Análise Real – 2020.2
Lista 1

Professor: Professor

Aluno: Você

Questão 1

(a) Se $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, mostre que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Resolução:

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + \lambda y_i)^2.$$

Obviamente temos que $f(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Isso implica, como f é um polinômio do segundo grau, em seu discriminante ser menor ou igual a zero. Vamos manipular a regra de f para calculá-lo:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i + \lambda y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2x_i y_i \lambda + \lambda^2 y_i^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\lambda^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \end{aligned}$$

Com isso, temos:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \\ &= 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right). \end{aligned}$$

E, por fim, fazendo $\Delta \leq 0$, ficamos com:

$$\begin{aligned}4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \leq 0 \\ 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq 4\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).\end{aligned}$$