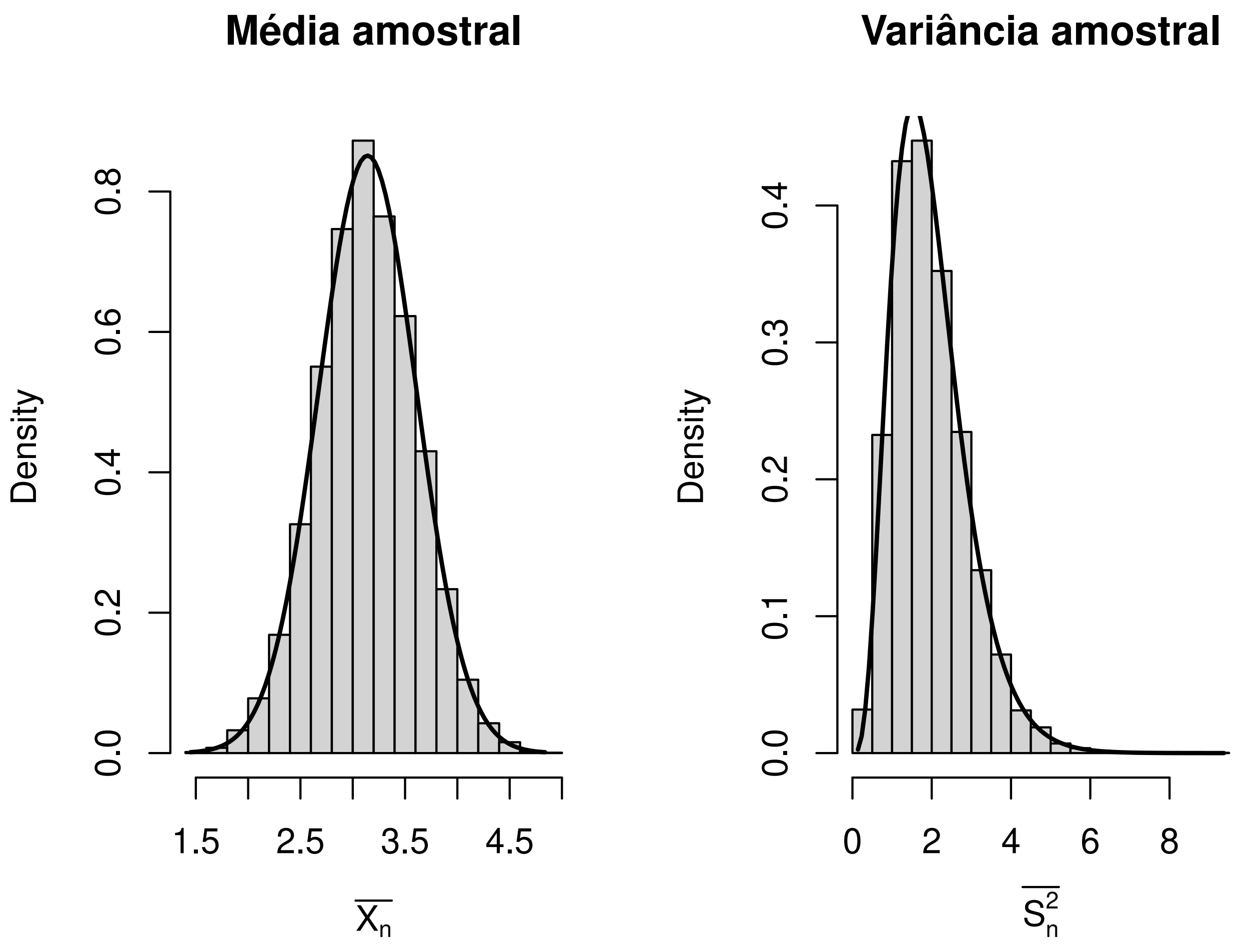
- Distribuição conjunta de $\bar{X}_n$ e $\bar{S}_n^2$;
- No caso Normal, $\bar{X}_n \perp\!\!\!\perp \bar{S}_n^2$ são idependentes!
- Distribuição t de Student.

Distribuição de $\bar{X}_n$ e $\bar{S}_n^2$

- $\bar{X}_n \sim \text{Normal}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$;
- $\bar{S}_n^2 \sim \text{Gama}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2\sigma^2}\right)$



Um Teorema importante

Aqui vamos ver um caso especial do Teorema de Basu[13], que fala que os dois primeiros momentos amostrais da distribuição Normal são independentes.

Teorema 24 (Independência da média e variância amostrais na Normal)

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2. Então a média amostral, $\bar{X}_n$ e a variância amostral, $\bar{S}_n^2$, são independentes. Ademais, $\bar{X}_n \sim \text{Normal}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ e $\bar{S}_n^2 \sim \text{Gama}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2\sigma^2}\right)$.

Prova: Troca de variáveis em duas dimensões; propriedades de matrizes ortogonais. Ver Teorema 8.3.1 em DeGroot (prova na pág. 476).

[13] Debabrata Basu (1924–2001) foi um importante estatístico indiano.

Exemplo

Suponha que queremos determinar o tamanho de amostra, n, de modo que os EMVs da média μ e do desvio padrão σ estejam "perto" dos seus valores verdadeiros. Formalmente, queremos encontrar n tal que

$$\Pr\left(|\hat{\mu} - \mu| \leq \frac{1}{5}\sigma \;\underline{\text{e}}\; |\hat{\sigma} - \sigma| \leq \frac{1}{5}\sigma\right) \geq \frac{1}{2},$$

seja satisfeito.

Qual a distribuição de $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$? A resposta é a distribuição t de "Student"[14]

Definição 36 (A distribuição t)

Considere duas variáveis aleatórias, $Y \sim \text{Qui-quadrado}(m)$ *e* $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$ *e defina a variável aleatória*

$$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{m}}}.$$

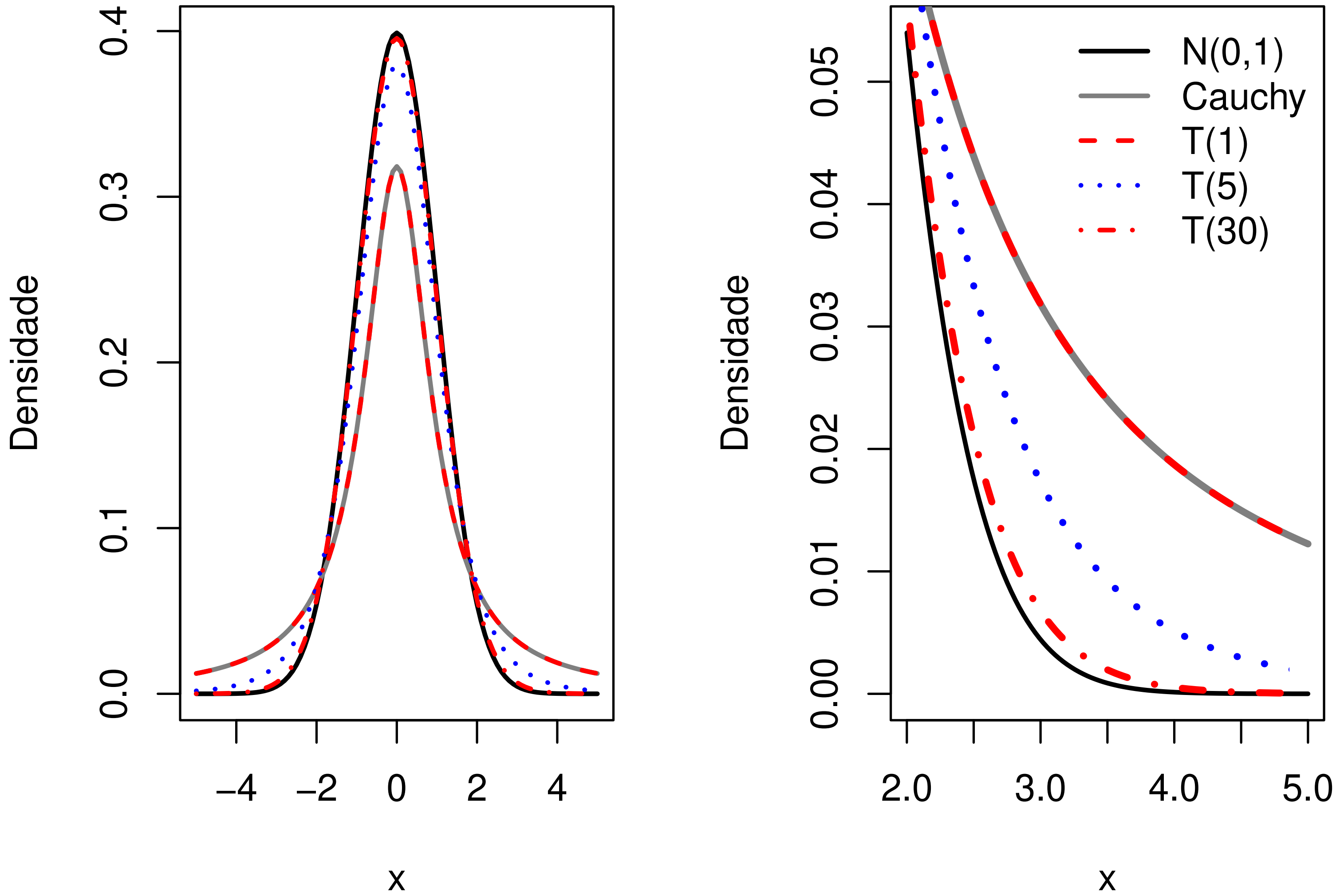
Dizemos que X *tem distribuição* ***t de Student com*** *m* ***graus de liberdade****.*
Sabemos ainda que

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}, \; x \in (-\infty, \infty).$$

Para $m > 2$, $E[X] = 0$ (porquê?) e $\text{Var}(X) = m/(m-2)$.

[14] William Sealy Gosset (1876–1937) foi um estatístico inglês que, em 1908, publicou o resultado acima sob o pseudônimo "Student", ou estudante/aluno.

Comparando a t com outras distribuições



Um exemplo

Teorema 25

Considere o estimador

$$\sigma' = \sqrt{\frac{\Delta^2}{n-1}},$$

onde $\Delta^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$. *Então*

$$\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu\right)}{\sigma'} \sim \text{Student}(n-1).$$

Prova: Ver Teorema 8.4.2 em De Groot. Defina $Z = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$ e $Y = \Delta^2/\sigma^2$. Então $Z \sim \text{Normal}(0,1)$ e $Y \sim \text{Qui-quadrado}(n-1)$. Faça

$$U = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{\frac{\Delta^2}{n-1}}}, \tag{25}$$

e note que $U \sim \text{T}(n-1)$ □

O que aprendemos?

- Independência dos momentos amostrais da Normal;
  "Numa amostra aleatória Normal, $\bar{X}_n$ e $\bar{S}_n^2$ são independentes e $\bar{X}_n \sim \text{Normal}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ e $\bar{S}_n^2 \sim \text{Gama}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2\sigma^2}\right)$."
- A distribuição t de Student;
  "A diferença padronizada entre a média amostral e a média populacional (μ) tem distribuição t de Student, que não depende de σ^2"

Leitura recomendada

- De Groot seções 8.3 e 8.4;
- Próxima aula: De Groot, seção 8.5;
- **Exercícios recomendados**
  - De Groot.

    Seção 8.3: exercício 8;
    Seção 8.4: derivar a densidade da Distribuição t de Student.