

LISTA DE EXERCÍCIOS DE TEORIA DOS NÚMEROS

HEMAR GODINHO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

1. DIVISIBILIDADE, MDC, MMC, EQUAÇÃO DIOFANTINA LINEAR

- ~~(1) Mostre que $6/(m^3 - m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.~~
~~(2) Calcule o $mme(a, b)$ para os pares a, b abaixo:~~
$$a = 412, b = 32, \quad a = 780, b = 150, \quad a = 10672, b = 4147.$$

~~(3) Encontre todos os inteiros n tais que $\frac{2n-1}{n+7}$ é um inteiro.~~
~~(4) Mostre que $mde(n! + 1, (n+1)! + 1) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.~~
~~(5) Mostre que em toda lista com k inteiros consecutivos sempre existirá um elemento divisível por k .~~
~~(6) Mostre que o produto de k inteiros consecutivos é divisível por $k!$.~~
~~(7) Estenda a definição de MDC para definir $mde(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Mostre que $mde(a_1, a_2, \dots, a_n) = mde(a_1, a_2, \dots, mde(a_{n-1}, a_n))$.~~
~~(8) Mostre que existem $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$ tais que $mde(a_1, a_2, \dots, a_n) = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n$.~~
~~(9) Mostre que não existem três primos ímpares consecutivos além de 3, 5, 7.~~
~~(10) Seja $Q_n = n! + 1$, com $n \in \mathbb{N}$. Mostre que Q_n tem um divisor primo maior que n . Baseado nesse fato, conclua que existem infinitos primos.~~
~~(11) Determine todos os primos p tais que $17p + 1$ é um quadrado.~~
~~(12) Encontre um critério de divisibilidade por 8 e 16.~~
~~(13) Seja $n \in \mathbb{N}$ e escreva n na base 10 como~~
$$n = a_k \cdot 10^k + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

~~com $a_0, a_1, \dots, a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Seja $I = \{a_j \mid j \text{ é ímpar}\}$ e $P = \{a_j \mid j \text{ é par}\}$. Mostre que $11/n$ se, e somente se, $11/(|I| - |P|)$, com $|M|$ igual ao número de elementos do conjunto M .~~
~~(14) Determine todos os pares $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $mde(a, b) = 10$ e $mme(a, b) = 100$.~~
~~(15) Encontre um valor de $n \in \mathbb{Z}$ tal que a equação Diofantina $10x + 11y = n$ tenha exatamente 9 soluções com $x, y \in \mathbb{N}$.~~

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, BRASÍLIA-DF, BRASIL