Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Análise 2
Lista 1/01 – 2º/2021

Atenção: Essa lista deve ser entregue via Moodle, dentro do prazo estipulado. Para as atividades da lista que demandam alguma ação no fórum *talkyard*, você deve colocar, aqui, a *URL* correspondente.

Dá pra escrever em LaTeX, lá no fórum. Veja o post *Como utilizar símbolos matemáticos com LaTeX.*

Exercício 1. Temos um fórum de discussão no endereço

`https://analise2.talkyard.net/`.

Se você ainda não se cadastrou, se cadastre no fórum. E então, escolha um exercício desta lista e coloque **a pergunta do exercício** lá no fórum. Escreva aqui a *URL* do seu post.
Observação: Verifique se já não postaram o exercício que você está pensando em postar. Se já o fizeram, escolha outro exercício.

Exercício 2. Escolha um exercício desta lista que alguém colocou no fórum talkyard, e responda-a. Escreva aqui a *URL* da sua resposta.

Exercício 3. Os seus colegas são muito tímidos, e ficam com vergonha de fazer perguntas lá no fórum. Você vai ajudá-los a se sentirem mais confortáveis, realizando a seguinte tarefa:

> Faça um post no fórum fazendo uma pergunta bastante simples, porém interessante, sobre o conteúdo dessa semana.

Escreva aqui a *URL* do seu post.
Observação: Fique à vontade pra ajudar seus colegas com as dúvidas que eles colocarem no fórum.

Exercício 4. Ao definir o conceito de *norma* — na aula S01A01 `https://youtu.be/PZwPRjS5eCY` —, o professor o fez de uma maneira meio diferente. Escreva aqui:

1. A definição usual de *espaço normado.*
2. A definição de *espaço métrico.*
3. A definição de *norma* que o professor utilizou na aula S01A01.

E então, demonstre que ambas as definições de *norma* são equivalentes.

Exercício 5. Escreva a definição de *conjunto sequencialmente fechado* em um espaço *normado* (métrico/topológico). Mostre que em um espaço *normado* (métrico), um conjunto é *sequencialmente fechado* quando seu complementar é um conjunto aberto.

Exercício 6. Dizemos que uma função

$$f : E \to F,$$

entre espaços *normados* (métricos/topológicos) é *sequencialmente contínua* no ponto $a \in E$ quando

$$x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a).$$

Defina *continuidade* o ponto $a \in E$, para uma função

$$f : E \to F,$$

entre espaços *normados* (métricos/topológicos). Mostre que, em espaços normados (métricos), ambos os conceitos são equivalentes.

Exercício 7. Defina *continuidade* o ponto $a \in E$, para uma função

$$f : E \to F,$$

entre espaços *normados* (métricos/topológicos). Então, mostre que f é contínua em todo ponto de E exatamete quando a imagem inversa de todo *aberto* de F é um aberto de E.

Exercício 8. Mostre que em um espaço normado (métrico),

$$\left.\begin{array}{r} x_n \to a \\ x_n \to b \end{array}\right\} \Rightarrow a = b.$$

Exercício 9. Mostre que uma transformação linear

$$T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$$

é contínua se, e somente se, para todo funcional linear

$$\varphi : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R},$$

$\varphi \circ T$ for contínua.

Exercício 10. Mostre, de umas duas ou três maneiras diferentes, utilizando resultados de outros exercícios, ou utilizando teoremas quaisquer, que em $\mathbb{R}^p$, com uma norma qualquer $\|\cdot\|$, uma sequência $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^p)$ converge para $a = (a^1, \dots, a^0)$ se, e somente se, para todo $j = 1, \dots, p$,

$$x_n^j \to a^j.$$

Observação: Não precisa fazer muitos *"detalhes"*.

Análise 2
Lista 1/01 – 2º/2021

Exercício 11. Seja E um *espaço vetorial* com duas *normas equivalentes*, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$. Mostre que se E é *completo* em uma dessas normas, então é *completo* na outra.

Exercício 12. Dadas duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, mostre que ambas as condições a seguir são equivalentes:

1. Existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que
$$a\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq b\|\cdot\|_2.$$
2. $x_n \xrightarrow{1} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{2} x$.

Exercício 13. Dadas duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, mostre que ambas as condições a seguir são equivalentes:

1. Existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que
$$a\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq b\|\cdot\|_2.$$
2. Um conjunto é aberto na norma $\|\cdot\|_1$, se, e somete se, é aberto na norma $\|\cdot\|_2$.

Exercício 14. Duas normas são equivalentes quando geram a mesma topologia: os mesmos abertos… as mesmas sequências convergentes (convergindo para os mesmos pontos)…

Podemos fazer o mesmo com os espaços métricos:

> Duas métricas d_1 e d_2 em um conjunto X são *topologicamente equivalentes* quando
> $$x_n \xrightarrow{1} a \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{2} a.$$

No entanto, mesmo que as duas métricas sejam equivalentes, pode ser que em uma X seja completo, e na outra, não.

Considere o conjunto $X = (0, 1]$ com sua métrica usual d_1, e também com a métrica
$$\begin{array}{rccc} d_2: & X \times X & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|. \end{array}$$

Mostre que em uma delas X é completo, e na outra, não.

Exercício 15. Mostre que se E e F são *espaços normados* de dimensão finita, então $T_n \to T$ em $\mathscr{L}(E : F)$ se, e somente se, para todo $x \in E$,

$$T_n(x) \to T(x).$$

Exercício 16. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. E seja

$$\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_p$$

uma base de E. Mostre que, em uma *norma* **qualquer**,

$$\vec{v}_n \to \vec{v} \iff \vec{v}_n \cdot \vec{b}_j \to \vec{v} \cdot \vec{b}_j \quad (\forall j = 1, \ldots, p).$$