Intervalos de confiança

- Intervalos de confiança;
- Caso normal: média;
- Intervalos de confiança unilaterais;
- Estatística pivotal.

Lembremos que

$$U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{\frac{\Delta^2}{n-1}}} \sim \mathrm{T}(n-1). \tag{26}$$

Para $c > 0$, podemos computar $\Pr(-c < U < c) = \gamma$:

$$\Pr\left(-c < \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{\frac{\Delta^2}{n-1}}} < c\right) = \gamma,$$

$$\Pr\left(\bar{X}_n - \frac{c\hat{\sigma}'}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + \frac{c\hat{\sigma}'}{\sqrt{n}}\right) = \gamma,$$

$$T_{n-1}(c) - T_{n-1}(-c) = 2T_{n-1}(c) - 1 = \gamma.$$

Concluímos que $c = F_T^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}; n-1\right)$.

Definição de intervalo de confiança

O conceito de **intervalo de confiança** é fundamental em Estatística e nas aplicações em Ciência.

Definição 37 (Intervalo de confiança)

Seja $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *uma amostra aleatória, cada variável aleatória com p.d.f.* $f(x \mid \theta)$*, e considere uma função real* $g(\theta)$*. Sejam* $A(\boldsymbol{X})$ *e* $B(\boldsymbol{X})$ *duas estatísticas de modo que valha*

$$\Pr\{A(\boldsymbol{X}) < g(\theta) < B(\boldsymbol{X})\} \geq \gamma. \tag{27}$$

Dizemos que $I(\boldsymbol{X}) = (A(\boldsymbol{X}), B(\boldsymbol{X}))$ *é um* ***intervalo de confiança*** de $100\gamma\%$ *para* $g(\theta)$*. Se a desigualdade for uma igualdade para todo* $\theta \in \Omega$*, dizemos que o intervalo é* ***exato****.*

Revisitando o caso Normal

No caso do intervalo de confiança para o parâmetro de média, temos

$$\Pr\left\{A(\boldsymbol{X}) < g(\mu) < B(\boldsymbol{X})\right\} \geq \gamma,$$

com $g(\mu) = \mu$ e

$$A(\boldsymbol{X}) = \bar{X}_n - \frac{c\hat{\sigma}'}{\sqrt{n}} = \bar{X}_n - \frac{c\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2}}{\sqrt{n(n-1)}},$$

$$B(\boldsymbol{X}) = \bar{X}_n + \frac{c\hat{\sigma}'}{\sqrt{n}} = \bar{X}_n + \frac{c\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2}}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Interpretação de um intervalo de confiança

ATENÇÃO: a interpretação de um intervalo é crucial. Muita gente confunde o que um intervalo de confiança significa!

Observação 19 (Um intervalo de confiança não é uma afirmação sobre o(s) parâmetro(s)!)

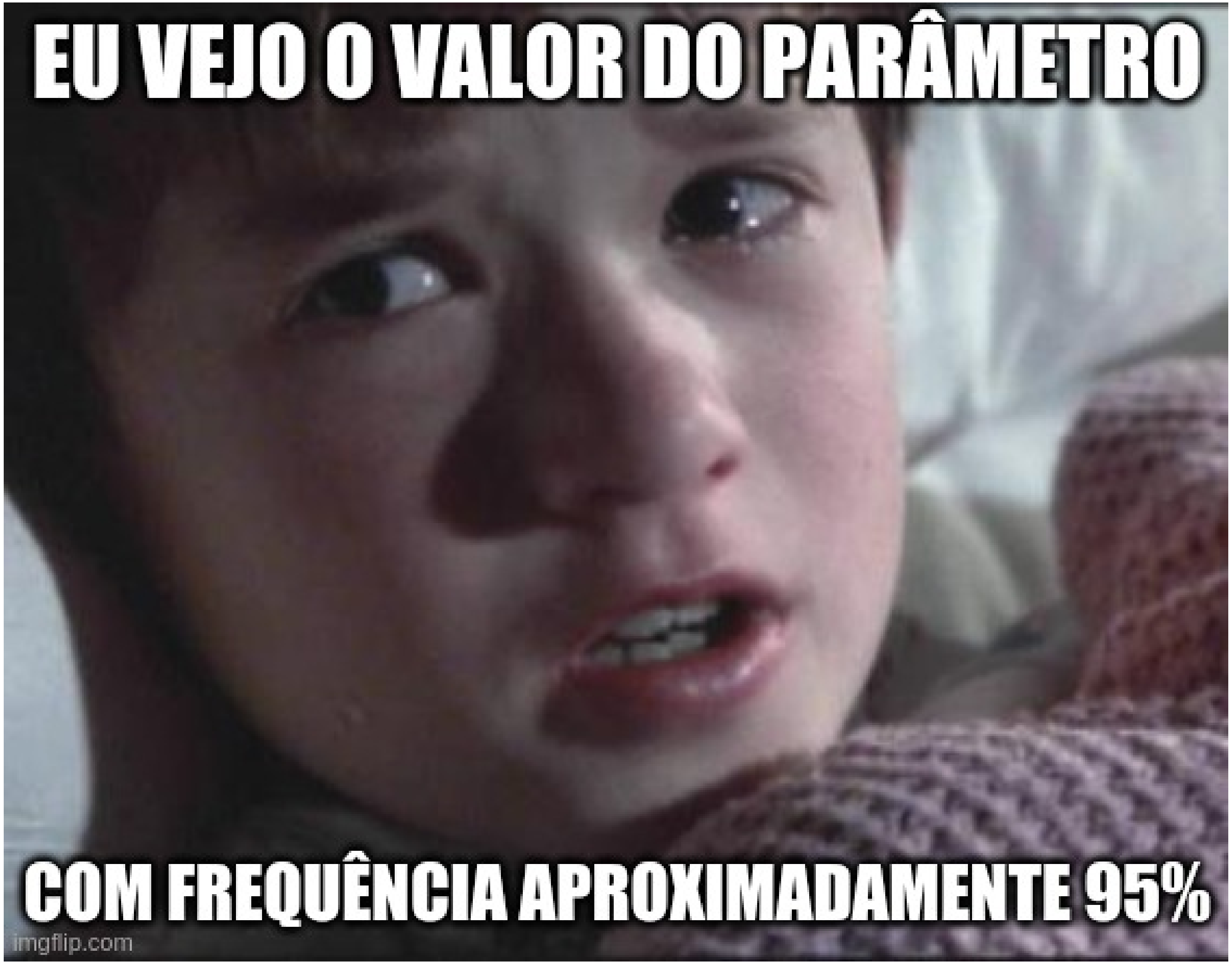
A afirmação probabilística da forma $\Pr\{A(\boldsymbol{X}) < g(\theta) < B(\boldsymbol{X})\} = \gamma$ *diz respeito à distribuição conjunta das variáveis aleatórias* $A(\boldsymbol{X})$ *e* $B(\boldsymbol{X})$ *para um valor fixo de* θ *– e, portanto, de* $g(\theta)$*.*

Ideia 3 (Intervalos de confiança são procedimentos)

Como de costume na teoria ortodoxa (frequentista), o foco da construção de um intervalo confiança está em dar garantias probabilísticas ***com relação à distribuição dos dados****. Dizer que* $\Pr\{A(\boldsymbol{X}) < g(\theta) < B(\boldsymbol{X})\} = \gamma$ *é dizer que, se eu gerasse* M *grande amostras aleatórias* $\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{X}^{(M)}$ *de tamanho* n *e construisse* M *intervalos* $I(\boldsymbol{X}^{(1)}), I(\boldsymbol{X}^{(2)}), \ldots, I(\boldsymbol{X}^{(M)})$*, eu esperaria encontrar:*

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \mathbb{I}\left(g(\theta) \in I(\boldsymbol{X}^{(i)})\right) \approx \gamma.$$

I see $g(\theta)$...


EU VEJO O VALOR DO PARÂMETRO
COM FREQUÊNCIA APROXIMADAMENTE 95%
imgflip.com

Intervalos unilaterais

Em várias situações, estamos interessados em uma cota superior ou inferior para $g(\theta)$.

Definição 38 (Intervalo de confiança unilateral)

Seja $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *uma amostra aleatória, cada variável aleatória com p.d.f.* $f(x \mid \theta)$, *e considere uma função real* $g(\theta)$. *Seja* $A(\boldsymbol{X})$ *uma estatística que, para todo* $\theta \in \Omega$, *valha*

$$\Pr\{A(\boldsymbol{X}) < g(\theta)\} \geq \gamma,$$

dizemos que o intervalo aleatório $(A(\boldsymbol{X}), \infty)$ *é chamado um intervalo de confiança* ***unilateral*** *de* $100\gamma\%$ *para* $g(\theta)$, *ou, ainda, um intervalo de confiança* ***inferior*** *de* $100\gamma\%$ *para* $g(\theta)$. *O intervalo* $(-\infty, B(\boldsymbol{X}))$, *com*

$$\Pr\{g(\theta) < B(\boldsymbol{X})\} \geq \gamma,$$

é definido de forma análoga, e é chamado de intervalo de confiança ***superior*** *de* $100\gamma\%$ *para* $g(\theta)$. *Se a desigualdade é uma igualdade para todo* $\theta \in \Omega$, *os intervalos são chamados* <u>*exatos*</u>.

Quantidade pivotal

O conceito de quantidade pivotal é útil na construção de intervalos de confiança.

Definição 39 (Quantidade pivotal)

Seja $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *uma amostra aleatória com p.d.f.* $f(x \mid \theta)$. *Seja* $V(\boldsymbol{X}, \theta)$ *uma variável aleatória cuja distribuição é* ***a mesma*** *para todo* $\theta \in \Omega$. *Dizemos que* $V(\boldsymbol{X}, \theta)$ *é uma* ***quantidade pivotal***.

Podemos utilizar quantidades pivotais para construir intervalos de confiança. Considere uma função $r(v, \boldsymbol{x})$ tal que

$$r(V(\boldsymbol{X}, \theta), \boldsymbol{X}) = g(\theta).$$

Vamos ver como usar $r(v, \boldsymbol{x})$ para construir um intervalo de confiança.

Teorema 26 (Intervalos de confiança a partir de uma quantidade pivotal)

Seja $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *uma amostra aleatória com p.d.f.* $f(x \mid \theta)$. *Suponha que existe uma quantidade pivotal* V, *com c.d.f.* *contínua* G. *Assuma que existe* $r(v, \boldsymbol{x})$, *estritamente crescente em* v *para todo* $\boldsymbol{x}$. *Finalmente, tome* $0 < \gamma < 1$ *e* $\gamma_1 < \gamma_2$ *de modo que* $\gamma_2 - \gamma_1 = \gamma$. *Então as estatísticas*

$$A(\boldsymbol{X}) = r\left(G^{-1}(\gamma_1), \boldsymbol{X}\right),$$
$$B(\boldsymbol{X}) = r\left(G^{-1}(\gamma_2), \boldsymbol{X}\right),$$

são os limites de um intervalo de confiança de $100\gamma\%$ *para* $g(\theta)$.

Prova: Usar a monotonicidade de r e de G e notar que

$$\Pr(A(\boldsymbol{X}) = g(\theta)) = \Pr\left(V(\boldsymbol{X}, \theta) = G^{-1}(\gamma_1)\right) = 0,$$

e que o mesmo vale para $B(\boldsymbol{X})$. Ver Teorema 8.5.3 em DeGroot.

Exemplos

- Exponencial;
- Normal, μ e σ^2 desconhecidas;
- Normal, σ^2 conhecida;

Exemplos

- Exponencial: $\theta S \sim \text{Gama}(n, 1)$;
- Normal, μ e σ^2 desconhecidas:
  - $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\hat{\sigma}'} \sim \text{Student}(n-1)$;
  - $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \sim \text{Qui-quadrado}(n-1)$;
- Normal, σ^2 conhecida: $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim \text{Normal}(0, 1)$;

Limitações

Intervalos de confiança estão entre as ferramentas mais importantes da Estatística. Isso não quer dizer que não tenham limitações importantes.

- Interpretação; Uma vez observados $a(\boldsymbol{x})$ e $b(\boldsymbol{x})$, não é correto dizer que $g(\theta)$ mora em (a, b) com probabilidade γ. "Antes de observarmos o valor tomado por $\boldsymbol{X}$, há probabilidade γ de que o intervalo $I(\boldsymbol{X})$, construído a partir da amostra $\boldsymbol{X}$, inclui $g(\theta)$."
  Em geral falamos de **confiança** γ do intervalo $I(\boldsymbol{X})$.
- Uso da informação; Uma vez que observamos $I(\boldsymbol{x}) = (a(\boldsymbol{x}), b(\boldsymbol{x}))$, pode haver informação extra sobre se $I(\boldsymbol{x})$ cobre $g(\theta)$ ou não, mas não existe maneira canônica de ajustar o nível de confiança γ à luz desta nova informação. Ver exemplo 8.5.11 em DeGroot.

O que aprendemos?

- Intervalos de confiança;
  "Um intervalo $(A(\boldsymbol{X}), B(\boldsymbol{X}))$ de confiança de $100\gamma\%$ para $g(\theta)$ é tal que $\Pr\left[A(\boldsymbol{X}) < g(\theta) < B(\boldsymbol{X})\right] \geq \gamma$";
- Um intervalo de confiança é uma afirmação probabilística sobre **as estatísticas** $A(\boldsymbol{X})$ e $B(\boldsymbol{X})$ a partir da **distribuição conjunta dos dados**;
- Quantidade pivotal "Uma quantidade pivotal é uma função $V(\boldsymbol{X}, \theta)$ cuja distribuição não depende de θ"
- Intervalos de confiança podem ser construídos a partir de quantidades pivotais;

Leitura recomendada

- De Groot seção 8.5;
- * Casella & Berger (2002), seção 9.2.
- Próxima aula: De Groot, seção 9.1;
- **Exercícios recomendados**
  - De Groot.

    Seção 8.5: 1, 4, 5 e 6.