Equação do calor e o problema da adega

Caio Tomás de Paula[1]

[1] *Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasil.*

Relatório entregue como parte do trabalho final do curso de Introdução a Métodos Computacionais em Equações Diferenciais Parciais (IMCEDP) do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMAT), ministrado pelo prof. Dr. Yuri Dumaresq Sobral no segundo semestre letivo de 2023 da Universidade de Brasília. O objetivo do trabalho foi resolver, numericamente, a equação do calor. Foi utilizada [?] como referência principal para o trabalho, além das notas de aula do curso.

I. INTRODUÇÃO

Estamos interessados em estudar a variação da temperatura do solo terrestre a uma dada profundidade x no instante t. Desconsiderando a curvatura da terra e a variação diária de temperatura da superfície, podemos modelar a distribuição de temperatura $u(x,t)$ à profundidade x no tempo t por uma equação do calor unidimensional:

$$u_t = \kappa u_{xx}.$$

A difusividade térmica do solo terrestre será considerada $\kappa = 6.3\text{m}^2/\text{ano}$. Note que estamos desconsiderando o calor oriundo do núcleo da Terra, já que não há forçamento na equação. Vamos assumir que $u \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Vamos também assumir que a temperatura $f(t)$ na superfície ($x = 0$) assume apenas dois valores: uma temperatura de "verão" durante metade do ano e uma temperatura de "inverno" durante a outra metade. Esse padrão se repete todo ano, i.e., a temperatura é periódica em $x = 0$ com período de 1 ano.

Em símbolos,

$$f(t) = \begin{cases} T_s, \ 0 \leqslant t < 1/2 \\ T_w, \ 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

onde T_s denota a temperatura no verão e T_w denota a temperatura no inverno, com t em anos.

Vamos tomar a condição inicial $u(x,0) = f(t)\mathrm{e}^{-q_1 x}$, com $q_1 = 0.71\text{m}^{-1}$. Por fim, vamos tomar $u(L,t) = 0$, com L suficientemente longo para que essa condição seja válida.

Em resumo, queremos resolver o PVIC

$$\begin{cases} u_t = \kappa u_{xx}, \ 0 \leqslant x \leqslant L, t \geqslant 0 \\ u(x,0) = f(t)\mathrm{e}^{-q_1 x} \\ u(0,t) = f(t) \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Queremos resolver este problema numericamente e responder a algumas perguntas. Mais especificamente, vamos resolver este problema usando tanto o método de Euler explícito (e mostrar sua ordem) quanto o método de Crank-Nicolson, encontrar a profundidade ideal para uma adega de vinhos e resolver uma variação do problema com difusividade variável.

II. UMA ANÁLISE TEÓRICA

Antes de partir para a solução numérica, vamos fazer algumas considerações sobre a solução analítica do problema. Primeiro, note que podemos escrever

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi i n t/T}, \tag{2.1}$$

com $C_n \in \mathbb{C}$ tais que $\overline{C_n} = C_{-n}$ e $T = 1$ ano. É possível mostrar[1] que, em um tempo t, uma substância se difunde aproximadamente $\sqrt{\kappa t}$ unidades. Sendo assim, na escala de tempo de interesse (1 ano), temos

$$\sqrt{\kappa T} = \sqrt{6.3} \approx 2.5 \text{ m}. \tag{2.2}$$

Vamos tomar o *ansatz*

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \omega_n(x) \mathrm{e}^{2\pi i n t/T}, \tag{2.3}$$

com $C_n \in \mathbb{C}$ tais que $\overline{C_n} = C_{-n}$, de modo que u é real. Vamos impor as seguintes condições:

(i) cada uma das parcelas satisfaz a equação do calor

(i) $\omega_n(0) \equiv 1$, de modo que a representação de $f(t)$ seja recuperada

(i) $\omega_n(x)$ é limitado e tende a 0 quando $x \to \infty$ ($n \neq 0$), uma vez que a temperatura a profundidades muito grandes não é sensível a variações de temperatura na superfície.

A condição (i) nos dá

$$\frac{\mathrm{d}^2\omega_n}{\mathrm{d}x^2} = p_n^2 \omega_n, \ p_n^2 = \frac{2\pi i n}{\kappa T}. \tag{2.4}$$

Consequentemente,

$$p_n = \pm(1 \pm i) q_n, \ \text{ com } \ q_n = \sqrt{\frac{|n|\pi}{\kappa T}} > 0 \tag{2.5}$$

e o sinal $\pm$ depende do sinal de n. Desta forma, a solução geral da EDO de ω_n é dada por

$$\omega_n(x) = A_n \mathrm{e}^{(1\pm i)q_n x} + B_n \mathrm{e}^{-(1\pm i)q_n x}. \tag{2.6}$$

---

[1] [? , p. 129]

Da condição (iii) segue que $A_n \equiv 0$ e da condição (ii) segue que $B_n \equiv 1$. Portanto, obtemos

$$\omega_n(x) = \mathrm{e}^{-(1 \pm i) q_n x} \tag{2.7}$$

e, assim,

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-(1 \pm i) q_n x} \mathrm{e}^{2\pi i n t / T}. \tag{2.8}$$

Escrevendo $C_n = |C_n| \mathrm{e}^{-i\gamma_n}$, segue que

$$u(x, t) = C_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \mathrm{e}^{-q_n x} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \gamma_n - q_n x\right). \tag{2.9}$$

Vamos interpretar esta solução. Note que o termo do cosseno representa uma onda de frequência $2\pi n / T$ e número de onda q_n. Por conta disto, a n-ésima "onda parcial" se propaga com velocidade

$$\frac{2\pi n}{q_n T} = \sqrt{\frac{4\pi\kappa |n|}{T}}. \tag{2.10}$$

Como há um amortecimento exponencial na direção de propagação e este amortecimento cresce com $\sqrt{|n|}$, segue que a contribuição mais importante para a solução vem do termo com $n = 1$. Para os valores numéricos que estamos considerando, segue que

$$q_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi\kappa}{T}} \approx 0.71\mathrm{m}^{-1}. \tag{2.11}$$

Agora, note que o ponto x_1 tal que $q_1 x_1 = \pi$ é tal que a temperatura $u(x_1, t)$ é oposta em fase à temperatura $u(0, t)$. Dito de outro modo, $x_1 = \pi / q_1 \approx 4.4$m é a profundidade na qual a temperatura do solo tem fase oposta à temperatura da superfície. Isto significa que se na superfície a temperatura é de verão então à profundidade x_1 a temperatura é de inverno. Além disso, a variação de temperatura é $\mathrm{e}^{-\pi} \approx 4\%$ da variação na superfície. Isto torna esta profundidade ideal para uma adega de vinhos!

III. MÉTODOS NUMÉRICOS

Começamos resolvendo a equação com o método de Euler explícito,

$$u_\ell^{n+1} = u_\ell^n + \mu(u_{\ell+1}^n - 2u_\ell^n + u_{\ell-1}^n), \tag{3.1}$$

que converge para $\kappa\mu \leqslant 1/2$. Por conta desta restrição ao número de Courant, não podemos escolher Δt e Δx de forma displicente.

Também utilizamos o método de Crank-Nicolson para resolver o problema. Este método, dado por

$$-\alpha u_{\ell+1}^{n+1} + (1+2\alpha) u_\ell^{n+1} - \alpha u_{\ell-1}^{n+1} = \alpha u_{\ell+1}^n + (1-2\alpha) u_\ell^n + \alpha u_{\ell-1}^n \tag{3.2}$$

com $\alpha = \kappa\mu/2$ é implícito, incondicionalmente estável e consistente (logo convergente pelo Teorema de Equivalência de Lax). Consequentemente, temos maior liberdade na escolha de Δt e Δx,

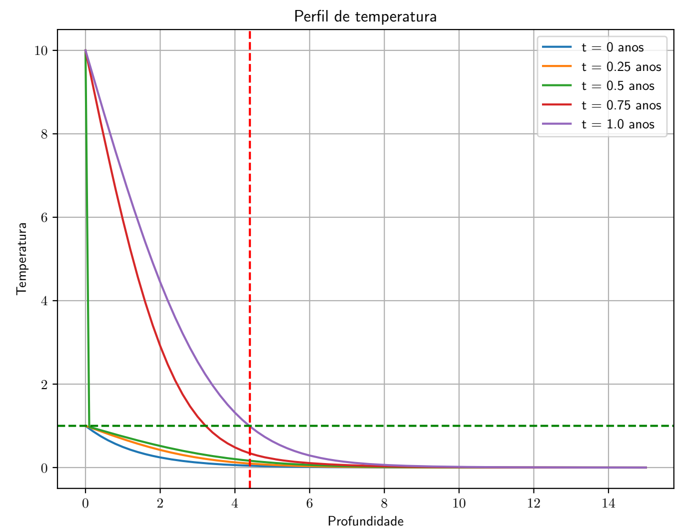

Figura 1. Perfil de temperatura para diferentes instantes de tempo calculado usando o método de Euler explícito. A reta pontilhada vermelha representa a profundidade $x = 4.4$m, enquanto a reta pontilhada verde representa a temperatura $y = 1$. O perfil de temperatura ao final de 1 ano (curva roxa) passa pelo encontro entre as duas retas pontilhadas, mostrando que à profundidade de 4.4m a temperatura tem fase oposta à da superfície.

o que torna este método mais indicado para o cômputo da solução por grandes intervalos de tempo. A implicitude do método nos obriga a resolver um sistema linear a cada iteração, dado por

$$\begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & \ddots & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

sendo N a quantidade de pontos na malha espacial. Para resolver tal sistema, usamos o algoritmo da matriz tridiagonal (ou de Thomas).

IV. RESULTADOS

blablabla

figura da solução em diferentes timesteps com Euler explícito (linkar animação)

plot da ordem

figura da solução em diferentes timesteps com Crank-Nicolson (linkar animação)

V. CÓDIGOS UTILIZADOS

Este projeto pode ser encontrado neste link, incluindo os códigos utilizados para o cômputo da solução e o código-fonte deste documento.

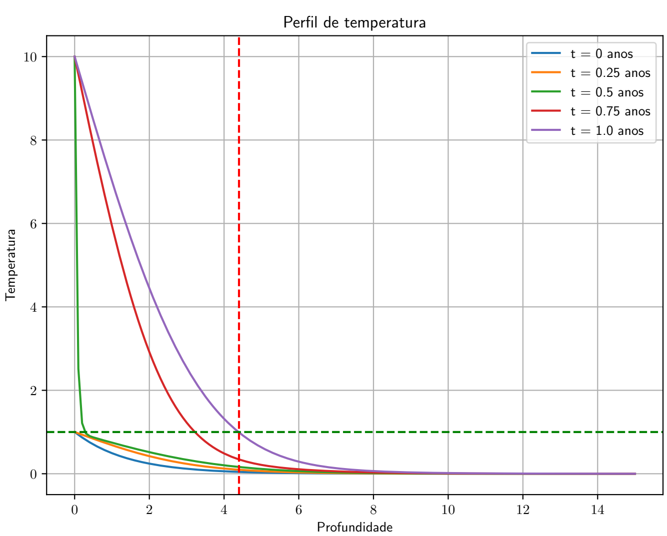

Figura 2. Perfil de temperatura para diferentes instantes de tempo calculado usando o método de Crank-Nicolson. A reta pontilhada vermelha representa a profundidade $x = 4.4$m, enquanto a reta pontilhada verde representa a temperatura $y = 1$. O perfil de temperatura ao final de 1 ano (curva roxa) passa pelo encontro entre as duas retas pontilhadas, mostrando que à profundidade de 4.4m a temperatura tem fase oposta à da superfície.