Equação do calor e o problema da adega

Caio Tomás de Paula[1]

[1] *Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasil.*

Relatório entregue como parte do trabalho final do curso de Introdução a Métodos Computacionais em Equações Diferenciais Parciais (IMCEDP) do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMAT), ministrado pelo prof. Dr. Yuri Dumaresq Sobral no segundo semestre letivo de 2023 da Universidade de Brasília. O objetivo do trabalho foi resolver, numericamente, a equação do calor. Foi utilizada [?] como referência principal para o trabalho, além das notas de aula do curso.

I. INTRODUÇÃO

Estamos interessados em estudar a variação da temperatura do solo terrestre a uma dada profundidade x no instante t. Desconsiderando a curvatura da terra e a variação diária de temperatura da superfície, podemos modelar a distribuição de temperatura $u(x, t)$ à profundidade x no tempo t por uma equação do calor unidimensional:

$$u_t = \kappa u_{xx}.$$

A difusividade térmica do solo terrestre será considerada $\kappa = 6.3\text{m}^2/\text{ano}$. Note que estamos desconsiderando o calor oriundo do núcleo da Terra, já que não há forçamento na equação. Vamos assumir que $u \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Vamos também assumir que a temperatura $f(t)$ na superfície ($x = 0$) assume apenas dois valores: uma temperatura de "verão" durante metade do ano e uma temperatura de "inverno" durante a outra metade. Esse padrão se repete todo ano, i.e., a temperatura é periódica em $x = 0$ com período de 1 ano.

Em símbolos,

$$f(t) = \begin{cases} T_s, \ 0 \leqslant t < 1/2 \\ T_w, \ 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

onde T_s denota a temperatura no verão e T_w denota a temperatura no inverno, com t em anos.

Vamos tomar a condição inicial $u(x, 0) = f(t)\mathrm{e}^{-q_1 x}$, com $q_1 = 0.71\text{m}^{-1}$. Por fim, vamos tomar $u(L, t) = 0$, com L suficientemente longo para que essa condição seja válida.

Em resumo, queremos resolver o PVIC

$$\begin{cases} u_t = \kappa u_{xx}, \ 0 \leqslant x \leqslant L, t \geqslant 0 \\ u(x, 0) = f(t)\mathrm{e}^{-q_1 x} \\ u(0, t) = f(t) \\ u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Queremos resolver este problema numericamente e responder a algumas perguntas. Mais especificamente, vamos resolver este problema usando tanto o método de Euler explícito (e mostrar sua ordem) quanto o método de Crank-Nicolson, encontrar a profundidade ideal para uma adega de vinhos e resolver uma variação do problema com difusividade variável.

II. UMA ANÁLISE TEÓRICA

Antes de partir para a solução numérica, vamos fazer algumas considerações sobre a solução analítica do problema. Primeiro, note que podemos escrever

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi i n t/T}, \tag{2.1}$$

com $C_n \in \mathbb{C}$ tais que $\overline{C_n} = C_{-n}$ e $T = 1$ ano. É possível mostrar[1] que, em um tempo t, uma substância se difunde aproximadamente $\sqrt{\kappa t}$ unidades. Sendo assim, na escala de tempo de interesse (1 ano), temos

$$\sqrt{\kappa T} = \sqrt{6.3} \approx 2.5 \text{ m}. \tag{2.2}$$

Vamos tomar o *ansatz*

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \omega_n(x) \mathrm{e}^{2\pi i n t/T}, \tag{2.3}$$

com $C_n \in \mathbb{C}$ tais que $\overline{C_n} = C_{-n}$, de modo que u é real. Vamos impor as seguintes condições:

(i) cada uma das parcelas satisfaz a equação do calor

(i) $\omega_n(0) \equiv 1$, de modo que a representação de $f(t)$ seja recuperada

(i) $\omega_n(x)$ é limitado e tende a 0 quando $x \to \infty$ ($n \neq 0$), uma vez que a temperatura a profundidades muito grandes não é sensível a variações de temperatura na superfície.

A condição (i) nos dá

$$\frac{\mathrm{d}^2\omega_n}{\mathrm{d}x^2} = p_n^2 \omega_n, \ p_n^2 = \frac{2\pi i n}{\kappa T}. \tag{2.4}$$

Consequentemente,

$$p_n = \pm(1 \pm i) q_n, \ \text{ com } q_n = \sqrt{\frac{|n|\pi}{\kappa T}} > 0 \tag{2.5}$$

e o sinal $\pm$ depende do sinal de n. Desta forma, a solução geral da EDO de ω_n é dada por

$$\omega_n(x) = A_n \mathrm{e}^{(1\pm i) q_n x} + B_n \mathrm{e}^{-(1\pm i) q_n x}. \tag{2.6}$$

---

[1] [? , p. 129]

Da condição (iii) segue que $A_n \equiv 0$ e da condição (ii) segue que $B_n \equiv 1$. Portanto, obtemos

$$\omega_n(x) = \mathrm{e}^{-(1\pm i)q_n x} \tag{2.7}$$

e, assim,

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-(1\pm i)q_n x} \mathrm{e}^{2\pi i n t/T}. \tag{2.8}$$

Escrevendo $C_n = |C_n|\mathrm{e}^{-i\gamma_n}$, segue que

$$u(x,t) = C_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|\mathrm{e}^{-q_n x}\cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \gamma_n - q_n x\right). \tag{2.9}$$

Vamos interpretar esta solução. Note que o termo do cosseno representa uma onda de frequência $2\pi n/T$ e número de onda q_n. Por conta disto, a n-ésima "onda parcial" se propaga com velocidade

$$\frac{2\pi n}{q_n T} = \sqrt{\frac{4\pi\kappa|n|}{T}}. \tag{2.10}$$

Como há um amortecimento exponencial na direção de propagação e este amortecimento cresce com $\sqrt{|n|}$, segue que a contribuição mais importante para a solução vem do termo com $n = 1$. Para os valores numéricos que estamos considerando, segue que

$$q_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\pi\kappa}{T}} \approx 0.71\mathrm{m}^{-1}. \tag{2.11}$$

Agora, note que o ponto x_1 tal que $q_1 x_1 = \pi$ é tal que a temperatura $u(x_1, t)$ é oposta em fase à temperatura $u(0,t)$. Dito de outro modo, $x_1 = \pi/q_1 \approx 4.4\mathrm{m}$ é a profundidade na qual a temperatura do solo tem fase oposta à temperatura da superfície. Isto significa que se na superfície a temperatura é de verão então à profundidade x_1 a temperatura é de inverno. Além disso, a variação de temperatura é $\mathrm{e}^{-\pi} \approx 4\%$ da variação na superfície. Isto torna esta profundidade ideal para uma adega de vinhos!

III. MÉTODOS NUMÉRICOS

Começamos resolvendo a equação com o método de Euler explícito,

$$u_\ell^{n+1} = u_\ell^n + \mu(u_{\ell+1}^n - 2u_\ell^n + u_{\ell-1}^n), \tag{3.1}$$

que converge para $\kappa\mu \leqslant 1/2$. Por conta desta restrição ao número de Courant, não podemos escolher Δt e Δx de forma displicente.

Também utilizamos o método de Crank-Nicolson para resolver o problema. Este método, dado por

$$-\alpha u_{\ell+1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_\ell^{n+1} - \alpha u_{\ell-1}^{n+1} = \alpha u_{\ell+1}^n + (1-2\alpha)u_\ell^n + \alpha u_{\ell-1}^n \tag{3.2}$$

com $\alpha = \kappa\mu/2$ é implícito, incondicionalmente estável e consistente (logo convergente pelo Teorema de Equivalência de Lax). Consequentemente, temos maior liberdade na escolha de Δt e Δx, o que torna este método mais indicado para o cômputo da solução por grandes intervalos de tempo. A implicitude do método nos obriga a resolver um sistema linear a cada iteração. Para tanto, usamos o algoritmo da matriz tridiagonal (ou de Thomas) para resolver o sistema.

IV. RESULTADOS

blablabla

figura da solução em diferentes timesteps com Euler explícito (linkar animação)

plot da ordem

figura da solução em diferentes timesteps com Crank-Nicolson (linkar animação)

V. CÓDIGOS UTILIZADOS

Este projeto pode ser encontrado neste link, incluindo os códigos utilizados para o cômputo da solução e o código-fonte deste documento.