Apostila: 4, 9, 12
Blitz: 29, 38, 48, 31

4) $\mathbb{P}(A) = 0.4$, $\mathbb{P}(B) = 0.5$, $\mathbb{P}(C) = 0.3$

$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.3$ $\mathbb{P}(A \cap C) = 0$, $\mathbb{P}(B \cap C) = 0.1$

a) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

Se $D \subset C$, então $\mathbb{P}(D) \leq \mathbb{P}(C)$

Logo, $(A \cap B \cap C) \subset A \cap C \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \leq \mathbb{P}(A \cap C) = 0$

Como $\mathbb{P}(X) \in [0,1]$ $\forall X$, temos $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$.

b) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$

Por I.E.

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \cancel{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}^{0}$$

$$= 0.4 + 0.5 + \cancel{0.3} - \cancel{0.3} - 0 - 0.1$$

$$= 0.8$$

d) $\mathbb{P}(A \cup (B \cap C))$

* Fatos importantes: Dados conjuntos X, Y, Z:
  - $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
  - $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
  - Leis de De Morgan:
    - ↳ $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$
    - ↳ $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$

$$\mathbb{P}(\underset{X}{A} \cup \overbrace{(B \cap C)}^{Y}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap C) - \cancel{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}^{0}$$

$$= 0.4 + 0.1 = 0.5$$

c) $\mathbb{P}(A \cap \underbrace{(B - C)}_{B \cap C^c}) = \mathbb{P}((A \cap B) \cap C^c)$

Denotando nosso conjunto universo por E, veja que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}((A \cap B) \cap E)$$
$$= \mathbb{P}((A \cap B) \cap (C \cup C^c))$$
$$= \mathbb{P}((A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c))$$
$$\overset{\text{disjuntos}}{=} \mathbb{P}(\cancel{A \cap B \cap C})^{0} + \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c)$$
$$= \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c)$$

$\therefore \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) = 0.3.$

d) $\mathbb{P}(A - (B \cup C)) = \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)^c)$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap ((B \cup C) \cup (B \cup C)^c))$$
$$= \underbrace{\mathbb{P}(A \cap (B \cup C))} + \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)^c)$$

?

$$\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C))$$
$$= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(\cancel{\underbrace{(A \cap B) \cap (A \cap C)}_{A \cap B \cap C}})^{0}$$
$$= 0.3 + 0$$
$$= 0.3$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C))$$
$$= 0.4 - 0.3$$
$$= 0.1$$

29 Blitz:

- → N alces
- → escolhe n aleatoriamente
- → libera eles de volta
- → Escolhe m de novo
- → Prob. de ter escolhido exatamente k alces dos primeiros.

Temos N alces, sendo que n estão marcados.

$\binom{N}{m}$ possíveis escolhas de alces

$\binom{n}{k}$ escolhas de k alces dentre os marcados

$\binom{N-k}{m-k}$ formas de completar a escolha

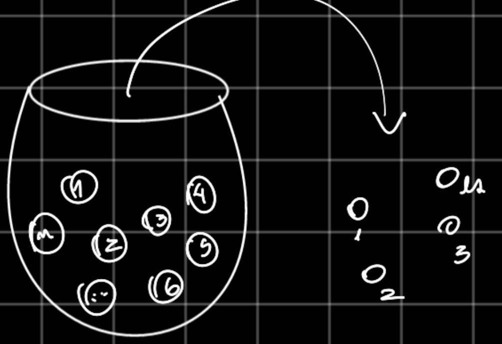
$\Rightarrow$ Probabilidade: $$\frac{\binom{n}{k}\binom{N-m}{m-k}}{\binom{N}{m}}$$

só faz sentido se $0 \leq k \leq n$, $n, m \leq N$

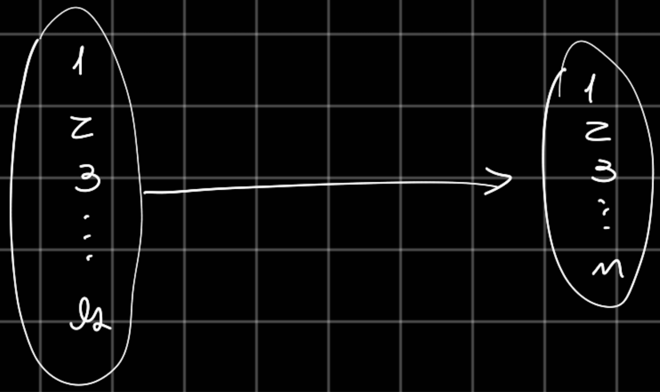
$0 \leq k \leq m$

38 Blitz:

retira k bolas com repetição



a) Prob da seq. de bolas retiradas ser crescente.



Cada retirada é uma função de $\{1, 2, \dots, k\} =: [k]$ em $\{1, 2, \dots, n\} =: [n]$

$$f(1) < f(2) < f(3) < \cdots < f(k)$$

$x_1 = f(1)$

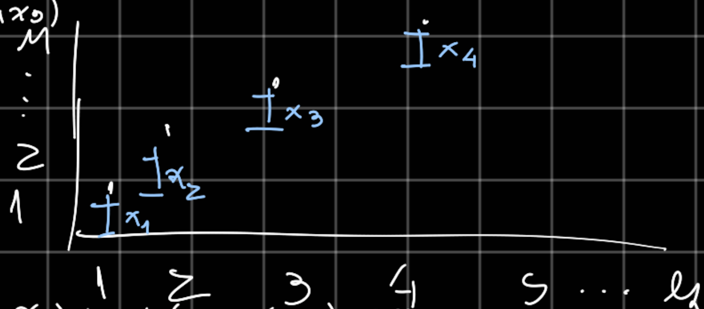
$x_2 = f(2) - f(1)$ $\quad (f(2) = x_1 + x_2)$

$x_3 = f(3) - f(2)$ $\quad (f(3) = x_1 + x_2 + x_3)$

$\vdots$

$x_k = f(k) - f(k-1)$

$x_{k+1} = n - f(k)$



$\hookrightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i = x_1 + (x_2 - x_1) + \dots + (x_k - x_{k-1}) = x_k$

função crescente de $[k]$ em $[n]$

$\Updownarrow$

$x_1, \dots, x_{k+1} \in \mathbb{Z}, \geq 1, \forall i \leq k$ tal que $x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = n$

Queremos, na verdade, contar o número de soluções inteiras positivas $(x_1, \dots, x_{k+1})$ da equação

$$x_1 + \dots + x_{k+1} = n$$

tais que $x_i \geq 1 \quad \forall i \leq k$

Como $x_i \geq 1 \ \forall i \leq k$ podemos escrever $x_i = 1 + y_i$, onde $y_i \geq 0$

$$x_1 + \cdots + x_{k+1} = n \iff (y_1+1) + \cdots + (y_k+1) + x_{k+1} = n$$
$$\iff \underbrace{y_1 + \cdots + y_{k+1}}_{k \text{ sinais de } +} = n - k$$

Temos $n-k-1$ bolinhas

$$\overbrace{0 \ \ 0}^{y_1} + \overbrace{0 \ \ 0}^{y_2} + \underset{y_3 = 0}{} + \ 0 \ 0 \ 0 + 0 \ 0$$

$\Rightarrow$ Queremos contar o número de formas de dispor k sinais e $n-k-1$ bolinhas em fila.

$$\underbrace{\_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \cdots \ \_ \ \_ \ \_}_{n-k+k = n \text{ lugares}}$$

Temos $n-1$ lugares, $\binom{n}{k}$ formas de posicionar os sinais de $+$.

Portanto, o número de funções é dado por $\binom{n}{k}$

Como o total de funções entre $[k]$ e $[n]$ é n^k.

$\Rightarrow P_{prob} = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

b) funções de $[k] \longrightarrow [n]$ não-decrescentes

Agora $x_i \geq 0 \ \forall i$. Queremos resolver
$$x_1 + \cdots + x_{k+1} = n.$$

n bolinhas e k sinais de "+".

$$\Rightarrow \binom{n+k}{k} \text{ funções}$$

Prob: $\dfrac{\binom{n+k}{k}}{n^{k}}$.

48 - B Dietz) 52 cartas
$\downarrow$
4 naipes

Prob de algum naipe ser excluído.

$E :=$ não sair espadas
$C :=$ " " copas
$P :=$ " " paus
$O :=$ " " ouros

Pelas simetrias do problema, temos:

$$\mathbb{P}(E \cup C \cup P \cup O) = 4 \cdot \mathbb{P}(E) - \binom{4}{2}\mathbb{P}(E \cap C) + \binom{4}{3}\mathbb{P}(E \cap C \cap P) - \binom{4}{4}\mathbb{P}(E \cap C \cap P \cap O)$$

$$= \binom{52}{13}^{-1}\left(4\binom{39}{13} - 6\binom{26}{13} + 4\right)$$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}}$$

$$\mathbb{P}(E \cap C) = \frac{\binom{26}{13}}{\binom{52}{13}}$$

$$\mathbb{P}(E \cap C \cap P) = \frac{\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}}$$

$$\mathbb{P}(E \cap C \cap P \cap O) = 0$$

9 - Apostila) 12 times

2 grupos de 6

Prob. Fla e Flu no mesmo grupo.

$\hookrightarrow = \frac{5}{11}$

12 - Apostila) L = nº da Laura

T = nº da Telma

a) $\mathbb{P}(L>T)$, sem repo.

$$\underbrace{\mathbb{P}(L>T) + \mathbb{P}(L<T)}_{=} + \mathbb{P}(L=T) = 1$$

$$\Rightarrow 2\mathbb{P}(L>T) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(L>T) = \frac{1}{2}$$

b) Com repo.

$$\underbrace{\mathbb{P}(L>T) + \mathbb{P}(L<T)}_{=} + \mathbb{P}(L=T) = 1$$

$$\mathbb{P}(L=T) = \frac{1}{100}$$

$$\mathbb{P}(L>T) = \frac{99}{200} = 49.5\%$$