Guilherme A. A. H. Nascimento 20.1.4007 BCC101 - Turma 21 Semana 12

Exemplo 20.14: Determine uma definição recursiva para a Progressão Geométrica: $S(n) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = \sum_{i=0}^{n} 2^i$

Considere alguns termos da sequência:

$S(0) = 2^0 = 1$

$S(1) = 2^0 + 2^1 = S(0) + 2^1$

$S(2) = 2^0 + 2^1 + 2^2 = S(1) + 2^2$

$S(3) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = S(2) + 2^3$

$\vdots$

$S(n) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = S(n-1) + 2^n$

1. Passo Base: primeiro termo é $S(0) = 1$.

2. Passo Recursivo: encontrar uma regra para $S(n)$ a partir de $S(n-1)$. $S(n)$ pode ser obtido somando 2^n ao termo anterior.

Assim, a definição recursiva da progressão geométrica é

$$f(n) = \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n) = 2^n + f(n-1), \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$$

Prova por indução fraca:

1. Passo Base: $n = 0$ $f(0) = 1$ $S(0) = 2^0 = 1$ Logo, $P(0)$ é verdadeira.

2. Hipótese Indutiva: suponha para algum $K \in \mathbb{N}$ que $f(K) = \sum_{i=0}^{K} 2^i$

3. Passo Indutivo: provar $f(K+1) = \sum_{i=1}^{K+1} 2^i$

$$\begin{aligned} f(K+1) &= 2^{K+1} + f(K+1-1) && \text{pela definição de } f(n) \\ &= 2^{K+1} + f(K) \\ &= 2^{K+1} + \sum_{i=0}^{K} 2^i && \text{pela H.I.} \\ &= \sum_{i=0}^{K+1} 2^i \end{aligned}$$

Portantato, a função $S(n) = \sum_{i=0}^{n} 2^i$ é igual a função recursiva $f(n)$.

c.q.d.

Guilherme A. A. W. Nascimento 20.1.4007 BCC101 - Turma 21 Semana 12

Exemplo 20.15: Seja $S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ a soma dos n primeiros quadrados perfeitos. Encontre uma relação de recorrência para $S(n)$.

$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2$

Considere alguns termos da sequência:

$S(1) = 1^2$

$S(2) = 1^2 + 2^2 = S(1) + 2^2$

$S(3) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = S(2) + 3^2$

$S(4) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = S(3) + 4^2$

$\vdots$

$S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = S(n-1) + n^2$

1. Passo Base: primeiro termo é $S(1) = 1$
2. Passo Recursivo: encontrar uma regra para $S(n)$ a partir de $S(n-1)$.
   $S(n)$ pode ser obtido somando n^2 ao termo anterior.

Assim, a definição recursiva da sequência é

$$f(n) = \begin{cases} f(1) = 1^2 \\ f(n) = n^2 + f(n-1), \text{ para } n \geq 2 \end{cases}$$

Prova por indução fraca:

1. Passo Base: $n = 1$ $f(1) = 1^2$ $S(1) = 1^2$ Logo, $P(1)$ é verdadeiro
2. Hipótese Indutiva: suponha para algum $K \in \mathbb{N}$ que $f(K) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots K^2 = \sum_{i=1}^{K} i^2$
3. Passo Indutivo: provar $f(K+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (K+1)^2 = \sum_{i=1}^{K+1} i^2$

$$\begin{aligned} f(K+1) &= (K+1)^2 + f(K+1-1) && \text{pela definição de } f(n) \\ &= (K+1)^2 + f(K) \\ &= (K+1)^2 + \sum_{i=1}^{K} i^2 && \text{pela H. I.} \\ &= \sum_{i=1}^{K+1} i^2 \end{aligned}$$

Portanto, a função $S(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2$ é igual a função recursiva $f(n)$.

c. q. d.