Testes para igualdade de variâncias

- A distribuição F;
- Comparação de variâncias de duas normais;
- Propriedades;
- P-valor;

A distribuição F

Sejam $Y \sim$ Qui-quadrado(m) e $W \sim$ Qui-quadrado(n). Então

$$X = \frac{Y/m}{W/n},$$

tem distribuição F com m e n graus de liberdade, com f.d.p.

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) m^{m/2} n^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{x^{m/2}-1}{(mx+n)^{(}m+n)/2}, \; x > 0.$$

Teorema 32 (Propriedades da distribuição F)

i) *Se* $X \sim F(m, n)$, *então* $\frac{1}{X} \sim F(n, m)$;

ii) *Se* $Y \sim$ Student(n), *então* $Y^2 \sim F(1, n)$.

Prova: Transformação de v.a.s padrão. Exercício para a leitora.

Testando a igualdade de duas variâncias

Suponha $X_i \sim \text{Normal}(\mu_1, \sigma_1^2), i = 1, 2, \ldots, m$ e $Y_j \sim \text{Normal}(\mu_2, \sigma_2^2), j = 1, 2, \ldots, n$. Estamos interessados em testar

$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2,$$
$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

Para isso, vamos computar a estatística de teste

$$V = \frac{S_X^2/(m-1)}{S_Y^2/(n-1)},$$

onde $S_X^2 = \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X}_m)^2$ e $S_Y^2 = \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y}_n)^2$.

Definição 53 (O teste F)

O teste F de homogeneidade (igualdade de variâncias) é o teste δ_c que rejeita H_0 se $V \geq c$, para uma constante positiva c.

Em primeiro lugar, podemos fazer afirmações sobre a distribuição de (uma transformação de) V.

Teorema 33 (A distribuição de V)

Seja $V = \frac{S_X^2/(m-1)}{S_Y^2/(n-1)}$, *então:*

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} V \sim F(m-1, n-1).$$

Além disso, se $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $V \sim F(m-1, n-1)$.

Prova: Notar que S_X^2/σ_1^2 e S_Y^2/σ_2^2 tem distribuição qui-quadrado com $m-1$ e $n-1$ graus de liberdade, respectivamente. Ver Teorema 9.7.3 de DeGroot.

P-valor

Seja $G(x; m-1, n-1)$ a f.d.a. de uma distribuição F com $m-1$ e $n-1$ graus de liberdade. Da mesma forma, defina $G^{-1}(p; m-1, n-1)$ como a f.d.a. inversa. Então, se $V = v$:

- Para a hipótese $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$, o p-valor vale $p = 1 - G(v; m-1, n-1)$;
- Para a hipótese $H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$, o p-valor vale $p = G(v; m-1, n-1)$;
- Para a hipótese bicaudal $H_0 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, o p-valor vale $p = 2\min\{1 - G(v; m-1, n-1), G(v; m-1, n-1)\}$;

Mais propriedades do teste F

Analogamente ao teste t, podemos enunciar o seguinte teorema sobre o teste F.

Teorema 34 (Propriedades do teste F)

Suponha que estamos testando $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$. Então

i) $\pi(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2 \mid \delta_c) = 1 - G\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} c; m-1, n-1\right)$;

ii) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \implies \pi(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2 \mid \delta_c) = \alpha_0$;

iii) $\sigma_1^2 < \sigma_2^2 \implies \pi(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2 \mid \delta_c) < \alpha_0$

iv) $\sigma_1^2 > \sigma_2^2 \implies \pi(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2 \mid \delta_c) > \alpha_0$;

v) $\lim_{\sigma_1/\sigma_2 \to 0} \pi(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2 \mid \delta_c) = 0$;

vi) $\lim_{\sigma_1/\sigma_2 \to \infty} \pi(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2 \mid \delta_c) = 1$;

vii) δ_c *é não-viesado e tem tamanho* α_0.

Prova: Omitida aqui. Ver Teorema 9.7.4 de DeGroot.

O que aprendemos?

- A distribuição F aparece quando tomamos a razão de variáveis aleatórias Qui-quadrado;
- Para comparação das variâncias de duas amostras a estatística teste tem distribuição F com $m - 1$ e $n - 1$ graus de liberdade;
- O teste F, como seu primo o teste t, é não viesado e tem tamanho α_0.

Leitura recomendada

- DeGroot seção 9.7;
- * Casella & Berger (2002), seção 8.
- Próxima aula: De Groot, seção 11;
- **Exercícios recomendados**
  - Derivar a função de densidade de probabilidade de uma distribuição F (Teorema 9.7.1 de DeGroot).
  - Derivar o teste F como um teste de razão de verossimilhanças.