- Hipótese nula e alternativa;
- Hipóteses simples e compostas;
- Região crítica e estatística teste;
- Função poder;
- Tipos de erro (I e II);
- P-valor;

Hipótese nula e alternativa

No teste de hipóteses estatísticas, identificamos partições do espaço de parâmetros que codificam as hipóteses de interesse.

Definição 40 (Hipótese nula e hipótese alternativa)

Considere o espaço de parâmetros Ω e defina $\Omega_0, \Omega_1 \subset \Omega$ de modo que $\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega$ e $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$. Definimos

$$H_0 := \theta \in \Omega_0,$$
$$H_1 := \theta \in \Omega_1.$$

*Dizemos que H_0 é a **hipótese nula** e H_1 é a **hipótese alternativa**.*
Se $\theta \in \Omega_1$, dizemos que rejeitamos a hipótese nula. Por outro lado, se $\theta \in \Omega_0$ dizemos que não rejeitamos ou falhamos em rejeitar H_0.

Exemplo

Suponha que Palmirinha recebeu uma carta da Associação Nacional da Pamonha Gourmet (ANPG), dizendo que a pamonha deve ter, no mínimo, 7 mg/L de concentração de amido. Supondo que a concentração de amido tenha distribuição Normal com parâmetros μ (desconhecido) e σ^2 (conhecido), Palmirinha rabisca num papel:

$$
\begin{aligned}
H_0 &:= \mu \in [7, \infty), \\
H_1 &:= \mu \in (0, 7).
\end{aligned}
$$

Hipóteses simples e compostas

Dependendo do tipo de partição do espaço de parâmetros, as hipóteses recebem classificações diferentes.

Definição 41 (Hipótese simples e hipótese compostas)

Dizemos que uma hipótese H_i, é ***simples****, se $\Omega_i = \{\theta_i\}$, isto é, se a partição correspondente é um ponto. Uma hipótese é dita* ***composta*** *se não é simples.*

Exemplo 17 (Hipótese simples sobre a média)

Suponha que estamos estudando o efeito de uma droga na redução da pressão arterial. Modelamos esta redução como uma variável aleatória X com esperança $E[X] =: \theta$. É costumaz testar a hipótese $H_0 : \theta = 0$, que chamamos, especificamente nesse caso, de "hipótese de efeito nulo".

Hipótese unilateral e hipótese bilateral

Em analogia com os intervalos de confiança, também podemos entender as hipóteses como sendo unilaterais ou bilaterais.

Definição 42 (Hipótese unilateral e hipótese bilateral)

Uma hipótese da forma $H_0 : \theta \leq \theta_0$ *ou* $H_0 : \theta \geq \theta_0$ *é dita unilateral ("one-sided"), enquanto hipóteses da forma* $H_0 : \theta \neq \theta_0$ *são ditas bilaterais ("two-sided").*

Observação 20 (Hipóteses bilaterais como consequência de H_0 simples)

Se H_0 *é simples, a hipótese alternativa* H_1 *será, em geral, bilateral.*

Região crítica: exemplo motivador

Exemplo 18 (Teste para a média de uma Normal com variância conhecida)

Suponha que $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *é uma amostra aleatória de uma Normal com média* μ *e variância* σ^2 *conhecida. Queremos testar a hipótese*

$$\begin{aligned} H_0 &:= \mu = \mu_0 \\ H_1 &:= \mu \neq \mu_0. \end{aligned}$$

Intuitivamente, queremos rejeitar H_0 *se* $\bar{X}_n$ *está longe de* μ_0*. Para isso definimos*

$$S_0 := \left\{\boldsymbol{x} : -c \leq \bar{X}_n - \mu_0 \leq c\right\},$$

de modo que $S_1 = S_0^C$*. Então, seguimos o procedimento:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} \in S_1 &\implies \text{rejeitar } H_0, \\ \boldsymbol{X} \in S_0 &\implies \text{não rejeitar } H_0. \end{aligned}$$

Região crítica e região de rejeição

Uma maneira mais simples de expressar o procedimento acima é definir $T := |\bar{X}_n - \mu_0|$ e rejeitar H_0 se $T \geq c$.

Definição 43 (Região crítica)

O conjunto

$$S_1 := \left\{ \boldsymbol{x} : |\bar{X}_n - \mu_0| \geq c \right\},$$

é chamado de ***região crítica*** *do teste.*

Analogamente, considere a estatística $T = r(\boldsymbol{X})$ e tome $R \subseteq \mathbb{R}$. Então podemos definir

Definição 44 (Região de rejeição)

Se $R \subseteq \mathbb{R}$ é tal que dizemos que "rejeitamos H_0 se $T \in R$", então R é chamada uma ***região de rejeição*** *para a estatística T e o teste associado.*

Começamos com uma observação:

Observação 21 (Correspondência entre região crítica e região de rejeição)

Podemos relacionar os conceitos de região crítica e região de rejeição notando queremos

$$S_1 := \{\boldsymbol{x} : r(\boldsymbol{x}) \in R\} .$$

Ideia 4 (Dividindo o espaço amostral e o espaço de parâmetros)

Suponha que temos um modelo estatístico dado pela distribuição $f(x \mid \theta)$, com $x \in \mathcal{X}$ e $\theta \in \Omega$. Desta forma, uma amostra aleatória $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ mora em $\mathcal{X}^n$. Para formular uma hipótese estatística, estabelecemos uma partição do espaço de parâmetros Ω em Ω_0 e Ω_1 disjuntos. Isto, por sua vez, induz uma partição $S_0, S_1 \in \mathcal{X}^n$. Estes objetos, embora, relacionados, ***não são a mesma coisa****. Por exemplo, nós observamos se $\boldsymbol{X} \in S_0$ ou $\boldsymbol{X} \in S_1$, mas raramente "observamos" se $\theta \in \Omega_0$ ou $\theta \in \Omega_1$.*

Leitura recomendada

- De Groot seção 9.1;
- Próxima aula: De Groot, seção 9.1 (razão de verossimilhanças);
- **Exercícios recomendados**
  - De Groot.

    Seção 9.1: 3, 8 e 13.