Guilherme A. A. W. Nascimento 20.1.4007 BCC101 - Turma 21 Semana 8

12.7) Prove que para todo $n \in \mathbb{Z}$, se n é ímpar então $3n+9$ é par.

Prova:

Seja n um inteiro ímpar. Então pelo definição de número ímpar, $n = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Substituindo em $3n+9 = 3(2k+1)+9 = 6k+3+9 = 6k+12 = 2(3k+6)$

As operações de soma e multiplicação são fechadas no conjunto dos inteiros, então segue que $3k+6 = t$ para algum $t \in \mathbb{Z}$

Assim, da definição de número par e do resultado $3n+9 = 2t$, pode-se concluir que $3n+9$ é par.

c. q. d.

12.8) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$

Prova:

Se $0 < a < b$, então $0 < a$ e $0 < b$. Logo $(a-b) < 0$ e $(a+b) > 0$.

Multiplicando os dois lados da inequação $(a-b) < 0$ por $(a+b)$ temos que

$(a-b)(a+b) < 0 \cdot (a+b) \Rightarrow a^2 + ab - ab - b^2 < 0 \Rightarrow a^2 - b^2 < 0 \Rightarrow a^2 < b^2$.

Logo, se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.

c. q. d.

13.4) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a > b$. Prove que, se $ac \leq bc$, então $c \leq 0$.

Prova:

Multiplicando a inequação $a > b$ por c, temos que $ac > bc$.

Assumindo $c = 0$, temos $ac > bc \Rightarrow a \cdot 0 > b \cdot 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Assumindo $c < 0$, temos $ac > bc \Rightarrow a(-c) > b(-c) \Rightarrow ac < bc$.

Logo, se $ac \leq bc$, então $c \leq 0$.

c. q. d.

Guilherme A. A. H. Nascimento 20.1.4007 BCC 101 - Turma 21 Semana 8

13.7) Prove por contradição que para todo n, se n^2 é par, então n é par.

Prova (por contradição):

Para todo n, se n^2 é par e, por contradição, n é ímpar.

Pela definição de número ímpar, $n = 2k + 1$ para um $k \in \mathbb{Z}$.

Assim $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.

As operações de multiplicação e soma são fechadas no conjunto dos inteiros, então $2k^2 + 2k = t$ para um $t \in \mathbb{Z}$.

Logo $n^2 = 2t + 1$, ou seja, um número ímpar, o que é um absurdo.

Portanto, se n^2 é par, então n é par.

c. q. d.

13.8) Prove por contradição que se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

Prova (por contradição):

Se $3n + 2$ é ímpar e, por contradição, n é par.

Pela definição de número par, $n = 2k$ para um $k \in \mathbb{Z}$.

Assim $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$.

As operações de soma e multiplicação são fechadas no conjunto do inteiros, então $3k + 1 = t$ para um $t \in \mathbb{Z}$.

Logo $3n + 2 = 2t$, ou seja, um número par, o que é um absurdo.

Portanto, se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

c. q. d.