LISTA DE EXERCÍCIOS DE TEORIA DOS NÚMEROS

HEMAR GODINHO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

1. Congruências módulo m

(1) ~~Mostre que $2^{23} \equiv 1 \pmod{47}$~~.
(2) ~~Encontre o resto da divisão de 7^{34} por 51.~~
(3) ~~Encontre um SCR módulo 17 composto exclusivamente de múltiplos de 3~~.
(4) ~~Encontre um SRR módulo 9 composto somente de primos~~.
(5) ~~Mostre que para todo $n \in \mathbb{Z}$ tem-se que $5n^3 + 7n^5 \equiv 0 \pmod{12}$~~.
(6) ~~Mostre que $3n^2 - 1$ nunca é um quadrado para qualquer inteiro n~~.
(7) ~~Mostre que se $n > 4$ então $1! + 2! + 3! + \cdots + n! \equiv 9 \pmod{12}$~~.
(8) ~~Prove que 12 divide $n^7 - n$ para qualquer inteiro n~~.
(9) ~~Mostre que $n^{9^9} + 4 \not\equiv 0 \pmod{37}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.~~
(10) ~~Mostre que $4^{2n+1} + 3^{n+2} \equiv 0 \pmod{13}$ para todo $n \in \mathbb{N}$~~.
(11) ~~Determine o último dígito da representação decimal de 2^{400}~~.
(12) ~~Seja p um primo e $\{r_1, \cdots, r_{p-1}\}$ um SRR módulo p. Mostre que~~

$$\cancel{r_1 \cdot r_2 \cdots r_{p-1} \equiv -1 \pmod{p}}.$$

(13) ~~Mostre que se p é primo ímpar então $2 \cdot (p-3)! \equiv -1 \pmod{p}$~~.
(14) ~~Seja p um primo. Mostre que~~

$$\cancel{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv -1 \pmod{p}, \quad \text{se } p \equiv 1 \pmod{4}}$$

$$\cancel{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv 1 \pmod{p}, \quad \text{se } p \equiv 3 \pmod{4}}$$

(15) ~~Encontre todos os valores de $n \in \mathbb{N}$ tais que $\phi(n) = 24$~~.
(16) ~~Encontre todos os valores de $n \in \mathbb{N}$ tais que $3 \nmid \phi(n)$~~.
(17) ~~Mostre que~~

$$\cancel{\phi(2n) = \begin{cases} \phi(n) & \text{se } n \text{ é par} \\ 2\phi(n) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}}$$

(18) ~~Mostre que existen infinitos números $n \in \mathbb{N}$ tais que $10/\phi(n)$~~.
(19) ~~Resolva as seguintes congruências~~:
   ~~(a) $23x \equiv 7 \pmod{19}$;~~
   ~~(b) $7x \equiv 5 \pmod{36}$;~~
   ~~(c) $25x \equiv 15 \pmod{120}$.~~

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília-DF, Brasil