Um estudo elementar sobre as curvas *Geodésicas*

Caio Lins

9 de junho de 2022

Conteúdo

1 Introdução

Neste trabalho, vamos definir o conceito de geodésica e estudar suas propriedades mais elementares, culminando com a demonstração de sua existência e unicidade. A exposição foi integralmente baseada no capítulo 4 de [1]. Apesar de não chegarmos a abordar esta parte, é importante enfatizar que o interesse sobre geodésicas vem do fato de que, *localmente*, elas minimizam o comprimento de caminhos entre pontos na superfície. Isso poderá ser visualizado quando mostrarmos alguns exemplos de geodésicas. Antes de tudo, porém, vamos apenas revisar um pouco da notação, bem como um teorema, que serão utilizados.

Denotamos o produto vetorial entre dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^3$ por $v \times w$. A esfera unitária em $\mathbb{R}^3$, isto é, o conjunto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ será denotada por $\mathbb{S}^2$. Quando escrevermos, por exemplo, $t \mapsto t^2$, estaremos fazendo referência à *função* que mapeia um número t ao número t^2. Além disso, dada uma função f, a notação $f \equiv 0$ significa que f é *identicamente nula*, ou seja, $f(x) = 0$ para todo x no domínio de f. Por fim, relembramos o enunciado do teorema que garante a existência e unicidade das soluções de uma equação diferencial ordinária:

Teorema. *Seja $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado com $(t_0, u_0) \in D$. Seja $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua em t e Lipschitz contínua em y. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que a equação*

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

junto com a restrição $y(t_0) = y_0$ tem uma solução única no intervalo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

2 Isometrias

Quando estamos trabalhando com aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, isometrias são aquelas que preservam o comprimento de vetores. Ao mudar o ambiente de trabalho para superfícies, a definição de isometria faz referência à derivada da aplição e, consequentemente, aos espaços tangentes a essas superfícies. Mais explicitamente, temos:

Definição 1 (Isometria)**.** Dadas superfícies regulares S_1 e S_2, dizemos que uma aplicação $f : S_1 \to S_2$ é uma *isometria* se é um difeomorfismo e, para todo $p \in S_1$ e todos $w, v \in T_pS_1$ temos

$$\langle df_p w, df_p v \rangle = \langle w, v \rangle. \tag{1}$$

Ainda, dizemos que $f : S_1 \to S_2$ é uma *isometria local* se, para todo $p \in S_1$ existem abertos $V_1 \subseteq S_1$ e $V_2 \subseteq V_2$, tais que $p \in V_1, f(p) \in V_2$ e $f\,|_{V_1}\colon V_1 \to V_2$ é uma isometria.

Finalmente, duas superfícies regulares são ditas *isométricas* se existe uma isometria entre elas.

Agora, alguns comentários. Observe que, se f é isometria local e difeomorfismo, então é isometria. Também perceba que, pela *identidade de polarização*:

$$\langle w, v \rangle = \frac{\|w+v\|^2 - \|w-v\|^2}{4}$$

a condição (1) é equivalente a termos

$$\|df_p w\| = \|w\| \tag{2}$$

para todo $w \in T_pS_1$.

Observe, ainda, que se $f : S_1 \to S_2$ cumpre (2) (ou, equivalentemente, (1), pelo que acabamos de mostrar), então, para todo $p \in S_1$, temos que df_p é um isomorfismo. De fato, a injetividade vem do fato de que se $df_p w = df_p v$, então

$$\|w - v\| = \|df_p(w - v)\| = \|df_p w - df_p v\| = 0,$$

de modo que $w = v$. Agora, como $2 = \dim T_{f(p)}S_2 \geq \dim df_p(T_pS_1) = 2$, necessariamente temos $T_{f(p)}S_2 = df_p(T_pS_1)$, ou seja, df_p é sobrejetiva. Dessa forma, pelo Teorema da Função Inversa, para cada $p \in S_1$ existem vizinhanças $V_1 \ni p$ e $V_2 \ni f(p)$ em S_1 e S_2, respectivamente, tais que $f\,|_{V_1}\colon V_1 \to V_2$ é difeomorfismo. Ou seja, f é isometria local.

Com isso, provamos a seguinte proposição, que caracteriza as isometrias locais.

Proposição 1. *Uma aplicação entre superfícies regulares é uma isometria local se, e somente se, preserva a primeira forma fundamental.*

Dado esse resultado, podemos esperar que isometrias locais preservem, de uma certa forma, os coeficientes da primeira forma fundamental. Isso de fato ocorre, como podemos ver na seguinte proposição:

Proposição 2. *Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares, $f : S_1 \to S_2$ uma isometria local e $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S_1$ uma parametrização local de S_1, cuja imagem $X(U) := V$ é um aberto de S_1 tal que $f\ |_V\colon V \to f(V) \subseteq S_2$ é uma isometria. Sob essas hipóteses, $Y = f \circ X : U \to S^2$ é uma parametrização local de S_2, cujos coeficientes da primeira forma fundamental coincidem com aqueles da parametrização X.*

Demonstração. Como a composição de difeomorfismos é um difeomorfismo e tanto $f\ |_V$ quanto X são difeomorfismos, temos que Y é uma parametrização local de S_2. Além disso, como a restrição de f a V é uma isometria, temos, para todo $(u, v) \in U$:

$$\begin{aligned}\langle Y_u(u,v), Y_u(u,v)\rangle &= \langle (f \circ X)_u(u,v), (f \circ X)_u(u,v)\rangle \\ &= \langle df_{X(u,v)} X_u(u,v), df_{X(u,v)} X_u(u,v)\rangle \\ &= \langle X_u(u,v), X_u(u,v)\rangle.\end{aligned}$$

Ou seja, o coeficiente E da primeira forma fundamental é preservado. Analogamente demonstra-se que

$$\langle Y_u, Y_v\rangle = \langle X_u, X_v\rangle \quad \text{e} \quad \langle Y_v, Y_v\rangle = \langle X_v, X_v\rangle.$$

Com isso, todos os coeficientes da primeira forma fundamental são preservados, como queríamos demonstrar. □

3 Geodésicas

Definição 2. Uma curva parametrizada diferenciável em uma superfície regular S, $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to S$, é dita uma *geodésica parametrizada* se seu vetor aceleração é sempre perpendicular ao espaço tangente da superfície, ou seja, se para todo $p = \gamma(t) \in \gamma(I)$ temos $\gamma''(t) \in \left\{T_{\gamma(t)}S\right\}^{\perp}$. Analogamente, uma curva regular $C \subset S$ é dita uma *geodésica* de S se, para todo ponto $p \in C$, existe uma parametrização local $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to C$, de C em p, tal que γ é uma geodésica parametrizada.

Ressaltamos que, por uma questão de economia, por vezes nos referiremos a geométricas parametrizadas apenas como geodésicas.

A seguir, algumas propriedades fundamentais das curvas geodésicas:

Proposição 3. *A norma do vetor velocidade de toda geodésica parametrizada é uma função constante.*

Demonstração. Seja $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to S$ uma geodésica parametrizada. De fato, como $\|\gamma'(t)\|^2 = \langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle$ para todo $t \in I$, derivando essa função com relação a t obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\gamma(t)\|^2 = 2\langle \gamma'(t), \gamma''(t)\rangle = 0,$$

para todo $t \in I$, pois, por definição, $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}S$ e $\gamma''(t) \in \left\{T_{\gamma(t)}S\right\}^{\perp}$. Assim, $\|\gamma(t)\|^2$ (e, portanto, $\|\gamma(t)\|$) é constante. $\square$

É interessante perceber que essa proposição implica em toda curva geodésica parametrizada ser ou uma curva regular (caso $\|\gamma'(t)\| \neq 0$) ou uma função constante (caso $\|\gamma'(t)\| = 0$). A próxima proposição mostra qual condição deve ser imposta sobre uma curva com velocidade constante em norma para que valha a volta.

Proposição 4 (Caracterização das Geodésicas)**.** *Sejam $N : S \to \mathbb{S}^2$ uma aplicação normal de gauss de uma superfície regular orientável S e $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to S$ uma curva diferenciável, cujo vetor velocidade tem norma constante. Então γ é uma geodésica se, e somente se,*

$$\langle \gamma''(t), (N \circ \gamma)(t) \times \gamma'(t) \rangle = 0 \tag{3}$$

para todo $t \in I$.

Demonstração. Supondo que γ é, de fato, geodésica, veja que, como $\dim T_pS = 2$ para todo $p \in S$, a dimensão de $\{T_pS\}^{\perp}$ é 1. Logo, $\gamma''(t)$ é paralelo a $(N \circ \gamma)(t)$ para todo $t \in I$, pois ambos pertencem a $\{T_pS\}^{\perp}$. Assim, como $(N \circ \gamma)(t) \times \gamma'(t)$ é perpendicular a $(N \circ \gamma)(t)$, também é a $\gamma''(t)$.

De maneira recíproca, suponha que valha (3) para todo $t \in I$. A hipótese de $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$ ser uma função constante nos restringe a duas possibilidades. Caso $\gamma' \equiv 0$, temos que γ é uma função constante, de modo que é geodésica, como pode-se facilmente verificar. Caso $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t, vamos mostrar a intuição por trás da condição (3). Veja que o conjunto $\{\gamma'(t), (N \circ \gamma)(t), (N \circ \gamma)(t) \times \gamma'(t)\}$ forma uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, pois, por definição, cada um de seus elementos é ortogonal aos outros dois. Agora, perceba se queremos que $\gamma''(t)$ seja paralelo a $(N \circ \gamma)(t)$ e, portanto, uma geodésica, basta que ele seja ortogonal aos outros dois elementos da base de $\mathbb{R}^3$ que apresentamos! A ortogonalidade a $\gamma'(t)$ já temos, pelo mesmo argumento empregado na demonstração da Proposição 3, devido à norma constante de γ', e a ortogonalidade a $(N \circ \gamma)(t) \times \gamma'(t)$ é tomada como hipótese! Com isso, terminamos a prova. $\square$

Nosso objetivo a seguir será demonstrar que geodésicas de fato existem e são únicas a partir de um ponto e numa dada direção e, além disso, sua invariância por isometrias locais. Para tanto, suporemos dados uma superfície regular orientável S, sobre a qual temos uma aplicação normal de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$ e uma parametrização local $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$. Com isso, para cada $(u, v) \in U$ temos uma base de $\mathbb{R}^3$ dada por $\{X_u(u, v), X_v(u, v), (N \circ X)(u, v)\}$.

Dessa forma, podemos representar as funções vetoriais X_{uu}, X_{vv}, X_{uv} como combinações lineares dessas bases. Aos coeficientes dessas combinações damos nomes específicos, como explicitamos a seguir:

$$\begin{cases} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + aN \\ X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + bN \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + cN \end{cases} . \tag{4}$$

Os coeficientes Γ_{ij}^k, os quais são funções definidas em U, são chamados de *símbolos de Christoffel* de S relativos à parametrização X. Para determiná-los, vamos explorar os coeficientes da primeira forma fundamental. Na primeira equação, tomemos o produto interno com respeito a X_u e, também, o produto interno com respeito a X_v, obtendo as equações

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 \quad \text{e} \quad \langle X_{uu}, X_v \rangle = F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2,$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental. Para determinar os produtos internos no lado esquerdo, diferenciamos os coeficientes da primeira forma fundamental. Primeiro, temos

$$E_u = \frac{\partial}{\partial u} \langle X_u, X_u \rangle = 2\langle X_{uu}, X_u \rangle,$$

de onde concluímos

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{E_u}{2}.$$

De maneira análoga, fazemos

$$E_v = \frac{\partial}{\partial v} \langle X_u, X_u \rangle = 2\langle X_{uv}, X_u \rangle, \tag{5}$$

bem como

$$F_u = \frac{\partial}{\partial u} \langle X_u, X_v \rangle = \langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{uv} \rangle. \tag{6}$$

Logo, multiplicando (6) por 2 e substituindo (5), obtemos

$$2F_u = 2\langle X_{uu}, X_v \rangle + E_v,$$

de modo que

$$\langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{E_v}{2}.$$

Dessa forma, os símbolos de Christoffel Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 satisfazem o sistema linear

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \frac{E_u}{2} \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{E_v}{2} \end{cases}.$$

Como $EG - F^2 > 0$, a matriz de coeficientes tem determinante positivo. Logo, possui inversa, cujas entradas são funções de E, F e G. Portanto, o sistema acima tem uma solução única, de modo que Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 são funções de E, F, G, E_u, E_v e F_u.

Não repetiremos o mesmo processo para as outras equações, pois acreditamos ser bem claro o que deve ser feito. Apenas afirmamos que, após um pouco de algebrismo, pode-se concluir que *todos os símbolos de Christoffel são expressos como funções dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas de primeira ordem.*

Com essa informação sobre os símbolos de Christoffel, podemos apresentar uma outra caracterização das geodésicas, em termos de equações diferenciais.

Proposição 5 (Equações diferenciais das geodésicas)**.** *Sejam S uma superfície regular e $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ uma parametrização local de S. Se $u, v : I \subseteq \mathbb{R} \to U$ são funções tais que*

$$\gamma(t) = X(u(t), v(t))$$

é uma curva diferenciável, então γ é uma geodésica de S se, e somente se, as funções u e v satisfazem as equações

$$\begin{cases} u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1 = 0 \\ v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}, \tag{7}$$

onde os símbulos de Christoffel Γ_{ij}^k são calculados em $(u(t), v(t))$.

Demonstração. Pela regra da cadeia, temos que $\gamma' = u'X_u + v'X_v$, em que $X_u = X_u(u(t), v(t))$ e $X_v = X_v(u(t), v(t))$. Derivando novamente com relação a t, obtemos

$$\begin{aligned} \gamma'' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u'X_u + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v'X_v \\ &= u''X_u + u'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_u + v''X_v + v'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_v \\ &= u''X_u + u'\left(u'X_{uu} + v'X_{uv}\right) + v''X_v + v'\left(u'X_{vu} + v'X_{vv}\right) \\ &= u''X_u + (u')^2X_{uu} + 2u'v'X_{uv} + (v')^2X_{vv} + v''X_v. \end{aligned}$$

Para que γ seja geodésica, para cada $t \in I$ sua componente tangencial, ou seja, sua projeção em $T_{\gamma(t)}S$, deve ser nula. Seja $\alpha(t) := \mathrm{proj}_{T_{\gamma(t)}S}\,\gamma''(t)$. Utilizando as equações obtidas em (4), podemos encontrar as coordenadas de α com relação à base $\{X_u, X_v\}$, obtendo, assim,

$$\alpha(t) = AX_u + BX_v,$$

onde

$$A = u''(u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^2$$

e

$$B = v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2.$$

Com isso, concluímos que $A = B = 0$ e, portanto, γ é uma geodésica, se, e somente se, u e v satisfazem as equações (7). □

Agora, provaremos um resultado que caracteriza o conceito de geodésica como intrínseco, por ser invariante a deformações que preservam a estrutura local da superfície.

Proposição 6 (Invariância das geodésicas por isometrias locais)**.** *Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares, $f : S_1 \to S_2$ uma isometria local e $\gamma : I \to S_1$ uma curva diferenciável. Então, γ é uma geodésica de S_1 se, e somente se, $f \circ \gamma$ é uma geodésica de S_2.*

Demonstração. Pela definição de geodésica, precisamos apenas mostrar que $f \circ \gamma$ é localmente uma geodésica parametrizada. Logo, restringimos nosso olhar a uma vizinhança parametrizada de S, $V = X(U)$, à qual é isométrica, via f, ao aberto $f(V) \subseteq S_2$, e na qual supomos, sem perda de generalidade, estar contido o traço de γ. Logo, podemos escrever

$$\gamma(t) = X(u(t), v(t)),$$

onde $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ e $(u(t), v(t)) \in U$. Definindo, então, $\sigma := f \circ \gamma$ e $Y := f \circ X$, temos $\sigma(t) = Y(u(t), v(t))$ para todo $t \in I$. Pela Proposição 2, os coeficientes da primeira forma fundamental de X coincidem com os de Y. Portanto, pela discussão precedente à proposição que estamos demonstrando, os símbolos de Christoffel de cada parametrização também são os mesmos. Logo, as equações diferencias em (7) para σ e γcoincidem, de modo que uma é geodésica se, e somente se, a outra também é. $\square$

Como última proposição dessa seção, demonstramos que de fato esses objetos existem, isto é, que em toda superfície regular existem geodésicas partindo de qualquer ponto e em qualquer direção. Como de praxe quando estamos tratando de curvas, nos valeremos do teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias.

Proposição 7 (Existência e unicidade de geodésicas)**.** *Dados um ponto p de uma superfície regular S e $w \in T_pS$ existem um intervalo aberto $I \ni 0$ e uma única geodésica $\gamma : I \to S$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = w$.*

Demonstração. Vamos especificar nossa geodésica em temos de curvas em U, isto é, vamos demonstrar a existência de funções $u, v : I \subseteq \mathbb{R} \to U$ tais que a curva γ definida por $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ é uma geodésica com as propriedades desejadas. Com esse fim, vamos identificar quais condições iniciais u e v devem satisfazer. Para que tenhamos $\gamma(0) = p$, devemos ter

$$(u(0), v(0)) = X^{-1}(p) =: (u_0, v_0). \tag{8}$$

Além disso, veja que

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(u(t), v(t))\right]_{t=0} \\ &= dX_{(u(0),v(0))}(u'(0), v'(0)). \end{aligned}$$

Portanto, supondo (8), para termos $\gamma'(0) = w$ devemos ter

$$(u'(0), v'(0)) = dX^{-1}_{(u_0,v_0)}(w). \tag{9}$$

De fato, essas condições já nos garantem a existência e unicidade de γ! Basta perceber que as equações (7) são da forma

$$\begin{cases} u'' = f(u, v, u', v') \\ v'' = g(u, v, u', v') \end{cases},$$

em que f e g são funções diferenciáveis, e utilizar o teorema da existência e unicidade para soluções de equações diferenciais ordinárias. Com isso, existem um único intervalo $I \ni 0$ e uma única solução $(u(t), v(t))$, com $t \in I$, que cumpre (8) e (9), de modo que a curva

$$\gamma(t) = X(u(t), v(t)),$$

onde $t \in I$, é a única geodésica de S, a qual cumpre as condições $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = w$. $\square$

4 Exemplos de Geodésicas

Para ilustrar o conceito de geodésica, vamos exibi-las em algumas superfícies diferentes.

4.1 Cilindro

Para encontrar as geodésicas de um cilindro, utilizaremos a Proposição 6 e obte-las-emos por meio das geodésicas do plano. Intuitivamente, está claro que as geodésicas em um plano são justamente os segmentos de reta nele contidos. Para formalizar essa intuição, basta perceber que, dado um desses segmentos de retas, podemos facilmente parametrizá-lo localmente por uma curva de velocidade constante. Com isso, sua aceleração é nula e, assim, perpendicular ao espaço tangente do plano em cada ponto.

Com esse conhecimento em mãos, pela Proposição 6 precisamos apenas de encontrar uma isometria entre o plano e o cilindro. Felizmente, isso não é muito difícil, pois a parametrização usual do cilindro é uma isometria.

Denotando por $C := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ o cilindro, por S o plano em $\mathbb{R}^3$ correspondente a $z = 0$ e por $U := \{(x, y, 0) \in S : -\pi < x < \pi\}$ o retângulo entre $-\pi$ e π, nossa isometria é $f : U \subseteq S \to f(U) \subseteq C$ dada por

$$f(x, y, z) = (\cos x, \operatorname{sen} x, y).$$

Logo, as geodésicas no cilindro são as imagens de segmentos de reta por f. Ilustramos algumas delas na Figura 1.

4.2 Esfera

Para encontrar as geodésicas da esfera, podemos resolver o sistema de equações diferenciais apresentado em (7), ou podemos prosseguir por um argumento mais geométrico, como a seguir. Primeiramente, perceba que o grande arco C de $\mathbb{S}^2$ parametrizado por $\gamma(\theta) = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 0)$ tem aceleração $\gamma''(\theta) = -(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = -\gamma(\theta)$. Como $T_{\gamma(t)}\mathbb{S}^2 = \{\gamma(t)\}^\perp$, temos que $\gamma''(t)$ é perpendicular ao espaço tangente em $\gamma(t)$ para todo t. Logo, $\gamma(t)$ descreve uma geodésica na esfera. Agora, como todo grande arco de $\mathbb{S}^2$ é a imagem de C por uma rotação (a qual, por ser uma transformação linear ortogonal, é isometria), concluímos da Proposição 6 concluímos que todo grande arco de $\mathbb{S}^2$ é uma geodésica. Alguns deles estão representados na Figura 2.

5 Conclusão

Neste trabalho, introduzimos o conceito de geodésica e demonstramos suas propriedades mais elementares, culminando com a demonstração de sua existência e unicidade em superfícies regulares. Um próximo passo bastante evidente é demonstrar que geodésicas de fato minimizam distâncias sobre a superfície, pelo menos localmente, e, reciprocamente, que caminhos que minimizam distâncias são geodésicas.

Referências

[1] Ronaldo Freire de Lima. *Introdução à Geometria Diferencial*. 1^a edição. Colóquios Brasileiros de Matemática das Regiões: Região Norte. Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. URL: https://www.ronaldofreiredelima.com/introdu%C3%A7%C3%A3o-%C3%A0-geometria-diferencial.

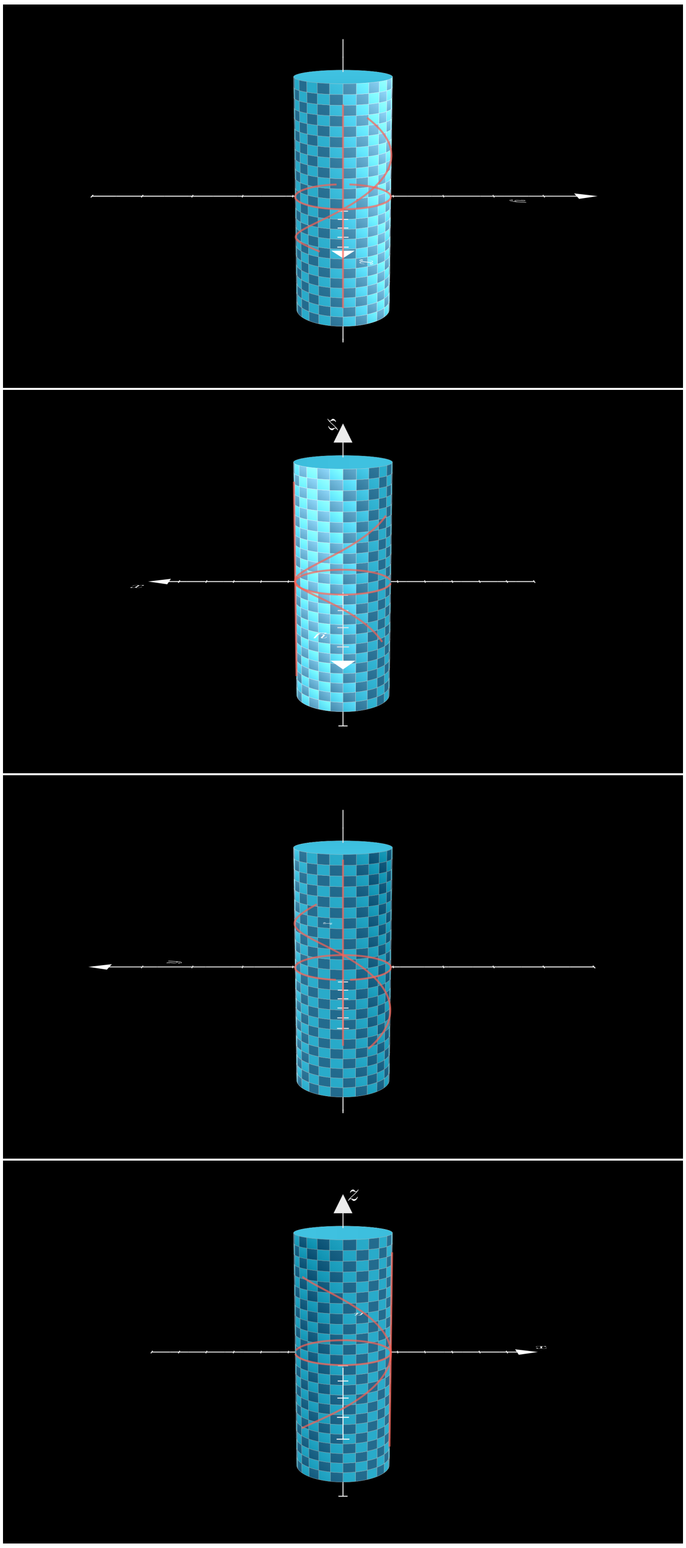

Figura 1: Três tipos de geodésicas no cilindro, sob diferentes pontos de vista.

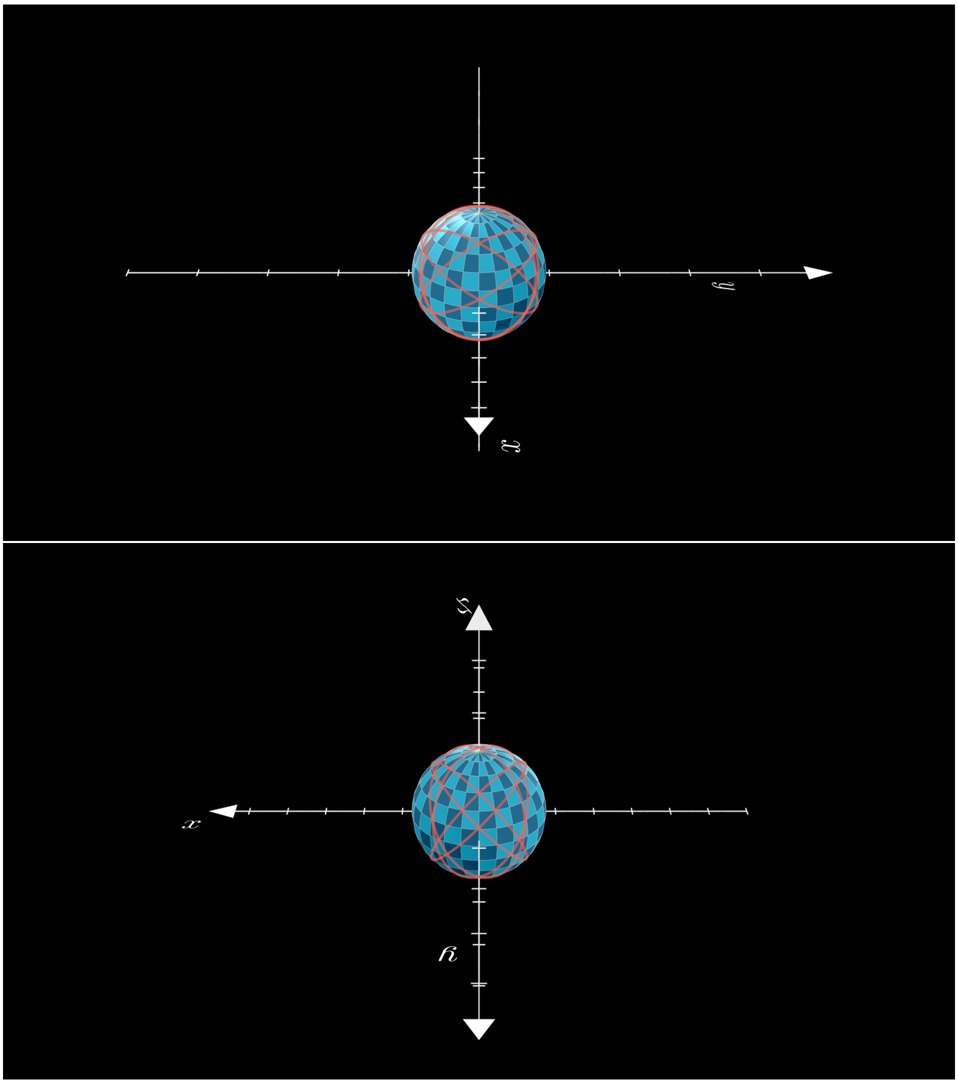

Figura 2: Alguns grandes arcos em $\mathbb{S}^2$, sob dois pontos de vista.