

Trabalho 2

SME0202 -
Métodos Numéricos para Equações
Diferenciais



Universidade de São Paulo (USP)

Aluno: Caio Assumpção Rezzadori

Nº USP: 11810481

Problema

Considerando a equação parabólica:

$$u_t = u_{xx}, \quad (1)$$

para $0 \leq x \leq 1$, com as condições de contorno $u(0, t) = u(1, t) = 0$, para $t > 0$, e com a condição inicial:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

deseja-se resolvê-la pelos seguintes métodos numéricos:

1. Explícito
2. Crank-Nicolson

A solução analítica é dada por:

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right) \sin(n\pi x) \exp(-n^2\pi^2 t) \quad (2)$$

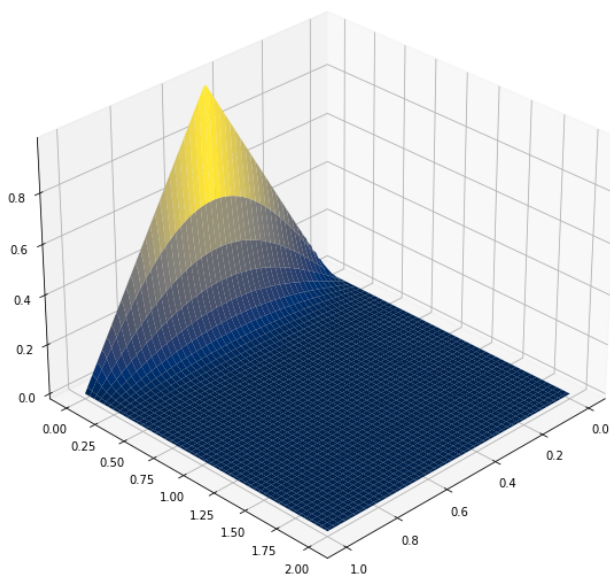


Figura 1: Gráfico da solução analítica

Resolução do problema

Método Explícito

Utilizando a série de Taylor, expandiremos os termos u_t e u_{xx} de tal forma que a equação parabólica poderá ser escrita como:

$$\frac{u(x_j, t_n + k) - u(x_j, t_n)}{k} + O(k) = \frac{u(x_j - h, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j + h, t_n)}{h} + O(h^2)$$

onde k é o espaçamento temporal e h o espaçamento espacial.

Considerando U_j^n uma aproximação de $u(x_j, t_n)$, podemos escrever o método explícito com erro de truncamento $O(k + h^2)$ da forma:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} = \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^n}{h}$$

Ou, sendo $\sigma = \frac{k}{h^2}$:

$$U_j^{n+1} = \sigma U_{j-1}^n + (1 - 2\sigma)U_j^n + \sigma U_{j+1}^n \quad (3)$$

Além disso, como $x_j = jh$, $t_n = nk$, e sendo $m = \frac{1}{h} - 1$ o número de pontos discretizados no eixo espacial x sem as bordas do domínio, podemos escrever a condição de contorno e a condição inicial para as aproximações na forma:

$$U_0^n = U_{m+1}^n = 0 \quad (4)$$

$$U_j^0 = \begin{cases} 2jh, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2h} \\ 2 - 2jh, & \text{se } \frac{1}{2h} \leq x \leq \frac{1}{h} \end{cases} \quad (5)$$

Analisando as condições de fronteira, temos:

$$\begin{aligned} U_1^{n+1} - \sigma U_0^n &= (1 - 2\sigma)U_1^n + \sigma U_2^n \\ U_m^{n+1} - \sigma U_{m+1}^n &= (1 - 2\sigma)U_m^n + \sigma U_{m-1}^n \end{aligned}$$

Ou seja, para cada passo de tempo, devemos desenvolver a multiplicação:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} (1-2\sigma) & \sigma & & & \\ \sigma & (1-2\sigma) & \sigma & & \\ & \sigma & (1-2\sigma) & \sigma & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & \sigma & (1-2\sigma) & \sigma \\ & & & \sigma & (1-2\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{m-1}^n \\ U_m^n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{m-1}^{n+1} \\ U_m^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sigma U_0^n \\ \vdots \\ -\sigma U_{m+1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{m-1}^{n+1} \\ U_m^{n+1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Seja T a matriz $m \times m$ do lado esquerdo da relação e definimos:

$$U^{[n]} = \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{m-1}^n \\ U_m^n \end{bmatrix}$$

Então, para cada passo de tempo, temos:

$$U^{[n+1]} = TU^{[n]} \quad (6)$$

começando por $U^{[0]}$, que pode ser obtido pela condição inicial em (5).

Crank-Nicolson

O método Crank-Nicolson, com erro de truncamento $O(h^2 + k^2)$, é dado pela relação:

$$-\frac{\sigma}{2}U_{j-1}^{n+1} + (1+\sigma)U_j^{n+1} - \frac{\sigma}{2}U_{j+1}^{n+1} = \frac{\sigma}{2}U_{j-1}^n + (1-\sigma)U_j^n + \frac{\sigma}{2}U_{j+1}^n \quad (7)$$

Por se tratar de um método implícito que utiliza algumas manipulações algébricas não triviais para se chegar na relação, sua demonstração será dispensada.

Analisando as condições de contorno, temos:

$$\left(-\frac{\sigma}{2}U_0^{n+1} + \frac{\sigma}{2}U_0^n\right) + (1+\sigma)U_1^{n+1} - \frac{\sigma}{2}U_2^{n+1} = (1-\sigma)U_1^n + \frac{\sigma}{2}U_2^n$$

$$-\frac{\sigma}{2}U_{m-1}^{n+1} + (1+\sigma)U_m^{n+1} \left(-\frac{\sigma}{2}U_{m+1}^{n+1} + \frac{\sigma}{2}U_{m+1}^n\right) = \frac{\sigma}{2}U_{m-1}^n + (1-\sigma)U_m^n$$

Dito isso, temos o seguinte sistema linear a ser resolvido

$$= \begin{bmatrix} (1+\sigma) & -\frac{\sigma}{2} & & & & \\ -\frac{\sigma}{2} & (1+\sigma) & -\frac{\sigma}{2} & & & \\ & -\frac{\sigma}{2} & (1+\sigma) & -\frac{\sigma}{2} & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & -\frac{\sigma}{2} & (1+\sigma) & -\frac{\sigma}{2} \\ & & & & -\frac{\sigma}{2} & (1+\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{m-1}^{n+1} \\ U_m^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-\sigma) & \frac{\sigma}{2} & & & & \\ \frac{\sigma}{2} & (1-\sigma) & \frac{\sigma}{2} & & & \\ & \frac{\sigma}{2} & (1-\sigma) & \frac{\sigma}{2} & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & \frac{\sigma}{2} & (1-\sigma) & \frac{\sigma}{2} \\ & & & & \frac{\sigma}{2} & (1-\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{m-1}^n \\ U_m^n \end{bmatrix}$$

Sendo T a matriz $m \times m$ no lado esquerdo da relação, e S a matriz $m \times m$ no lado direito, podemos escrever o sistema na forma:

$$TU^{[n+1]} = SU^{[n]} \quad (8)$$

Como as condições de contorno são zero, assim como no método explícito, o vetor com tais valores é um vetor nulo e não influencia na resolução do sistema em (8) .

Parte 1

Após implementados os métodos e o cálculo de seus erros com relação à solução analítica na linguagem de programação *Python 3.0* na plataforma *Jupyter Notebook*, foi pedido gerar gráficos das soluções numéricas comparadas com a solução exata com $h = 0.05$ e

a) $k = \frac{5}{11}h^2$

Método Explícito

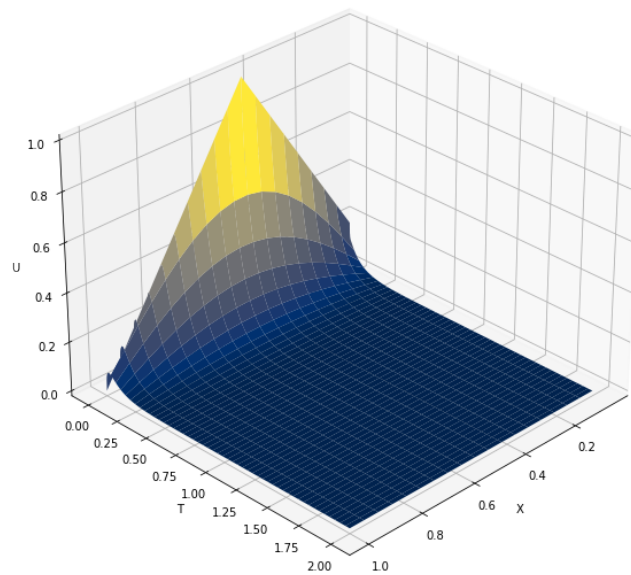
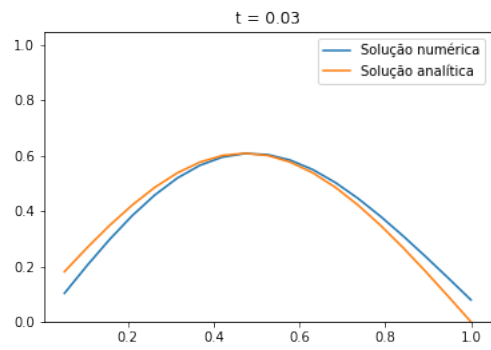
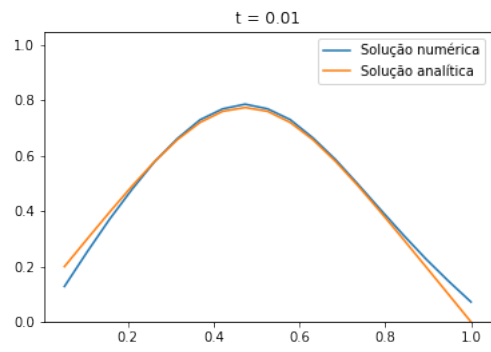
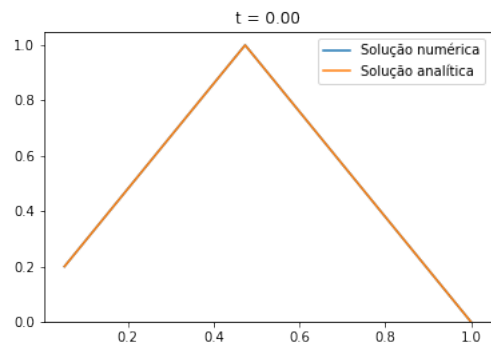
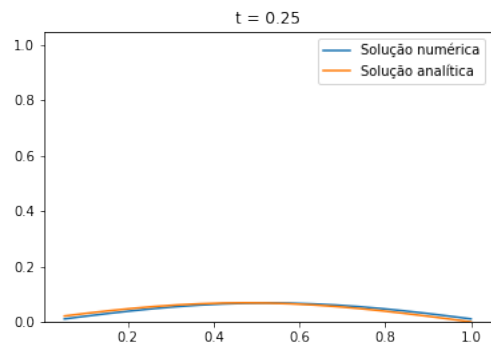
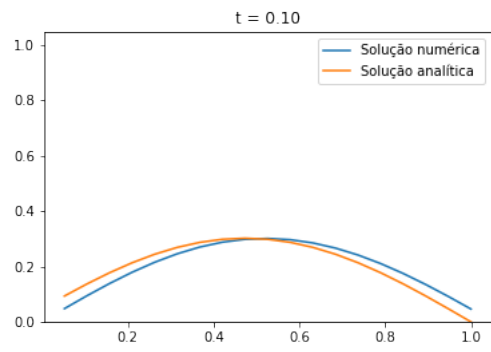
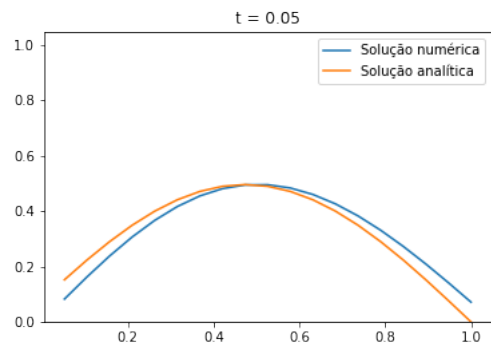


Figura 2: Gráfico 3D da solução numérica





Crank-Nicolson

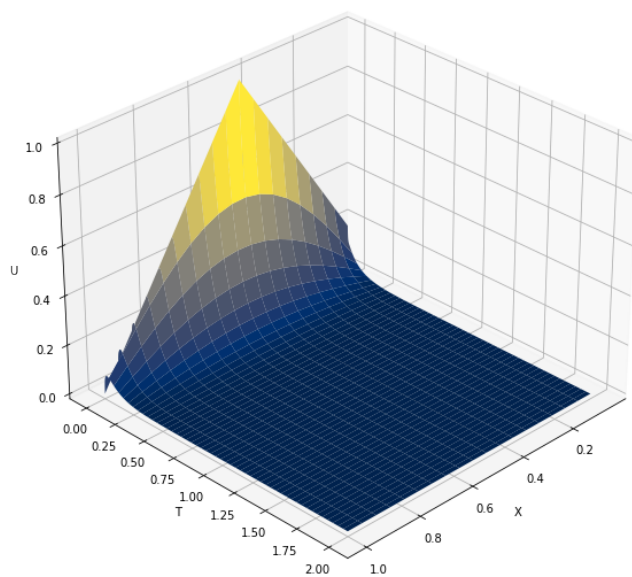
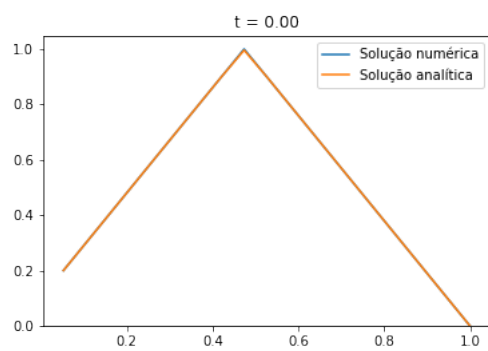
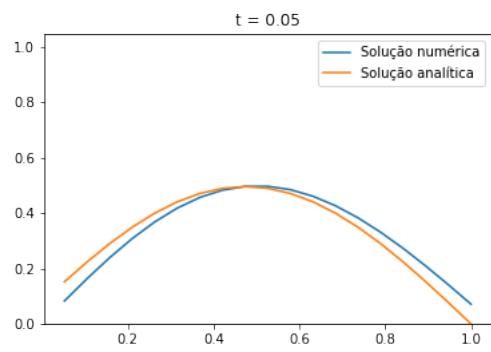
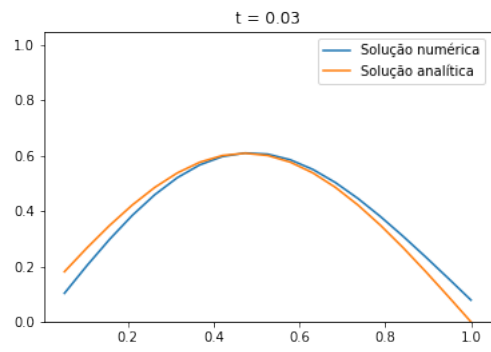
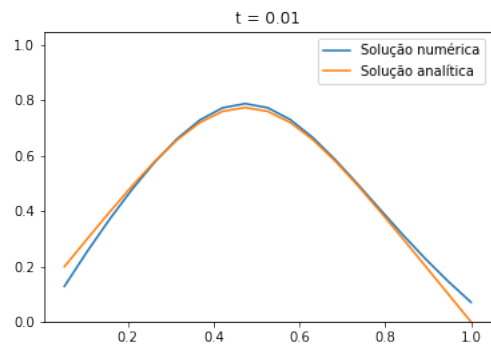
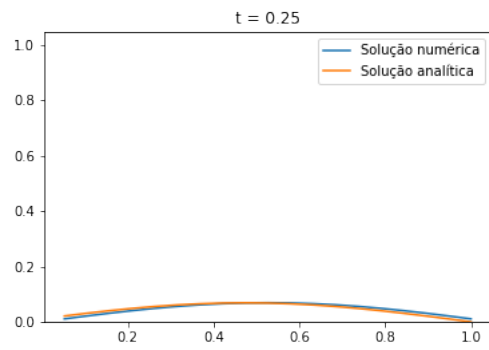
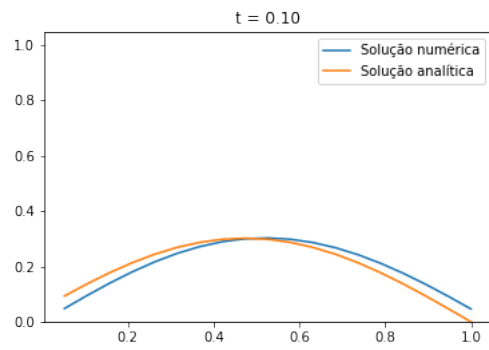


Figura 3: Gráfico 3D da solução numérica







Com os gráficos, é possível perceber que ambos os métodos tiveram um desempenho semelhante, e as soluções numéricas foram praticamente idênticas entre si, e muito próximas à solução exata do problema.

b) $k = \frac{5}{9}h^2$

Método Explícito

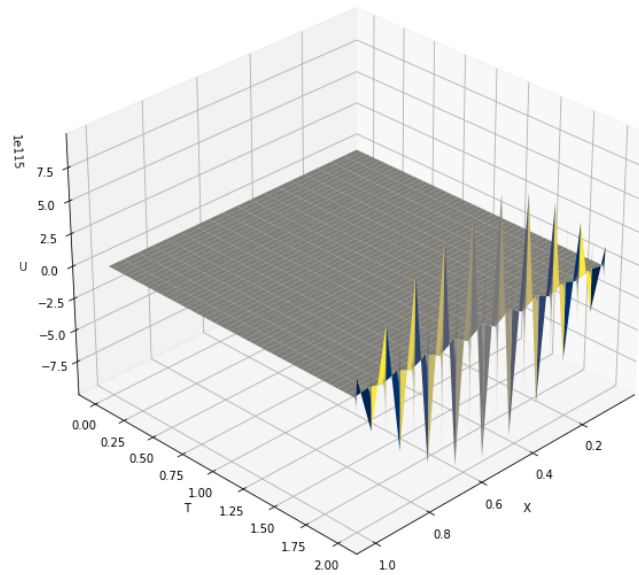
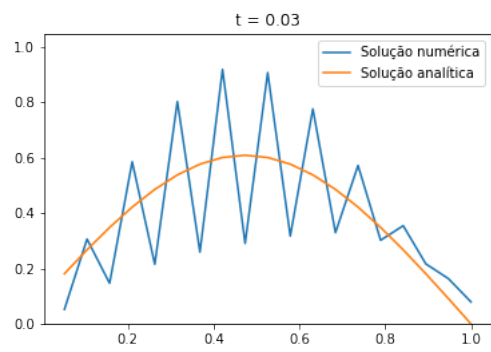
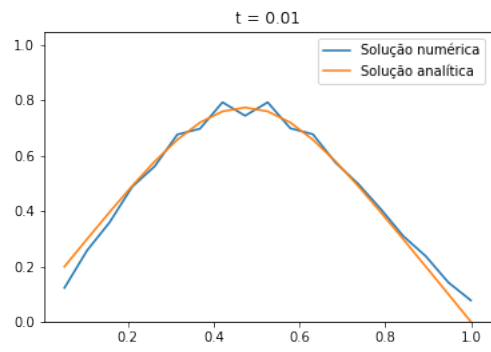
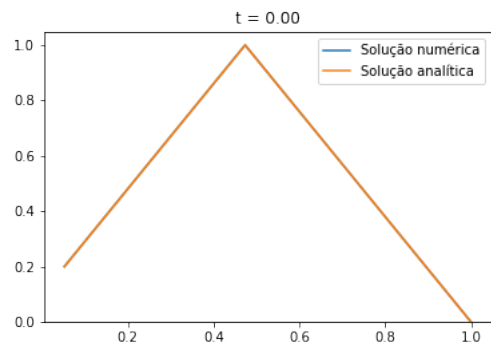
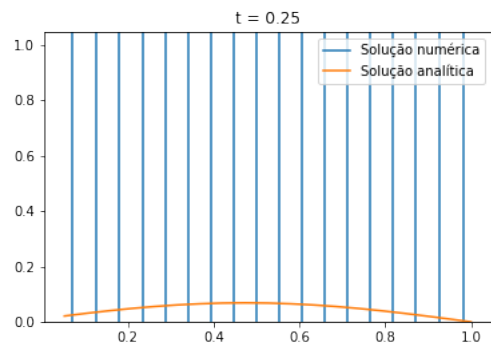
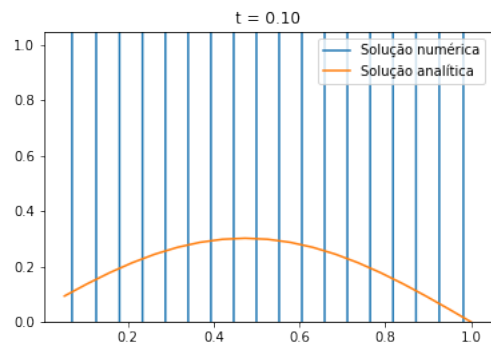
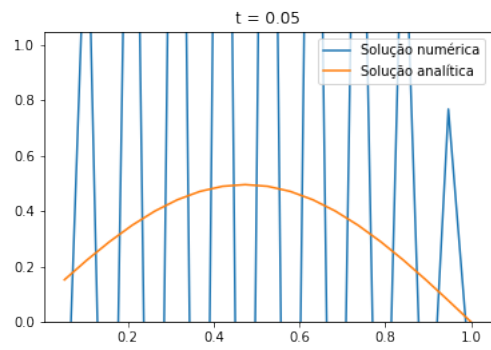


Figura 4: Gráfico 3D da solução numérica





Crank-Nicolson

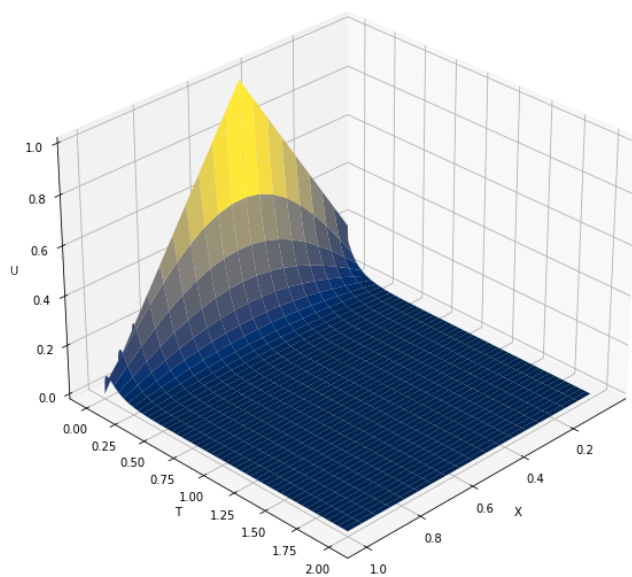
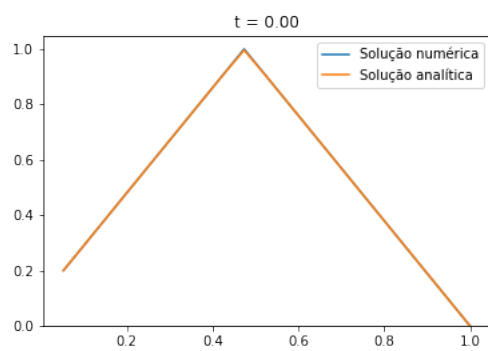
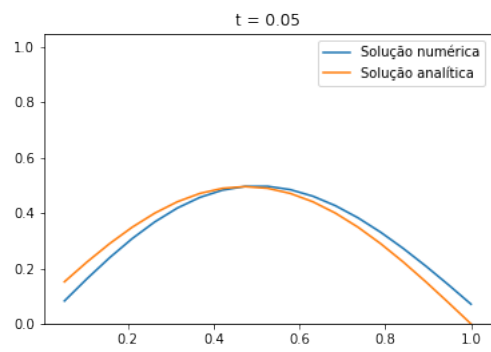
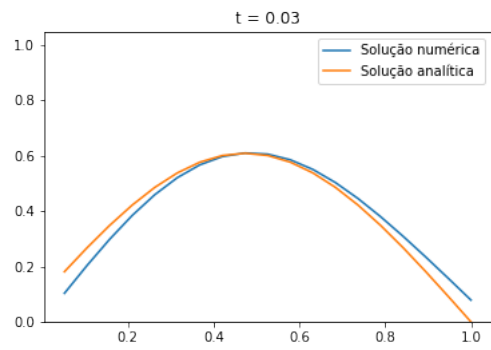
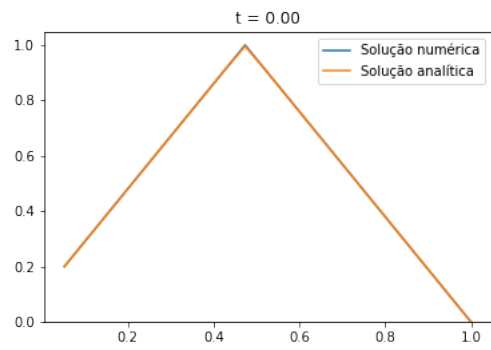
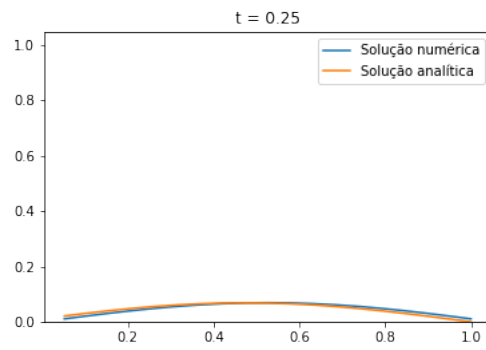
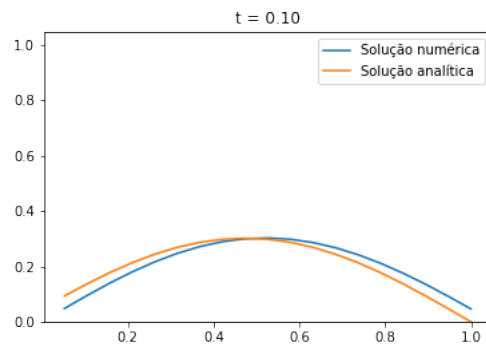


Figura 5: Gráfico 3D da solução numérica







Diferentemente do espaçamento anterior, aqui percebemos que o método explícito perdeu sua estabilidade e divergiu da solução exata. Por outro lado, o método Crank-Nicolson se manteve estável, especialmente pelo fato de se tratar de um método implícito.

Parte 2

Feitos os gráficos anteriores, solicitou-se figuras com verificação numérica da ordem de convergência de ambos os métodos.

Método Explícito

Para fazer o estudo da convergência desse método, foi escolhido $k = Ch^2$ com $C = 5/11$, uma vez que garantiu a estabilidade do método como mostrado na *Parte 1* deste relatório.

Dito isso, temos:

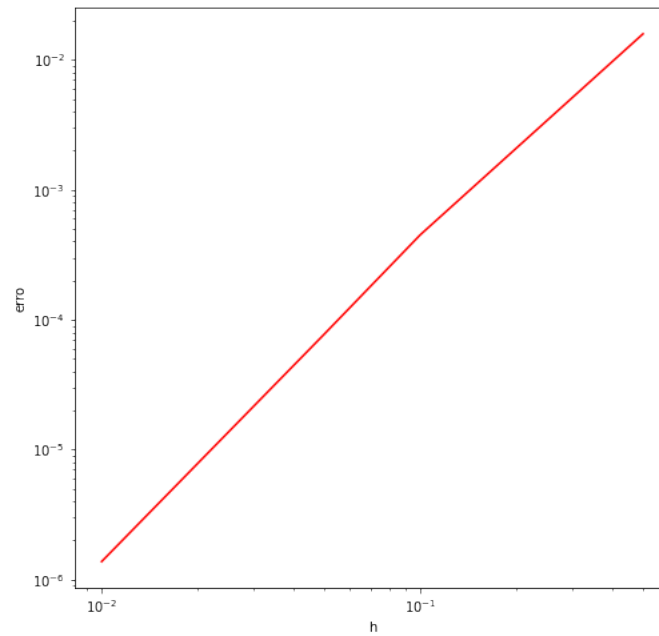


Figura 6: erro x h

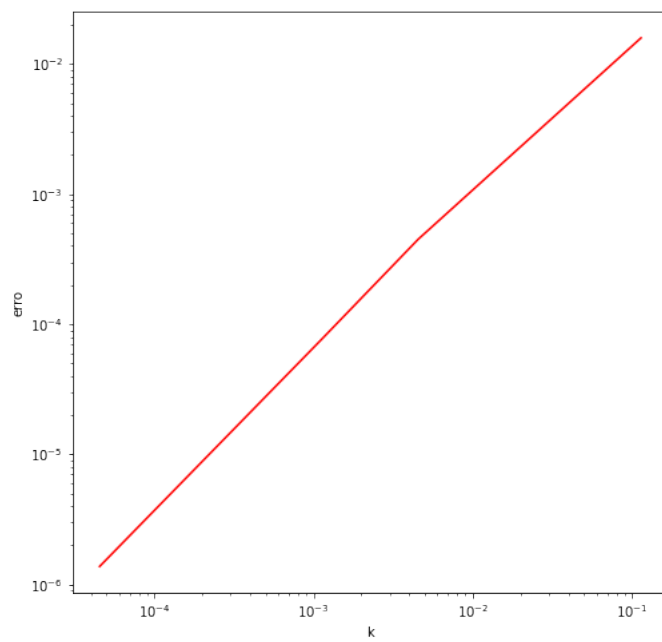


Figura 7: erro x k

h	k	erro
0.500000	0.113636	0.015870
0.100000	0.004545	0.000451
0.050000	0.001136	0.000078
0.010000	0.000045	0.000001

Crank-Nicolson

1º Caso: $k = Ch$

Por simplicidade, tomou-se $C = 1$.

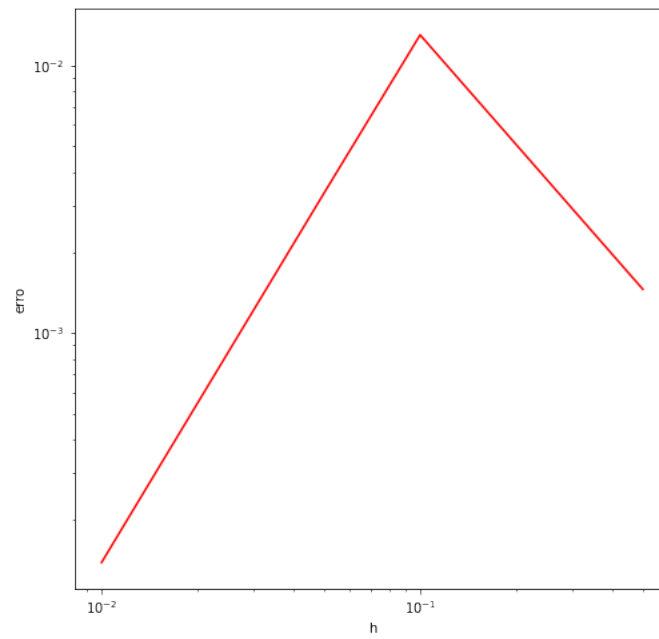


Figura 8: erro x h

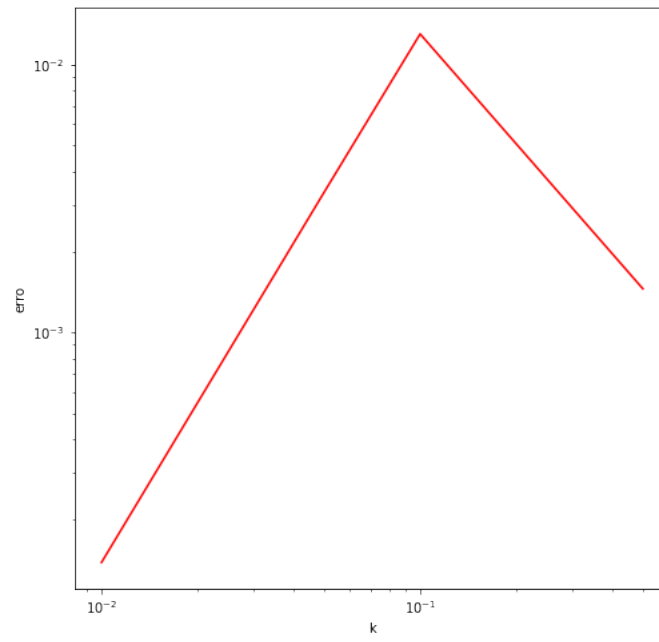


Figura 9: erro x k

h	k	erro
0.500000	0.500000	0.001457
0.100000	0.100000	0.013044
0.050000	0.050000	0.003347
0.010000	0.010000	0.000138

2º Caso: $k = Ch^2$

Aqui, para analisar o método, foi utilizado o mesmo espaçamento que do método explícito. Ou seja, tomou-se $C = 5/11$.

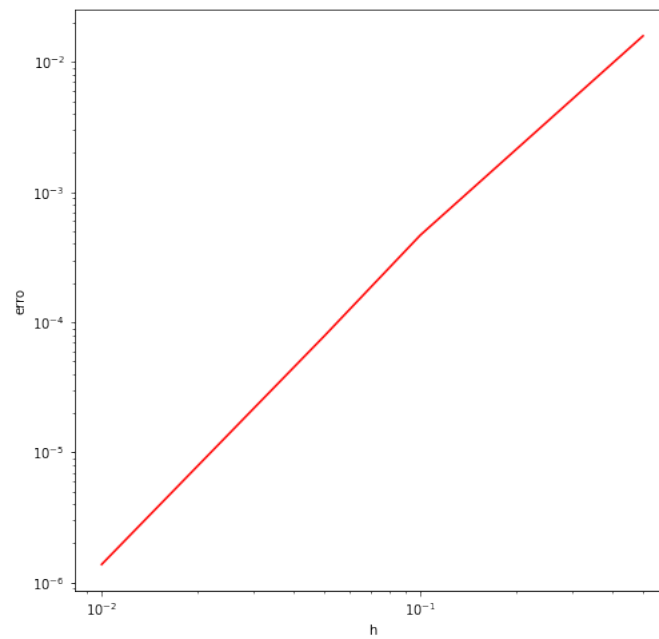


Figura 10: erro x h

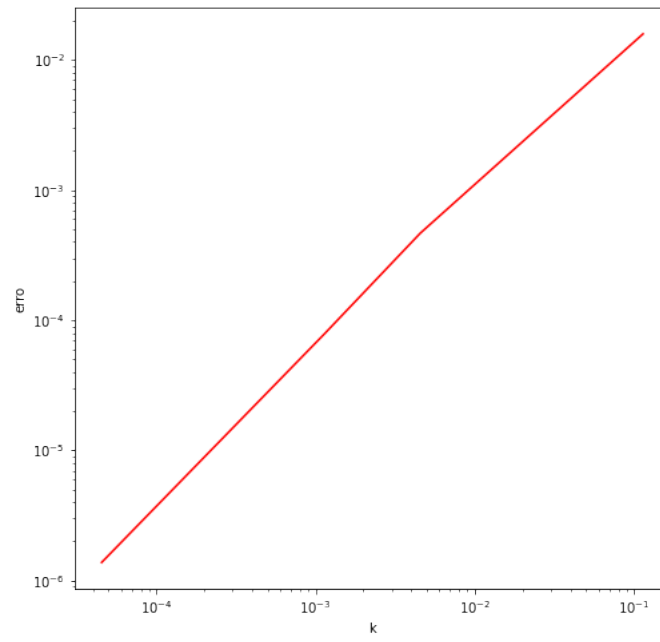


Figura 11: erro x k

h	k	erro
0.500000	0.113636	0.015870
0.100000	0.004545	0.000467
0.050000	0.001136	0.000079
0.010000	0.000045	0.000001

Considerações finais

Podemos estimar a ordem de convergência dos métodos por meio das aproximações:

$$p_h \approx \frac{\log(erro_{i+1}) - \log(erro_i)}{\log(h_{i+1}) - \log(h_i)}$$

$$p_k \approx \frac{\log(erro_{i+1}) - \log(erro_i)}{\log(k_{i+1}) - \log(k_i)}$$

Dito isso, estimando as convergências para cada caso por meio dos dois últimos passos das tabelas geradas, obtemos os seguintes resultados:

Método	p_h	p_k
Explícito	2.706975	1.349409
CN Caso 1	1.981167	1.981167
CN Caso 2	2.714891	1.353354

Certamente, alguns dos resultados não estão de acordo com o que estava previsto pela convergência teórica do método. Uma possível explicação para isso, é a dependência do espaçamento temporal com o espaçamento espacial.

Uma observação, por fim, é que o cálculo do erro e de seu módulo utilizados nas implementações foram, respectivamente:

$$e = |U - u'|$$

$$||e||_2 = \sqrt{h \cdot k \sum_i \sum_j |e_{ij}|^2}$$

onde U é a matriz da solução numérica nos pontos discretizados, e u' é a matriz dos valores da solução exata nos pontos discretizados.