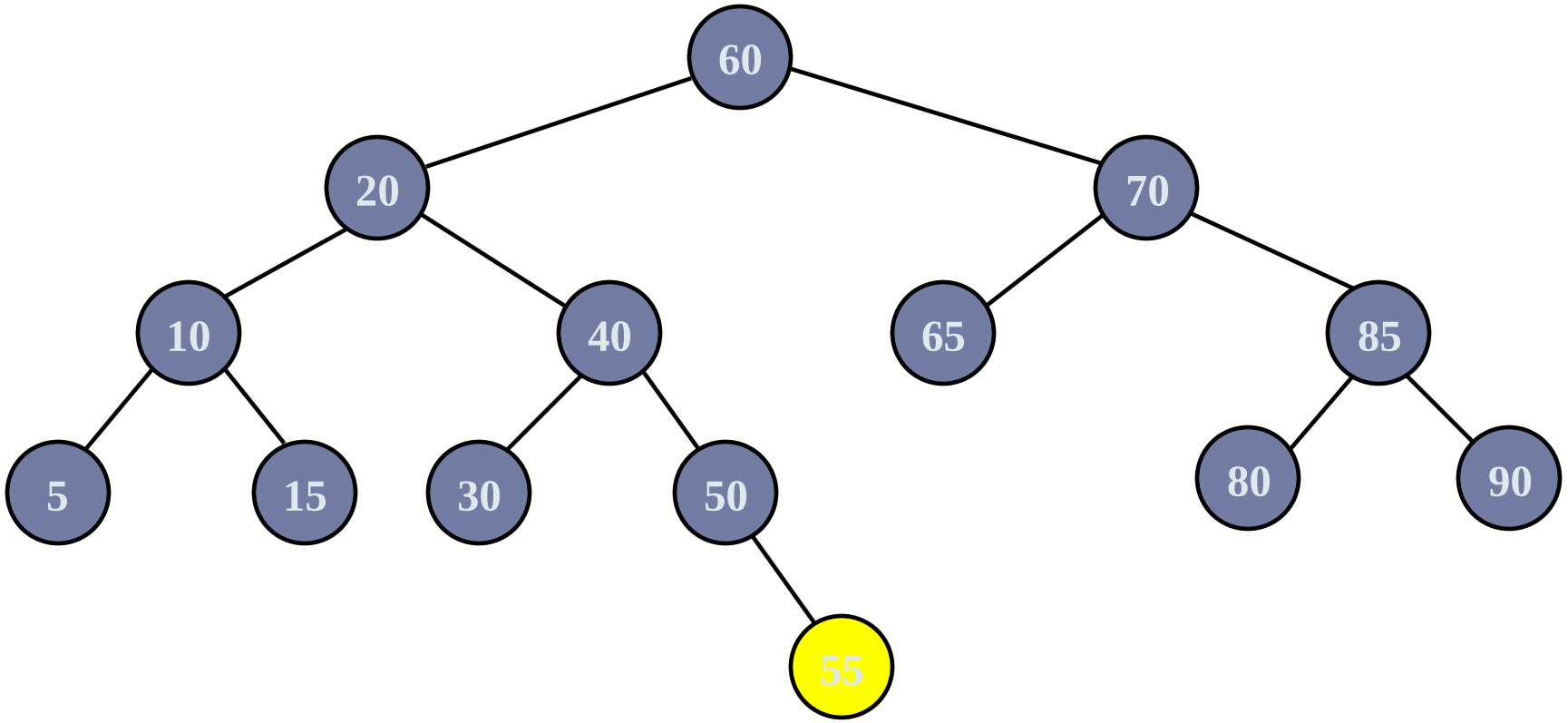
E se inseríssemos “12”?



Árvore AVL: Remoção

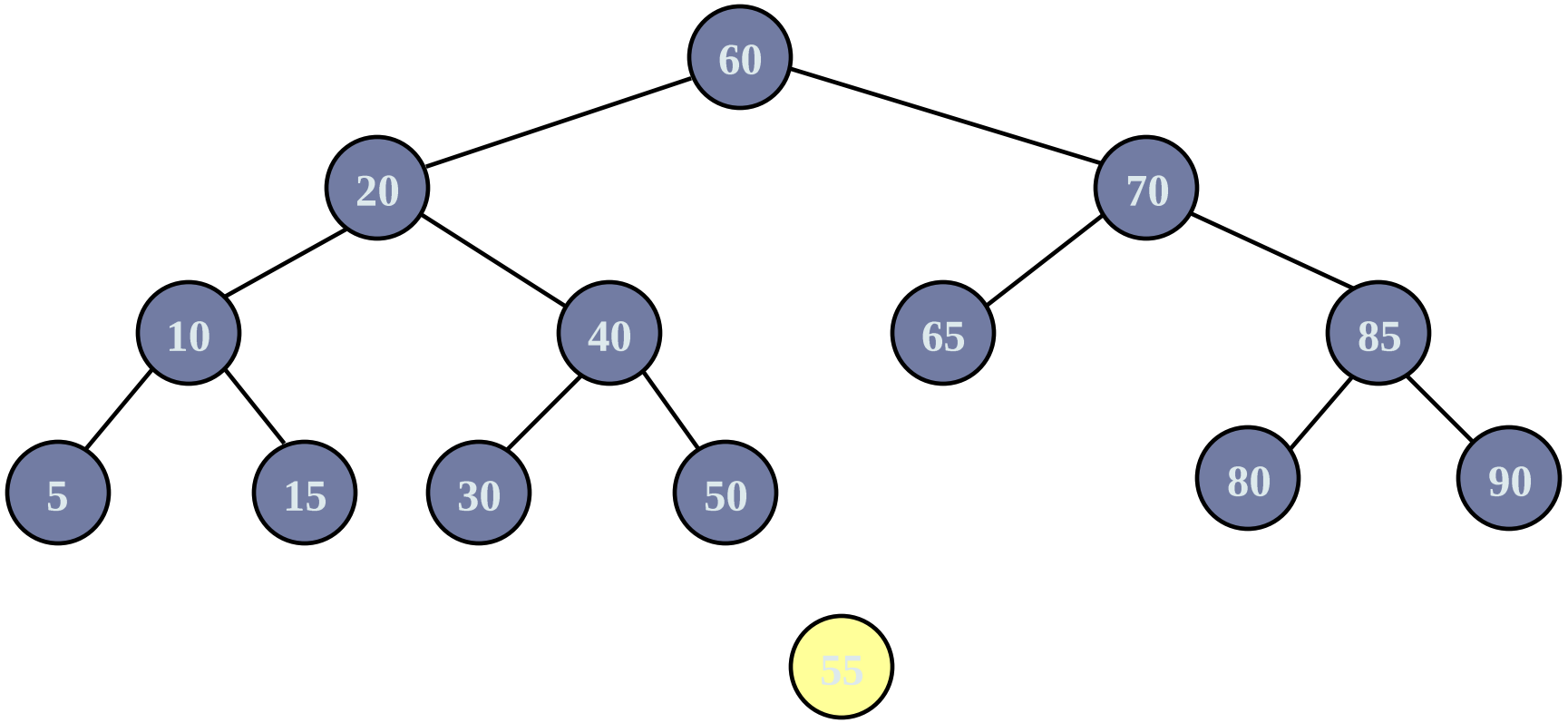
- 1. Uso do algoritmo de inserção da árvore binária de pesquisa tradicional para:
  - Achar nó a ser removido
  - Substituir pelo maior nó na sub-árvore esquerda
- 2. Assegurar que a árvore continua sendo AVL
  - Aplicar a mesma idéia de rotações como na inserção, considerando que as rotações
    - Na inserção as rotações envolvem a sub-árvore que recebeu mais elemento (cujo crescimento causou o desbalanceamento)
    - Na remoção as rotações envolvem a sub-árvore que não teve o elemento removido cujo crescimento "indireto" causou o desbalanceamento.

Remova 55 (caso 1)



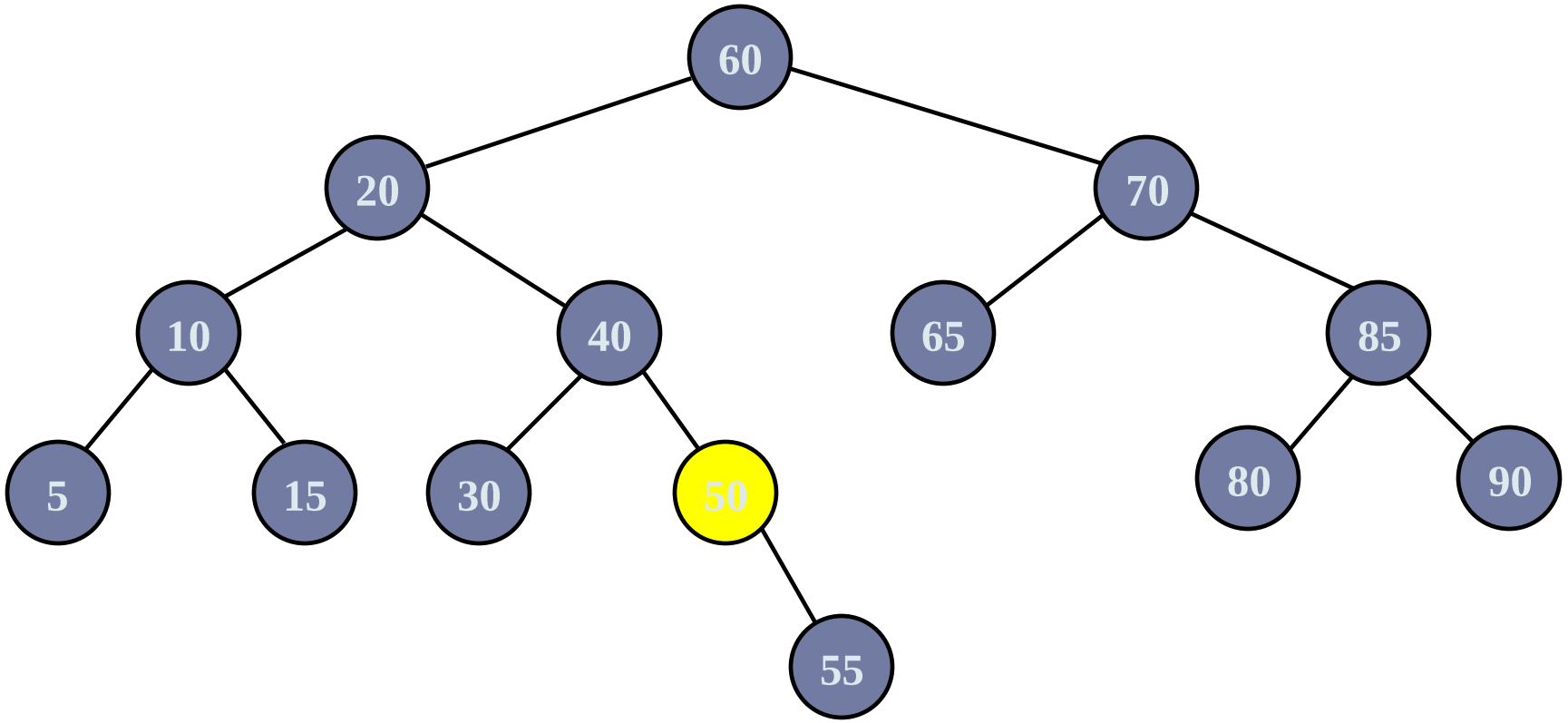
Adaptado de: Ruli Manurung, "Data Structures and algorithms, IKI 10100, 2007.

Remova 55 (caso 1)



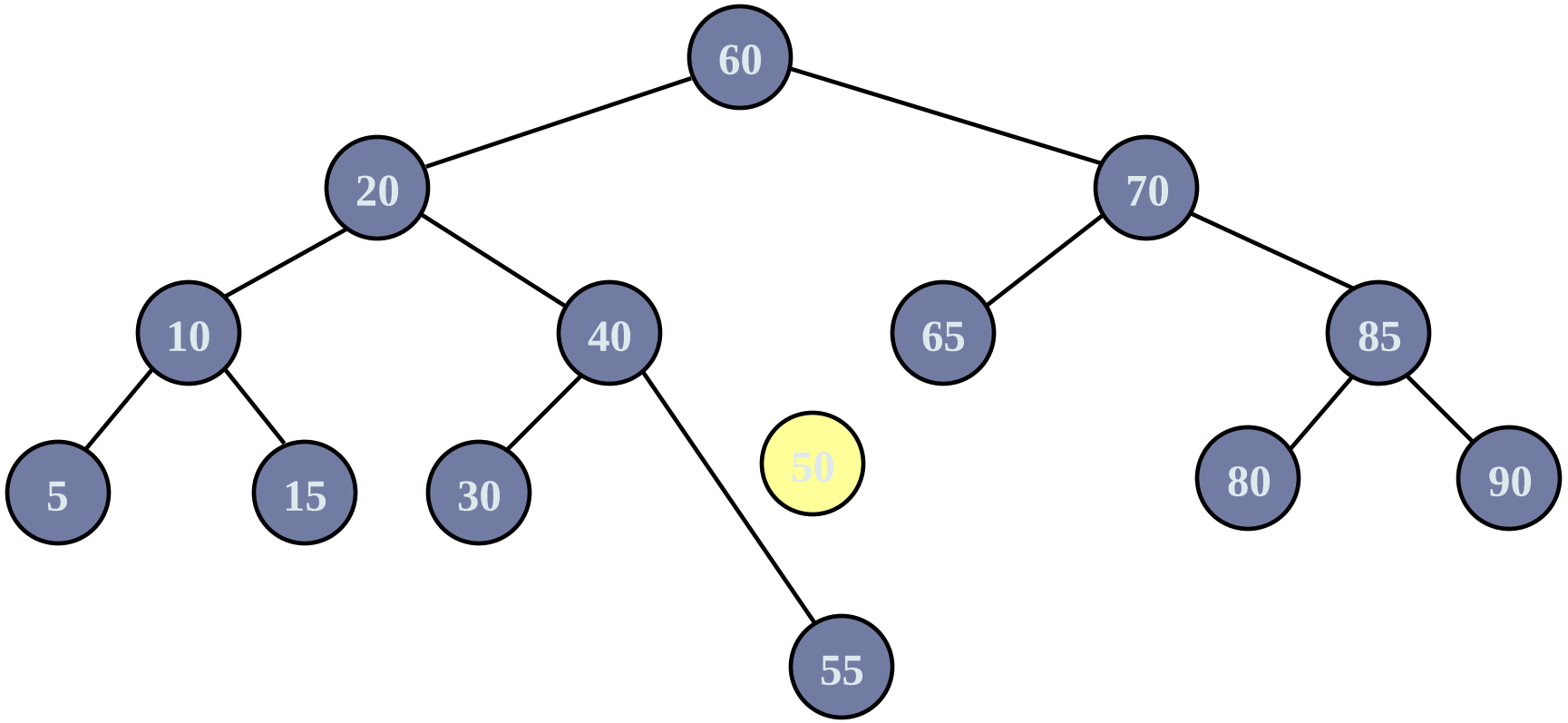
Adaptado de: Ruli Manurung, "Data Structures and algorithms, IKI 10100, 2007.

Remova 50 (caso 2)



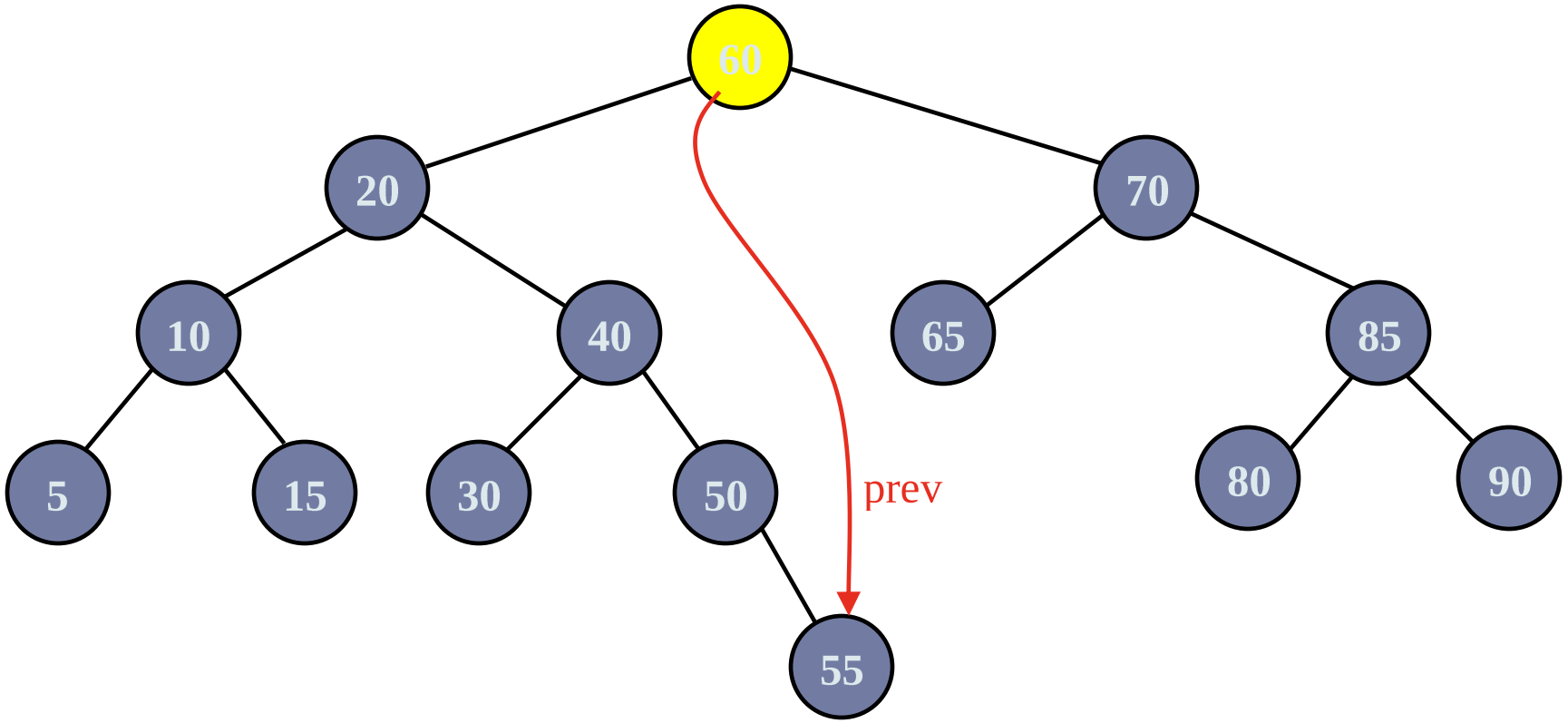
Adaptado de: Ruli Manurung, "Data Structures and algorithms, IKI 10100, 2007.

Remova 50 (caso 2)



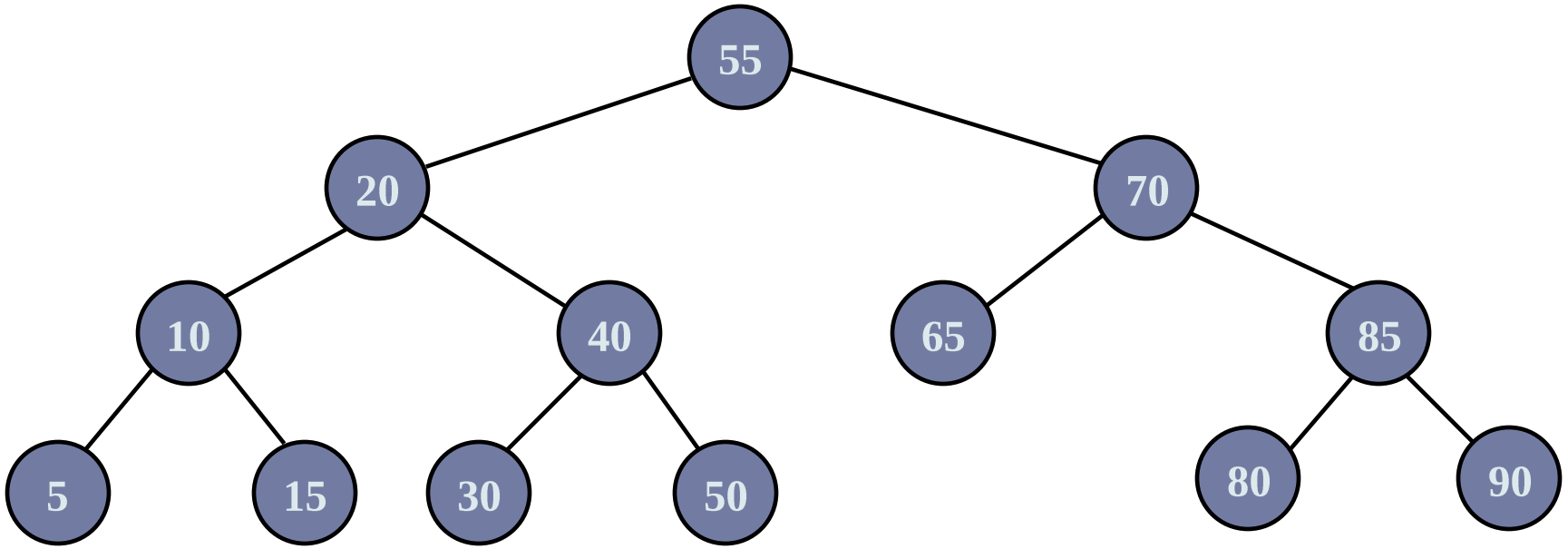
Adaptado de: Ruli Manurung, "Data Structures and algorithms, IKI 10100, 2007.

Remova 60 (caso 3)



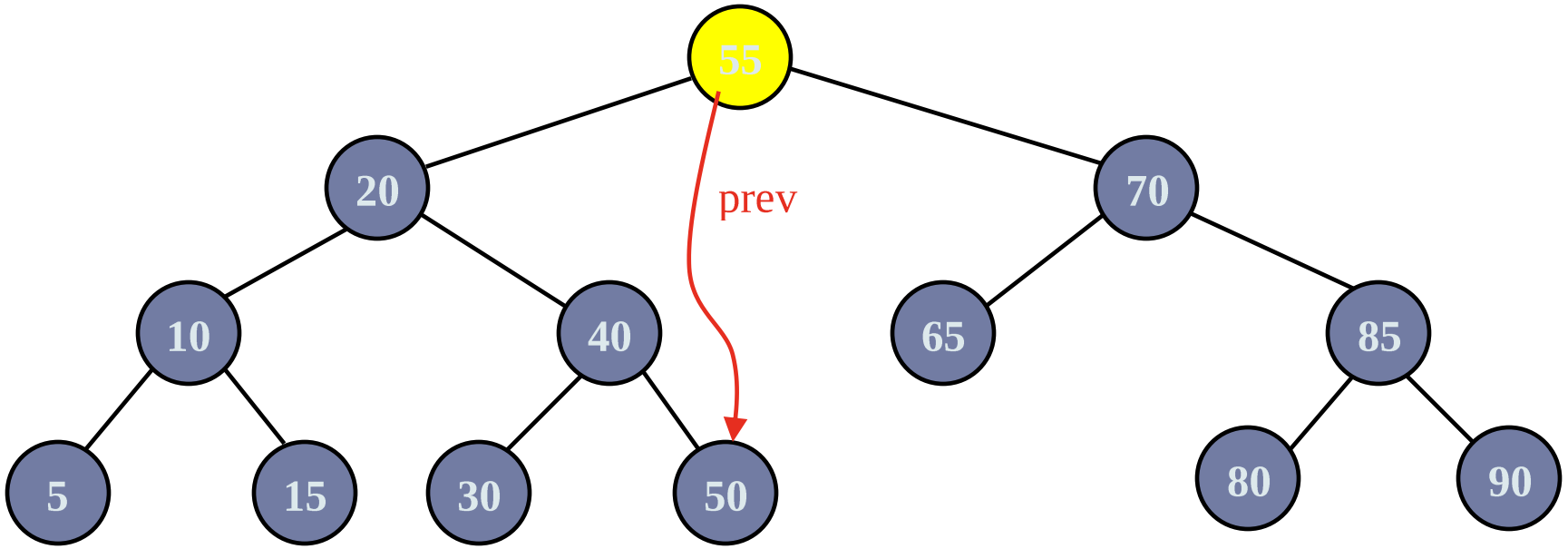
Adaptado de: Ruli Manurung, "Data Structures and algorithms, IKI 10100, 2007.

Remova 60 (caso 3)



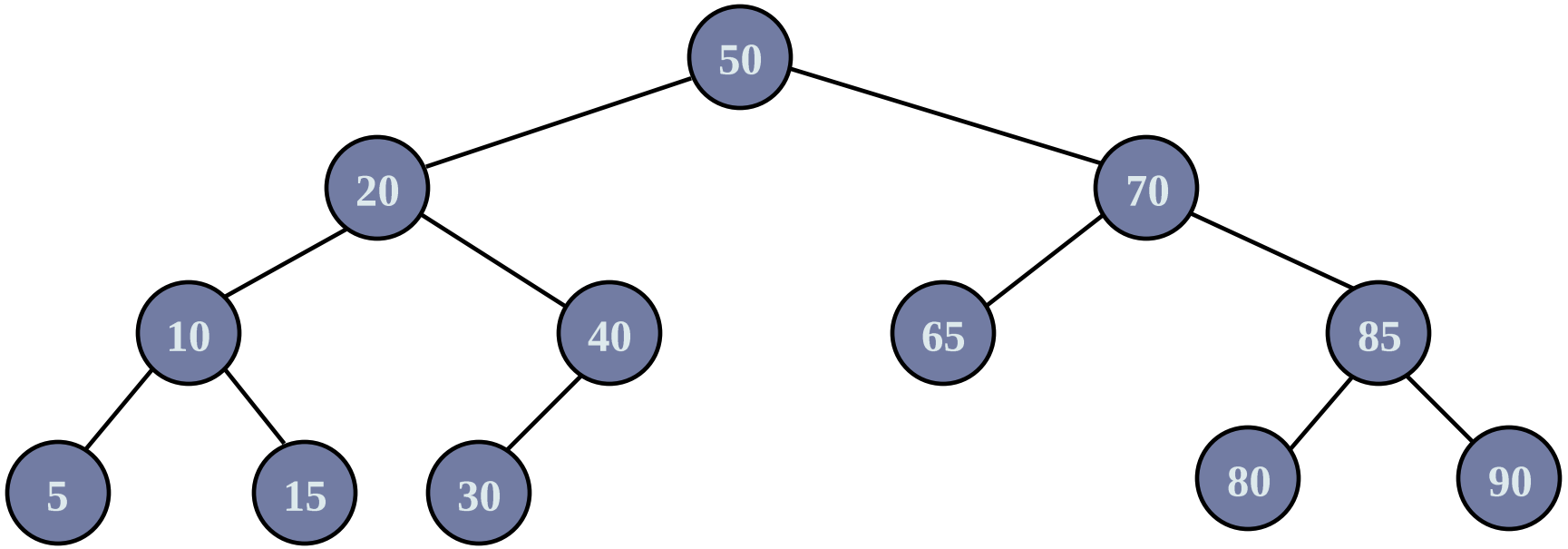
Adaptado de: Ruli Manurung, "Data Structures and algorithms, IKI 10100, 2007.

Remova 55 (caso 3)



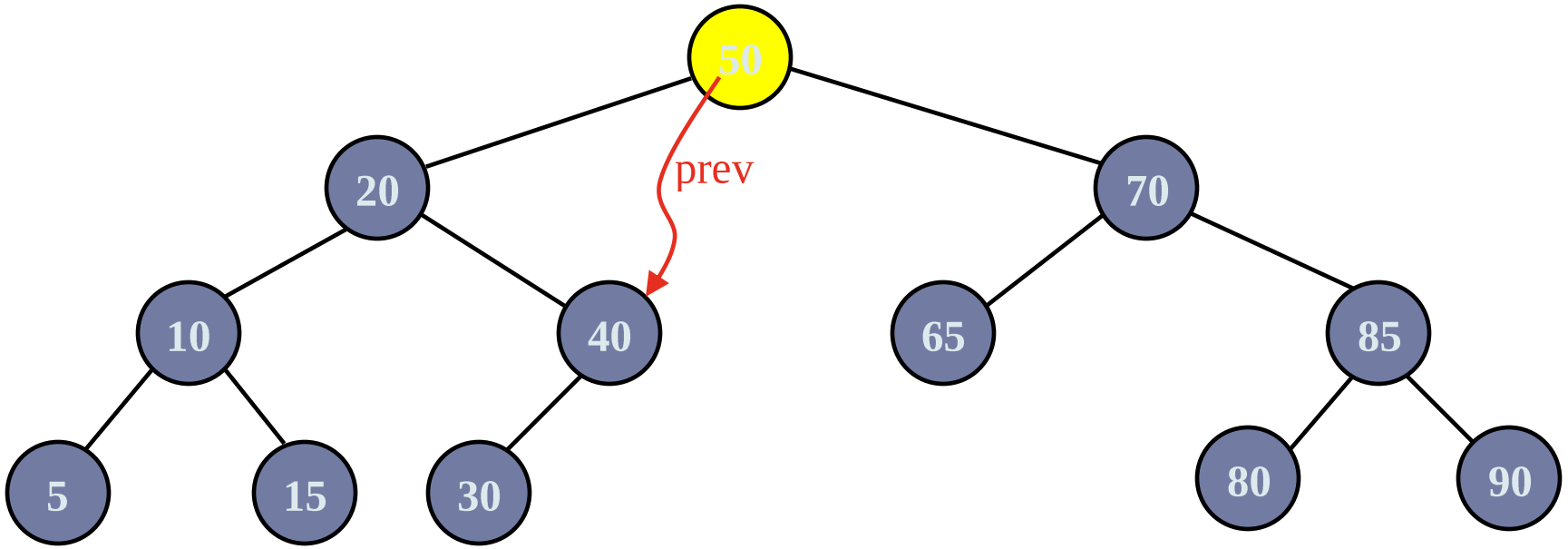
Adaptado de: Ruli Manurung, "Data Structures and algorithms, IKI 10100, 2007.

Remova 55 (caso 3)



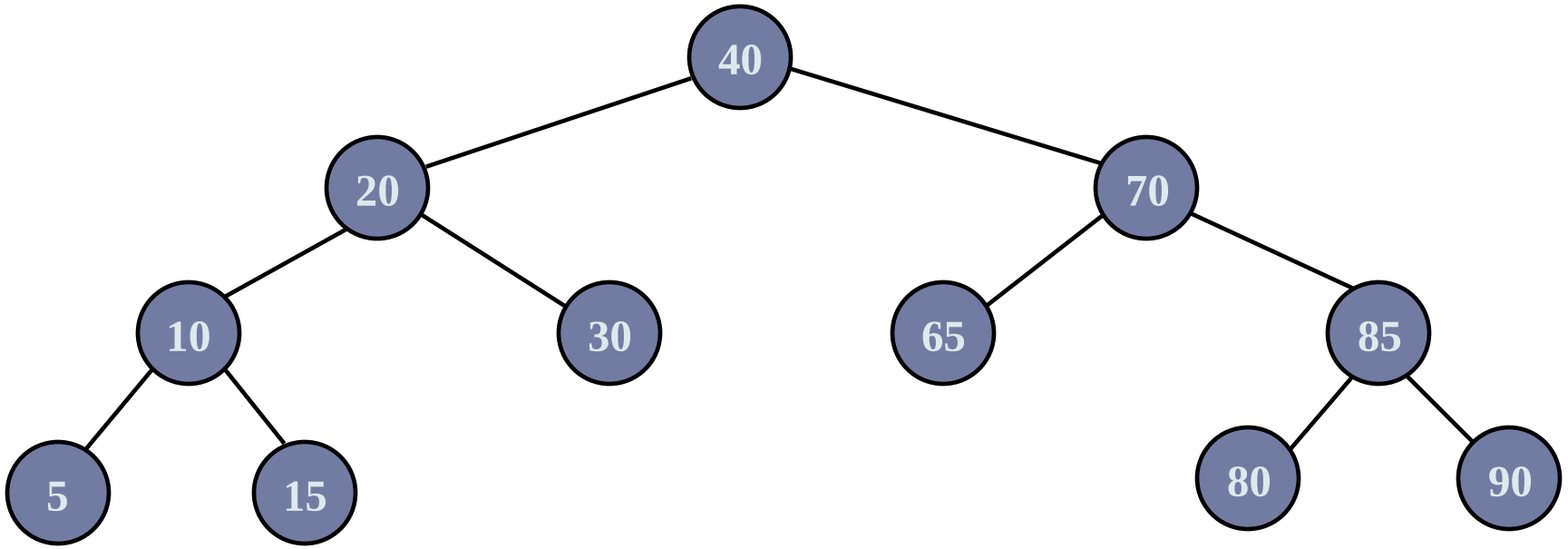
Adaptado de: Ruli Manurung, "Data Structures and algorithms, IKI 10100, 2007.

Remova 50 (caso 3)



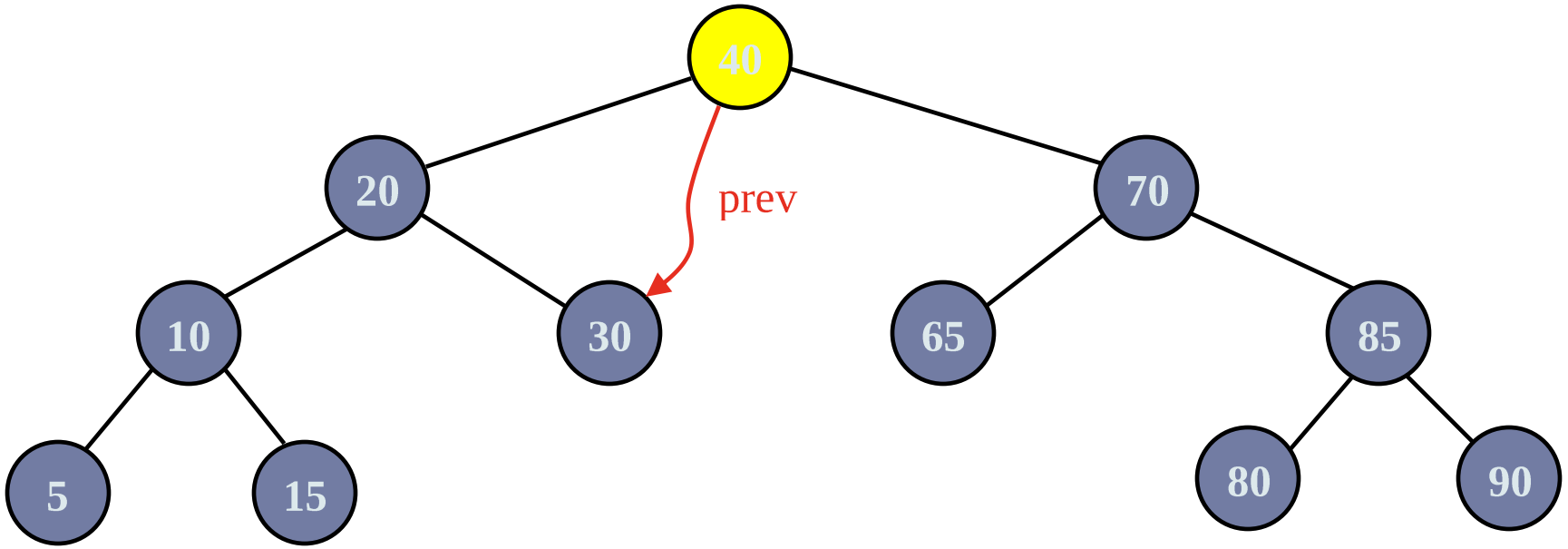
Adaptado de: Ruli Manurung, "Data Structures and algorithms, IKI 10100, 2007.

Remova 50 (caso 3)



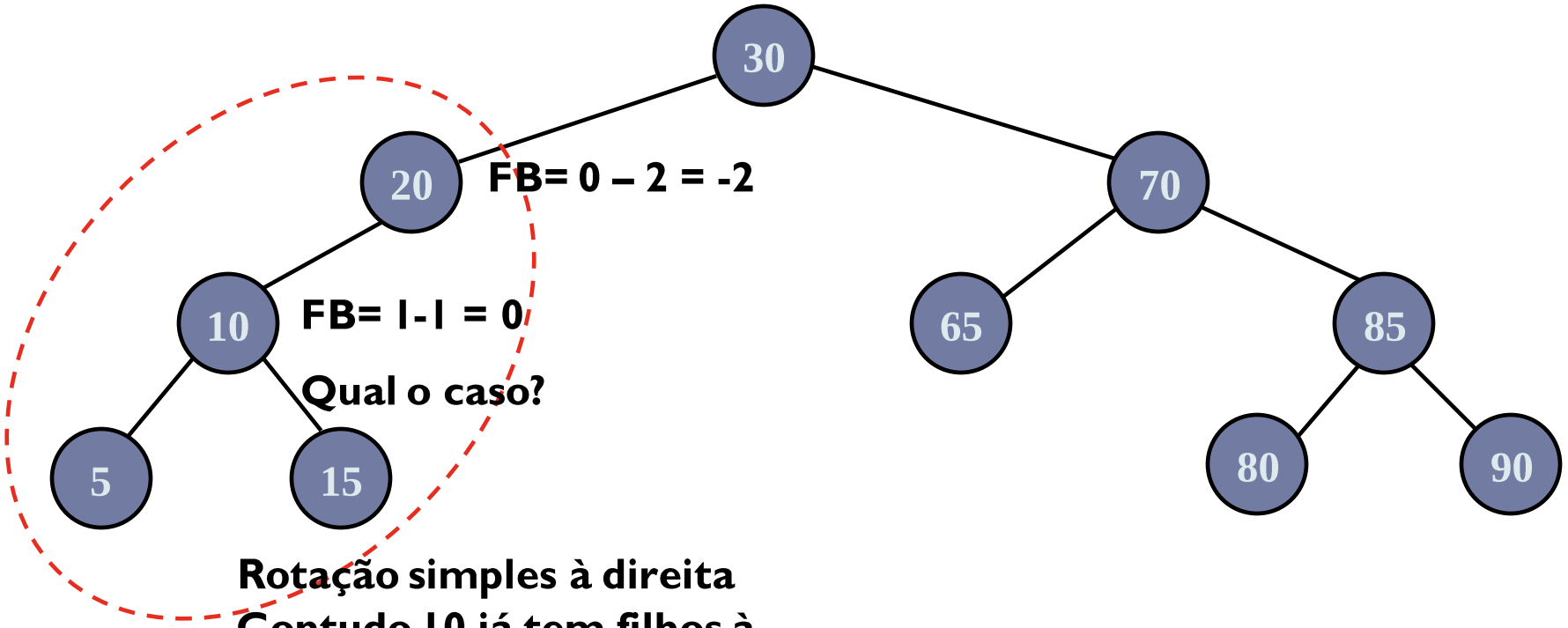
Adaptado de: Ruli Manurung, "Data Structures and algorithms, IKI 10100, 2007.

Remova 40 (caso 3)



Adaptado de: Ruli Manurung, "Data Structures and algorithms, IKI 10100, 2007.

Remova 40 : Rebalanceamento



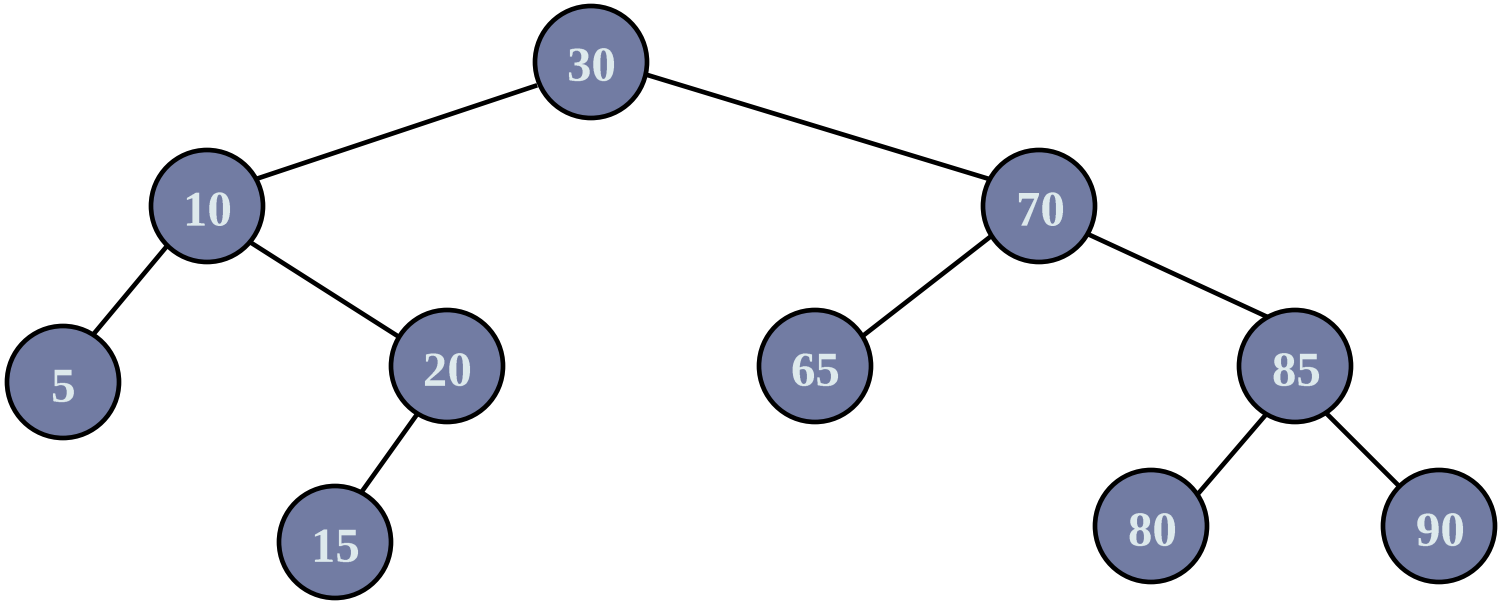
Rotação simples à direita

Contudo 10 já tem filhos à direita, o que fazer?

R- torne-os filhos à esquerda de 20

Adaptado de: Ruli Manurung, "Data Structures and algorithms, IKI 10100, 2007.

Remova 40: após rebalanceamento

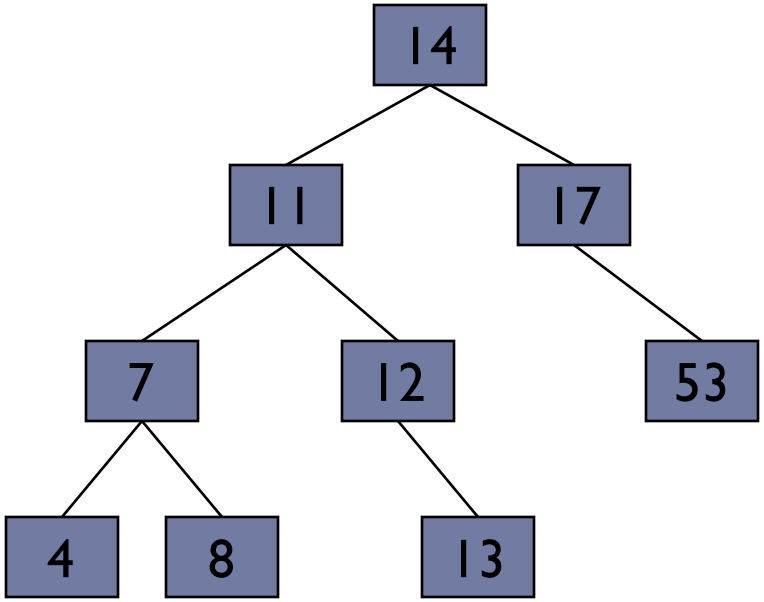


Rotação simples

Adaptado de: Ruli Manurung, "Data Structures and algorithms, IKI 10100, 2007.

Exercício:

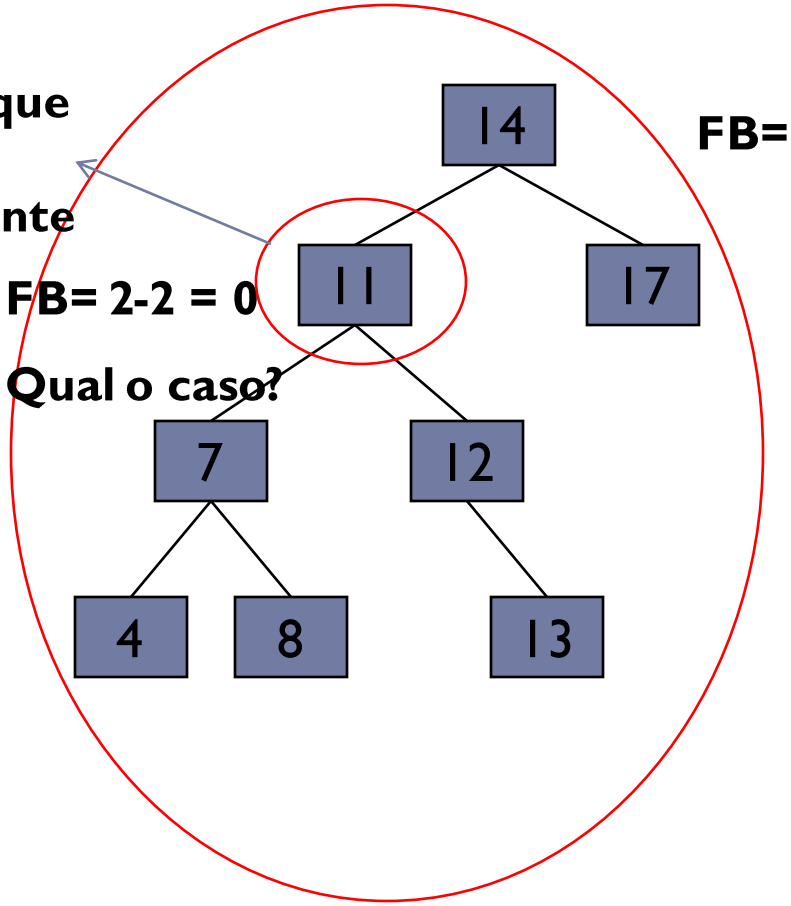
- **Remover 53**



Exercício

- Desbalanceamento detectado no FB do nó 14.

Raiz da subárvore que "cresceu" indiretamente



FB= 1 – 3 = -2

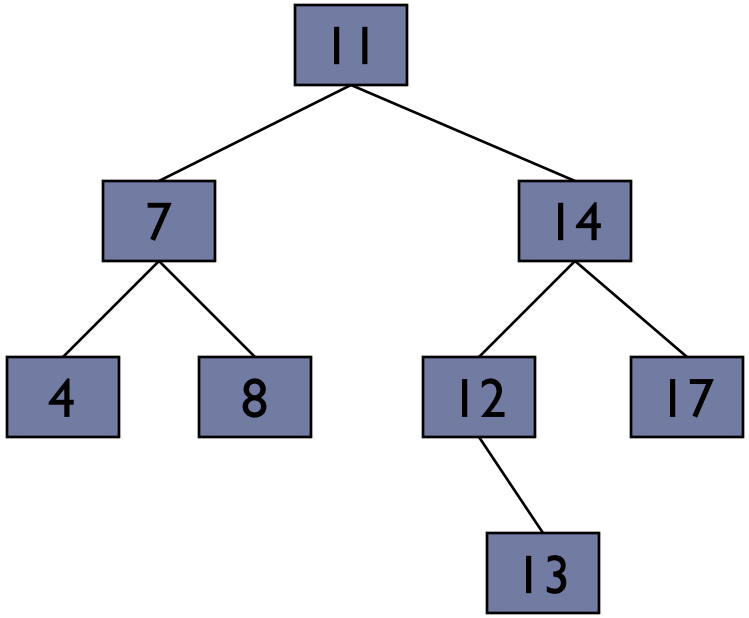
FB= 2-2 = 0

Qual o caso?

Rotação simples à direita

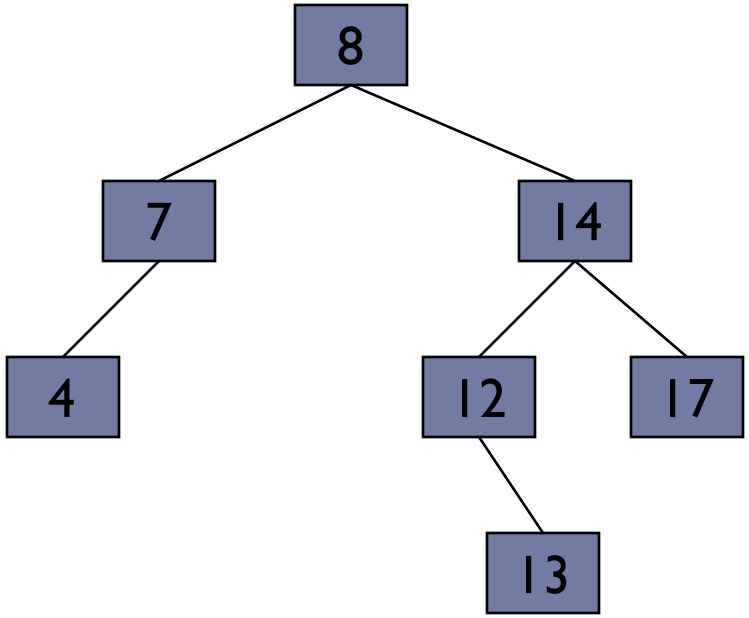
Exercício

- **Balanceado. Agora, remover 11**



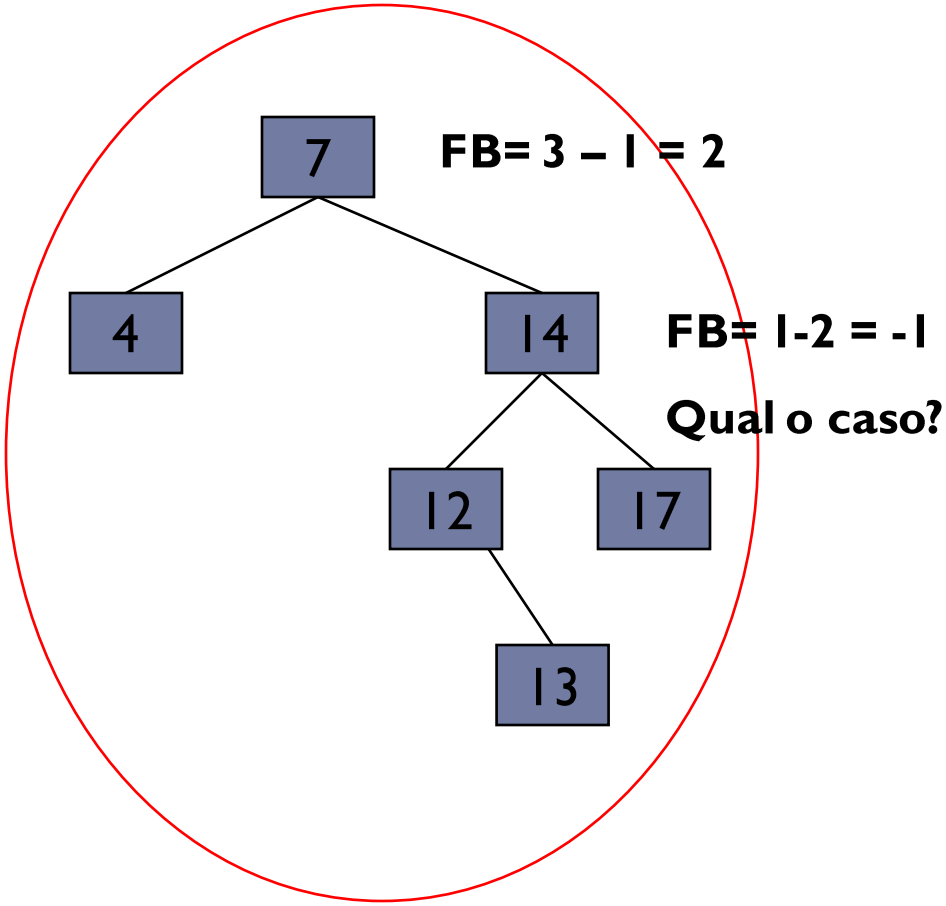
Exercício

• **Removendo 11, diminuimos a sub-árvore à esquerda (pois usamos a maior chave) mas FBs não "quebram". Agora remover 8**



Exercício

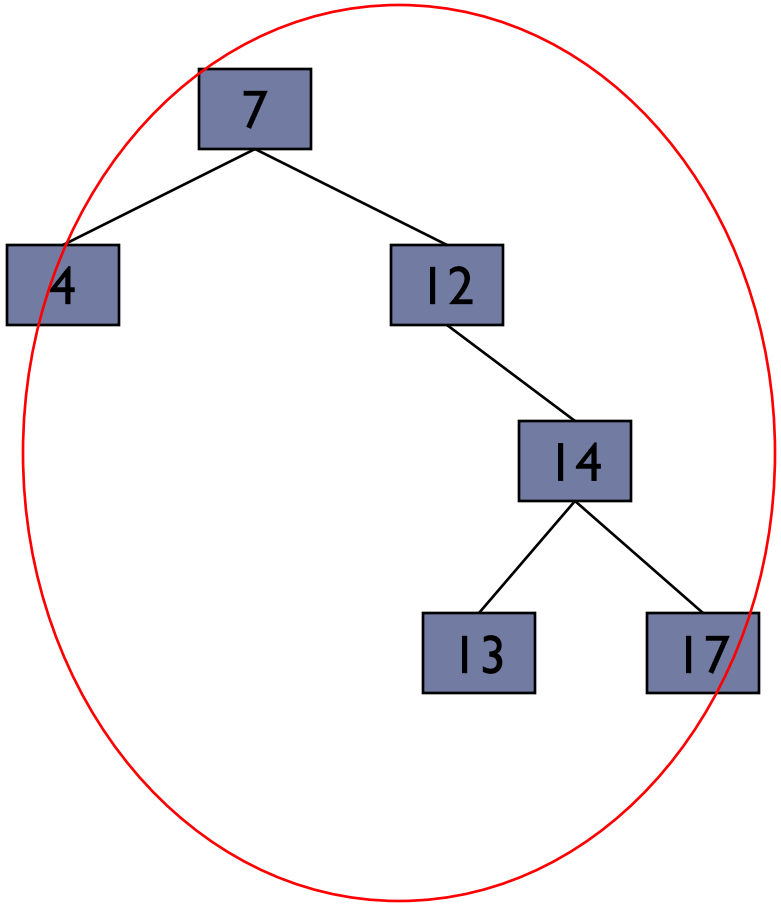
• Remove 8, diminuimos a sub-árvore à esquerda (pois usamos a maior chave) e FB quebra no 7. Rotacionar na sub-árvore "mais cheia".



Rotação dupla: direita + esquerda

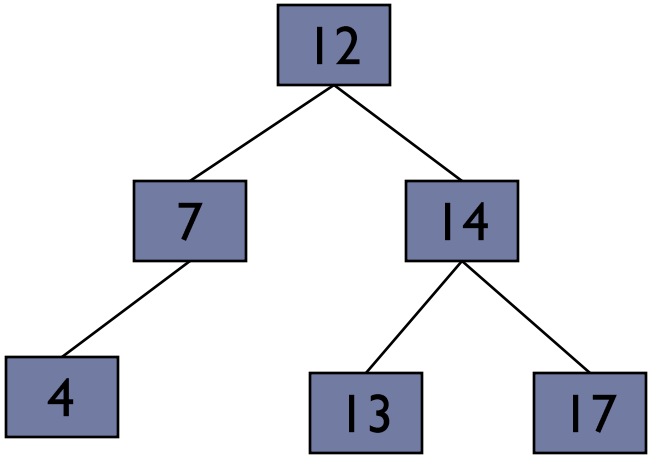
Exercício

- **Remove 8, direita**



Exercício

- **Esquerda = Balanceado!!**



Árvores AVL – Tabela de Rotações

Diferença de altura de um nó	Diferença de altura do nó filho do nó desbalanceado	Tipo de rotação	
2	1	Simples à esquerda	A
	0	Simples à esquerda	B
	–1	Dupla com filho para a direita e pai para a esquerda	C
–2	1	Dupla com filho para a esquerda e pai para a direita	D
	0	Simples à direita	E
	–1	Simples à direita	F

Atualização dos FBs após rotações

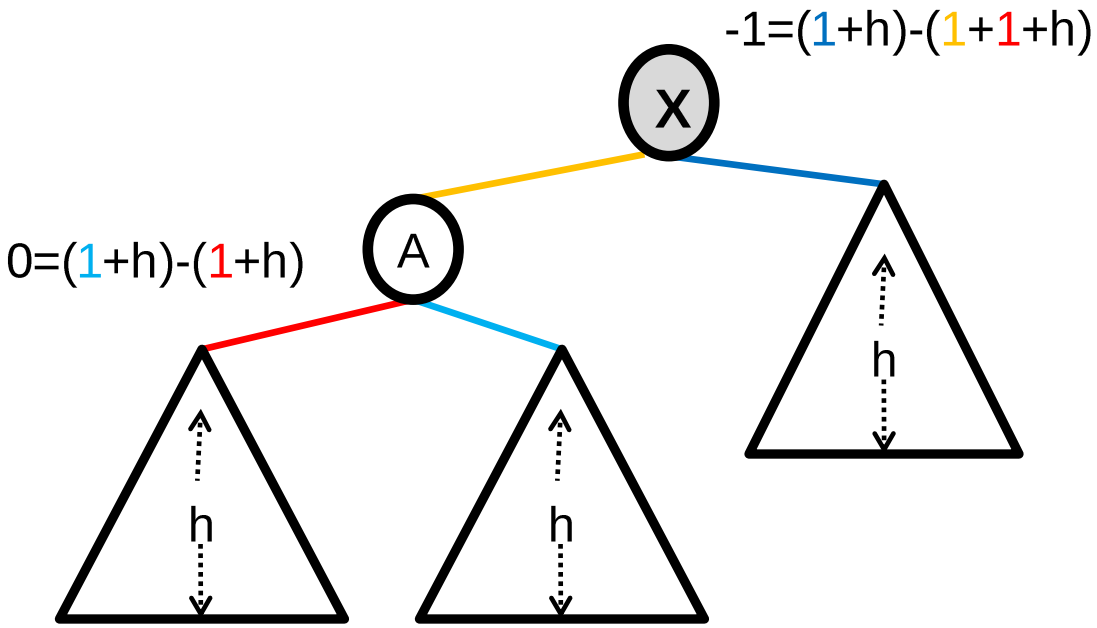
Slides a seguir elaborados pelo Prof. Saulo Queiroz

Atualização dos FBs

Qual a configuração da AVL antes de uma rotação simples à direita em um nó arbitrário X?

Atualização dos FBs

Qual a configuração da AVL antes de uma rotação simples à direita em um nó arbitrário X?
R- Tal nó deve ter FB=-1 para que, após a inserção, passe a ser -2.

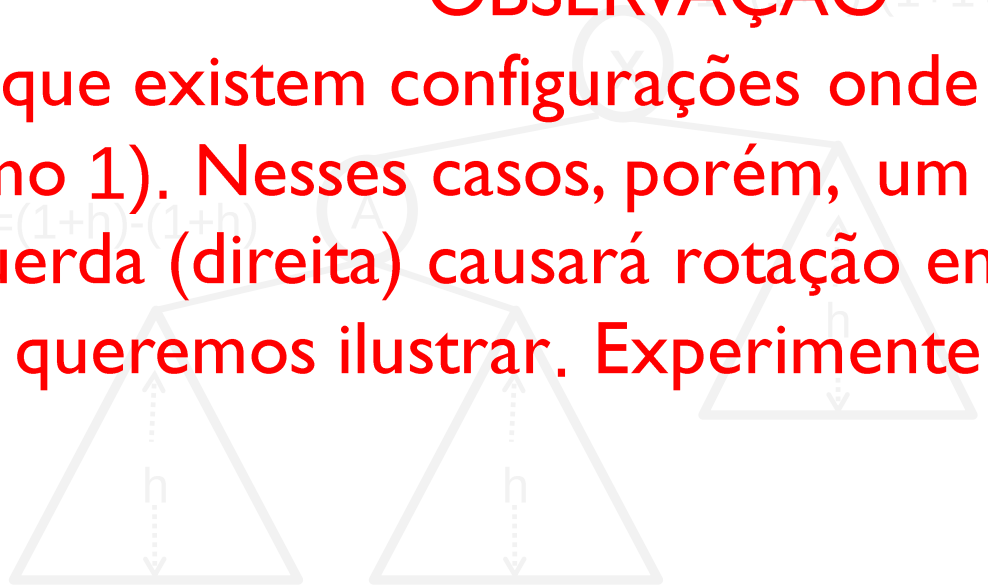


Atualização dos FBs

Qual a configuração da AVL antes de uma rotação simples à direita em um nó arbitrário X?
R- Tal nó deve ter FB=-1 para que, após a inserção, passe a ser -2.

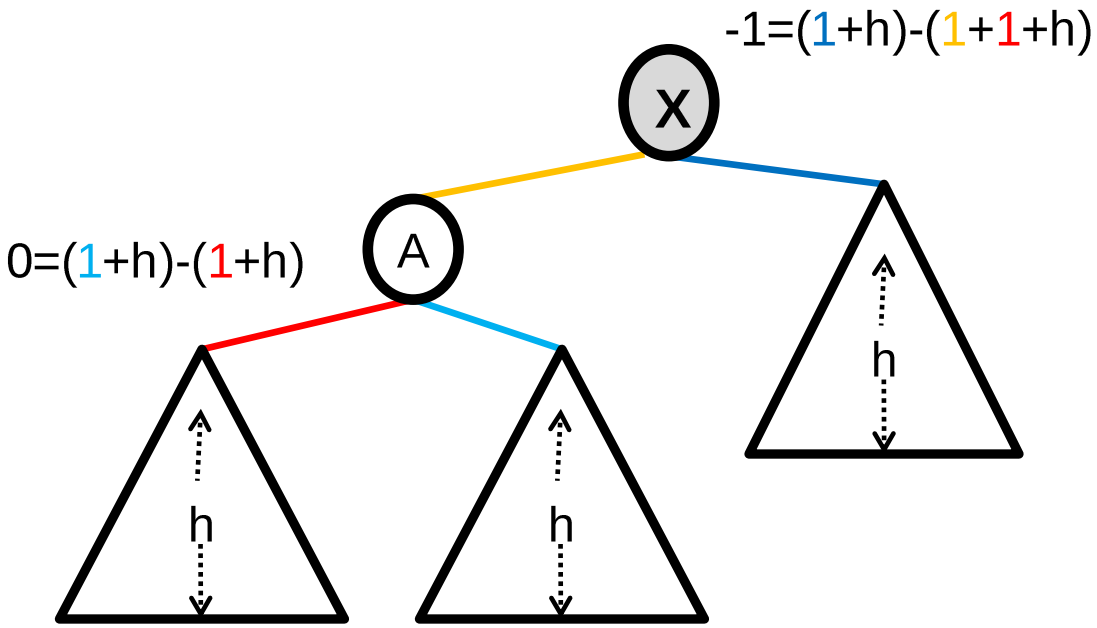
OBSERVAÇÃO

Note que existem configurações onde FB(A)=-1 ou (mesmo 1). Nesses casos, porém, um aumento à esquerda (direita) causará rotação em A e não em X, como queremos ilustrar. Experimente testar!



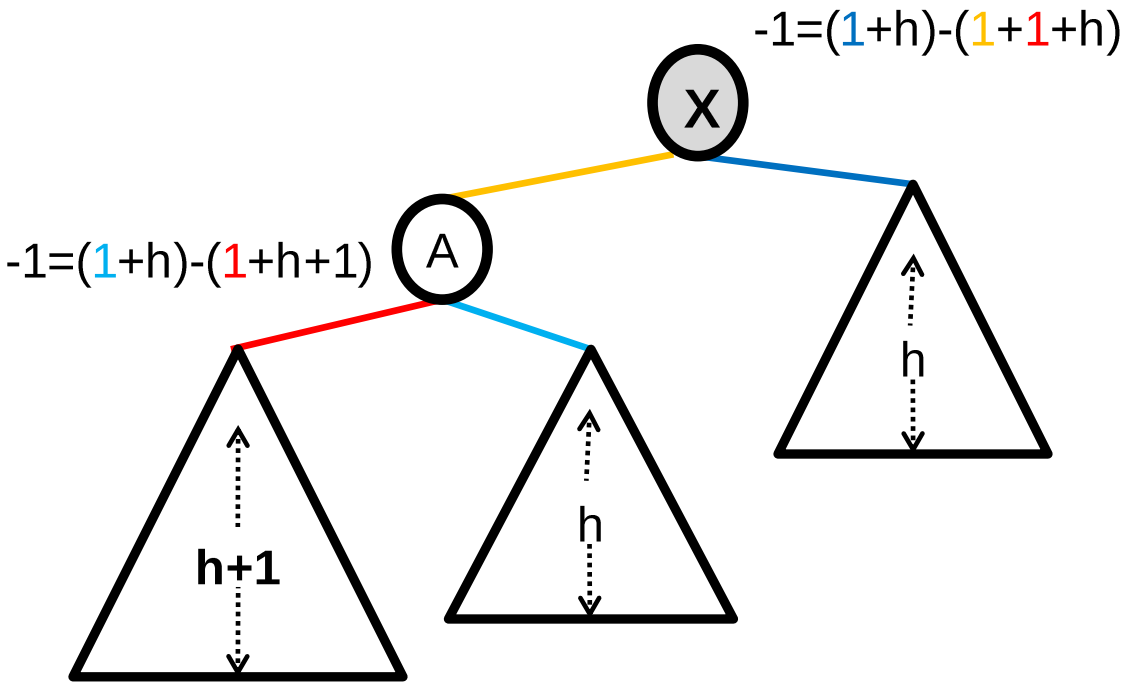
Atualização dos FBs

Qual a configuração da AVL antes de uma rotação simples à direita em um nó arbitrário X?
R- Tal nó deve ter FB=-1 para que, após a inserção, passe a ser -2.



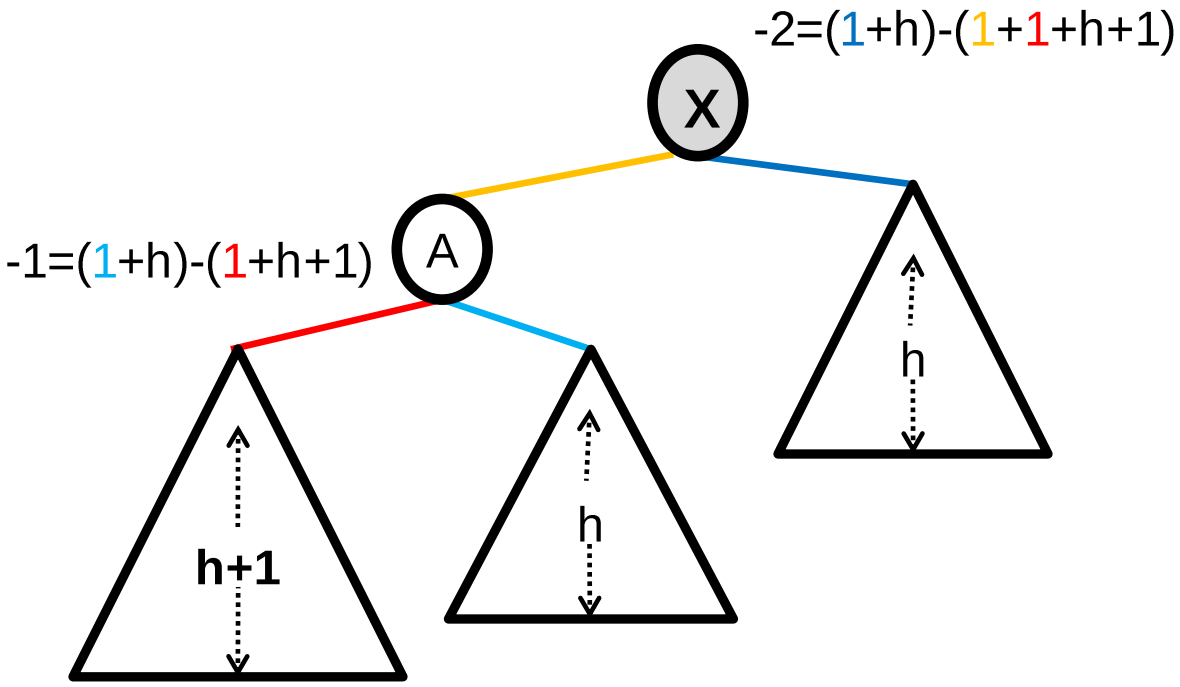
Atualização dos FBs

Qual a configuração da AVL antes de uma rotação simples à direita em um nó arbitrário X?
R- Tal nó deve ter FB=-1 para que, após a inserção, passe a ser -2.
Após a inserção teremos:



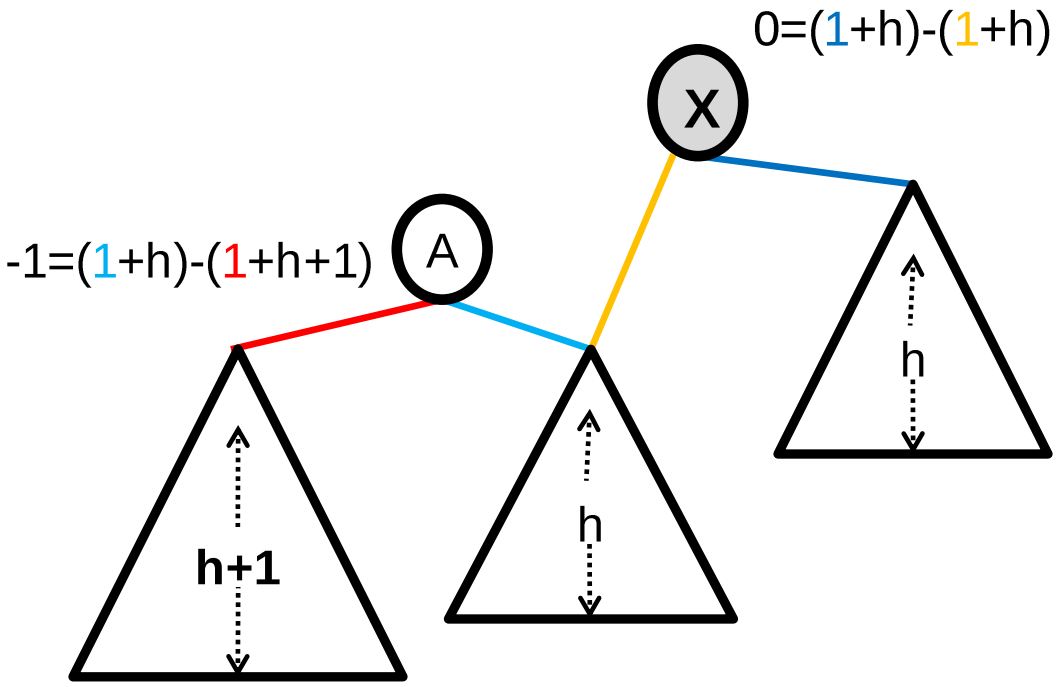
Atualização dos FBs

Qual a configuração da AVL antes de uma rotação simples à direita em um nó arbitrário X?
R- Tal nó deve ter FB=-1 para que, após a inserção, passe a ser -2.
Após a inserção teremos:



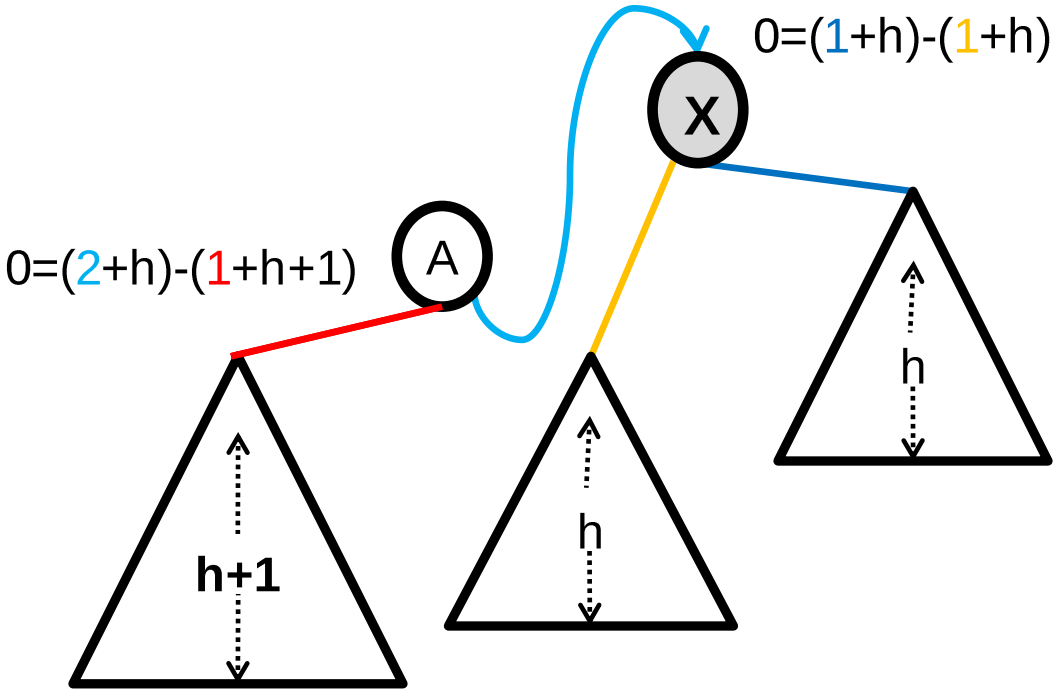
Atualização dos FBs

Qual a configuração da AVL antes de uma rotação simples à direita em um nó arbitrário X?
R- Tal nó deve ter FB=-1 para que, após a inserção, passe a ser -2.
Após a ROTAÇÃO teremos:



Atualização dos FBs

Qual a configuração da AVL antes de uma rotação simples à direita em um nó arbitrário X?
R- Tal nó deve ter FB=-1 para que, após a inserção, passe a ser -2.
Após a ROTAÇÃO teremos:



Atualização dos FBs

- Demais atualizações ficará a seu encargo pesquisar!

Árvores AVL - Animações

- **Applets**:

- http://webdiis.unizar.es/asignaturas/EDA/AVLTree/avltree.html

- http://www.cs.jhu.edu/~goodrich/dsa/trees/avltree.html