Trabalho IV: Testes uniformemente mais poderosos.

Disciplina: Inferência Estatística
Professor: Luiz Max de Carvalho

4 de Novembro de 2021

Data de Entrega: Junto com a P2.

Orientações

- Enuncie e prove (ou indique onde se pode encontrar a demonstração) de todos os resultados não triviais necessários aos argumentos apresentados;
- Lembre-se de adicionar corretamente as referências bibliográficas que utilizar e referenciá-las no texto;
- Equações e outras expressões matemáticas também recebem pontuação;
- Você pode utilizar figuras, tabelas e diagramas para melhor ilustrar suas respostas;
- Indique com precisão os números de versão para quaisquer software ou linguagem de programação que venha a utilizar para responder às questões[1];

Introdução

Vimos que os testes de hipótese fornecem uma abordagem matematicamente sólida para traduzir hipóteses científicas sobre o processo gerador dos dados em decisões sobre os dados – isto é, traduzir afirmações sobre particões do espaço de parâmetros, Ω, em afirmações testáveis sobre o espaço amostral $\mathcal{X}^n$.

Um teste $\delta(\boldsymbol{X})$ é uma decisão (binária) de rejeitar ou não uma hipótese nula (H_0) sobre $\theta \in \Omega$ com base em uma amostra $\boldsymbol{X}$. A capacidade de um teste de rejeitar H_0 quando ela é falsa é medida pela função poder, $\pi(\theta|\delta)$. Nem todos os testes, no entanto, são criados iguais. Em certas situações, é possível mostrar que um procedimento δ_A é *uniformemente* mais poderoso que outro procedimento δ_B para testar a mesma hipótese.

Neste trabalho, vamos definir e aplicar o conceito de **teste uniformemente mais poderoso**.‘

[1]Não precisa detalhar o que foi usado para preparar o documento com a respostas. Recomendo a utilização do ambiente LaTeX, mas fique à vontade para utilizar outras ferramentas.

Questões

Dica: ler o capítulo 9.3 de DeGroot.

1. Defina precisamente o que é um teste uniformemente mais poderoso (UMP) para uma hipótese;

2. Defina precisamente o que é uma razão de verossimilhanças monotônica (RVM);

3. Considere uma hipótese nula simples, $H_0 : \theta = \theta_0$, $\theta_0 \in \Omega$. Suponha que vale o Teorema da Fatorização e a distribuição de $\boldsymbol{X}$ tem razão de verossimilhanças monotônica. Mostre que se existem c e α_0 tais que

$$\Pr\left(r(\boldsymbol{X}) \geq c \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha_0, \tag{1}$$

   então o procedimento δ^* que rejeita H_0 se $r(\boldsymbol{X}) \geq c$ é UMP para H_0 ao nível α_0;

4. **Qual é dessa moeda aí?**

   Suponha que você encontra o Duas-Caras na rua e ele não vai com a sua... cara. Ele decide jogar a sua famosa moeda para o alto para decidir se te dá um cascudo. Se der cara (C), você toma um cascudo. Você, que sabe bem Estatística, pede que ele pelo menos jogue a moeda umas $n = 10$ vezes antes de tomar a decisão derradeira.

   Surpreendentemente, ele concorda. Lança a moeda e obtém

   KCKCKCCKKK

   Você agora deve decidir se foge, se arriscando a tomar dois cascudos ao invés de um, ou se fica e possivelmente não toma cascudo nenhum. Se p é a probabilidade de dar cara, estamos interessados em testar a hipótese

$$H_0 : p \leq \frac{1}{2},$$
$$H_1 : p > \frac{1}{2}.$$

   (a) Escreva a razão de verossimilhanças para esta situação;

   (b) Nesta situação, é do seu interesse encontrar um teste UMP. Faça isso e aplique o teste desenvolvido aos dados que conseguiu arrancar do Duas-Caras.

5. (Bônus) Mostre que, no item anterior, não é possível atingir qualquer nível α_0, isto é, que α_0 toma um número finito de valores. Proponha uma solução para que seja possível atingir qualquer nível em $(0, 1)$. (Dica: Ler a seção 9.2 de DeGroot).