

# Exercícios de Revisão: A1.

Disciplina: Inferência Estatística  
Professor: Luiz Max de Carvalho

11 de Setembro de 2020

## 0.1 Impropropriedades próprias

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória com distribuição normal com parâmetros  $\mu$  e  $v$ , este último desconhecidos. Considere a priori  $\xi(v) = v^{-1}$ .

- (a) A priori em questão é própria?
- (b) A posteriori é própria?
- (c) Encontre o estimador de Bayes para  $v$  sob perda quadrática.
- (d) Compare o estimador do item (c) com o EMV para  $v$  (derive-o se precisar).

## 0.2 A barraca de pamonha da Palmirinha.

Suponha que Palmirinha esteja interessada em estudar quantos clientes chegam à sua loja de pamonha num determinado intervalo. Para isso, ela vai modelar o fenômeno como um processo de Poisson:

$$Y(\Delta_t) \sim \text{Poisson}(\theta\Delta_t),$$

isto é, o número  $Y$  de clientes num intervalo de tempo  $\Delta_t$  tem distribuição Poisson com média  $\theta\Delta_t$ .

Palmirinha pode

1. Fixar um número  $n$  de clientes a serem observados e marcar o tempo,  $X$ , que leva para chegarem  $n$  clientes ou;
  2. Fixar um determinado intervalo de tempo,  $t$ , e contar o número,  $Y$ , de clientes que chegam neste intervalo.
- (a) Compute o estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$  sob os desenhos 1 e 2.
  - (b) Derive a informação de Fisher sob os dois desenhos e discuta se é possível decidir que desenho utilizar com base nos seus achados.
  - (c) Elicite uma distribuição *a priori* para  $\theta$ . Justifique seu raciocínio.
  - (d) De posse da distribuição *a priori* obtida no item anterior, é possível decidir qual desenho é melhor? Justifique.

### 0.3 Estimação para uma distribuição Uniforme( $\theta, 2\theta$ ).

Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de uma distribuição uniforme definida em  $[\theta, 2\theta]$ , onde o parâmetro de interesse é  $\theta > 0$ .

- (a) Mostre que  $\Pr(X_1 \leq x) = \frac{x}{\theta} - 1$ .
- (b) Encontre a função de verossimilhança de  $\theta$  dada uma amostra  $x_1, \dots, x_n$ .
- (c) Encontre um estimador de máxima verossimilhança e discuta se devemos utilizar este estimador.
- (d) O estimador obtido é admissível? Justifique.
- (e) Encontre um estimador de método dos momentos para  $\theta$  e compare com o estimador obtido no item (c).

### 0.4 Crescimentos indesejados.

Um efeito colateral comum de esteroids anabolizantes é o ginecoma, crescimento do tecido mamário em homens. Uma grande rede de academias brasileiras avalia condição física de seus usuários que utilizam estes anabolizantes, e monitora este sintoma especificamente. Vamos supor que a probabilidade de gerar este efeito colateral é comum em todos os homens e a amostra de indivíduos é aleatória. Denote  $Z_1, Z_2, \dots$  variáveis aleatórias que registram se o usuário desenvolveu ginecoma  $Z_i = 1$  ou não  $Z_i = 0$ . Utilizamos a distribuição Bernoulli para modelar este processo, onde a **probabilidade de não desenvolver o sintoma é  $\theta$** . Seja

$$X_1 = \min\{n : Z_n = 1\},$$

o número indivíduos avaliados para encontrar o primeiro caso. Logo,  $\Pr(X = k; \theta) = \theta^{k-1}(1 - \theta)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Esta é a *distribuição geométrica*,  $\mathcal{G}(\theta)$ , e possui  $E[X_1] = 1/(1 - \theta)$  e  $\text{Var}(X_1) = \theta/(1 - \theta)^2$ .

- (a) Mostre que  $X_1$  é uma estatística suficiente para  $\theta$ .
- (b) Encontre o estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\theta}_1$  de  $\theta$  baseado em  $X_1$ .
- (c) Mostre que o estimador plug-in  $\hat{\theta}_1/(1 - \hat{\theta}_1)$  é não-enviesado para a razão de chances  $\theta/(1 - \theta)$ .
- (d) Usando o mecanismo de Rao-Blackwell você consegue propor um estimador com variância menor? Justifique.
- (e) Calcule o limite inferior de Cramér-Rao do MSE para estimadores não-enviesados de  $\theta/(1 - \theta)$ .

### 0.5 Estimando a área de um círculo.

Um círculo  $C$  é desenhado em uma folha de papel quadrada e desejamos estimar a área  $A$  deste círculo. Para não gastar muito dinheiro, decidimos medir o diâmetro  $D$  da circunferência com uma régua de R\$0,50 que compramos na

Uruguaiana e calcular a área através de  $\hat{A} = \pi D^2/4$ . Dado que as medições são imprecisas, decidimos repetir o experimento  $n$  vezes obtendo medidas independentes  $D_1, \dots, D_n$ . Vamos supor que  $D_i \sim \text{Normal}(D, \sigma^2)$  com  $\sigma^2$  conhecida. Suponha que estimamos  $A$  utilizando o estimador de método dos momentos,

$$\hat{A} = \frac{\pi \bar{D}^2}{4}.$$

- (a) O estimador  $\hat{A}$  é enviesado. Calcule o viés e discuta seu comportamento assintótico.
- (b) Proponha um estimador não-enviesado  $\hat{A}_u$  baseado em  $\hat{A}$ .
- (c) Compare os estimadores  $\hat{A}$  e  $\hat{A}_u$  e discuta se algum deles é inadmissível.