

Análise Real – 2020.2**Lista 1**

Professor: Professor

Aluno: Você

Exercício 1(a) Se $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, mostre que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

Resolução:Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i)^2.$$

Obviamente temos que $f(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Isso implica, como f é um polinômio do segundo grau, em seu discriminante ser menor ou igual a zero. Vamos manipular a regra de f para calculá-lo:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2x_i y_i \lambda + \lambda^2 y_i^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \lambda^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \lambda + \sum_{i=1}^n x_i^2. \end{aligned}$$

Com isso, temos:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \\ &= 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right). \end{aligned}$$

E, por fim, fazendo $\Delta \leq 0$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) &\leq 0 \\
 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 &\leq 4 \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \\
 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right).
 \end{aligned}$$