Guilherme A. A. M. Nascimento 20.1.4007 BCC101 - Turma 21 Semana 11

Exemplo 18.14: Prove que $n^3 - n$ é divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova por indução fraca:

1. Passo Base: $n = 0$, segue que $(0)^3 - (0) = 0$. Logo, $P(0)$ é verdadeira.

2. Hipótese Indutiva: Para algum K arbitrário, $K^3 - K$ é divisível por 3.

*Observações:

1. $K^3 - K = 3m$, para algum $m \in \mathbb{Z}$
2. $K^3 = 3m + K$ (reescrita da H.I.)

3. Passo Indutivo: provar $P(K+1): (K+1)^3 - (K+1)$ é divisível por 3

$$
\begin{aligned}
(K+1)^3 - (K+1) &= K^3 + 3K^2 + 3K + 1 - K - 1 \\
&= K^3 + 3K^2 + 2K \\
&= (3m + K) + 3K^2 + 2K \\
&= 3K^2 + 3K + 3m = 3(K^2 + K + m),\ K^2 + K + m \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Pelo princípio da indução matemática, segue que $(K+1)^3 - (K+1)$ é divisível por 3. Portanto, $n^3 - n$ é divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$.

c.q.d.

Guilherme A. A. H. Nascimento 20.1.4007 BCC101 - Turma 21 semana 11

19.3: Prove que qualquer quantia maior ou igual a 2 pode ser obtida pela soma de números 2 e 3.

<u>Prova por indução forte:</u>

1. Caso Base: para $n = 2$, segue que $2 = 2$. Logo, $P(2)$ é verdadeira. Será estabelecido mais um caso adicional: $P(3)$:
   - $P(3): 3 = 3$

2. Hipótese Indutiva: suponha $P(r)$: "para qualquer $r \in \mathbb{N}$ com $2 \leq r \leq K$, r resulta da soma de 2's e 3's.

3. Caso Indutivo: para provar $P(K+1)$: "$K+1$ pode ser representado pela soma de 2's e 3's" é preciso supor que $K+1$ é pelo menos 4 $(K+1 \geq 4)$, já que sabe-se da veracidade de $P(2)$ e $P(3)$.
   - Subtraindo 2 dos dois lados de $K+1 \geq 4$, tem-se:
     $(K+1)-2 \geq 4-2 \Rightarrow K-1 \geq 2$
   - Então $K-1$ é um valor legítimo para r. E pela hipótese da indução, $P(K-1)$ é verdadeira.
   - Então, $K-1$ pode ser escrito como a soma de números iguais a 2 e 3
   - Adicionando mais um 2 ao número $K-1$, obtém-se $K+1$, que também pode ser escrito como a soma de números 2 e 3. Verificando então que $P(K+1)$ é verdadeiro.

Portanto, a proposição $P(n)$ é verdade para todo $n \geq 2$.

c. q. d.