

Teorema da Aproximação Universal

Caio Lins

27 de março de 2021

1 Teorema da aproximação de Weierstrass

Desejamos mostrar que dada uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, podemos aproximá-la arbitrariamente bem por funções polinomiais $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Em outras palavras, seja $C([a, b])$ o espaço das funções contínuas em $[a, b]$. Indicamos por $\|\varphi\|_\infty$ a norma do supremo de uma função limitada $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja,

$$\|\varphi\|_\infty = \sup \{|\varphi(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Então é verdade que

Teorema 1.1. *Dada $f \in C([a, b])$, para todo $\varepsilon > 0$ existe um polinômio $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\|f - p\|_\infty < \varepsilon.$$

Inicialmente, observamos que basta provar o teorema para o caso $f \in C([0, 1])$. De fato, dada $f \in C([a, b])$, considere o homeomorfismo $\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ dado por $\varphi(x) = a + (b - a)x$, cuja inversa é $\varphi^{-1} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ dada por $\varphi^{-1}(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Então a função $g = f \circ \varphi$ pertence a $C([0, 1])$ e, dado $\varepsilon > 0$, se existe um polinômio $p(x)$ com $\|g - p\|_\infty < \varepsilon$, temos também, como φ^{-1} é um polinômio de grau 1,

$$\|g \circ \varphi^{-1} - p \circ \varphi^{-1}\|_\infty < \varepsilon.$$

Como $g \circ \varphi^{-1} = f$ e $p \circ \varphi^{-1}$ é um polinômio, o resultado vale também para $C([a, b])$.

Em seguida, devemos definir a classe de polinômios que utilizaremos na demonstração.

Definição 1.1. Dada $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ definimos o n -ésimo polinômio de Bernstein de g como

$$B_n(x, g) := \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (1)$$

Note a semelhança entre os polinômios de Bernstein e a expansão binomial de $(1 + (1 - x))^n$. De fato, temos $B_n(x, 1) = (1 + (1 - x))^n = 1$. Mais geralmente, para toda constante $c \in \mathbb{R}$ tem-se $B_n(x, c) = c$.

Utilizaremos essa semelhança para obter algumas identidades essenciais para a demonstração do teorema 1.1. Dados p e q reais, começamos considerando a expansão binomial de $(p + q)^n$:

$$(p + q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Considerando ambos lados da igualdade como funções de p , podemos derivá-los com relação a essa variável, obtendo

$$n(p + q)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^{k-1} q^{n-k}.$$

Multiplicando ambos lados por p/n , ficamos com

$$p(p + q)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \quad (2)$$

Essa é a primeira identidade, válida para todos $p, q \in \mathbb{R}$. Derivando novamente com relação a p e multiplicando ambos lados por p/n obtemos

$$p^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) (p + q)^{n-2} + \frac{p}{n} (p + q)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad (3)$$

a segunda identidade que utilizaremos.

Como consideramos $f, g \in C([0, 1])$, segue da Definição 1.1 que se $f \geq 0$, então $B_n(x, f) \geq 0$ e, se $f \leq g$, então $B_n(x, f) \leq B_n(x, g)$.

Com essas ferramentas, podemos então apresentar a

Demonstração do teorema 1.1. Observamos inicialmente que como f é uma função contínua definida em um compacto, é uniformemente contínua. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in [0, 1]$ satisfazem $|x - y| < \delta$ então

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Agora, definimos $M := \|f\|_\infty$ e fixamos $\xi \in [0, 1]$. Logo, se $|x - \xi| \geq \delta$ temos

$$|f(x) - f(\xi)| \leq 2M \leq 2M \left(\frac{x - \xi}{\delta}\right)^2.$$

Combinando as duas últimas desigualdades, concluímos que para todo $x \in [0, 1]$ vale

$$|f(x) - f(\xi)| \leq 2M \left(\frac{x - \xi}{\delta}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

Vamos aproximar f pelos seus polinômios de Bernstein. Seja $B_n(x, f)$ o n -ésimo polinômio de Bernstein de f , avaliado em x . Então

$$|B_n(x, f) - f(\xi)| = |B_n(x, f - f(\xi))| \quad (5)$$

$$\leq B_n \left(x, 2M \left(\frac{x - \xi}{\delta}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (6)$$

$$= \frac{2M}{\delta^2} B_n(x, (x - \xi)^2) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (7)$$

$$+ \frac{2M}{\delta^2} (B_n(x, x^2) + B_n(x, -2x\xi) + \xi^2) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (8)$$

$$= \frac{2M}{\delta^2} (B_n(x, x^2) - 2\xi B_n(x, x) + \xi^2) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9)$$

Aqui fizemos uso das propriedades de $B_n(x, f)$ que seguem de $x \in [0, 1]$, discutidas anteriormente. Utilizando as equações (2) e (3), com a substituição $p = x$ e $q = 1 - x$, concluimos que

$$B_n(x, x) = x$$

e que

$$B_n(x, x^2) = x^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{x}{n}.$$

Substituindo em (9), ficamos com

$$\frac{2M}{\delta^2} (B_n(x, x^2) - 2\xi B_n(x, x) + \xi^2) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2M}{\delta^2} \left(x^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{x}{n} - 2\xi x + \xi^2 \right) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (10)$$

$$= \frac{2M}{\delta^2} \left(x^2 + \frac{x - x^2}{n} - 2\xi x + \xi^2 \right) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (11)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\delta^2} (x - x^2) + \frac{2M}{\delta^2} (x - \xi)^2. \quad (12)$$

Sendo assim,

$$|B_n(x, f) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\delta^2} (x - x^2) + \frac{2M}{\delta^2} (x - \xi)^2. \quad (13)$$

Como essa desigualdade vale para todo $x \in [0, 1]$, em especial é válida para $x = \xi$. Fazendo essa substituição, obtemos

$$|B_n(\xi, f) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\delta^2} (\xi - \xi^2). \quad (14)$$

Facilmente podemos verificar que $\xi - \xi^2 \leq \frac{1}{4}$ para todo $\xi \in [0, 1]$. Logo,

$$|B_n(\xi, f) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2}. \quad (15)$$

Por fim, tomando $n > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$, temos $\frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ e, assim,

$$|B_n(\xi, f) - f(\xi)| < \varepsilon. \quad (16)$$

Como o valor de n obtido para que essa desigualdade seja satisfeita depende apenas de ε (lembramos que δ depende apenas de ε , pela continuidade uniforme de f), ela é válida para todo $\xi \in [0, 1]$, ou seja,

$$\|B_n(\cdot, f) - f\|_\infty < \varepsilon. \quad \square$$

2 O Décimo Terceiro Problema de Hilbert

Diferentemente do teorema da Aproximação de Weierstrass, o 13º problema de Hilbert não trata de aproximações, mas de representações exatas de funções. Mais especificamente, Hilbert postulou (utilizando a linguagem matemática de sua época) que existem funções contínuas de \mathbb{I}^3 em \mathbb{R} , onde $\mathbb{I} = [0, 1]$, que não podem ser expressas por meio da composição e adição de funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} .

Décadas após ser postulada, essa conjectura eventualmente foi demonstrada *falsa*. A prova foi dada por Vladimir Igorevich Arnol'd, 14 anos após a morte de Hilbert. Ele e seu orientador de Doutorado, Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov, provaram que, na verdade, toda função contínua

$f : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser expressa como composições e adições de funções contínuas de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Com o trabalho de outros matemáticos, esse resultado foi generalizado. Uma dessas generalizações é apresentada no teorema a seguir.

Teorema 2.1 (Kolmogorov, Arnol'd, Kahane, Lorentz e Sprecher). *Para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e funções contínuas $\varphi_k : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, para $k = 1, \dots, 2n+1$, com a propriedade de que para toda função contínua $f : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existe uma função contínua $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n$,*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{2n+1} g(\lambda_1 \varphi_k(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi_k(x_n)). \quad (17)$$

Nos atentaremos ao caso especial em que $n = 2$:

Teorema 2.2. *Existem $\lambda \in \mathbb{R}$ e funções $(\varphi_1, \dots, \varphi_5) \in [C(\mathbb{I})]^5$ tais que, para toda função $f \in C(\mathbb{I}^2)$ existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, satisfazendo, para todos $(x_1, x_2) \in \mathbb{I}^2$,*

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^5 g(\varphi_k(x_1) + \lambda \varphi_k(x_2)).$$

Para a prova que apresentaremos, necessitamos de alguns lemas

3 O Teorema de Hahn-Banach

Se V é um espaço vetorial real, um *funcional sublinear* em V é uma função $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ e } p(\lambda x) = \lambda p(x) \text{ para todos } x, y \in V \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Observe que nada se exige sobre o sinal de p . Um exemplo de funcional sublinear é uma seminorma em V .

Teorema 3.1 (Hahn-Banach). *Sejam V um espaço vetorial real, M um subespaço de V e p um funcional sublinear em V . Se f é um funcional linear em M dominado por p , ou seja, tal que $f(v) \leq p(v)$ para todo $v \in M$, então existe um funcional linear F em V , que coincide com f em M e que também é dominado por p . O funcional F é dito extensão de Hahn-Banach de f .*

Em outras palavras, se, em um espaço vetorial, temos um funcional sublinear que domina um funcional linear definido em um subespaço, podemos estender esse funcional ao espaço todo, mantendo a relação de dominância.

Antes de apresentar a demonstração do teorema 3.1, vamos introduzir alguns conceitos de Teoria dos Conjuntos.

3.1 O lema de Zorn

Dados conjuntos X uma *relação* de X em Y é um subconjunto R de $X \times Y$. Escreveremos xRy para indicar que $(x, y) \in R$. Perceba que uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma relação de X em Y dada por $(x, y) \in f$ se, e somente se, $y = f(x)$. Quando $R \subset X \times X$, diremos que R é uma relação em X .

Uma *relação de ordem parcial* em X é uma relação que satisfaz, dados $x, y, z \in X$:

- i) xRx (*reflexividade*);
- ii) Se xRy e yRx , então $x = y$ (*antisimetria*);
- iii) Se xRy e yRz , então xRz (*transitividade*).

O termo *parcial* é utilizado para indicar que podem existir elementos de X não relacionados por essa ordem. Caso tenhamos xRy ou yRx para todos $x, y \in X$, então R é dita uma relação de ordem *total*. Utilizaremos o símbolo \prec para indicar uma ordem parcial. Dizemos então que (X, \prec) é um conjunto parcialmente ordenado. Se \prec também é total, (X, \prec) é totalmente ordenado. Claramente todo subconjunto de X também é parcialmente ordenado, com a ordem induzida por \prec .

Um *elemento maximal* de um conjunto ordenado X é um elemento x tal que se $y \in X$ com $x \prec y$, então $y = x$. Uma *cota superior* de um subconjunto $Y \subset X$ é um elemento $x \in X$ tal que $y \prec x$ para todo $y \in Y$. Observe que se \prec não é total, não necessariamente um elemento maximal de $Y \subset X$ é uma cota superior de Y .

Dois exemplos usuais de conjuntos ordenados são \mathbb{R} e $\mathcal{P}(X)$, para um dado conjunto X . O primeiro é um conjunto totalmente ordenado pela ordem usual \leq , o qual não possui elemento maximal. O segundo se torna um conjunto ordenado ao dizermos que dados $A, B \subset X$, temos $A \prec B$ se, e somente se $A \subset B$. Essa ordem não é total e o único elemento maximal de $\mathcal{P}(X)$ é o próprio X .

Axioma (lema de Zorn). *Todo conjunto parcialmente ordenado, tal que todos seus subconjuntos totalmente ordenados possuam cota superior, possui elemento maximal.*

Encerramos essa apresentação com um resultado que exemplifica como o lema de Zorn geralmente é utilizado.

Proposição 1. *Todo espaço vetorial não trivial, ou seja, que possui elementos não nulos, possui uma base.*

Demonstração. Seja V o espaço vetorial em questão, e A a coleção de todos os subconjuntos linearmente independentes de V . Claramente essa coleção é parcialmente ordenada pela relação de inclusão. Dada uma subcoleção $B \subset A$ totalmente ordenada, considere o conjunto

$$C = \bigcup_{\beta \in B} \beta.$$

Afirmamos que $C \in A$. De fato, dado um conjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subset C$, sejam β_1, \dots, β_n os conjuntos de B tais que $x_i \in \beta_i$ para todo $i \leq n$. Como B é totalmente ordenado, existe β_k tal que $\beta_i \subset \beta_k$ para todo $i \leq n$. Logo $\{x_i, \dots, x_n\} \subset \beta_k$ e, como β_k é linearmente independente, também o

são os x_i . Dessa forma, C é um conjunto linearmente independente, pertencente a A e que claramente é uma cota superior de B .

Portanto, aplicando o lema de Zorn obtemos um elemento maximal Λ de A . Denotando por $\text{Lin } \Lambda$ o conjunto formado pelas combinações lineares de elementos de Λ , afirmamos que $\text{Lin } \Lambda = A$. Com efeito, supondo, por absurdo, que exista $v \in V \setminus \text{Lin } \Lambda$, temos que $\Lambda \cup \{v\}$ é linearmente independente, ou seja, pertence a A e contém Λ , uma contradição pois Λ é maximal. \square

3.2 Demonstração do teorema de Hahn-Banach

Seja $\{g_\lambda\}_{\lambda \in L}$, para algum conjunto de índices L , a coleção das extensões lineares de f em conjuntos M_λ tais que $M \subset M_\lambda \subset V$, que são dominadas por p . Como $f \in \{g_\lambda\}_{\lambda \in L}$, essa coleção é não-vazia e, portanto, podemos ordená-la parcialmente utilizando a relação de inclusão, considerando que g_λ é um subconjunto de $M_\lambda \times \mathbb{R}$. Mais especificamente, diremos que $g_\alpha \subset g_\beta$ se tivermos $M_\alpha \subset M_\beta$ e $g_\beta|_{M_\alpha} = g_\alpha$, ou seja, se g_β for uma extensão de g_α . Desejamos mostrar que existe um elemento maximal de $\{g_\lambda\}_{\lambda \in L}$. Dado $L' \subset L$ tal que $\{g_\lambda\}_{\lambda \in L'}$ é uma subcoleção totalmente ordenada, definimos g como

$$g := \bigcup_{\lambda \in L'} g_\lambda,$$

ou seja, g é um funcional linear em $\bigcup_{\lambda \in L} M_\lambda$ tal que $g(v) = g_\lambda(v)$, onde $v \in M_\lambda$. De fato g está bem definida, pois se $v \in M_{\lambda_1} \cap M_{\lambda_2}$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ambos pertencentes a L' , então podemos supor, sem perda de generalidade, que $g_{\lambda_2} \subset g_{\lambda_1}$ e, assim, $g_{\lambda_1}(v) = g_{\lambda_2}(v)$, para $v \in M_{\lambda_1} \cap M_{\lambda_2} = M_{\lambda_2}$. É fácil verificar que g estende f e é dominado por p . Logo, g é uma cota superior de $\{g_\lambda\}_{\lambda \in L'}$ e, pelo lema de Zorn, existe $F \in \{g_\lambda\}_{\lambda \in L}$, definido em $W \subset V$, maximal.

Intuitivamente é claro que F deve estar definida em todo o espaço V , de modo que é a extensão de Hahn-Banach de f . Para demonstrar esse fato, suponha, por absurdo, que ele seja falso, ou seja, que exista $\eta \in V \setminus W$. Nossa estratégia será construir uma extensão G de F , dominada por p , definida em $U = \text{Lin}(W \cup \{\eta\})$, contradizendo a maximalidade de F .

Para definirmos G , basta atribuímos um valor para $G(\eta)$. De fato, todo elemento de U é da forma $w + \alpha\eta$, onde $w \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, pondo

$$G(w + \alpha\eta) = F(w) + \alpha G(\eta),$$

claramente G é uma extensão de F . O passo crucial é definir $G(\eta)$ de forma que G seja dominada por p . Para tanto, vamos nos atentar a algumas desigualdades. Dados $w_1, w_2 \in W$, vale

$$F(w_1) + F(w_2) = F(w_1 + w_2) \leq p(w_1 + w_2) \leq p(w_1 - \eta) + p(\eta + w_2).$$

Equivalentemente:

$$F(w_1) - p(w_1 - \eta) \leq p(\eta + w_2) - F(w_2).$$

Ou seja, temos

$$\sup \{F(w_1) - p(w_1 - \eta) : w_1 \in W\} \leq \inf \{p(\eta + w_2) - F(w_2) : w_2 \in W\}.$$

Defina, então, $G(\eta)$ de modo que

$$\sup \{F(w_1) - p(w_1 - \eta) : w_1 \in W\} \leq G(\eta) \leq \inf \{p(\eta + w_2) - F(w_2) : w_2 \in W\}.$$

Dessa forma, dado $w + \alpha\eta \in U$, se $\alpha > 0$ temos

$$\begin{aligned} G(w + \alpha\eta) &= F(w) + \alpha G(\eta) \\ &\leq F(w) + \alpha \left(p\left(\frac{w}{\alpha} + \eta\right) - F\left(\frac{w}{\alpha}\right) \right) \\ &= F(w) + p(w + \alpha\eta) - F(w) \\ &= p(w + \alpha\eta). \end{aligned}$$

Caso $\alpha < 0$:

$$\begin{aligned} G(w + \alpha\eta) &= F(w) + \alpha G(\eta) \\ &\leq F(w) + \alpha \left(F\left(\frac{w}{|\alpha|}\right) - p\left(\frac{w}{|\alpha|} - \eta\right) \right) \\ &= F(w) - F(w) - p(-w - \alpha\eta) \\ &= p(w + \alpha\eta). \end{aligned}$$

Se $\alpha = 0$, G coincide com F e claramente é dominada por p . Sendo assim, chegamos a uma contradição com a maximalidade de F , o que conclui a prova. \square

No caso especial em que p é uma seminorma, a condição $f \leq p$ é equivalente a $|f| \leq p$, pois $-f(x) = f(-x) \leq p(-x) = p(x)$.

3.3 Aplicações do teorema de Hahn-Banach

Aqui vamos utilizar o teorema de Hahn-Banach para provar um resultado sobre subespaços vetoriais densos que será utilizado na prova do teorema da Aproximação Universal. Começamos apresentando uma aplicação do teorema de Hahn-Banach para ilustrar como ele é geralmente utilizado.

Teorema 3.2. *Seja V um espaço vetorial normado. Então:*

- i) Se $0 \neq v \in V$, então existe $f \in V^*$ tal que $f(v) = \|v\|$ e $\|f\| = 1$;*
- ii) Se v e w são elementos distintos de V , então existe $f \in V^*$ tal que $f(v) \neq f(w)$;*
- iii) Se $v \in V$ satisfaz $f(v) = 0$ para todo $f \in V^*$, então $v = 0$;*
- iv) Se $v \in V$, então*

$$\|v\| = \sup_{0 \neq f \in V^*} \frac{|f(v)|}{\|f\|} = \max_{0 \neq f \in V^*} \frac{|f(v)|}{\|f\|}. \quad (18)$$

Demonstração. Para provar *i*, basta aplicar Hahn-Banach com o funcional sublinear dado pela norma, o subespaço $M = \text{Lin}(\{v\})$ e o funcional $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(\alpha v) = \alpha\|v\|$. Sendo F a extensão de Hahn-Banach de f , temos $F(v) = \|v\|$ e, como o funcional sublinear é a norma de V , vale

$|F(x)| \leq \|x\|$ para todo $x \in V$. Como há um caso de igualdade, vale $\|F\| = 1$. Em *ii*, como $v \neq w$, então $v - w \neq 0$. Por *i*, isso implica a existência de um funcional f tal que $f(v - w) = \|v - w\| \neq 0$, ou seja, $f(v) \neq f(w)$. Claramente *iii* segue diretamente de *ii*. Como, para todo $f \in V^*$, vale $|f(v)| \leq \|f\|\|v\|$, temos

$$\|v\| \geq \sup_{0 \neq f \in V^*} \frac{|f(v)|}{\|f\|}. \quad (19)$$

Por *i*, existe $g \in V^*$ tal que $g(v) = \|v\|$ e $\|g\| = 1$, de modo que

$$\|v\| = \frac{|g(v)|}{\|g\|}, \quad (20)$$

ou seja, vale a igualdade e podemos trocar \sup por \max . \square

A próxima proposição será útil para provar o principal resultado dessa seção.

Proposição 2. *Seja V um espaço vetorial normado e M um subespaço próprio fechado de V . Dado $v \in V \setminus M$, definimos $\delta = d(v, M) := \inf \{\|v - w\| : w \in M\}$. Então existe um funcional $f \in V^*$ tal que $\|f\| = 1$, $f(v) = \delta$ e $f|_M = 0$.*

Demonstração. Como M é fechado, $\delta > 0$. Defina o funcional $g : \text{Lin}(\{v\} \cup M) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$g(\alpha v + w) = \alpha \delta, \quad (21)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $w \in M$. Claramente temos $g|_M = 0$ e $g(v) = \delta$. Agora perceba que

$$|g(\alpha v + w)| = |\alpha| \delta \leq |\alpha| \|v + w/\alpha\| = \|\alpha v + w\|, \quad (22)$$

de modo que $\|g\| \leq 1$. Além disso, para todo $w \in M$ vale

$$\|g\| \geq \frac{|g(v + w)|}{\|v + w\|} = \frac{\delta}{\|v + w\|}. \quad (23)$$

Portanto,

$$\|g\| \geq \sup_{w \in M} \frac{\delta}{\|v + w\|} = \frac{\delta}{\inf_{w \in M} \|v - w\|} = 1. \quad (24)$$

Logo, $\|g\| \geq 1$ e, com isso, $\|g\| = 1$. Agora podemos aplicar Hahn-Banach, obtendo a extensão f de g , utilizando como funcional sublinear a norma em V . \square

Agora o teorema que será usada na prova do teorema da Aproximação Universal.

Teorema 3.3. *Um subespaço M de um espaço vetorial V é denso se, e somente se, o único elemento de V^* que se anula em M é o funcional nulo.*

Demonstração. Suponha que N é um subespaço denso de V e seja $f \in V^*$ um funcional que se anula em M . Dado $v \in V \setminus M$, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \in M$ para todo n e $x_n \rightarrow v$. Como f é uma transformação linear limitada, é contínua e, portanto, $f(x_n) \rightarrow f(v)$. Porém $f(x_n) = 0$ para todo n , ou seja, $f(x_n) \rightarrow 0 = f(v)$, de modo que $f = 0$.

Reciprocamente, se o único elemento de V^* que se anula em M é o funcional nulo, então necessariamente V é denso. Caso contrário, \overline{M} seria um subespaço próprio fechado de V e, pela proposição 2 existiria um funcional não nulo que se anula em \overline{M} e, consequentemente, em M . \square

A Elementos de Espaços Métricos

Neste apêndice introduzimos o necessário para se compreender o teorema de Baire, utilizado na demonstração do 13º problema de Hilbert.

Definição A.1. Dado um conjunto X qualquer, uma *métrica* em X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- i) $d(x, x) = 0$;
- ii) $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição A.2. Um *espaço métrico* é um par (X, d) onde X é um conjunto e d é uma métrica em X .

Por vezes, onde não houver prejuízo ao entendimento do texto, utilizaremos apenas o nome do conjunto para nos referirmos ao espaço métrico por ele formado.

Definição A.3. Um subconjunto M de um espaço métrico X é dito *limitado* se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) \leq c$ para todos $x, y \in M$. Nesse caso, o definimos o *diâmetro* de M , denotado por $\text{diam } M$, como $\sup \{d(x, y) : x, y \in M\}$. Se M é ilimitado, ou seja, para todo $c > 0$ existem $x, y \in M$ com $d(x, y) > c$, dizemos que $\text{diam } M = \infty$.

Definição A.4. Dado um espaço métrico X e um ponto $a \in X$, chamamos de *bola aberta de raio r centrada em a* o conjunto

$$B(a, r) := \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

Definição A.5. Dado um espaço métrico X e um subconjunto $Y \subset X$, chamamos de *interior* de Y , e denotamos por $\text{int } Y$, o subconjunto de Y formado pelos elementos $a \in Y$ tais que existe $r > 0$ satisfazendo $B(a, r) \subset Y$.

Definição A.6. Um subconjunto A de um espaço métrico X é dito *aberto* se $A = \text{int } A$.

Definição A.7. Dado um subconjunto M de um espaço métrico X , um ponto $x \in X$ é dito *aderente* a M se toda bola aberta centrada em x tiver interseção não-vazia com M . Chamamos de *fecho* de M , e denotamos por \overline{M} , o conjunto dos pontos de aderência de M .

Definição A.8. Um subconjunto F de um espaço métrico X é dito *fechado* se $F = \overline{F}$.

Definição A.9. Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos do espaço métrico X , dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge* para $L \in X$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, vale $d(x_n, L) < \varepsilon$. Se para todo $L \in X$ é falso que $\lim x_n = L$, dizemos que (x_n) é *divergente*.

Definição A.10. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos do espaço métrico X é dita *de Cauchy* se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n, m \geq n_0$, vale $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Equivalentemente, (x_n) é de Cauchy se, para $n \geq n_0$, vale $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

Proposição 3. *Toda sequência convergente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no espaço métrico X é de Cauchy.*

Demonstração. Seja $L = \lim x_n$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, para $n \geq n_0$, valha $d(x_n, L) < \varepsilon/2$. Então, se $n, m \geq n_0$ temos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, L) + d(x_m, L) = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \square$$

Exemplo 1. Embora toda sequência convergente seja de Cauchy, é falso que dado um espaço métrico qualquer, toda sequência de Cauchy convirja para um ponto pertencente a ele. Por exemplo, considerando o conjunto \mathbb{Q} com a métrica d induzida pela métrica de \mathbb{R} , temos que toda sequência de racionais convergindo para um irracional é de Cauchy, mas diverge em \mathbb{Q} .

Proposição 4. *Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em um espaço métrico X é de Cauchy e possui um valor de aderência (ou seja, existe uma subsequência convergente (x_{n_k}) de (x_n)), então (x_n) converge para esse valor de aderência.*

Demonstração. Seja $L \in X$ o limite da subsequência (x_{n_k}) . Então, dado $\varepsilon > 0$ conseguimos obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $k > k_0$, então $d(x_{n_k}, L) < \varepsilon/2$. Também conseguimos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq n_0$ então $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$. Tome $\ell > \max \{n_0, k_0\}$. Então claramente $n_\ell \geq \ell$ e, com isso,

$$d(x_\ell, L) \leq d(x_\ell, x_{n_\ell}) + d(x_{n_\ell}, L) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \square$$

Definição A.11. Um espaço métrico X é dito *completo* se toda sequência de Cauchy em X converge para um elemento de X .

Proposição 5. *Um espaço métrico X é completo se, e somente se, dada uma sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ de conjuntos não-vazios fechados em X , tais que $\lim \text{diam } F_n = 0$, existe $a \in X$ com*

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Demonstração. Suponha que X seja completo e considere $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como no enunciado do teorema. Para cada conjunto F_n , escolha $x_n \in F_n$, formando uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy. De fato, como $\lim \text{diam } F_n = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, temos $d(x, y) < \varepsilon$ para todos $x, y \in F_n$. De $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ concluímos que $n, m > n_0$ implicam $x_n, x_m \in F_{n_0}$ o que implica $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Da completude de X concluímos que existe $a = \lim x_n$. Como todos F_n são fechados e, para $m \geq n$ temos $x_m \in F_n$, conclui-se que $a \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Suponha, agora, que X seja um espaço métrico no qual toda sequência de fechados como a do enunciado convirja. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X . Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Então $(\overline{F_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de conjuntos fechados tais que $\lim \text{diam } \overline{F_n} = \lim \text{diam } F_n = 0$. Por hipótese, existe $a \in \bigcap \overline{F_n}$. Como a é limite de sequência de pontos de F_k para todo $k \in \mathbb{N}$, para cada k podemos escolher $a_{n_k} \in F_k$ de modo que $d(a, a_{n_k}) < 1/k$ e, assim, $\lim a_{n_k} = a$. Claramente $n_k > k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, portanto, passando a uma subsequência se necessário, a_{n_k} é subsequência de (x_n) o que implica, como (x_n) é de Cauchy, $\lim x_n = a$. \square

Teorema A.1 (teorema da Categoria de Baire). *Se X é um espaço métrico completo e A_1, A_2, \dots são abertos densos em X , então*

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

é denso em X .

Demonstração. Devemos mostrar que dado V um conjunto aberto em X , temos $A \cap V \neq \emptyset$. Nossa estratégia será construir uma sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ de conjuntos fechados não-vazios tais que $\lim \text{diam } F_n = 0$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subset A_n \cap V$. Então, pela proposição 5, o ponto x que satisfaz $\{x\} = \bigcap F_n$ é tal que $x \in V$ e $x \in F_n \subset A_n$ para todo n , ou seja, $x \in A$ e, portanto, $x \in A \cap V$.

Começamos observando que, como A_1 é denso, $A_1 \cap V$ é um conjunto aberto não-vazio. Logo, existe B_1 bola aberta não-vazia de raio menor que 1, tal que $\overline{B_1} \subset A_1 \cap V$. Suponha, agora, definidos B_1, \dots, B_n de forma que, para todo $1 < k \leq n$, B_k é uma bola aberta não-vazia de raio menor que $1/k$ tal que $\overline{B_k} \subset V \cap A_k \cap B_{k-1}$. Novamente, como A_{n+1} é denso, $A_{n+1} \cap B_n$ é um conjunto aberto não vazio. Logo, definimos B_{n+1} como uma bola aberta não-vazia contida em $A_{n+1} \cap B_n$, de raio menor que $1/(n+1)$ tal que $\overline{B_{n+1}} \subset A_{n+1} \cap B_n \subset A_{n+1} \cap V$.

Com isso, obtemos uma sequência decrescente $B_1 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$ de bolas abertas não-vazias, com o raio de B_n menor que $1/n$, cujos fechos $\overline{B_1} \supset \dots \supset \overline{B_n} \supset \dots$ formam uma sequência decrescente de conjuntos fechados não-vazios, com $\text{diam } \overline{B_n} \leq 1/n$ e $\overline{B_n} \subset A_n \cap V$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que, como apontado anteriormente, termina a prova. \square

Terminaremos essa seção com a definição de função contínua, que será usada posteriormente.

Definição A.12. Dados espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) , uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita *contínua* em $a \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $d_X(x, a) < \delta$, então $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

B Elementos de Análise Funcional

Aqui apresentaremos noções elementares que mesclam conceitos de Análise e de Álgebra Linear, utilizadas nas aplicações do teorema de Hahn-Banach.

Definição B.1. Dado um espaço vetorial V sobre um corpo \mathbb{K} , uma *norma* em V é uma função $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, +\infty)$ tal que

- i) $\|v\| = 0$ se, e somente se $v = 0$ (normas são *positivas definidas*);
- ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ para todo $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ (*homogeneidade absoluta*);
- iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ para todos $v, w \in V$ (*desigualdade triangular*).

Uma função que cumpre as propriedades *ii* e *iii* acima é denominada uma *semi-norma*. Um espaço vetorial junto de sua norma é denominado um *espaço vetorial normado*. A menos de onde houver ambiguidade, utilizaremos o mesmo símbolo $\|\cdot\|$ para nos referir a normas de qualquer espaço vetorial normado. O vetor dentro do símbolo deixará claro a norma de qual espaço está sendo utilizada.

É interessante perceber que todo espaço vetorial normado é um espaço métrico, quando se introduz nele a métrica induzida pela norma: $(v, w) \mapsto \|v - w\|$. As propriedades de uma métrica são facilmente verificadas.

Definição B.2. Uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ entre dois espaços vetoriais normados é dita *limitada* se existe $C \in [0, +\infty)$ tal que $\|Tv\| \leq C\|v\|$ para todo $v \in V$.

Essa definição naturalmente é diferente da definição usual de função limitada, pois, como $T(\lambda v) = \lambda(Tv)$, impossível termos $\|Tv\| \leq C$ para todo $v \in V$ se T é não nula.

O próximo teorema ilustra a utilidade dessa definição de transformação limitada.

Teorema B.1. *Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais normados. As seguintes afirmativas são equivalentes:*

- i) T é contínua;
- ii) T é contínua em 0;
- iii) T é limitada.

Demonstração. A implicação de *i* para *ii* é óbvia. Suponha, agora, que T é contínua em 0. Tomando $\varepsilon = 1$, conseguimos $\delta > 0$ tal que se $\|v\| \leq \delta$, então $\|Tv\| < 1$. Agora, dado $v \in V$, $v \neq 0$, tome o vetor $v' := \delta v / \|v\|$. Claramente temos $\|v'\| = \delta$, ou seja, $\|Tv'\| < 1$, o que implica $\|Tv\| < \delta^{-1}\|v\|$. Logo, tomando $C = \delta^{-1}$, T é limitada. Por fim, se T é limitada, dados $a \in V$ e ε , tome $\delta < \varepsilon/C$. Com isso se $\|x - a\| < \delta$ temos:

$$\|Tx - Ta\| = \|T(x - a)\| \leq C\|x - a\| < C \cdot \varepsilon / C = \varepsilon. \quad (25)$$

Portanto, T é contínua. □

Denotamos por $L(V, W)$ o conjunto das transformações lineares limitadas de V em W . Esse conjunto, com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial. Podemos, ainda, definir nele uma norma, dada por

$$\|T\| := \sup \left\{ \frac{\|Tv\|}{\|v\|} : v \in V \setminus \{0\} \right\} \quad (26)$$

$$= \sup \{ \|Tv\| : v \in V, \|v\| = 1 \} \quad (27)$$

$$= \inf \{ C : \|Tv\| \leq C\|v\| \text{ para todo } v \in V \}. \quad (28)$$

Claramente os dois primeiros conjuntos são iguais, logo seus supremos também o são. Para ver que vale (28), perceba que, por (26), temos $\|Tv\| \leq \|T\|\|v\|$ para todo $v \in V$. Portanto, sendo A o conjunto em (28), temos $\|T\| \in A$, ou seja, $\inf A \leq \|T\|$. Além disso, dado $C \in A$, temos $C \geq \|Tv\|/\|v\|$ para todo $v \in V - \{0\}$. Logo, $\|T\| \leq C$ e, com isso, $\|T\| \leq \inf A$. Sendo assim, vale (28). As propriedades i), ii) e iii) decorrem diretamente das propriedades das normas de V e W e são facilmente verificadas. Sempre trataremos o conjunto $L(V, W)$ como um espaço vetorial normado munido dessa norma, a qual é denominada *norma de operador*.

No caso especial em que $W = \mathbb{K}$, o espaço $L(V, \mathbb{K})$ é denominado *espaço dual* de V e é denotado por V^* . Os elementos de V^* são denominados *funcionais lineares*.