59. Ⓢ There are 100 passengers lined up to board an airplane with 100 seats (with each seat assigned to one of the passengers). The first passenger in line crazily decides to sit in a randomly chosen seat (with all seats equally likely). Each subsequent passenger takes his or her assigned seat if available, and otherwise sits in a random available seat. What is the probability that the last passenger in line gets to sit in his or her assigned seat? (This is a common interview problem, and a beautiful example of the power of symmetry.) Hint: Call the seat assigned to the jth passenger in line "seat j" (regardless of whether the airline calls it seat 23A or whatever). What are the possibilities for which seats are available to the last passenger in line, and what is the probability of each of these possibilities?

Solução. Seja, em geral, N a quantidade de passageiros no avião; seja, também, $\{p_i : 1 \leq i \leq N\}$ o conjunto de passageiros. Escreveremos, neste sentido, $p_i = j$ para o cenário em que o passageiro p_i senta no assento j. O nosso objetivo, assim, é, se $N = 100$, computar a probabilidade de que o passageiro p_{100} sente em seu assento: $\mathbb{P}[p_{100} = 100]$. Nestas condições, a contemplação de instâncias mais enxutas é instrutiva. Por exemplo,

1. se $N = 2$, $\mathbb{P}[p_2 = 2] = \mathbb{P}[p_1 = 1] = \frac{1}{2}$;
2. se $N = 3$, $\mathbb{P}[p_3 = 3] = \mathbb{P}[p_1 = 1] + \mathbb{P}[p_1 = 2] \cdot \mathbb{P}[p_2 = 1 | p_1 = 2] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Portanto, a probabilidade, para $N \in \{2, 3\}$, de que o passageiro p_N esteja sentado, na decolagem, no assento N é igual a $\frac{1}{2}$; verificaremos que, com efeito, isto é também é verdade para $N = 100$.

Inicialmente, perceba, por um lado, que p_{100} pode, com probabilidade positiva, se sentar nos assentos 1 e 100; isso porque, se algum assento $j \in \{2, \ldots, 99\}$ estivesse disponível para o passageiro p_{100}, j estaria, em particular, disponível para p_j – que entraria antes de p_N e, portanto, assumiria este lugar. Logo, o conjunto de assentos acessíveis a p_{100} é igual a $\{1, 100\}$; isto é,

$$\mathbb{P}[p_{100} = 100] + \mathbb{P}[p_{100} = 1] = 1. \tag{1}$$

Por outro lado,

$$\mathbb{P}[p_{100} = 100] = 1 - \sum_{1 \leq j \leq 99} \mathbb{P}[p_j = 100]$$

e

$$\mathbb{P}[p_{100} = 1] = 1 - \sum_{1 \leq j \leq 99} \mathbb{P}[p_j = 1],$$

na medida em que p_{100} estará sentado em $i \in \{1, 100\}$ se, e somente se, $p_j \neq i$ para todo $j \in \{1, \ldots, 99\}$[1]; mas, como os assentos 1 e 100 são indistinguíveis para os passageiros p_j, $j \in \{1, \ldots, 99\}$, temos que $\mathbb{P}[p_j = 1] = \mathbb{P}[p_j = 100]$. Desta maneira,

$$\mathbb{P}[p_{100} = 100] = \mathbb{P}[p_{100} = 1],$$

[1] Equivalentemente, $\{p_{100} = i\} = \left(\bigcup_{1 \leq j \leq 99} \{p_j = i\}\right)^c$.

e a Equação (1) garante que $\mathbb{P}[p_{100} = 100] = \frac{1}{2}$.

---

56. A widget inspector inspects 12 widgets and finds that exactly 3 are defective. Unfortunately, the widgets then get all mixed up and the inspector has to find the 3 defective widgets again by testing widgets one by one.

(a) Find the probability that the inspector will now have to test at least 9 widgets.

(b) Find the probability that the inspector will now have to test at least 10 widgets

Solução. Seja $A = \{a_i : 1 \leq i \leq 12\}$ o conjunto dos equipamentos, e suponha que a_1, a_2 e a_3 sejam defeituosos. Neste caso, seja

$$\Omega = \bigcup_{\sigma} \{(a_{\sigma(1)}, \ldots a_{\sigma(12)})\}$$

(a união percorre as 12! bijeções $\sigma : \{1, \ldots, 12\} \to \{1, \ldots, 12\}$; doravante, escreveremos σ para estas funções) o conjunto das permutações de A; os elementos de Ω são equiprováveis. O objetivo do inspetor, assim, é, para qualquer elemento de Ω, identificar os equipamentos a_1, a_2 e a_3.

(a) Neste item, precisamos contar a quantidade de permutações $\{(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(12)}\}$ em Ω tais que

$$\{a_1, a_2, a_3\} \cap \{a_{\sigma(9)}, a_{\sigma(10)}, a_{\sigma(11)}, a_{\sigma(12)}\} \neq \emptyset$$

(isto é, algum defeituoso corresponde a algum dos quatro elementos à direita na fila aleatória de equipamentos); equivalentemente, precisamos capturar as bijeções σ tais que

$$\{a_1, a_2, a_3\} \not\subset \{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(8)}\}.$$

Neste sentido, seja $A_8 = \{\sigma : \{a_1, a_2, a_3\} \not\subset \{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(8)}\}\}$; precisamos, desta maneira, computar

$$\mathbb{P}[A_8] = 1 - \mathbb{P}[A_8^c].$$

Contudo, como A_8^c é igual ao conjunto das permutações em Ω tais que a_1, a_2 e a_3 pertençam, precisamente, aos oito elementos iniciais, temos que

$$\mathbb{P}[A_8^c] = \frac{\binom{8}{3} \cdot 3! \cdot 9!}{12!}. \tag{2}$$

Com efeito, escolhemos, inicialmente, três – entre os oito iniciais – lugares para os itens defeituosos ($\binom{8}{3}$) e, em seguida, nós os permutamos (3!); mais tarde, distribuímos os 9 equipamentos plausíveis na fila restante (9!). A uniformidade das probabilidades em Ω e a verificação de que este conjunto contém 12! elementos, portanto, culminam na Equação (2). Assim, a probabilidade de que o inspetor inspecione mais de oito elementos é igual a

$$1 - \frac{\binom{8}{3} \cdot 3! \cdot 9!}{12!}.$$

(b) Correlativamente, precisamos computar, desta vez, $\mathbb{P}[A_9]$ – a probabilidade de que algum elemento do tripleto defeituoso esteja entre os três lugares à direita na fila aleatória de 12 equipamentos. Convenientemente, este cenário é, essencialmente, idêntico[2] ao do item (a); logo,

$$\mathbb{P}[A_9] = 1 - \frac{\binom{9}{3} \cdot 3! \cdot 9!}{12!}.$$

[2]Perceba que, como apontaram na monitoria, se o exercício solicitasse a probabilidade de que o inspetor identificasse *algum* – em oposição a todos – equipamento defeituoso, a probabilidade deste item seria nula: se ele não detectar defeito entre os nove equipamentos iniciais, ele terá a garantia de que os três seguintes são, precisamentes, os defeitusos. Portanto, nove verificações são suficientes!