Tópicos da aula

- Estimador de máxima verossimilhança (EMV);
  - Existência e unicidade;
  - Invariância do EMV;
  - Consistência do EMV;
- Limitações;

Definição 21 (Estimador de máxima verossimilhança)

Para cada possível vetor (de observações) $\boldsymbol{x}$, *seja* $\delta(\boldsymbol{x}) \in \Omega$ *um valor de* $\theta \in \Theta$ *de modo que a função de verossimilhança,* $L(\theta) \propto f(\boldsymbol{x} \mid \theta)$, *atinge o máximo. Dizemos que* $\hat{\theta} = \delta(\boldsymbol{X})$ *é o* ***estimador de máxima verossimilhança*** *de* θ *(Fisher, 1922)*[8]*. Quando observamos* $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$, *dizemos que* $\delta(\boldsymbol{x})$ *é uma estimativa de* θ*. Dito de outra forma,*

$$\max_{\theta \in \Omega} f(X \mid \theta) = f(X \mid \hat{\theta}).$$

[8] Ronald Aylmer Fisher (1890-1962), biólogo e estatístico inglês. Para a história do desenvolvimento do EMV, ver Aldrich (1997).

Mudando de paradigma

Na Definição 21, vemos θ com um número real que indexa a distribuição de probabilidade conjunta dos dados.

- Poderíamos trocar[9] $f(x \mid \theta)$ por $f(x; \theta)$;
- Com o EMV, procuramos um valor de θ de modo que a probabilidade de observarmos $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ seja máxima;
- Isso não nos diz nada sobre o quão provável $\hat{\theta}$ é;
- θ não é uma quantidade aleatória, portanto não admite afirmações probabilísticas.

[9] Mas não vamos, pois a notação fica clara em quase todos os contextos.

Exemplos

- Exponencial;
- Bernoulli;
- Normal;
  - μ desconhecida, σ^2 conhecida;
  - μ conhecida, σ^2 desconhecida;
  - μ e σ^2 ambas desconhecidas.

EMVs

- Exponencial: $\hat{\theta} = \bar{X}_n$;
- Bernoulli $\hat{\theta} = \bar{X}_n$;
- Normal;
  - $\hat{\mu} = \bar{X}_n$;
  - $\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$;
  - $\hat{\theta} = \left\{\hat{\mu} = \bar{X}_n, \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right\}$.

Exemplo 5 (EMV para uniforme)

Suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *perfazem uma amostra aleatória de uma distribuição uniforme no intervalo* $[0, \theta]$, $\theta \in \mathbb{R}, \theta > 0$. *Considere a f.d.p.*

$$f(x \mid \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, 0 \leq x \leq \theta, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \tag{12}$$

A f.d.p. conjunta é

$$f_n(\boldsymbol{x} \mid \theta) = \begin{cases} \theta^{-n}, 0 \leq x_i \leq \theta \; (i = 1, 2, \ldots, n), \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases} \tag{13}$$

e o EMV é $\hat{\theta} = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Existência do EMV

Observação 5

A existência do EMV pode depender de detalhes irrelevantes acerca do espaço de parâmetros, Ω.

Exemplo 6 (Não existência do EMV)

Considere o Exemplo 5, mas agora com uma f.d.p. um pouco diferente:

$$f(x \mid \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, 0 < x < \theta, \\ 0, \textit{ caso contrário}. \end{cases} \tag{14}$$

É fácil mostrar que, nesse caso, o EMV não existe.

FGV EMAp

Observação 6 (Unicidade do EMV)

Mesmo quando existe, o EMV nem sempre é único.

Exemplo 7 (EMV para uma uniforme num intervalo de tamanho 1)

Suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *perfazem amostra aleatória de uma distribuição uniforme no intervalo* $[\theta, \theta + 1]$*. A densidade conjunta é*

$$f_n(\mathbf{x} \mid \theta) = \begin{cases} 1, \theta \leq x_i \leq \theta + 1, & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{15}$$

Defina $m := \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $M := \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*. Podemos reescrever (15) como*

$$f_n(\mathbf{x} \mid \theta) = \begin{cases} 1, M - 1 \leq \theta \leq m, & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{16}$$

Conclusão: $\hat{\theta}$ é qualquer valor no intervalo $[M - 1, m]$.

Suponha que estamos interessados em uma transformação do parâmetro θ, $\phi(\theta)$. Por exemplo, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são Bernoulli com parâmetro p, podemos estar interessados na *chance* $\omega = \phi(p) = p/(1-p)$.

Teorema 11 (Invariância do EMV)

Considere uma função $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$. Se $\hat{\theta}$ é um EMV para θ, então $\phi(\hat{\theta})$ é um EMV para $\omega = \phi(\theta)$.

Prova: Defina a *verossimilhança induzida*:

$$L^*(\omega) := \sup_{\{\theta : \phi(\theta) = \omega\}} L(\theta),$$

e note que o supremo desta função sobre Ω é precisamente o EMV. Ver Casella & Berger, Teorema 7.2.10 (pág. 320) ou De Groot, Teorema 7.6.2 (pág 427).
Exemplo: O EMV para o quadrado da média de uma normal, μ^2, é $\bar{X}_n^2$.

Consistência do EMV

Sob condições de regularidade, o EMV é consistente, isto é $\hat{\theta}_{\text{EMV}} \to \theta$.

Teorema 12 (Consistência do EMV)

Defina $l(\theta) := \log f_n(\mathbf{x} \mid \theta)$ *e assuma que* $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim f(\theta_0)$, *isto é, que* θ_0 *é o valor verdadeiro do parâmetro. Denote* $E_{\theta_0}[g] := \int_\Omega g(x,\theta) f(\mathbf{x} \mid \theta_0)\, dx$. *Suponha que*

- $f(x_i \mid \theta)$ *tem o mesmo suporte;*
- θ_0 *é ponto interior de* Ω*;*
- $l(\theta)$ *é diferenciável;*
- $\hat{\theta}_{EMV}$ *é a única solução de* $l'(\theta) = 0$.

Então,

$$\hat{\theta}_{EMV} \to \theta.$$

Prova: (rascunho) mostrar que, para todo $\theta \in \Omega$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log f(X_i \mid \theta) \to E_{\theta_0}\left[\log f(\mathbf{X} \mid \theta)\right],$$

e aplicar a desigualdade de Jensen.

O que aprendemos?

- Estimador de máxima verossimilhança (EMV);
  "Encontrar o valor do parâmetro que maxima a probabilidade observar os dados obtidos"
- Invariância ;
  "O EMV é invariante a transformações dos parâmetros; se $\hat{\theta}$ é o EMV para θ, $\psi(\hat{\theta})$ é o EMV para $\psi(\theta)$"
- Consistência;
  "Sob condições brandas de regularidade, o EMV converge para valor verdadeiro à medida que $n \to \infty$"
- Limitações;
  "O EMV não existe necessariamente, e mesmo quando existe, não precisa ser único"

Leitura recomendada

- De Groot seções 7.5 e 7.6;
- * Casella & Berger, seção 7.2.2.
- * Schervish (1995), seção 5.1.3.
- **Exercícios recomendados**
  - De Groot,

    Seção 7.5: exercícios 1, 4, 9 e 10;
    Seção 7.6: exercícios 3, 5, 11 e 20.