# Trabalho 1

SME0202 -
Métodos Numéricos para Equações
Diferenciais

Universidade de São Paulo (USP)

**Aluno:** Caio Assumpção Rezzadori

**Nº USP:** 11810481

# 1 Enunciado

Implemente um código que tenha ordem 2 de convergência para a resolução do exercício 6(b) da lista sobre equações elípticas. Faça a análise de convergência solicitada, plotando um gráfico de convergência, com pelo menos 5 malhas diferentes, comparando com uma solução de referência.

### *Questão 6*

Considere a equação de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 10u = 0$$

Definido no quadrado $[-1,1]\times[-1,1]$ com as seguintes condições de fronteira:

- $u = 0$ para $y = 1$ e $-1 \leq x \leq 1$
- $u = 1$ para $y = -1$ e $-1 \leq x \leq 1$
- $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -0.5u$ para $x = 1$ e $-1 \leq y \leq 1$
- $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.5u$ para $x = -1$ e $-1 \leq y \leq 1$

### *Item (b)*

Implementar este problema para qualquer tamanho $h$ dado, e realizar um estudo numérico de convergência.

## 2 Resolução do problema

Para facilitar o processo de resolução, escreveremos o problema da seguinte maneira:

$$u_{xx} + u_{yy} = 10u$$

Seja $h$ tal que:

$$\begin{cases} x_i = -1 + ih \\ y_j = -1 + jh \end{cases}$$

Com $0 \leq i, j \leq m + 1 = \dfrac{2}{h} \in \mathbb{Z}^+$

Vamos encontrar uma boa aproximação para as derivadas de ordem 2 pelo método dos coeficientes indeterminados.

Consideremos $u_{xx}(x_i, y_j)$ como:

$$u_{xx}(x_i, y_j) = a \cdot u(x_i - h, y_j) + b \cdot u(x_i, y_j) + c \cdot u(x_i + h, y_j)$$

Pela série de Taylor, podemos escrever a expressão da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i, y_j) = (a + b + c)u(x_i, y_j) + h(-a + c)u_x(x_i, y_j) + \\ \frac{h^2}{2}(a + c)u_{xx}(x_i, y_j) + \frac{h^3}{24}(-a + c)u_{xxx}(x_i, y_j) + \\ \frac{h^4}{24}(a + c)u_{xxxx}(x_i, y_j) + O(h^4) \end{aligned}$$

Logo, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + c = 0 \\ a + c = \dfrac{2}{h^2} \end{cases}$$

O que nos dá:

$$u_{xx}(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2}[u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)] + \frac{h^2}{12}u_{xxxx}(x_i, y_j) + O(h^4)$$

O mesmo pode ser feito para $u_{yy}(x_i, y_j)$ de forma análoga.

Dito isso, uma aproximação para a equação que desejamos resolver com um erro de truncamento de ordem $O(h^2)$ é:

$$\frac{1}{h^2}[U_{i-1,j} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1}] = 10U_{i,j}$$

Onde $U_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$

Seja $f(u) = 10u$. Podemos escrever a equação a ser resolvida na forma:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(u)$$

Dito isso, considerando a aproximação desenvolvida anteriormente, temos que:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}[U_{-1,j} + U_{0,j-1} - 4U_{0,j} + U_{1,j} + U_{0,j+1}] = f(U_{0,j}) \\ \\ \dfrac{1}{h^2}[U_{m+2,j} + U_{m+1,j+1} - 4U_{m+1,j} + U_{m,j} + U_{m+1,j-1}] = f(U_{m+1,j}) \end{cases}$$

Além disso, sabe-se que, pelo método de diferenças centradas e pelas condições de contorno de Neumann para $x_0 = -1$ e $x_{m+1} = 1$:

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_j) = \dfrac{1}{2h}[u(x_1, y_j) - u(x_{-1}, y_j)] + O(h^2) \\ \\ u_x(x_{m+1}, y_j) = \dfrac{1}{2h}[u(x_m, y_j) - u(x_{m+2}, y_j)] + O(h^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.5U_{0,j} = \dfrac{1}{2h}[U_{1,j} - U_{-1,j}] \\ \\ -0.5U_{m+1,j} = \dfrac{1}{2h}[U_{m,j} - U_{m+2,j}] \end{cases}$$

Logo, temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h}[\dfrac{U_{0,j-1}}{2} - 2U_{0,j} + U_{1,j} + \dfrac{U_{0,j+1}}{2}] = \dfrac{h}{2}f(U_{0,j}) + 0.5U_{0,j} \\ \\ \dfrac{1}{h}[\dfrac{U_{m+1,j-1}}{2} - 2U_{m+1,j} + U_{m,j} + \dfrac{U_{m+1,j+1}}{2}] = \dfrac{h}{2}f(U_{m+1,j}) - 0.5U_{m+1,j} \end{cases}$$

Sendo:

$$U^{[j]} = \begin{bmatrix} U_{0,j} \\ U_{1,j} \\ \vdots \\ U_{m+1,j} \end{bmatrix}_{(m+2)}, \qquad U = \begin{bmatrix} U^{[0]} \\ U^{[1]} \\ \vdots \\ U^{[m+1]} \end{bmatrix}_{(m+2)^2},$$

$$f^{[j']} = \begin{bmatrix} \frac{h}{2} f(U_{0,j'}) + 0.5U_{0,j'} \\ f(U_{1,j'}) \\ f(U_{2,j'}) \\ \vdots \\ f(U_{m,j'}) \\ \frac{h}{2} f(U_{m+1,j'}) - 0.5U_{m+1,j'} \end{bmatrix}_{(m+2)} = \begin{bmatrix} (5h + 0.5)U_{0,j'} \\ 10U_{1,j'} \\ 10U_{2,j'} \\ \vdots \\ 10U_{m,j'} \\ (5h - 0.5)U_{m+1,j'} \end{bmatrix}_{(m+2)},$$

Para $j' \neq 0$ e $j' \neq m+1$, e:

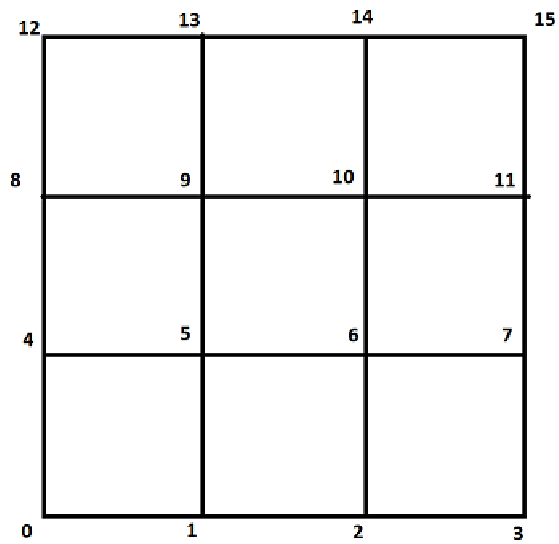
$$f^{[0]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{(m+2)}, \qquad f^{[m+1]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(m+2)}$$

Devido as condições de contorno de Dirichlet.

Por fim, definimos:

$$G = \begin{bmatrix} f^{[0]} \\ f^{[1]} \\ \vdots \\ f^{[m+1]} \end{bmatrix}_{(m+2)^2}$$

Para montarmos o sistema linear a ser resolvido para encontrar os valores aproximados da função desconhecida da equação elíptica trabalhada, consideremos $h = 2/3 \Rightarrow m+1 = 3$, sendo um dos casos mais simples. A enumeração da malha é dada pela função $k = i + (m+2)j$, com $0 \leq k \leq 15$.




Queremos encontrar uma matriz $A'$ para o sistema:

$$A'U = G$$

Criando o sistema a partir das aproximações desenvolvidas, temos:

$$A' = \begin{bmatrix}
h^2 & & & & & & & & & & & & & & & \\
& h^2 & & & & & & & & & & & & & & \\
& & h^2 & & & & & & & & & & & & & \\
& & & h^2 & & & & & & & & & & & & \\
h/2 & & & & -2h & h & & & h/2 & & & & & & & \\
& 1 & & & 1 & -4 & 1 & & & 1 & & & & & & \\
& & 1 & & & 1 & -4 & 1 & & & 1 & & & & & \\
& & & h/2 & & & h & -2h & & & & h/2 & & & & \\
& & & & h/2 & & & & -2h & h & & & h/2 & & & \\
& & & & & 1 & & & 1 & -4 & 1 & & & 1 & & \\
& & & & & & 1 & & & 1 & -4 & 1 & & & 1 & \\
& & & & & & & h/2 & & & h & -2h & & & & h/2 \\
& & & & & & & & & & & & h^2 & & & \\
& & & & & & & & & & & & & h^2 & & \\
& & & & & & & & & & & & & & h^2 & \\
& & & & & & & & & & & & & & & h^2
\end{bmatrix}$$

Generalizando essa matriz para $h$ e $m$ qualquer, podemos chamar:

$$D_h = \begin{bmatrix} h^2 & & & & \\ & h^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & h^2 & \\ & & & & h^2 \end{bmatrix}_{(m+2)\times(m+2)}, I_h = \begin{bmatrix} h/2 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & h/2 \end{bmatrix}_{(m+2)\times(m+2)},$$

$$T = \begin{bmatrix} -2h & h & & & & & \\ 1 & -4 & 1 & & & & \\ & 1 & -4 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & 1 & -4 & 1 & \\ & & & & & -2h & h \end{bmatrix}_{(m+2)\times(m+2)}$$

Por fim, obtemos a matriz $A'$ da seguinte forma:

$$A' = \begin{bmatrix} D_h & & & & & & & \\ I_h & T & I_h & & & & & \\ & I_h & T & I_h & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & I_h & T & I_h & & \\ & & & & I_h & T & I_h & \\ & & & & & & D_h & \end{bmatrix}_{(m+2)^2\times(m+2)^2}$$

Para resolver o sistema linear $A'U = G$, todavia, é necessário retirar as incógnitas $U_{i,j}$ da matriz G.

Seja $F$ tal que:

$$F = \begin{bmatrix} f^{[0]} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f^{[m+1]} \end{bmatrix}_{(m+2)^2}$$

Logo:

$$G = F + BU$$

onde:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5h+0.5 & & & & & \\ & 10 & & & & \\ & & 10 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 10 & \\ & & & & & 5h-0.5 \end{bmatrix}$$

Onde a operação $\otimes$ é o produto de Kronecker.

Feito isso, podemos reescrever o sistema linear de interesse da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A'U &= F + BU \\ \Rightarrow (A' - B)U &= F \end{aligned}$$

Por fim, chamando $A = A' - B$, podemos resolver o sistema linear:

$$AU = F$$

Uma vez que temos agora as incógnitas isoladas e a matriz $F$ não é um vetor nulo, devido as condições de Dirichlet.

# 3 Solução de referência

Para poder realizar o estudo de convergência pedido, foi escolhido $h = \frac{1}{256}$, correspondendo a uma malha de tamanho $m + 1 = 512$, para a solução de referência.

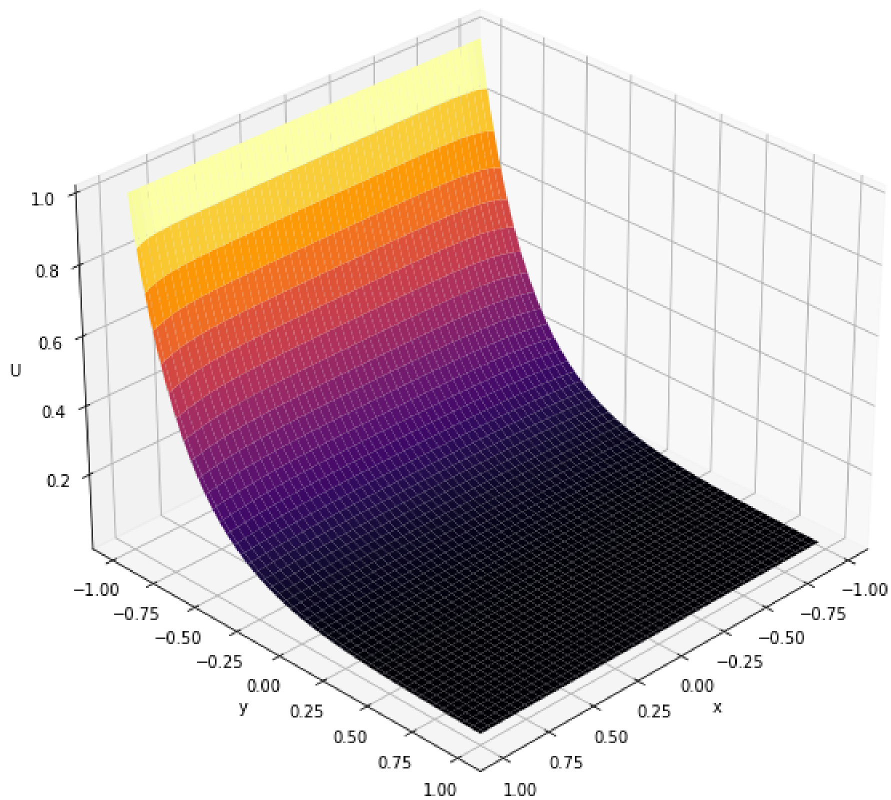



Figure 1: Gráfico da solução de referência

## 4 Análise das malhas escolhidas

Para fazer a análise da convergência do erro, $h$ foi escolhido tal que:

$$h \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}\}$$

.

O módulo do erro utilizado foi:

$$||e|| = ||U(h) - U\hat{(h)}|| = \max |U_{i,j}(h) - \hat{U}(h)_{i,j}|$$

Após a resolução do sistema linear desenvolvido, para as diferentes malhas os resultados foram:

| h | Erro |
|---|---|
| 0.500000 | 0.036962 |
| 0.250000 | 0.017551 |
| 0.125000 | 0.007379 |
| 0.015625 | 0.000777 |
| 0.007812 | 0.000302 |

## 5 Gráfico de convergência

A partir dos resultados, foi também gerado um gráfico de convergência em escala logarítmica.

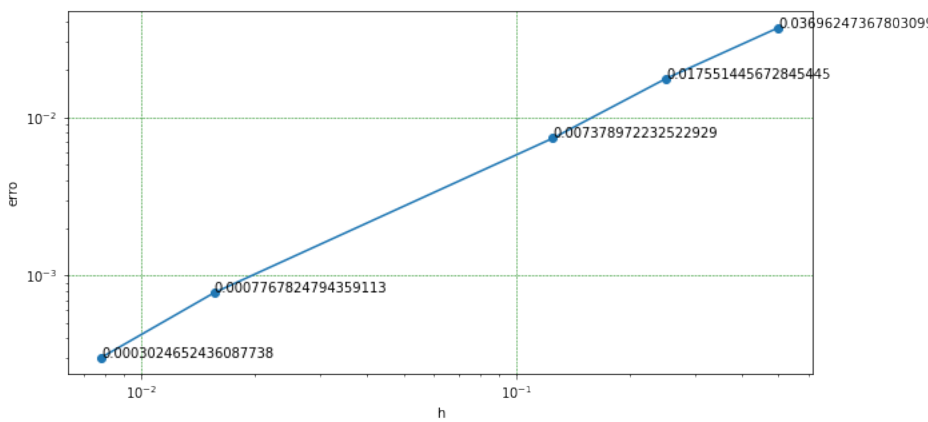



Figure 2: Gráfico de convergência