Matemática Discreta I
Teoria de Conjuntos

Exercícios

1. Seja $S = \{2, 5, 17, 27\}$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

a. $5 \in S$
b. $2 + 5 \in S$
c. $\emptyset \in S$
d. $S \in S$

2. Seja $B = \{x \mid x \in \mathbb{Q} - 1 < x < 2\}$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

a. $0 \in B$
b. $-1 \in B$
c. $-0{,}84 \in B$
d. $\sqrt{2} \in B$

3. Descreva cada um dos conjuntos a seguir listando seus elementos:

a. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x^2 < 25\}$

b. {x | x é um dos três primeiros presidentes do Brasil}

c. $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 = -1\}$

d. {x | x é um dos estados da Região Sudeste}

e. $\{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } |x| < 4\}$ ($|x|$ denota módulo de x)

4. Descreva cada um dos conjuntos a seguir listando seus elementos:

a. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x^2 - 5x + 6 = 0\}$

b. $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 = 7\}$

c. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x^2 - 2x - 8 = 0\}$

5. Descreva cada um dos conjuntos a seguir:

a. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\exists q)(q \in \{2, 3\} \text{ e } x = 2q)\}$

b. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\forall y)(y \text{ par} \rightarrow x \neq y)\}$

6. Dada uma descrição do conjunto A como $A = \{2, 4, 8, ...\}$. Descreva um conjunto onde:

a. $16 \in A$.
b. $16 \notin A$.

7. Qual é a cardinalidade de cada um dos conjuntos a seguir?

a. $S = \{a, \{a, \{a\}\}\}$

b. $S = \{\{a\}, \{\{a\}\}\}$

c. $S = \{\emptyset\}$

d. $S = \{a, \{\emptyset\}, \emptyset\}$

e. $S = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Matemática Discreta I
Teoria de Conjuntos

8. Sejam $A = \{2, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 4, 7, 8\}$ e $C = \{7, 8\}$. Quais das proposições a seguir são verdadeiras?

a. $5 \subseteq A$
b. $C \subseteq B$
c. $\emptyset \in A$
d. $7 \in B$
e. $\{2, 5\} \subseteq A$
f. $\emptyset \subset C$

9. Sejam
$R = \{1, 3, \pi, 4{,}1, 9, 10\}$,
$T = \{1, 3, \pi\}$,
$S = \{\{1\}, 3, 9, 10\}$
$U = \{\{1, 3, \pi\}, 1\}$.

Quais afirmações a seguir são verdadeiras? E para as que não o são, por quê não?

a. $\{1\} \in S$
b. $\emptyset \subseteq S$
c. $J \subseteq U$
d. $T \in U$
e. $T \notin R$
f. $T \subseteq R$

10. Sejam
$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}\ x^2 - 4x + 3 < 0\}$ e $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ e $0 < x < 6\}$.
Prove que $A \subset B$.

11. Descreva os complementos dos seguintes conjuntos:

a. $A = \{2, 5, 7\}$, com o conjunto universo sendo os números inteiros positivos menores que 10.

b. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ e $x^2 - 5x + 6 = 0\}$, com o conjunto universo sendo os números naturais maiores que 256.

c. A = {Ouro Preto}, com o conjunto universo sendo as cidades onde a UFOP possui campi.

d. $A = \emptyset$, com o conjunto universo sendo o dos valores de uma variável booleana.

12. Dado $A = \{x \mid x$ é par$\}$, $B = \{y \mid y$ é ímpar$\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Descreva:

a. $A \cup B$
b. $B \cap C$
c. $A \Delta B$
d. $A \Delta C$
e. $A \cap B$

13. Prove que, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

14. Prove que, se $\bar{A} \subseteq \bar{B}$, então $B \subseteq A$.

15. Prove que, para qualquer inteiro $n \geq 2$, um conjunto com n elementos tem $n(n - 1)/2$ subconjuntos que contém exatamente dois elementos.

16. Sejam

$A = \{p, q, r, s\}$,
$B = \{r, t, v\}$,
$C = \{p, s, t, u\}$

subconjuntos de $S = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$. Encontre

a. $B - C$

b. $(A \cup B)^C$

c. $A \times B$

d. $(A \cup B) \cap C^C$

17. Quais das proposições a seguir são verdadeiras para todos os conjuntos A, B e C?

a. $A \cup A = A$

b. $B \cap B = B$

c. $(A \cap B)^C = A^C \cap B^C$

d. $(A)^C = A$

e. $A - B = (B - A)^C$

f. $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$

18. Prove que $(A \cap B) \subseteq A$, em que A e B são conjuntos arbitrários.

19. Prove que $A \subseteq (A \cup B)$, em que A e B são conjuntos arbitrários.

20. A, B e C são subconjuntos de um conjunto S. Prove as identidades a seguir usando as identidades básicas envolvendo conjuntos, listadas nesta seção. Enuncie a identidade dual de cada uma dessas identidades.

a. $(A \cup B) \cap (A \cup B^C) = A$

b. $([(A \cap C) \cap B] \cup [(A \cap C) \cap B^C]) \cup (A \cap C)^C = S$

c. $(A \cup C) \cap [(A \cap B) \cup (C^C \cap B^C)] = A \cap B$