Um estudo sobre as curvas *Geodésicas*

Caio Lins

2 de junho de 2022

1 Isometrias

Quando estamos trabalhando com aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, isometrias são aquelas que preservam o comprimento de vetores. Ao mudar o ambiente de trabalho para superfícies, a definição de isometria faz referência à derivada da aplição e, consequentemente, aos espaços tangentes a essas superfícies. Mais explicitamente, temos:

Definição 1 (Isometria)**.** Dadas superfícies regulares S_1 e S_2, dizemos que uma aplicação $f : S_1 \to S_2$ é uma *isometria* se é um difeomorfismo e, para todo $p \in S_1$ e todos $w, v \in T_pS_1$ temos

$$\langle df_p w, df_p v\rangle = \langle w, v\rangle. \tag{1}$$

Ainda, dizemos que $f : S_1 \to S_2$ é uma *isometria local* se, para todo $p \in S_1$ existem abertos $V_1 \subseteq S_1$ e $V_2 \subseteq V_2$, tais que $p \in V_1, f(p) \in V_2$ e $f\,|_{V_1}\colon V_1 \to V_2$ é uma isometria.

Finalmente, duas superfícies regulares são ditas *isométricas* se existe uma isometria entre elas.

Agora, alguns comentários. Observe que, se f é isometria local e difeomorfismo, então é isometria. Também perceba que, pela *identidade de polarização*:

$$\langle w, v\rangle = \frac{\|w+v\|^2 - \|w-v\|^2}{4}$$

a condição (1) é equivalente a termos

$$\|df_p w\| = \|w\| \tag{2}$$

para todo $w \in T_pS_1$.

Observe, ainda, que se $f : S_1 \to S_2$ cumpre (2) (ou, equivalentemente, (1), pelo que acabamos de mostrar), então, para todo $p \in S_1$, temos que df_p é um isomorfismo. De fato, a injetividade vem do fato de que se $df_p w = df_p v$, então

$$\|w - v\| = \|df_p(w - v)\| = \|df_p w - df_p v\| = 0,$$

de modo que $w = v$. Agora, como $2 = \dim T_{f(p)}S_2 \geq \dim df_p(T_pS_1) = 2$, necessariamente temos $T_{f(p)}S_2 = df_p(T_pS_1)$, ou seja, df_p é sobrejetiva. Dessa forma, pelo Teorema da Função Inversa, para cada $p \in S_1$ existem vizinhanças $V_1 \ni p$ e $V_2 \ni f(p)$ em S_1 e S_2, respectivamente, tais que $f\,|_{V_1}\colon V_1 \to V_2$ é difeomorfismo. Ou seja, f é isometria local.

Com isso, provamos a seguinte proposição, que caracteriza as isometrias locais.

Proposição 1. *Uma aplicação entre superfícies regulares é uma isometria local se, e somente se, preserva a primeira forma fundamental.*

2 Geodésicas

Definição 2. Uma curva parametrizada diferenciável em uma superfície regular S, $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to S$, é dita uma *geodésica parametrizada* se seu vetor aceleração é sempre perpendicular ao espaço tangente da superfície, ou seja, se para todo $p = \gamma(t) \in \gamma(I)$ temos $\gamma''(t) \in \left\{T_{\gamma(t)}S\right\}^{\perp}$. Analogamente, uma curva regular $C \subset S$ é dita uma *geodésica* de S se, para todo ponto $p \in C$, existe uma parametrização local $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to C$, de C em p, tal que γ é uma geodésica parametrizada.

3 Aplicação Exponencial