Teorema da Aproximação Universal

Caio Lins

9 de março de 2021

1 Um pouco sobre Espaços Métricos

Para estudar os próximos resultados, precisaremos do Teorema da Categoria de Baire. Pelo bem da completude do texto, primeiro introduziremos algumas noções relativas a Espaços Métricos que serão utilizadas na demonstração.

Definição 1.1. Dado um conjunto X qualquer, uma *métrica* em X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:

i) $d(x, x) = 0$;

ii) $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;

iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 1.2. Um *espaço métrico* é um par (X, d) onde X é um conjunto e d é uma métrica em X.

Por vezes, onde não houver prejuízo ao entendimento do texto, utilizaremos apenas o nome do conjunto para nos referirmos ao espaço métrico por ele formado.

Definição 1.3. Um suconjunto M de um espaço métrico (X, d) é dito *limitado* se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) \leq c$ para todos $x, y \in M$. Nesse caso, o definimimos o *diâmetro* de M, denotado por $\operatorname{diam} M$, como $\sup \{d(x, y) \ ; \ x, y \in M\}$. Se M é ilimitado, ou seja, dado $c > 0$ existem $x, y \in M$ com $d(x, y) > c$, dizemos que $\operatorname{diam} M = \infty$.

Definição 1.4. Dado um espaço métrico (X, d) e um ponto $a \in X$, chamamos de *bola aberta de raio r centrada em a*, e denotamos por $B(a, r)$, o conjunto

$$\{x \in X \ ; \ d(x, a) < r\} .$$

Definição 1.5. Dado um espaço métrico (X, d) e um subconjunto $Y \subset X$, chamamos de *interior* de Y, e denotamos por $\operatorname{int} Y$, o subconjunto de Y formado pelos elementos $a \in Y$ tais que existe $r > 0$ satisfazendo $B(a, r) \subset Y$.

Definição 1.6. Um subconjunto A de um espaço métrico (X, d) é dito *aberto* se $A = \operatorname{int} A$.

Definição 1.7. Dado um subconjunto M de um espaço métrico (X, d), um ponto $x \in X$ é dito *aderente* a M se toda bola aberta centrada em x tiver interseção não-vazia com M. Chamamos de *fecho* de M, e denotamos por $\overline{M}$, o conjunto dos pontos de aderência de M.

Definição 1.8. Um subconjunto F de um espaço métrico (X, d) é dito *fechado* se $F = \overline{F}$.

Definição 1.9. Dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos do espaço métrico (X, d), ou seja, uma função $f : \mathbb{N} \to X$, dizemos que (x_n) *converge* para $L \in X$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, vale $d(x_n, L) < \varepsilon$. Se para todo $L \in X$ é falso que $\lim x_n = L$, dizemos que (x_n) é *divergente.*

Definição 1.10. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos do espaço métrico X é dita *de Cauchy* se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n, m \geq n_0$, vale $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Equivalentemente, (x_n) é de Cauchy se, para $n \geq n_0$, vale $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

Proposição 1. *Toda sequência convergente* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no espaço métrico* X *é de Cauchy*

Demonstração. Seja $L = \lim x_n$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, para $n \geq n_0$, valha $d(n, L) < \varepsilon/2$. Então, se $n, m \geq n_0$ temos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, L) + d(x_m, L) = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \qquad \square$$

Exemplo 1. Embora toda sequência convergente seja de Cauchy, é falso que dado um espaço métrico qualquer, toda sequência de Cauchy convirja para um ponto pertencente a ele. Por exemplo, considerando o conjunto $\mathbb{Q}$ com a métrica d induzida pela métrica de $\mathbb{R}$, temos que toda sequência de racionais convergindo para um irracional é de Cauchy, mas diverge em $\mathbb{Q}$.

Proposição 2. *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em um espaço métrico* X *é de Cauchy e possui um valor de aderência (ou seja, existe uma subsequência convergente* (x_{n_k}) *de* (x_n)*), então* (x_n) *converge para esse valor de aderência.*

Demonstração. Seja $L \in X$ o limite da subsequência (x_{n_k}). Então, dado $\varepsilon > 0$ conseguimos obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $k > k_0$, então $d(x_{n_k}, L) < \varepsilon/2$. Também conseguimos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq n_0$ então $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$. Tome $\ell > \max\{n_0, k_0\}$. Então claramente $n_\ell \geq \ell$ e, com isso,

$$d(x_\ell, L) \leq d(x_\ell, x_{n_\ell}) + d(x_{n_\ell}, L) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \qquad \square$$

Definição 1.11. Um espaço métrico (X, d) é dito *completo* se toda sequência de Cauchy em X converge para um elemento de X.

Proposição 3. *Um espaço métrico* (X, d) *é completo se, e somente se, dada uma sequência decrescente* $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ *de conjuntos não-vazios fechados em* X*, tais que* $\lim \operatorname{diam} F_n = 0$*, existe* $a \in X$ *com*

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_i.$$

Demonstração. Suponha que X seja completo e considere $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como no enunciado do Teorema. Para cada conjunto F_n, escolha $x_n \in F_n$, formando uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy. De fato, como $\lim \operatorname{diam} F_n = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, temos $d(x, y) < \varepsilon$ para todos $x, y \in F_n$. De $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ concluímos que $n, m > n_0$ implicam $x_n, x_m \in F_{n_0}$ o que implica $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Da completude de X concluímos que existe $x = \lim x_n$. Como todos F_n são fechados e, para $m \geq n$ temos $x_m \in F_n$, conclui-se que $x \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Suponha, agora, que X seja um espaço métrico no qual toda sequência de fechados como a do enunciado convirja. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Então $(\overline{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de conjuntos fechados tais que $\lim \operatorname{diam} \overline{F_n} = \lim \operatorname{diam} F_n = 0$. Por hipótese, existe $a \in \bigcap \overline{F_n}$. Como a é limite de sequência de pontos de F_k para todo $k \in \mathbb{N}$, para cada k podemos escolher $a_{n_k} \in F_k$ de modo que $d(a, a_{n_k}) < 1/k$ e, assim, $\lim a_{n_k} = a$. Claramente $n_k > k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, portanto, passando a uma subsequência se necessário, a_{n_k} é subsequência de (x_n) o que implica, como (x_n) é de Cauchy, $\lim x_n = a$. □

Teorema 1.1 (Teorema da Categoria de Baire). *Se (X, d) é um espaço métrico completo e $A_1, A_2, \dots$ são abertos densos em X, então*

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

é denso em X.

Demonstração. Devemos mostrar que dado V um conjunto aberto em X, temos $A \cap V \neq \emptyset$. Nossa estratégia será construir uma sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ de conjuntos fechados não-vazios tais que $\lim \operatorname{diam} F_n = 0$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subset A_n \cap V$. Então, pela Proposição 3, o ponto x que satisfaz $\{x\} = \bigcap F_n$ é tal que $x \in V$ e $x \in F_n \subset A_n$ para todo n, ou seja, $x \in A$ e, portanto, $x \in A \cap V$.

Começamos obeservando que, como A_1 é denso, $A_1 \cap V$ é um conjunto aberto não-vazio. Logo, existe B_1 bola aberta não-vazia de raio menor que 1, tal que $\overline{B_1} \subset A_1 \cap V$. Suponha, agora, definidos $B_1, \dots, B_n$ de forma que, para todo $1 < k \leq n$, B_k é uma bola aberta não-vazia de raio menor que $1/k$ tal que $\overline{B_k} \subset V \cap A_k \cap B_{k-1}$. Novamente, como A_{n+1} é denso, $A_{n+1} \cap B_n$ é um conjunto aberto não vazio. Logo, definimos B_{n+1} como uma bola aberta não-vazia contida em $A_{n+1} \cap B_n$, de raio menor que $1/(n+1)$ tal que $\overline{B_{n+1}} \subset A_{n+1} \cap B_n \subset A_{n+1} \cap V$.

Com isso, obtemos uma sequência decrescente $B_1 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$ de bolas abertas não-vazias, com o raio de B_n menor que $1/n$, cujos fechos $\overline{B_1} \supset \cdots \supset \overline{B_n} \supset \cdots$ formam uma sequência decrescente de conjuntos fechados não-vazios, com $\operatorname{diam} \overline{B_n} \leq 1/n$ e $\overline{B_n} \subset A_n \cap V$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que, como apontado anteriormente, termina a prova. □