Razões de verossimilhanças

- Intervalos de confiança e testes;
- Razões de verossimilhanças

Intervalos de confiança $\equiv$ testes

De posse de um intervalo de confiança, podemos testar hipóteses sobre uma função dos parâmetros, $g(\theta)$, como mostra o seguinte teorema:

Teorema 27 (Intervalos de confiança e testes são equivalentes)

Suponha que dispomos de dados $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ com f.d.p. comum $f(x \mid \theta)$, e estamos interessados em testar as hipóteses:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: g(\theta) = g_0, \\
H_1 &: g(\theta) \neq g_0,
\end{aligned}
$$

de modo que existe um teste δ_{g_0} com nível α_0 destas hipóteses. Para cada $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$, defina

$$
w(\boldsymbol{x}) = \{g_0 : \delta_{g_0} \text{ não rejeita } H_0 \text{ dado que } \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\}.
$$

Fazendo o nível de confiança do intervalo $\gamma = 1 - \alpha_0$, temos

$$
\Pr\left(g(\theta_0) \in w(\boldsymbol{X}) \mid \theta = \theta_0\right) \geq \gamma, \ \forall \theta_0 \in \Omega.
$$

Prova: Notar que $\Pr\left(\delta_{g_0} \text{ não rejeita } H_0 \mid \theta = \theta_0\right) \geq \alpha_0 = 1 - \gamma$ e concluir que $w(\boldsymbol{X})$ é uma região de crítica para δ_{g_0}. Ver Teorema 9.1.1 de DeGroot.

Conjunto de confiança

O conjunto $w(\boldsymbol{X})$ definido acima pode ser entendido como um conjunto de confiança para $g(\theta)$.

Definição 49 (Conjunto de confiança)

Se um conjunto aleatório $w(\boldsymbol{X})$ satisfaz

$$\Pr\left(g(\theta_0) \in w(\boldsymbol{X}) \mid \theta = \theta_0\right) \geq \gamma,$$

*para todo $\theta_0 \in \Omega$, então chamamos $w(\boldsymbol{X})$ de um **conjunto de confiança** para $g(\theta)$.*

Isso nos leva ao seguinte teorema

Teorema 28 (Testando hipóteses a partir de conjuntos de confiança)

Suponha que dispomos de dados $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ com f.d.p. comum $f(x \mid \theta)$ e que $w(\boldsymbol{X})$ é um conjunto de confiança para uma função de interesse $g(\theta)$. Então para todo valor g_0 assumido por $g(\theta)$ existe um teste δ_{g_0}, de nível α_0 que rejeita $H_0 : g(\theta) = g_0$ se e somente se $g(\theta_0) = g_0 \notin w(\boldsymbol{X})$.

Prova: Trivial. Ver DeGroot, Teorema 9.1.2.

Exemplo

Vamos aplicar os conceitos discutidos ao caso Normal com variância conhecida.

Exemplo 21 (Teste para média da Normal com variância conhecida)

Suponha que $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *formam uma amostra aleatória de uma distribuição Normal com média* μ *e variância* σ^2*, conhecida. Considere testar a hipótese*

$$H_0 : \mu = \mu_0,$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Seja $\alpha_0 = 1 - \gamma$. *Lembre-se de que o teste de tamanho* α_0, δ_{μ_0} *é rejeitar* H_0 *se* $|\bar{X}_n - \mu_0| \geq c$, $c := \Phi^{-1}(1 - \alpha_0/2)\,\sigma\sqrt{n}$. *Esta última desigualdade pode ser manipulada algebricamente para obter o intervalo de confiança exato*

$$(A(\boldsymbol{X}), B(\boldsymbol{X})) = \left(\bar{X}_n - c, \bar{X}_n + c\right),$$

de modo que $\Pr(A(\boldsymbol{X}) < \mu_0 < B(\boldsymbol{X}) | \mu = \mu_0) = \gamma$.

Testes unicaudais e bi-caudais

Da mesma forma que intervalos de confiança podem ser uni- ou bilaterais. Considere testar a hipótese

$$H_0 : g(\theta) \geq g_0,$$
$$H_1 : g(\theta) < g_0.$$

Podemos testar esta hipótese a partir de um intervalo de confiança da forma $I_l = (A(\boldsymbol{X}), \infty)$: se $g(\theta) \notin I_l$ então rejeitamos H_0.

Testes de razão de verossimilhanças

Considere testar

$$H_0 : \theta \in \Omega_0,$$
$$H_1 : \theta \in \Omega_1.$$

Em certas situações, podemos utilizar a função de verossimilhança para quantificar a evidência em favor de H_0.

Definição 50 (Teste de razão de verossimilhanças)

A estatística

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \Omega_0} f_n(\boldsymbol{x} \mid \theta)}{\sup_{\theta \in \Omega} f_n(\boldsymbol{x} \mid \theta)},$$

é chamada uma ***estatística de razão de verossimilhanças****. Um* ***um teste de razão de verossimilhanças****, δ_k é um teste que rejeita H_0 se $\Lambda(\boldsymbol{x}) \leq k$ para uma constante k.*

Teste de razão de verossimilhanças para a binomial

Exemplo 22 (Teste de razão de verossimilhanças para uma hipótese simples)

Suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *são uma amostra aleatória de uma distribuição Bernoulli com parâmetro* p. *Assim, temos* $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *e* Y Binomial(n, p). *Considere testar a hipótese* $H_0 : p = p_0, H_1 : p \neq p0$. *Depois de observamos* $Y = y$, *a função de verossimilhança é*

$$f(\boldsymbol{x} \mid p) = \Pr(Y = y \mid p) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}.$$

Como neste exemplo $\Omega_0 = \{p_0\}$ *e* $\Omega_1 = (0,1) \setminus \{p_0\}$,

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p_0^y (1-p_0)^{n-y}}{\sup_{p \in (0,1)} p^y (1-p)^{n-y}}.$$

O supremo no denominador é atingido no EMV, $\hat{p} = y/n$, *de modo que*

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{np_0}{y}\right)^y \left(\frac{n(1-p_0)}{n-y}\right)^{n-y}.$$

Para mais detalhes, ver código no repositório do curso.

Um teorema útil

Sob certas condições de regularidade, podemos fazer afirmações sobre a distribuição assintótica de $\log \Lambda(\boldsymbol{X})$.

Teorema 29 (Distribuição assintótica da estatística de razão de verossimilhanças)

Suponha que temos um espaço de parâmetros com k coordenadas, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ e desejamos testar a hipótese (simples) da forma

$$H_0 : \theta_j = \theta_0^j,$$
$$H_1 : \theta_j \neq \theta_0^j, j = 1, 2, \ldots, k.$$

Então, sob condições de regularidade, temos que

$$-2 \log \Lambda(x) \xrightarrow{d} \chi^2(k),$$

à medida que $n \to \infty$.

Prova: Avançada, não será dada aqui. Ver Teorema 9.1.4 de DeGroot. Para a demonstração, ver Teorema 7.125 de Schervish (1995).

Leitura recommendada

- De Groot seção 9.1;
- * Schervish (1995), capítulos 4.5.5 e 7.5 .
- * Casella & Berger (2002), seção 8.2.
- Próxima aula: De Groot, seção 9.5;
- **Exercícios recomendados**
  - De Groot, seção 9.1: exercicios 3, 8 e 13.