

## Tópicos da aula

---

- Estimador de máxima verossimilhança (EMV);
  - ◇ Existência e unicidade;
  - ◇ Invariância do EMV;
  - ◇ Consistência do EMV;
- Limitações;

## Estimador de máxima verossimilhança (EMV)

### Definição 21 (Estimador de máxima verossimilhança)

*Para cada possível vetor (de observações)  $x$ , seja  $\delta(x) \in \Omega$  um valor de  $\theta \in \Omega$  de modo que a função de verossimilhança,  $L(\theta) \propto f(x | \theta)$ , atinge o máximo.*

*Dizemos que  $\hat{\theta} = \delta(X)$  é o **estimador de máxima verossimilhança** de  $\theta$  (Fisher, 1922)<sup>8</sup>. Quando observamos  $X = x$ , dizemos que  $\delta(x)$  é uma estimativa de  $\theta$ .*

*Dito de outra forma,*

$$\max_{\theta \in \Omega} f(X | \theta) = f(X | \hat{\theta}).$$

---

<sup>8</sup>Ronald Aylmer Fisher (1890-1962), biólogo e estatístico inglês. Para a história do desenvolvimento do EMV, ver [Aldrich \(1997\)](#).

## Mudando de paradigma

---

Na Definição 21, vemos  $\theta$  com um número real que indexa a distribuição de probabilidade conjunta dos dados.

- Poderíamos trocar<sup>9</sup>  $f(x | \theta)$  por  $f(x; \theta)$ ;
- Com o EMV, procuramos um valor de  $\theta$  de modo que a probabilidade de observarmos  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$  seja máxima;
- Isso não nos diz nada sobre o quão provável  $\hat{\theta}$  é;
- $\theta$  não é uma quantidade aleatória, portanto não admite afirmações probabilísticas.

---

<sup>9</sup>Mas não vamos, pois a notação fica clara em quase todos os contextos.

## Exemplos

---

- Exponencial;
- Bernoulli;
- Normal;
  - ◇  $\mu$  desconhecida,  $\sigma^2$  conhecida;
  - ◇  $\mu$  conhecida,  $\sigma^2$  desconhecida;
  - ◇  $\mu$  e  $\sigma^2$  ambas desconhecidas.

## EMVs

---

- Exponencial:  $\hat{\theta} = 1/\bar{X}_n$ ;
- Bernoulli  $\hat{\theta} = \bar{X}_n$ ;
- Normal;
  - ◇  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ ;
  - ◇  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ ;
  - ◇  $\hat{\theta} = \left\{ \hat{\mu} = \bar{X}_n, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \right\}$ .

## EMV para uma distribuição uniforme

### Exemplo 5 (EMV para uniforme)

Suponha que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  perfazem uma amostra aleatória de uma distribuição uniforme no intervalo  $[0, \theta]$ ,  $\theta \in \mathbb{R}, \theta > 0$ . Considere a f.d.p.

$$f(x | \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (12)$$

A f.d.p. conjunta é

$$f_n(\mathbf{x} | \theta) = \begin{cases} \theta^{-n}, & 0 \leq x_i \leq \theta \ (i = 1, 2, \dots, n), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (13)$$

e o EMV é  $\hat{\theta} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

## Existência do EMV

### Observação 5

*A existência do EMV pode depender de detalhes irrelevantes acerca do espaço de parâmetros,  $\Omega$ .*

### Exemplo 6 (Não existência do EMV)

*Considere o Exemplo 5, mas agora com uma f.d.p. um pouco diferente:*

$$f(x | \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (14)$$

*É fácil mostrar que, nesse caso, o EMV não existe.*

## Unicidade do EMV

### Observação 6 (Unicidade do EMV)

*Mesmo quando existe, o EMV nem sempre é único.*

### Exemplo 7 (EMV para uma uniforme num intervalo de tamanho 1)

*Suponha que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  perfazem amostra aleatória de uma distribuição uniforme no intervalo  $[\theta, \theta + 1]$ . A densidade conjunta é*

$$f_n(\mathbf{x} \mid \theta) = \begin{cases} 1, & \theta \leq x_i \leq \theta + 1, (i = 1, 2, \dots, n), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (15)$$

*Defina  $m := \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $M := \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Podemos reescrever (15) como*

$$f_n(\mathbf{x} \mid \theta) = \begin{cases} 1, & M - 1 \leq \theta \leq m, (i = 1, 2, \dots, n), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (16)$$

**Conclusão:**  $\hat{\theta}$  é qualquer valor no intervalo  $[M - 1, m]$ .



## Invariância do EMV

Suponha que estamos interessados em uma transformação do parâmetro  $\theta$ ,  $\phi(\theta)$ . Por exemplo, se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são Bernoulli com parâmetro  $p$ , podemos estar interessados na *chance*  $\omega = \phi(p) = p/(1 - p)$ .

### Teorema 11 (Invariância do EMV)

*Considere uma função  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $\hat{\theta}$  é um EMV para  $\theta$ , então  $\phi(\hat{\theta})$  é um EMV para  $\omega = \phi(\theta)$ .*

**Prova:** Defina a *verossimilhança induzida*:

$$L^*(\omega) := \sup_{\{\theta: \phi(\theta)=\omega\}} L(\theta),$$

e note que o supremo desta função sobre  $\Omega$  é precisamente o EMV. Ver Casella & Berger, Teorema 7.2.10 (pág. 320) ou De Groot, Teorema 7.6.2 (pág 427).

**Exemplo:** O EMV para o quadrado da média de uma normal,  $\mu^2$ , é  $\bar{X}_n^2$ .

## Consistência do EMV

Sob condições de regularidade, o EMV é consistente, isto é  $\hat{\theta}_{EMV} \rightarrow \theta$ .

### Teorema 12 (Consistência do EMV)

Defina  $l(\theta) := \log f_n(\mathbf{x} \mid \theta)$  e assumamos que  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim f(\theta_0)$ , isto é, que  $\theta_0$  é o valor verdadeiro do parâmetro. Denote  $E_{\theta_0}[g] := \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, \theta) f(\mathbf{x} \mid \theta_0) d\mathbf{x}$ . Suponha que

- $f(x_i \mid \theta)$  tem o mesmo suporte;
- $\theta_0$  é ponto interior de  $\Omega$ ;
- $l(\theta)$  é diferenciável;
- $\hat{\theta}_{EMV}$  é a única solução de  $l'(\theta) = 0$ .

Então,

$$\hat{\theta}_{EMV} \rightarrow \theta.$$

**Prova:** (rascunho) mostrar que, para todo  $\theta \in \Omega$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log f(X_i \mid \theta) \rightarrow E_{\theta_0} [\log f(\mathbf{X} \mid \theta)],$$




e aplicar a desigualdade de Jensen.

## O que aprendemos?

- 💡 Estimador de máxima verossimilhança (EMV);  
“Encontrar o valor do parâmetro que maximiza a probabilidade observar os dados obtidos”
- 💡 Invariância ;  
“O EMV é invariante a transformações dos parâmetros; se  $\hat{\theta}$  é o EMV para  $\theta$ ,  $\psi(\hat{\theta})$  é o EMV para  $\psi(\theta)$ ”
- 💡 Consistência;  
“Sob condições brandas de regularidade, o EMV converge para valor verdadeiro à medida que  $n \rightarrow \infty$ ”
- 💡 Limitações;  
“O EMV não existe necessariamente, e, mesmo quando existe, não precisa ser único”

## Leitura recomendada

---

-  De Groot seções 7.5 e 7.6;
-  \* Casella & Berger, seção 7.2.2.
-  \* Schervish (1995), seção 5.1.3.

- **Exercícios recomendados**

-  De Groot,

- Seção 7.5: exercícios 1, 4, 9 e 10;

- Seção 7.6: exercícios 3, 5 e 11.