2. Ⓢ A woman is pregnant with twin boys. Twins may be either identical or fraternal (nonidentical). In general, 1/3 of twins born are identical. Obviously, identical twins must be of the same sex; fraternal twins may or may not be. Assume that identical twins are equally likely to be both boys or both girls, while for fraternal twins all possibilities are equally likely. Given the above information, what is the probability that the woman's twins are identical?

Solução 1. Escreva, sequencialmente, b e g para identificar um garoto e uma garota; seja, também, $\mathcal{G}$ o cenário em que ambos os filhos são gêmeos idênticos – o seu complementar, $\mathcal{G}^c$, consolida os casos em que os filhos são gêmeos fraternos. Neste sentido, o enunciado é equivalente às equações[1]

$$\mathbb{P}[\mathcal{G}] = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}[\mathcal{G}^c] = \frac{2}{3},\ \mathbb{P}[(b,b)|\mathcal{G}] = \mathbb{P}[(g,g)|\mathcal{G}] = \frac{1}{2}$$

e $\mathbb{P}[(g,g)|\mathcal{G}^c] = \mathbb{P}[(g,b)|\mathcal{G}^c] = \mathbb{P}[(b,g)|\mathcal{G}^c] = \mathbb{P}[(b,b)|\mathcal{G}^c] = \frac{1}{4}$, em que escrevemos (g,g), por exemplo, para descrever que a mulher engendrou um par de filhas. Nestas condições, almejamos o cômputo da quantidade

$$\mathbb{P}[\mathcal{G}|(b,b)];$$

isto é, a probabilidade de que os filhos sejam gêmeos idênticos condicional à verificação de que eles são, com efeito, homens. Assim, perceba que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\mathcal{G}|(b,b)] &= \frac{\mathbb{P}[\mathcal{G},(b,b)]}{\mathbb{P}[(b,b)]} = \\ &= \frac{\mathbb{P}[(b,b)|\mathcal{G}]\mathbb{P}[\mathcal{G}]}{\mathbb{P}[(b,b)|\mathcal{G}]\mathbb{P}[(b,b)|\mathcal{G}] + \mathbb{P}[(b,b)|\mathcal{G}^c]\mathbb{P}[\mathcal{G}^c]} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}} = \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

---

7. A hat contains 100 coins, where at least 99 are fair, but there may be one that is doubleheaded (always landing Heads); if there is no such coin, then all 100 are fair. Let D be the event that there is such a coin, and suppose that $\mathbb{P}[D] = 1/2$. A coin is chosen uniformly at random. The chosen coin is flipped 7 times, and it lands Heads all 7 times.

(a) Given this information, what is the probability that one of the coins is doubleheaded?

(b) Given this information, what is the probability that the chosen coin is doubleheaded?

---

[1] Na medida em que, condicional à verificação de que os gêmeos são idênticos ou fraternos, a distribuição de probabilidades subjacente ao conjunto de possíveis pares de filhos (por exemplo, $\{(g,b),(g,g),(b,b),(b,g)\}$ para gêmeos fraternos) é uniforme – os componentes deste conjuntos são equiprováveis.

Solução 2. Sejam, doravante, $\mathcal{U}$ (*unfair*) e $\mathcal{S}$ os cenários em que a moeda desbalanceada é escolhida e em que verificamos cara nos sete lançamentos sucessivos da moeda escolhida.

(a) Precisamos, neste momento, computar $\mathbb{P}[D|\mathcal{S}]$ – a probabilidade de existir uma moeda desbalanceada condicional à verificação, no lançamento da moeda escolhida, de sete caras consecutivas. Para isso, perceba que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[D|\mathcal{S}] &= \frac{\mathbb{P}[\mathcal{S}, D]}{\mathbb{P}[\mathcal{S}]} = \\ &= \frac{\mathbb{P}[\mathcal{S}|D]\mathbb{P}[D]}{\mathbb{P}[\mathcal{S}]} = \\ &= \frac{\mathbb{P}[\mathcal{S}|D]}{2\mathbb{P}[\mathcal{S}]};\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\mathcal{S}|D] &= \mathbb{P}[\mathcal{S}|D,\mathcal{U}]\mathbb{P}[\mathcal{U}|D] + \mathbb{P}[\mathcal{S}|D,\mathcal{U}^c]\mathbb{P}[\mathcal{U}^c|D] = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \frac{99}{100} = \\ &= \frac{1}{100} \cdot \left(1 + \frac{99}{128}\right)\end{aligned}$$

e

$$\mathbb{P}[\mathcal{S}] = \mathbb{P}[\mathcal{S}|D]\mathbb{P}[D] + \mathbb{P}[\mathcal{S}|D^c]\mathbb{P}[D^c] = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}[\mathcal{S}|D] + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{128}$$

(isso porque, condicional a D^c, que consolida os cenários em que todas as moedas são justas, a escolha da moeda inicial é inócua à probabilidade de que verifiquemos sete caras consecutivas). Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[D|\mathcal{S}] &= \frac{\mathbb{P}[\mathcal{S}|D]}{2\mathbb{P}[\mathcal{S}]} = \\ &= \frac{\frac{1}{100} \cdot \left(1 + \frac{99}{128}\right)}{\frac{1}{100} \cdot \left(1 + \frac{99}{128}\right) + \frac{1}{128}} = \\ &= \frac{\frac{227}{128}}{\frac{227}{128} + \frac{100}{128}} = \frac{227}{327}.\end{aligned}$$

(b) Nestas circunstâncias, precisamos, agora, computar $\mathbb{P}[\mathcal{U}|\mathcal{S}]$; verificamos, desta forma, que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[\mathcal{U}|\mathcal{S}] &= \mathbb{P}[\mathcal{U}|\mathcal{S},D]\cdot\mathbb{P}[D|\mathcal{S}]+\mathbb{P}[\mathcal{U}|S,D^c]\cdot\mathbb{P}[D^c|\mathcal{S}] = \\
&= \frac{\mathbb{P}[\mathcal{U},\mathcal{S}|D]}{\mathbb{P}[S|\mathcal{D}]}\cdot\mathbb{P}[D|\mathcal{S}] = && (\mathbb{P}[\mathcal{U}|\mathcal{S},D^c]=0;\ \text{a moeda não existe!}) \\
&= \frac{\mathbb{P}[\mathcal{S}|\mathcal{U},D]\cdot\mathbb{P}[\mathcal{U}|D]}{\mathbb{P}[\mathcal{S}|\mathcal{D}]}\mathbb{P}[D|\mathcal{S}] = \\
&= \frac{1\cdot\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}\cdot\left(1+\frac{99}{128}\right)}\mathbb{P}[D|\mathcal{S}] = && (\mathbb{P}[D|\mathcal{S}]\ \text{foi computada no item (a)}) \\
&= \frac{128}{227}\cdot\frac{227}{327} = \\
&= \frac{128}{327}.
\end{aligned}
$$

10. Fred is working on a major project. In planning the project, two milestones are set up, with dates by which they should be accomplished. This serves as a way to track Fred's progress. Let A_1 be the event that Fred completes the first milestone on time, A_2 be the event that he completes the second milestone on time, and A_3 be the event that he completes the project on time.

Suppose that $\mathbb{P}[A_{j+1}|A_j] = 0.8$ but $\mathbb{P}[A_{j+1}|A_j^c] = 0.3$ for $j = 1, 2$, since if Fred falls behind on his schedule it will be hard for him to get caught up. Also, assume that the second milestone supersedes the first, in the sense that once we know whether he is on time in completing the second milestone, it no longer matters what happened with the first milestone. We can express this by saying that A_1 and A_3 are conditionally independent given A_2 and they're also conditionally independent given A_2^c.

(a) Find the probability that Fred will finish the project on time, given that he completes the first milestone on time. Also find the probability that Fred will finish the project on time, given that he is late for the first milestone.

(b) Suppose that $\mathbb{P}[A_1] = 0.75$. Find the probability that Fred will finish the project on time.

Solução 3. Inicialmente, perceba que a asserção de que A_1 e A_3 são condicionalmente independentes com respeito a um conjunto X é equivalente a

$$\mathbb{P}[A_1, A_3|X] = \mathbb{P}[A_1|X]\cdot\mathbb{P}[A_3|X]$$

(escrevemos, neste caso, que, condicional a X, a distribuição *conjunta* é igual ao produto das distribuições marginais), a $\mathbb{P}[A_1|A_3, A_2] = \mathbb{P}[A_1|A_2]$ e a $\mathbb{P}[A_3|A_1, A_2] = \mathbb{P}[A_3|A_2]$. Utilizaremos, nos itens seguintes, esta fórmula.

(a) Equipados com a terminologia do enunciado, precisamos, neste momento, computar

$$\mathbb{P}[A_3|A_1] \text{ e } \mathbb{P}[A_3|A_1^c].$$

Com esse objetivo, verificamos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A_3|A_1] &= \mathbb{P}[A_3|A_1, A_2]\cdot\mathbb{P}[A_2|A_1] + \mathbb{P}[A_3|A_1, A_2^c]\cdot\mathbb{P}[A_2^c|A_1] = \\ &= \mathbb{P}[A_3|A_2]\cdot\mathbb{P}[A_2|A_1] + \mathbb{P}[A_3|A_2^c]\cdot\mathbb{P}[A_2^c|A_1] = \\ &= .8\cdot .8 + .3\cdot .2 = .7.\end{aligned}$$

Correlativamente,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A_3|A_1^c] &= \mathbb{P}[A_3|A_1^c, A_2]\cdot\mathbb{P}[A_2|A_1^c] + \mathbb{P}[A_3|A_1^c, A_2^c]\cdot\mathbb{P}[A_2^c|A_1^c] = \\ &= \mathbb{P}[A_3|A_2]\cdot\mathbb{P}[A_2|A_1^c] + \mathbb{P}[A_3|A_2^c]\cdot\mathbb{P}[A_2^c|A_1^c] = \\ &= .8\cdot .3 + .3\cdot .7 = .45\end{aligned}$$

(porque $\mathbb{P}[A_2^c|A_1^c] = 1 - \mathbb{P}[A_2|A_1^c] = .7$).

(b) Estamos, agora, munidos da informação de que $\mathbb{P}[A_1] = .75$; precisamos computar $\mathbb{P}[A_3]$. Neste sentido, como

$$\mathbb{P}[A_3] = \mathbb{P}[A_3|A_1]\cdot\mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_3|A_1^c]\cdot\mathbb{P}[A_1^c]$$

(esta é a *lei da probabilidade total*), temos, pelo item (a), que

$$\mathbb{P}[A_3] = .7\cdot .75 + .45\cdot .25 = .6305.$$