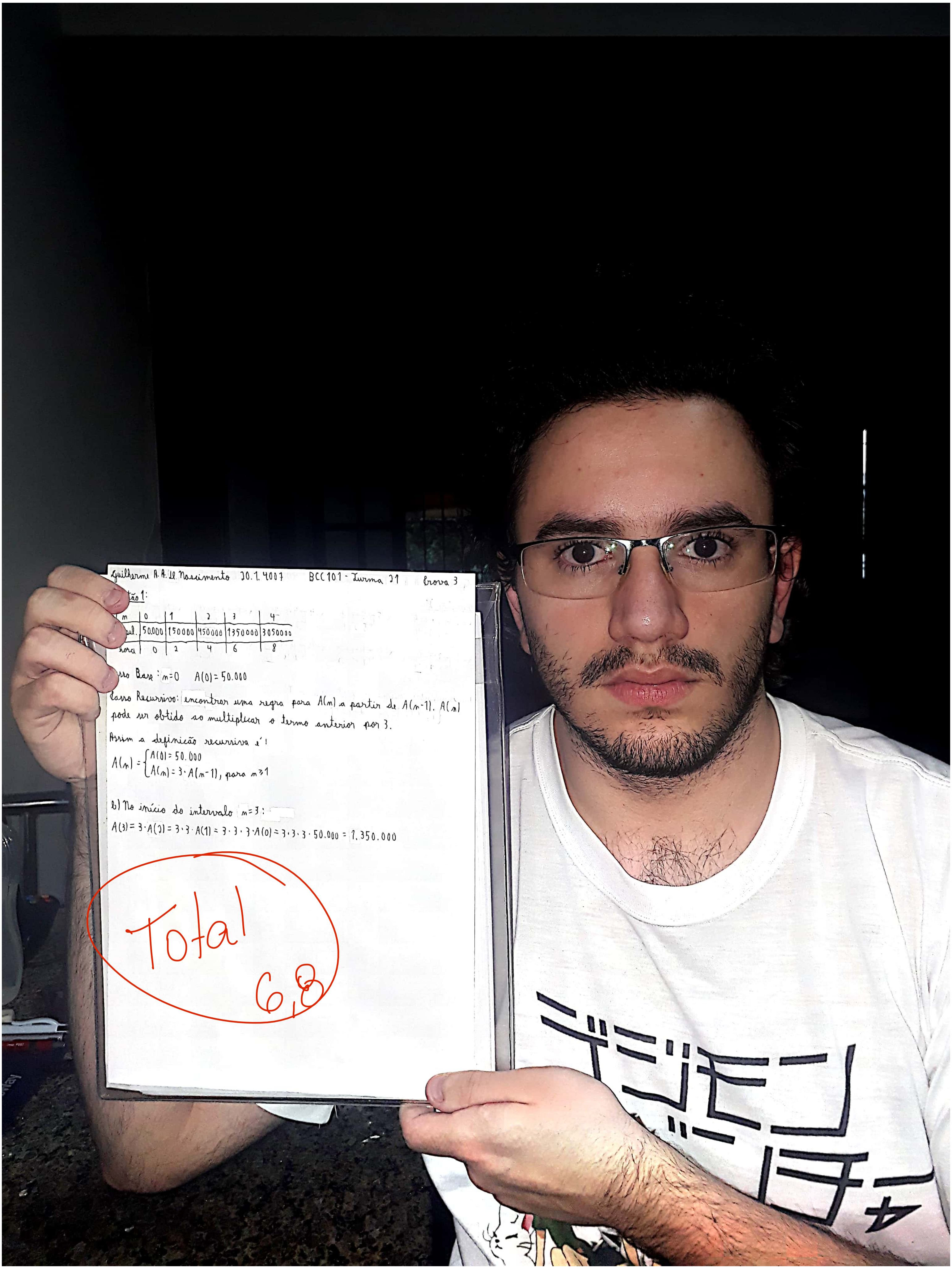

Guilherme R. A. de Nascimento 20.1.4007 BCC101 - Turma 21 Prova 3

tão 1:

| m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| ul. | 50.000 | 150000 | 450000 | 1350000 | 3050000 |
| hora | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |

sso Base: $n=0$ $A(0)=50.000$

Passo Recursivo: encontrar uma regra para $A(n)$ a partir de $A(n-1)$. $A(n)$ pode ser obtido ao multiplicar o termo anterior por 3.

Assim a definicão recursiva é:

$$A(n) = \begin{cases} A(0) = 50.000 \\ A(n) = 3 \cdot A(n-1), \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$$

b) No início do intervalo $n=3$:

$A(3) = 3 \cdot A(2) = 3 \cdot 3 \cdot A(1) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot A(0) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 50.000 = 1.350.000$

Total

6,8

Guilherme A. A. U. Nascimento 20.1.4007 BCC101 - Turma 21 Prova 3

Questão 2:

$x = 2$: $2 + 3 = 5$; $2 \cdot 2 = 4$

$x = 5$: $5 + 3 = 8$; $2 \cdot 5 = 10$

$x = 4$: $4 + 3 = \underline{7}$; $2 \cdot 4 = 8$

$x = 8$: $8 + 3 = 11$; $2 \cdot 8 = 16$

$x = 10$: $10 + 3 = 13$; $2 \cdot 10 = \underline{20}$

$x = 7$: $7 + 3 = 10$; $2 \cdot 7 = \underline{14}$

$x = 11$: $11 + 3 = 14$; $2 \cdot 11 = 22$

$x = 16$: $16 + 3 = \underline{19}$; $2 \cdot 16 = \underline{32}$

$x = 13$: $13 + 3 = 16$; $2 \cdot 13 = 26$

$x = 22$: $22 + 3 = \underline{25}$; $2 \cdot 22 = 44$

Os seguintes números pertencem a T:

7, 14, 19, 20, 25, 32

2,0

Guilherme A. A. N. Nascimento 20.1.4007 BCC 101 - Turma 21 Prova 3

Questão 3:

a) $a_n = n(n+1)$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 0 | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42 |

2,6

Passo Base: $n=0$ $f(0)=0$

Passo Recursivo: $f(n)$ pode ser obtido somando $2n$ ao termo anterior

Assim, a definição recursiva é: $f(n) = \begin{cases} f(0)=0 \\ f(n) = 2n + f(n-1), \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$

Prova por indução fraca:

1. Passo Base: $n=0$ $a_0 = 0$ $f(0)=0$ Logo, $P(0)$ é verdadeira.
2. Hipótese Indutiva: suponha para algum $k \in \mathbb{N}$ que $f(k) = k(k+1)$
3. Passo Indutivo: provar que $f(k+1) = (k+1)(k+1+1) = (k+1)(k+2)$

$$f(k+1) = 2(k+1) + f(k+1-1) \quad \text{pela definição de } f(n)$$
$$= 2(k+1) + f(k)$$
$$= 2(k+1) + k(k+1) \quad \text{pela H. I.}$$
$$= (k+1)(2+k) = (k+1)(k+2)$$

Portanto, a função recursiva $f(n)$ é igual a $a_n$.

c.q.d.

b) 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22...

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | 16 | 22 |

Passo Base: $n=0$ $f(0)=1$

Passo Recursivo: $f(n)$ pode ser escrito pela soma de $n$ ao termo anterior.

Assim, a definição da função recursiva é: $f(n) = \begin{cases} f(0)=1 \\ f(n) = n + f(n-1), \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$

Guilherme A. A. M. Nascimento 20.1.4007 BCC 101 - Turma 22 Prova 3

Questão 4:

Prove que, para todo número natural $n \geq 5$, $2^n > n^2$

Prova por indução forte:

Passo Base: $n = 5$ $2^5 > 5^2 \Rightarrow 32 > 25$, Logo, $P(5)$ é verdadeira.

Hipótese Indutiva: suponha que para um $r \in \mathbb{N}$, com $5 \leq r \leq K$, $P(r)$ é verdadeira

Passo Indutivo: provar $P(K+1)$

$2^{K+1} > (K+1)^2$

$2^K \cdot 2 > K^2 + 2K + 1$ pelo H. I. $2^K > K^2$, então $2^K \cdot 2 > K^2$ e

$K^2 + 2K + 1 > K^2$

Como $2^{K+1} > K^2$ e $2^{K+1} > K^2 + 2K + 1$ e $K^2 + 2K + 1 > K^2$, temos que $2^{K+1} > K^2 + 2K + 1 > K^2$, portanto $2^{K+1} > K^2$.

c. q. d.

você está usando o que precisamos provar.

Partir de:

$2^{K+1} = 2^K \cdot 2 > 2K^2$ (pela H.I) (I)

$2K^2 = K^2 + K^2 > K^2 + 2K + 1$ (pois (II)

$K^2 > 2K+1$, $\forall\, K \geq 5$.)

Então: de (I) e (II)

$2^{K+1} > 2K^2 > K^2 + 2K + 1$.

∴

Guilherme A. R. D. Nascimento 20.1.4007 BCC 101 - Turma 21 Prova 3

**Questão 5:** $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Prova por indução forte:

Passo Base: $n = 3$ $F(3) = 2$ $a^{3-2} = a^1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61$ $2 > 1{,}61$ Logo, $P(3)$ é verdadeiro.

Hipótese Indutiva: para algum $r \in \mathbb{N}$, com $3 \leq r \leq k$, $P(r)$ é verdadeiro.
$F(r) > a^{r-2}$

Passo Indutivo: provar $P(k+1)$

$$F(k+1) > a^{(k+1)-2} = a^{k-1}$$

$$F(k) + F(k-1) > a^{k-2} \cdot a$$

pela H.I. $F(k) > a^{k-2}$, então
$F(k) + F(k-1) > a^{k-2}$

$F(k) + F(k-1) > a$

Como $F(k) + F(k-1) > a^{k-2}$ e $F(k) + F(k-1) > a$, então $F(k) + F(k-1) > a^{k-2} \cdot a$, portanto $F(k+1) > a^{k-1}$.

c.q.d.

8

Guilherme A. A. V. Nascimento 20.1.4007 BCC101 - Turma 21 Prova 3

18

Questão 6:

Prova por indução fraca:

Passo Base: $n=1$ $\sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 1(1+1) = 2$ $\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{2\cdot 3}{3} = 2$ Logo, $P(1)$ é verdadeiro

Hipótese Indutiva: para algum $K \in \mathbb{N}$, $P(K)$ é verdadeiro.

Passo Indutivo: provar $P(K+1)$

$$\sum_{i=1}^{K+1} i(i+1) = \frac{(K+1)(K+2)(K+3)}{3}$$

É o que você quer provar

$$(K+1)(K+2) + \sum_{i=1}^{K} i(i+1) = \cancel{\frac{(K+1)(K+2)(K+3)}{3}}$$

Não se deve usar a conclusão.

$$(K+1)(K+2) + \frac{K(K+1)(K+2)}{3} = \cancel{\frac{(K+1)(K+2)(K+3)}{3}}$$ pela H. I.

$$\frac{3(K+1)(K+2) + K(K+1)(K+2)}{3} = \cancel{\frac{(K+1)(K+2)(K+3)}{3}}$$

$$\frac{(K+1)(K+2)(K+3)}{3} = \cancel{\frac{(K+1)(K+2)(K+3)}{3}}$$

Logo, $P(K+1)$ é verdadeiro.

Portanto, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$.

c.q.d.

Guilherme R. A. M. Nascimento 20.1.4007 BCC101 - Turma 21 Prova 3

Questão 1:

1,4

a)

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| popul. | 50.000 | 150000 | 450000 | 1350000 | 3050000 |
| hora | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |

Caso Base: $n=0$ $A(0) = 50.000$

Caso Recursivo: encontrar uma regra para $A(n)$ a partir de $A(n-1)$. $A(n)$ pode ser obtido ao multiplicar o termo anterior por 3.

Assim a definição recursiva é:

$$A(n) = \begin{cases} A(0) = 50.000 \\ A(n) = 3 \cdot A(n-1), \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$$

b) No início do intervalo $n=3$:

$$A(3) = 3 \cdot A(2) = 3 \cdot 3 \cdot A(1) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot A(0) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 50.000 = 1.350.000$$