59. Ⓢ There are 100 passengers lined up to board an airplane with 100 seats (with each seat assigned to one of the passengers). The first passenger in line crazily decides to sit in a randomly chosen seat (with all seats equally likely). Each subsequent passenger takes his or her assigned seat if available, and otherwise sits in a random available seat. What is the probability that the last passenger in line gets to sit in his or her assigned seat? (This is a common interview problem, and a beautiful example of the power of symmetry.)

Hint: Call the seat assigned to the jth passenger in line "seat j" (regardless of whether the airline calls it seat 23A or whatever). What are the possibilities for which seats are available to the last passenger in line, and what is the probability of each of these possibilities?

Seja, em geral, $N \in \mathbb{N}$ a quantidade de passageiros. Além disso, seja $\{P_i : 1 \leq i \leq N\}$ o conjunto de passageiros, e escreva

$$P_i = j$$

para o cenário em que o passageiro i senta no assento j.

Assim, se $N = 100$, queremos $\mathbb{P}[P_{100} = 100]$.

- $N = 2$: $\mathbb{P}[P_2 = 2] = \mathbb{P}[P_1 \neq 2] = 1/2$.
- $N = 3$: $\mathbb{P}[P_3 = 3] = \mathbb{P}[P_1 = 1] +$

$$+ \mathbb{P}[P_1 = 2] \cdot \mathbb{P}[P_2 = 1 \mid P_1 = 2] =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1/2.$$

Perceba, agora, que $(N=100)$

$$\mathbb{P}\{p_{100}=j\}=0$$

para $j\in\{2,\dots,99\}$, isto é,

$$\mathbb{P}[p_{100}=1]+\mathbb{P}[p_{100}=100]=1.$$

Com efeito, se o assento $j\in\{2,\dots,99\}$ estiver disponível para p_{100}, ele estará, em particular, disponível para p_j (porque ele entra antes); mas, neste caso, p_j sentaria em j — e o assento não estaria disponível para p_{100}!

Neste cenário,

$$\mathbb{P}[p_{100}=100]=1-\sum_{j=1}^{99}\mathbb{P}[p_j=100]$$

e

$$\mathbb{P}\{p_{100}=1\}=1-\sum_{j=1}^{99}\mathbb{P}[p_j=1];$$

1 e 100 são indistinguíveis!

Como $\mathbb{P}\{p_j=1\}=\mathbb{P}[p_j=100]$ quando $1\leq j\leq 99$, temos

$$\mathbb{P}\{p_{100}=100\}=\mathbb{P}[p_{100}=1].$$

Logo, $\mathbb{P}[P_1 = 100] = \mathbb{P}[P_{100} = 1] = 1/2$.

56. A widget inspector inspects 12 widgets and finds that exactly 3 are defective. Unfortunately, the widgets then get all mixed up and the inspector has to find the 3 defective widgets again by testing widgets one by one.

(a) Find the probability that the inspector will now have to test at least 9 widgets.

(b) Find the probability that the inspector will now have to test at least 10 widgets.

Seja, doravante, $A = \{o_1, \dots, o_{12}\}$ o conjunto de equipamentos, e suponha, nesse sentido, que

$$\{o_1, o_2, o_3\}$$

é o conjunto de defeituosos. Nestas condições, seja

$$\Omega = \bigcup_{\sigma} (o_{\sigma(1)}, \dots, o_{\sigma(12)}) \quad (I)$$

o conjunto das permutações de A (a união atravessa todas as bijeções

$$\sigma : \{1, \dots, 12\} \to \{1, \dots, 12\});$$

perceba que as permutações são equiprováveis.

(a) Neste exercício, precisamos contar quantas permutações σ) em (I)) satisfazem

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \cap \{\sigma_{\sigma(9)}, \sigma_{\sigma(10)}, \sigma_{\sigma(11)}, \sigma_{\sigma(12)}\} \neq \emptyset. \quad (\#)$$

Para isso, verifique que

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \subset \{\sigma_{\sigma(1)}, \dots, \sigma_{\sigma(8)}\} \quad (\#\#)$$

(isto é, os defeituosos estejam entre os oito equipamentos iniciais) é, neste caso, o complementar de (#). Portanto,

$$\mathbb{P}(\#) = 1 - \mathbb{P}(\#\#) =$$

$$= 1 - \frac{\overbrace{\binom{8}{3} \cdot 3!}^{\text{Arranjo dos defeituosos}} \cdot \overbrace{9!}^{\text{permuta os outros,}}}{\underbrace{12!}_{\text{Total de permutações.}}}$$

(b) Podemos, como em (a), verificar que esta probabilidade é igual a

$$1 - \frac{\binom{9}{3}\cdot 3!\cdot 9!}{12!}.$$

Observação: na reunião, apontaram que esta probabilidade seria nula, porque o inspetor, contemplando, sequencialmente, nove equipamentos plausíveis, identificaria os outros como defeituosos. Contudo, todos os defeitos precisam ser identificados; portanto, é possível, inclusive, que 12 inspeções sejam necessárias.

↳ (por exemplo, $(a_1, a_{11}, a_{10}, \ldots, a_2)$).