Como avaliar um estimador?

Definição 28 (Notação conveniente)

Para as próximas computações, é conveniente definir Para $g : \mathcal{X}^n \to \mathbb{R}$, *escrevemos*

$$E_\theta[g] = \int_{\mathcal{X}} \cdots \int_{\mathcal{X}} g(\boldsymbol{x}) f_n(\boldsymbol{x} \mid \theta)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathcal{X}} g(\boldsymbol{x}) f_n(\boldsymbol{x} \mid \theta)\, d\boldsymbol{x}.$$

Agora podemos definir o **erro quadrático médio** (EQM) de um estimador $\delta(\boldsymbol{X})$:

Definição 29 (Erro quadrático médio)

$$R(\theta, \delta) := E_\theta\left[\{\delta(\boldsymbol{X}) - \theta\}^2\right].$$

Seja $\boldsymbol{T}$ uma estatística suficiente. Podemos definir o seguinte estimador

Definição 30 (Estimador condicionado)

$$\delta_0(\boldsymbol{T}) := E_\theta\left[\delta(\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{T}\right].$$

Como $\boldsymbol{T}$ é suficiente, podemos escrever, simplesmente,

$$\delta_0(\boldsymbol{T}) = E\left[\delta(\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{T}\right].$$

O Teorema de Rao-Blackwell

Com essas definições em mãos, estamos preparados para enunciar um dos teoremas mais importantes da Estatística:

Teorema 17 (Teorema de Rao-Blackwell[10])

Seja $\delta(\boldsymbol{X})$ *um estimador,* $\boldsymbol{T}$ *uma estatística suficiente para* θ *e seja* $\delta_0(\boldsymbol{T})$ *como na definição 30. Então vale que*

$$R(\theta, \delta_0) \leq R(\theta, \delta).$$

[10] O estatístico indo-estadunidense Calyampudi Radhakrishna Rao (1920-) e o estatístico estadunidense David Harold Blackwell (1919-2010) provaram o resultado independentemente no final dos anos 1940.

Primeiro, notemos que, para qualquer função g e variáveis aleatórias X e Y, valem os seguintes fatos:

- $(E[g(X) \mid Y])^2 \leq E\left[\{g(X)\}^2 \mid Y\right]$;
  Desigualdade de Cauchy-Schwarz[11], também obtida, nesse caso, rearranjando a expressão da variância.
- $E\{E[X \mid Y]\} = E[X]$ (lei da esperança total).

Fazendo $g(X) = (\delta(\boldsymbol{X}) - \theta)^2$, obtemos

$$(E[\delta(\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{T}] - \theta)^2 \leq E\left[(\delta(\boldsymbol{X}) - \theta)^2 \mid \boldsymbol{T}\right] \tag{19}$$

Note que $(E[\delta(\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{T}] - \theta)^2 = [\delta_0(\boldsymbol{T}) - \theta]^2$. Agora, tomamos esperanças nos dois lados de (19) para obter:

$$\begin{aligned} R(\theta, \delta_0) &= E\left[(\delta_0(\boldsymbol{T}) - \theta)^2\right] \leq E\left\{E\left[\{\delta(\boldsymbol{X}) - \theta\}^2 \mid \boldsymbol{T}\right]\right\} \\ &= E\left[\{\delta(\boldsymbol{X}) - \theta\}^2\right] = R(\theta, \delta). \quad \square \end{aligned}$$

[11] Em homenagem ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e ao matemático alemão Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921).

Admissibilidade

O conceito de admissibilidade diz respeito à relação entre estimadores.

Definição 31 (Admissibilidade)

Um estimador δ *é dito* ***inadmissível*** *se existe outro estimador* δ_0 *tal que* $R(\theta, \delta_0) \leq R(\theta, \delta)$ *para todo* $\theta \in \Omega$ *e existe* $\theta' \in \Omega$ *tal que* $R(\theta', \delta_0) < R(\theta', \delta)$*. Nesse caso, dizemos que* δ_0 *domina* δ*. O estimador* δ_0 *é* ***admissível*** *se (e somente se) não há nenhum estimador que o domine.*

Observação 12 (Estimadores admissíveis e o Teorema de Rao-Blackwell)

O Teorema de Rao-Blackwell diz que todo estimador condicionado em uma estatística suficiente é admissível.

Exemplo 11 (Estimadores no caso normal)

- *Estimando* μ *através da mediana amostral;*
- *Estimando* $\sqrt{\sigma^2}$.

O que aprendemos?

- Teorema de Rao-Blackwell;
  "Quando $\boldsymbol{T}$ é uma estatística suficiente, todo estimador condicionado em $\boldsymbol{T}$ tem menor EQM"
- Estimador admissível;
  "Um estimador é admissível quando domina todos os outros estimadores "
- Caso normal;
  "No caso normal, qualquer estimador de μ que não seja função de $\bar{X}_n$ é inadmissível. O mesmo vale para qualquer estimador de $\sqrt{\sigma^2}$ que não seja função de $\sum_{i=1}^n X_i$ e $\sum_{i=1}^n X_i^2$."

Leitura recommendada

- De Groot, seção 7.9;
- * Casella & Berger (2002), seção 7.3.
- * Schervish (1995), Teorema 3.20.
- **Exercícios recomendados**
  - De Groot, Seção 7.9: exercícios 2, 3, 6 e 10.