Exercícios de Revisão: A1.

Disciplina: Inferência Estatística
Professor: Luiz Max de Carvalho

13 de Setembro de 2020

0.1 Impropriedades próprias

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória com distribuição normal com parâmetros μ e v, este último desconhecidos. Considere a priori $\xi(v) = v^{-1}$.

(a) A priori em questão é própria?

(b) A posteriori é própria?

(c) Encontre o estimador de Bayes para v sob perda quadrática.

(d) Compare o estimador do item (c) com o EMV para v (derive-o se precisar).

(e) * O estimador de Bayes é viesado? Em caso positivo, encontre a priori que leva a um estimador de Bayes não-viesado .

0.2 A barraca de pamonha da Palmirinha.

Suponha que Palmirinha esteja interessada em estudar quantos clientes chegam à sua loja de pamonha num determinado intervalo. Para isso, ela vai modelar o fenômeno como um processo de Poisson:

$$Y(\Delta_t) \sim \text{Poisson}(\theta\Delta_t),$$

isto é, o número Y de clientes num intervalo de tempo Δ_t tem distribuição Poisson com média $\theta\Delta_t$.

Palmirinha pode

1. Fixar um número n de clientes a serem observados e marcar o tempo, X, que leva para chegarem n clientes ou;
2. Fixar um determinado intervalo de tempo, t, e contar o número, Y, de clientes que chegam neste intervalo.

(a) Compute o estimador de máxima verossimilhança de θ sob os desenhos 1 e 2.

(b) Derive a informação de Fisher sob os dois desenhos e discuta se é possível decidir que desenho utilizar com base nos seus achados.

(c) Elicite uma distribuição *a priori* para θ. Justifique seu raciocínio.

(d) De posse da distribuição *a priori* obtida no item anterior, é possível decidir qual desenho é melhor? Justifique.

0.3 Estimação para uma distribuição Uniforme$(\theta, 2\theta)$.

Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição uniforme definida em $[\theta, 2\theta]$, onde o parâmetro de interesse é $\theta > 0$.

(a) Mostre que $\Pr(X_1 \leq x) = \frac{x}{\theta} - 1$.

(b) Encontre a função de verossimilhança de θ dada uma amostra $x_1, ..., x_n$.

(c) Encontre um estimador de máxima verossimilhança e discuta se devemos utilizar este estimador.

(d) O estimador obtido é admissível? Justifique.

(e) Encontre um estimador de método dos momentos para θ e compare com o estimador obtido no item (c).

0.4 Crescimentos indesejados.

Um efeito colateral comum de esteroids anabolizantes é o ginecoma, crescimento do tecido mamário em homens. Uma grande rede de academias brasileiras avalia condição física de seus usuários que utilizam estes anabolizantes, e monitora este sintoma específicamente. Vamos supor que a probabilidade de gerar este efeito colateral é comum em todos os homens e a amostra de indivíduos é aleatória. Denote $Z_1, Z_2, ...$ variáveis aleatórias que registram se o usuário desenvolveu ginecoma $Z_i = 1$ ou não $Z_i = 0$. Utilizamos a distribuição Bernoulli para modelar este processo, onde a **probabilidade de não desenvolver o sintoma é** θ. Seja

$$X_1 = \min\{n : Z_n = 1\},$$

o número indivíduos avaliados para encontrar o primeiro caso. Logo, $\Pr(X = k; \theta) = \theta^{k-1}(1-\theta)$, $k = 1, 2, ...$ Esta é a *distribuição geométrica*, $\mathcal{G}(\theta)$, e possui $E[X_1] = 1/(1-\theta)$ e $\text{Var}(X_1) = \theta/(1-\theta)^2$.

(a) Mostre que X_1 é uma estatística suficiente para θ.

(b) Encontre o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}_1$ de θ baseado em X_1.

(c) Mostre que o estimador plug-in $\hat{\theta}_1/(1-\hat{\theta}_1)$ é não-enviesado para a razão de chances $\theta/(1-\theta)$.

(d) Usando o mecanismo de Rao-Blackwell você consegue propor um estimador com variância menor? Justifique.

(e) Calcule o limite inferior de Cramér-Rao do MSE para estimadores não-enviesados de $\theta/(1-\theta)$.

0.5 Estimando a área de um cículo.

Um círculo C é desenhado em uma folha de papel quadrada e desejamos estimar a área A deste círculo. Para não gastar muito dinheiro, decidimos medir o diâmetro D da circunferência com uma régua de R$0,50 que compramos na

Uruguaiana e calcular a área através de $\hat{A} = \pi D^2/4$. Dado que as medições são imprecisas, decidimos repetir o experimento n vezes obtendo medidas independentes $D_1, ..., D_n$. Vamos supor que $D_i \sim \text{Normal}(D, \sigma^2)$ com σ^2 conhecida. Suponha que estimamos A utilizando o estimador de método dos momentos,

$$\hat{A} = \frac{\pi \bar{D}^2}{4}.$$

(a) O estimador $\hat{A}$ é enviesado. Calcule o viés e discuta seu comportamento assintótico.

(b) Proponha um estimador não-enviesado $\hat{A}_u$ baseado em $\hat{A}$.

(c) Compare os estimadores $\hat{A}$ e $\hat{A}_u$ e discuta se algum deles é inadmissível.

(d) * Encontre um estimador de menor variância para a área $A = A(D)$ (se baseando no experimento descrito acima).

(e) * Calcule o limite de Cramér-Rao para estimadores não-enviesados de A. O limite é alcançado pelo estimador da questão anterior?