Definições

(Número par) Seja $n \in Z$. n é par se existe um $k \in Z$ tal que $n = 2k$.

(Número ímpar) Seja $n \in Z$. n é ímpar se existe um $k \in Z$ tal que $n = 2k + 1$.

(Número Primo) n é um número primo, se e somente se, $\forall k,s \in Z+$, se $n = ks$, então $k = 1$ e $s = n$ ou $k = n$ e $s = 1$.

(Número Composto) n é um número composto, se e somente se, $\exists k,s \in Z+$ tais que $n = ks$ e $1 < k < n$ e $1 < s < n$. Ou seja, k 6= 1 e s 6= 1.

(Quadrado Perfeito) Um número n é um quadrado perfeito se existe $k \in Z$ tal que $n = k^2$.

(Cubo Perfeito) Um número n é um cubo perfeito se existe $k \in Z$ tal que $n = k^3$.

(Número Racional) Seja $r \in R$. r é racional se existem $p,q \in Z$ tais que $r = p/q$ e q != 0. Caso contrário, dizemos que r é irracional.

(Mínimo Múltiplo Comum) O Mínimo Múltiplo Comum de dois inteiros a e b, denotado como mmc(a,b), é o menor inteiro que é múltiplo tanto de a quanto de b.

(Máximo Divisor Comum) O Máximo Divisor Comum de dois inteiros a e b, denotado como mdc(a,b), é o maior inteiro que divide tanto a quanto b.

Observações:

1. $mdc(a,0) = mdc(0,a) = |a|$ se a 6= 0;
2. $mdc(0,0) = \infty$.

(Módulo) O Valor Absoluto ou Módulo de um número x, denotado por $|x|$, é igual a : $|x|$ = (x, se $x \geq 0$ $-x$, se $x < 0$

(Números Negativos) Os símbolos $<,>,\leq$ e $\geq$ e os números reais negativos são definidos em termos dos números reais positivos.

Dados $a,b \in R$:

- $a < b$ significa que $b + (-a)$ é positivo;
- $a \leq b$ significa que $a < b$ ou $a = b$;
- Se $a < 0$, dizemos que a é um número negativo;
- Se $a \geq 0$, dizemos que a é um número não-negativo

Declaração Existencial

Para provar a veracidade dos teoremas que aparecem escritos como $\exists x,P(x)$ basta:

Prova Construtiva: encontrar um valor para $a \in D$ tal que P(a) seja verdadeira.

Prova Não Construtiva: mostrar que a afirmativa $\exists x,P(x)$ pode ser provada de outra maneira,

mesmo sem exibir explicitamente um valor a tal que P(a) seja verdadeira. Esta estratégia será melhor detalhada nos próximos capítulos.

- Para mostrar que uma declaração existencial é falsa, basta provar que sua negação (uma afirmação universal) é verdadeira

Declaração Universal

Os teoremas no formato de declarações universais são representados formalmente por
$\forall x,[P(x) \rightarrow Q(x)]$
e discorrem que todos os objetos do universo de discurso que possuem a propriedade P(x) também
possuem a propriedade Q(x).
OBSERVAÇÕES:
• a sentença informal $P(x) \rightarrow Q(x)$ só é falsa quando P(x) é verdadeira e Q(x) é falsa.
• para mostrar que $P(x) \rightarrow Q(x)$ é verdadeira, basta supor que P(x) é verdadeira e mostrar que Q(x)
também é.
• para provar $\forall x,P(x) \rightarrow Q(x)$ é necessário supor que x é um elemento específico do universo do
discurso, porém escolhido arbitrariamente, que satisfaz P(x) e provar que x também satisfaz Q(x).
• chamamos a sentença P(x) de hipótese ou premissa e a sentença Q(x) de tese ou conclusão.
PARTICULARIDADES NA DEMONSTRAÇÃO DE SENTENÇAS COM QUANTIFICADORES UNIVERSAIS:
• Uma vez comprovado que a sentença do tipo $\forall x,P(x)$ é verdadeira, podemos afirmar que P(a) é
verdadeira para qualquer elemento a do universo de discurso.
• Se o universo do discurso for um conjunto vazio (D = /0) a afirmação do tipo $\forall x \in D,P(x)$ é
verdadeira, para qualquer predicado P(x). Neste caso, dizemos que a afirmação é verdadeira por
vacuidade.

Prova Direta

1. Escrever o teorema que deve ser provado.
2. Expressar o teorema como uma fórmula da lógica de predicados (essa etapa pode ser feita mentalmente ou na etapa anterior).
3. Identificar cada variável usada na prova juntamente com o seu tipo (ex: Seja m um número inteiro).
4. Entender o enunciado e identificar o que são as hipóteses e a conclusão.
5. Marcar o início da demonstração com a palavra PROVA.
6. Começar a prova supondo que x é um elemento específico, mas escolhido arbitrariamente, do
domínio para o qual a hipótese é verdadeira (ex: Seja $x \in U$ tal que P(x)).
7. Construir passo a passo da prova apresentando uma justificativa.
8. Terminar a prova com a dedução da conclusão.

Prova por Contrapositivo

1. Dada a sentença do tipo $P(x) \rightarrow Q(x)$ escreva a contrapositiva equivalente a ela: $\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)$.
2. Tome como hipótese a sentença $\neg Q(x)$ (que é a negação da conclusão da sentença original).
3. Comece a demonstração com uma frase da forma: "Seja x um elemento do domínio, e suponha $\neg Q(x)$ verdadeira".
4. Aplique na hipótese os axiomas, definições, teoremas demonstrados ou regras de inferência disponíveis.
5. Deduza $\neg P(x)$ (ou seja, mostre que a hipótese da sentença original é falsa).
6. Diante do fato de que a negação da conclusão implica na falsidade da hipótese, conclua que a sentença original é verdadeira.

A prova por contraposição é uma sequência de deduções justificadas, de forma que partindo de $\neg Q(x)$ conclui-se $\neg P(x)$.

Prova por Contradição

1. Assuma a sentença $P(x)$ verdadeira.
2. Suponha que a afirmação que deve ser provada é falsa, ou seja, negue a conclusão ($\neg Q(x)$). Faça isso, iniciando sua demonstração com a seguinte frase: Suponha, por contradição, que $\neg Q(x)$.
3. Construa o passo a passo da prova aplicando as definições, teoremas já demonstrados e regras de inferência.
4. Argumente cada passo como se estive aplicando a prova direta, até alcançar uma sentença que você saiba que é falsa (uma contradição ou um absurdo).
5. Como a negação da conclusão resulta em um absurdo, conclua que a afirmação a ser provada ($Q(x)$) é verdadeira.

Existência: Deve ser verificado que existe pelo menos um elemento x que satisfaz $P(x)$ (Nesta parte é provado que $\exists x, P(x)$ é verdadeiro).
Unicidade: Deve ser mostrado que se y 6= x, então y não tem a propriedade desejada. (Nesta parte prova-se que a sentença $\forall y, (y \,!= x \rightarrow \neg P(y))$ é verdadeira).
De forma sucinta, a prova da unicidade deve ser feita supondo que existe um y que satisfaz P(y) e em seguida prova-se que y = x.

Hipotese Disjuntiva

para demonstrar um teorema com hipótese disjuntiva é necessário provar cada uma das condicionais (que listaremos por casos) separadamente. Este argumento é chamado de demonstração por casos.
Mesmo nos casos onde a sentença for uma condicional simples $P \rightarrow Q$, para fazer a prova por casos é necessário usar a disjunção $P1 \vee P2 \vee \cdots \vee Pn$ em vez de P como hipótese, desde que P e $P1 \vee P2 \vee \cdots \vee Pn$

Cardinalidade
Um conjunto A é dito um conjunto finito se ele possui uma quantidade finita de elementos, ou seja, possui um número n de elementos, onde $n \in N$. Este número é chamado de cardinalidade de A e será denotado por $|A|$.

Subconjunto
Sejam os conjuntos A e B. Dizemos que A é um subconjunto de B
se, e somente se, todo elemento do conjunto A é um elemento do conjunto ´ B
Subconjunto Próprio
Sejam dois conjuntos arbitrários A e B. Dizemos que A é um subconjunto próprio de B, e escrevemos como $A \subset B$, se e somente se $A \subseteq B$ e $A \neq B$.

Igualdade de Conjuntos
Sejam dois conjuntos quaisquer A e B. Dizemos que A e B são iguais (denotamos por A = B) se, e somente se os dois conjuntos possuem exatamente os mesmos elementos:
$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B)$ e $(B \subseteq A)$

União e Intersecçāo˜
A união e a intersecao são as operações mais fundamentais sobre conjuntos.
• A união dos conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, e o conjunto de todos os elementos que estão em pelo menos um dos conjuntos, A ou B:
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
• A interseção dos conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, e o conjunto que contém todos os elementos que estão em ambos os conjuntos, A e B:
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

Conjunto Potência
Chamamos de conjunto potência ou conjunto das partes do conjunto A, simbolicamente representado por P(A), o conjunto de todos os subconjuntos de A:
$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

1. Idempotência:
$A \cup A = A$
$A \cap A = A$
2. Comutatividade:
$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
3. Associatividade:
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. Distributividade:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. Existencia do Conjunto Universo:

A ∪ U = U
A∩U = A
6. Existencia do Conjunto Vazio:
A ∪ (VAZIO) = A A∩ (VAZIO) = (VAZIO)

7. Propriedades do Complemento:

$$A = \overline{\overline{A}}$$

$$\overline{U} = \emptyset$$

$$\overline{\emptyset} = \overline{U}$$

$$A \cup \overline{A} = \mathfrak{U}$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

8. Leis de De Morgan:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Relação Lógica	**Relação sobre Conjuntos**
Implicação ($p \rightarrow q$) Equivalência ($p \leftrightarrow q$)	continência ($A \subseteq B$) igualdade ($A = B$)
Conectivo Lógico	**Operação sobre Conjuntos**
negação disjunção conjunção	complemento união interseção

Conectivo Lógico	**Operação sobre Conjuntos**
idempotência: $\wedge$ e $\vee$	idempotência: $\cap$ e $\cup$
comutatividade: $\wedge$ e $\vee$	comutatividade: $\cap$ e $\cup$
associatividade: $\wedge$ e $\vee$	associatividade: $\cap$ e $\cup$
distributividade $\wedge$ sobre $\vee$ $\vee$ sobre $\wedge$	distributividade $\cap$ sobre $\cup$ $\cup$ sobre $\cap$
dupla negação $\neg(\neg p)$	duplo complemento $\overline{\overline{A}} = A$
Leis de De Morgan	Leis de De Morgan
Absorção	Absorção