

Bayes vs EMV

Argumentos assintóticos:

$$L(\theta) \approx \exp \left[-\frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{2V_n(\theta)/n} \right].$$

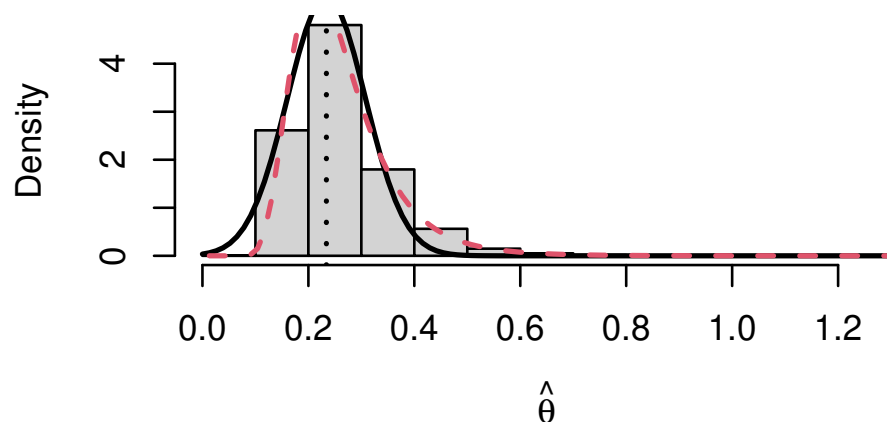
Exemplo 8 (Exemplo 7.6.11 em De Groot)

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Exponencial}(\theta),$

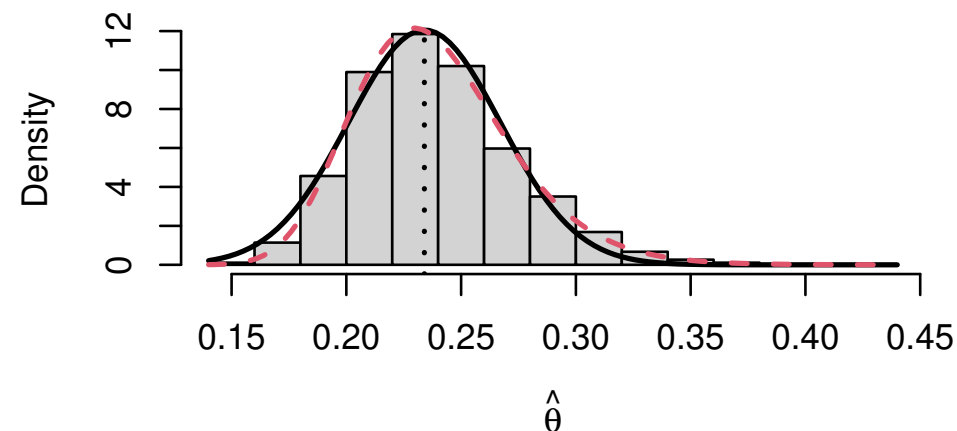
- $\hat{\theta}_{EMV} = (\bar{X}_n)^{-1} \implies E[\hat{\theta}_{EMV}] = \theta$ e $\text{Var}[\hat{\theta}_{EMV}] = \theta^2$. Pelo método Delta, temos $\hat{\theta}_{EMV} \approx \text{Normal}(\theta, \theta^2/n)$;
- Se escolhermos uma priori gama para θ com hiperparâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, temos $E_{\theta|x}[\theta] = (\alpha + n)/(\beta + S_n)$ e $\text{Var}_{\theta|x}(\theta) = (\alpha + n)/(\beta + S_n)^2$. Fazendo $\alpha, \beta \ll n$, temos um argumento análogo para o estimador de Bayes.

EMV para taxa de uma exponencial (DG ex. 7.6.11)

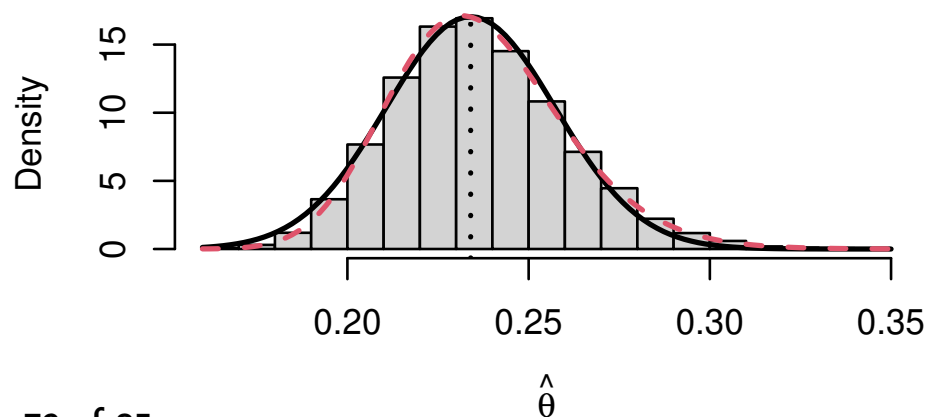
Tamanho de amostra = 10



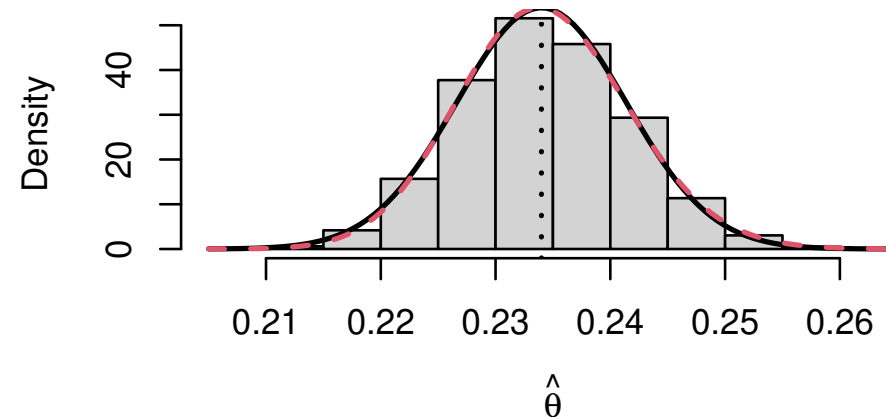
Tamanho de amostra = 50



Tamanho de amostra = 100



Tamanho de amostra = 1000



Inferência para uma Uniforme em $(0, \theta)$

Exemplo 9 (Exemplo 7.6.14 em De Groot)

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Uniforme}(0, \theta)$. Definindo $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ temos

$$g_n(y \mid \theta) = n \frac{y^{n-1}}{\theta^n}.$$

Como já discutido, temos $\hat{\theta}_{EMV} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_n$ e portanto

- $E[\hat{\theta}_{EMV}] = \frac{n}{n+1}\theta$;
- $\text{Var}(\hat{\theta}_{EMV}) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2$.

Do lado bayesiano, vamos obter a posteriori (com uma priori imprópria):

$$\xi(\theta \mid \mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{(n-1)y_n^{n-1}}{\theta^n}, & y_n < \theta, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (17)$$

Isto nos leva a

- $E[\hat{\theta}_{Bayes}] = \frac{n-1}{n-2}y_n$;
- $\text{Var}(\hat{\theta}_{Bayes}) = \frac{n-1}{(n-2)^2(n-3)}y_n^2$.

Método dos momentos (MM)

Algumas vezes, obter o EMV ou o estimador de Bayes envolve dificuldades numéricas (ex. estimar os parâmetros de uma distribuição Gama). Nestas situações, podemos encontrar um estimador para os parâmetros que relacione os momentos empíricos com os teóricos.

Definição 22 (Método dos momentos)

Suponha que X_1, X_2, \dots, X_n formam uma amostra aleatória com distribuição conjunta $f_n(X_1, X_2, \dots, X_n \mid \theta)$, $\theta \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ e que o k -ésimo momento existe. Defina $\mu_j(\theta) = E[X_1^j \mid \theta]$ e suponha que $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ é biúnivoca, de modo que sua inversa é

$$\theta = M(\mu_1(\theta), \dots, \mu_k(\theta)).$$

*Dados os momentos amostrais $m_j := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^j$, $j = 1, \dots, k$, o **estimador de momentos (EMM)** de θ é*

$$\hat{\theta}_{EMM} = M(m_1, \dots, m_k).$$

Exemplo

Exemplo 10

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$, com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ desconhecidos. Para começar,

- $\mu_1(\theta) = \alpha/\beta$;
- $\mu_2(\theta) = (\alpha + 1)\alpha/\beta^2$.

Agora equacionamos com os momentos amostrais (“empíricos”): $\mu_1(\theta) = \bar{x}_n$ e $\mu_2(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ para obter

- $\hat{\alpha} = \frac{(\bar{x}_n)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x}_n)^2} = \frac{(\bar{x}_n)^2}{\bar{s}^2}$;
- $\hat{\beta} = \frac{\bar{x}_n}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x}_n)^2} = \frac{\bar{x}_n}{\bar{s}^2}$.

Observação 7

O método dos momentos também pode ser usado para obter chutes iniciais para procedimentos numéricos nos métodos mais avançados (EMV, Bayes).

Consistência do EMM

Teorema 13

Suponha que X_1, X_2, \dots, X_n formam uma amostra aleatória com distribuição conjunta $f_n(X_1, X_2, \dots, X_n \mid \theta)$, $\theta \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ e que o k -ésimo momento existe. Mais uma vez, suponha que a inversa M existe e é contínua. Então o EMM é consistente para θ .


Prova: Pela LGN, $m_i \xrightarrow{p} \mu_i(\theta)$. Assumindo que M é contínua, temos que $M(m_1, \dots, m_k) \xrightarrow{p} M(\mu_1(\theta), \dots, \mu_k(\theta)) = \theta$ (De Groot, Teorema 6.2.5).

O que aprendemos?

- 💡 EMV vs Bayes;
“Em várias situações, à medida que $n \rightarrow \infty$, os estimadores 'convergem' ”
- 💡 Nem sempre EMV \approx Bayes;
“Verossimilhanças descontínuas e/ou pequenos tamanhos de amostra”
- 💡 Método dos momentos (MM);
“Quando os momentos são funções inversíveis dos parâmetros, podemos obter estimadores em função dos momentos amostrais”
- 💡 Consistência do MM;
“Sob condições brandas de regularidade, o EMM converge para valor verdadeiro à medida que $n \rightarrow \infty$ ”
- 💡 Limitações do MM;
“Raras as situações em que tudo se alinha de modo que o EMM exista em forma fechada”

Leitura recomendada

 De Groot seção 7.6;

 * Schervish (1995), capítulo 7.

- **Exercícios recomendados**

- 🔖 De Groot, seção 7.6: exercícios 20, 22 e 23.