

Equação do calor e o problema da adega

Caio Tomás de Paula¹

¹Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasil.

Relatório entregue como parte do trabalho final do curso de Introdução a Métodos Computacionais em Equações Diferenciais Parciais (IMCEDP) do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMAT), ministrado pelo prof. Dr. Yuri Dumaesq Sobral no segundo semestre letivo de 2023 da Universidade de Brasília. O objetivo do trabalho foi resolver, numericamente, a equação do calor. Foi utilizada [?] como referência principal para o trabalho, além das notas de aula do curso.

I. INTRODUÇÃO

Estamos interessados em estudar a variação da temperatura do solo terrestre a uma dada profundidade x no instante t . Desconsiderando a curvatura da terra e a variação diária de temperatura da superfície, podemos modelar a distribuição de temperatura $u(x, t)$ à profundidade x no tempo t por uma equação do calor unidimensional:

$$u_t = \kappa u_{xx}.$$

A difusividade térmica do solo terrestre será considerada $\kappa = 6.3\text{m}^2/\text{ano}$. Note que estamos desconsiderando o calor oriundo do núcleo da Terra, já que não há forçamento na equação. Vamos assumir que $u \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. Vamos também assumir que a temperatura $f(t)$ na superfície ($x = 0$) assume apenas dois valores: uma temperatura de “verão” durante metade do ano e uma temperatura de “inverno” durante a outra metade. Esse padrão se repete todo ano, i.e., a temperatura é periódica em $x = 0$ com período de 1 ano.

Em símbolos,

$$f(t) = \begin{cases} T_s, & 0 \leq t < 1/2 \\ T_w, & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

onde T_s denota a temperatura no verão e T_w denota a temperatura no inverno, com t em anos.

Vamos tomar a condição inicial $u(x, 0) = f(t)e^{-q_1 x}$, com $q_1 = 0.71\text{m}^{-1}$. Por fim, vamos tomar $u(L, t) = 0$, com L suficientemente longo para que essa condição seja válida.

Em resumo, queremos resolver o PVIC

$$\begin{cases} u_t = \kappa u_{xx}, & 0 \leq x \leq L, t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(t)e^{-q_1 x} \\ u(0, t) = f(t) \\ u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Queremos resolver este problema numericamente e responder a algumas perguntas. Mais especificamente, vamos resolver este problema usando tanto o método de Euler explícito (e mostrar sua ordem) quanto o método de Crank-Nicolson, encontrar a profundidade ideal para uma adega de vinhos e resolver uma variação do problema com difusividade variável.

Antes de partir para a solução numérica, vamos fazer algumas considerações sobre a solução analítica do problema. Primeiro, note que podemos escrever

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T}, \quad (1.1)$$

com $C_n \in \mathbb{C}$ tais que $\overline{C_n} = C_{-n}$ e $T = 1$ ano. É possível mostrar¹ que, em um tempo t , uma substância se difunde aproximadamente $\sqrt{\kappa t}$ unidades. Sendo assim, na escala de tempo de interesse (1 ano), temos

$$\sqrt{\kappa T} = \sqrt{6.3} \approx 2.5 \text{ m}. \quad (1.2)$$

Vamos tomar o *ansatz*

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \omega_n(x) e^{2\pi i n t / T}, \quad (1.3)$$

com $C_n \in \mathbb{C}$ tais que $\overline{C_n} = C_{-n}$, de modo que u é real. Vamos impor as seguintes condições:

- (i) cada uma das parcelas satisfaz a equação do calor
- (ii) $\omega_n(0) \equiv 1$, de modo que a representação de $f(t)$ seja recuperada
- (iii) $\omega_n(x)$ é limitado e tende a 0 quando $x \rightarrow \infty$ ($n \neq 0$), uma vez que a temperatura a profundidades muito grandes não é sensível a variações de temperatura na superfície.

A condição (i) nos dá

$$\frac{d^2 \omega_n}{dx^2} = p_n^2 \omega_n, \quad p_n^2 = \frac{2\pi i n}{\kappa T}. \quad (1.4)$$

Consequentemente,

$$p_n = \pm(1 \pm i)q_n, \quad \text{com } q_n = \sqrt{\frac{|n|\pi}{\kappa T}} > 0 \quad (1.5)$$

e o sinal \pm depende do sinal de n . Desta forma, a solução geral da EDO de ω_n é dada por

$$\omega_n(x) = A_n e^{(1 \pm i)q_n x} + B_n e^{-(1 \pm i)q_n x}. \quad (1.6)$$

Da condição (iii) segue que $A_n \equiv 0$ e da condição (ii) segue que $B_n \equiv 1$. Portanto, obtemos

$$\omega_n(x) = e^{-(1 \pm i)q_n x} \quad (1.7)$$

e, assim,

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-(1 \pm i)q_n x} e^{2\pi i n t / T}. \quad (1.8)$$

¹ [?, p. 129]

Escrevendo $C_n = |C_n|e^{-i\gamma_n}$, segue que

$$u(x, t) = C_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| e^{-q_n x} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \gamma_n - q_n x\right). \quad (1.9)$$

Vamos interpretar esta solução. Note que o termo do cosseno representa uma onda de frequência $2\pi n/T$ e número de onda q_n . Por conta disto, a n -ésima “onda parcial” se propaga com velocidade

$$\frac{2\pi n}{q_n T} = \sqrt{\frac{4\pi\kappa|n|}{T}}. \quad (1.10)$$

Como há um amortecimento exponencial na direção de propagação e este amortecimento cresce com $\sqrt{|n|}$, segue que a contribuição mais importante para a solução vem do termo com $n = 1$. Para os valores numéricos que estamos considerando, segue que

$$q_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi\kappa}{T}} \approx 0.71 \text{m}^{-1}. \quad (1.11)$$

Agora, note que o ponto x_1 tal que $q_1 x_1 = \pi$ é tal que a temperatura $u(x_1, t)$ é oposta em fase à temperatura $u(0, t)$. Dito de outro modo, $x_1 = \pi/q_1 \approx 4.4\text{m}$ é a profundidade na qual a temperatura do solo tem fase oposta à temperatura da superfície. Isto significa que se na superfície a temperatura é de verão então à profundidade x_1 a temperatura é de inverno. Além disso, a variação

de temperatura é $e^{-\pi} \approx 4\%$ da variação na superfície. Isto torna esta profundidade ideal para uma adega de vinhos!

II. MÉTODOS NUMÉRICOS

Começamos resolvendo a equação com o método de Euler explícito, que converge para $\kappa\mu \leq 1/2$. Por conta desta restrição ao número de Courant, não podemos escolher Δt e Δx de forma displicente.

Também utilizamos o método de Crank-Nicolson para resolver o problema. Este método, dado por

$$-\alpha u_{\ell+1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_{\ell}^{n+1} - \alpha u_{\ell-1}^{n+1} = \alpha u_{\ell+1}^n + (1-2\alpha)u_{\ell}^n + \alpha u_{\ell-1}^n \quad (2.1)$$

com $\alpha = \kappa\mu/2$ é implícito, incondicionalmente estável e consistente (logo convergente pelo Teorema de Equivalência de Lax). Consequentemente, temos maior liberdade na escolha de Δt e Δx , o que torna este método mais indicado para o cômputo da solução por grandes intervalos de tempo. A implicitude do método nos obriga a resolver um sistema linear a cada iteração. Para tanto, usamos o [algoritmo da matriz tridiagonal](#) (ou de Thomas) para resolver o sistema.

III. CÓDIGOS UTILIZADOS

Este projeto pode ser encontrado [neste link](#), incluindo os códigos utilizados para o cômputo da solução e o código-fonte deste documento.

[?]