Teorema da Aproximação Universal

Caio Lins

23 de maio de 2021

Conteúdo

1 Teorema da Representação de Riesz

Esse teorema possui diversas formulações. Em geral, elas têm como objetivo representar os funcionais lineares contínuos em um dado espaço vetorial de uma maneira mais natural, associando-os a elementos daquele mesmo espaço ou de outro.

Apesar de a versão que abordaremos inicialmente não ser a utilizada na demonstração do teorema da aproximação universal, acreditamos que é importante apresentar esse teorema primeiro no contexto natural de espaços de Hilbert.

Novamente, nossa exposição desse resultado clássico da análise funcional foi formulada com base em [Oli12] e o leitor que quiser recordar conceitos fundamentais poderá encontrálos no apêndice B.

1.1 Em espaços de Hilbert

Da forma que será primeiramente enunciado, esse resultado trata da associação natural que existe entre um espaço de Hilbert H e o seu dual, H^*. Apesar de ser um fato de certa forma trivial para espaços de dimensão finita, sua demonstração não é tão óbvia para espaços de Hilbert em geral. Para demonstrá-lo, precisamos, antes, de passar por três resultados preliminares. O leitor poderá encontrar alguns dos conceitos de análise funcional utilizados no apêndice correspondente.

Lema 1.1. *Dados v, w pertencentes a $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, tem-se que $v \perp w$, ou seja, $\langle v, w\rangle = 0$, se, e somente se,*

$$\|v + \lambda w\| \geq \|v\|. \tag{1}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Evidementemente temos

$$0 \leq \|v + \lambda w\|^2 = \|v\|^2 + 2\text{Re}(\langle v, w\rangle) + |\lambda|^2 \|w\|^2.$$

Se $v \perp w$, então temos

$$\begin{aligned} \|v + \lambda w\|^2 &= \|v\|^2 + |\lambda|^2 \|w\|^2 \\ &\geq \|v\|^2, \end{aligned}$$

de onde a desigualdade (1) segue. Reciprocamente, se vale (1) para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, em especial tomando $\lambda = -\langle w, v\rangle / \|w\|^2$ e elevando ambos lados ao quadrado ficamos com $0 \leq -|\langle v, w\rangle|^2$, o que implica $v \perp w$. □

Lema 1.2 (Lei do paralelogramo)**.** *Dados v, w pertencentes a $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, tem-se*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Como a demonstração desse lema consiste simplesmente em expandir o lado esquerdo da igualdade e usar as propridedades de produto interno, será deixada a cargo do leitor.

Antes do próximo resultado, uma definição. Dado um subespaço E de um espaço com produto interno V, definimos

$$E^{\perp} = \{v \in V : \langle v, w\rangle = 0 \text{ para todo } w \in E\}.$$

Teorema 1.1 (Projeção ortogonal)**.** *Se E é subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert H, então*

$$H = E \oplus E^{\perp}.$$

Demonstração. Dado $v \in H$, definimos $\delta = \inf\{\|v - w\| : w \in E\}$. Seja $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de E tais que $\|v - w_n\| \to \delta$. Então, sendo k e ℓ números naturais, aplicando a lei do paralelogramo para os vetores $w_k - v$ e $w_\ell - v$ obtemos:

$$2\|w_k - v\|^2 + 2\|w_\ell - v\|^2 = \|w_k + w_\ell - 2v\|^2 + \|w_k - w_\ell\|,$$

o que implica, remanejando e lembrando que $(w_k + w_\ell)/2 \in E$,

$$\begin{aligned}\|w_k - w_\ell\| &= 2\|w_k - v\|^2 + 2\|w_\ell - v\|^2 - 4\|(w_k + w_\ell)/2 - v\|^2 \\ &\leq 2\|w_k - v\|^2 + 2\|w_\ell - v\|^2 - 4\delta^2.\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que (w_n) é uma sequência de Cauchy. Como H é um espaço de Hilbert, temos que $w_n \to w \in E$, pois E é fechado e, pela continuidade da norma, temos $\|v - w\| = \delta$.

Intuitivamente, w é o elemento de E mais próximo de v. Logo, é razoável esperar que ele seja a projeção ortogonal de v em E. Para confirmar essa suspeita, devemos verificar que $v - w \in E^{\perp}$. De fato, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e todo $u \in E$ temos

$$\|(v - w) + \lambda u\| = \|v + (-w + \lambda u)\| \geq \delta = \|v - w\|.$$

Portanto, pelo lema 1.1, concluímos que $v - w \in E^{\perp}$. Sendo assim, temos $v = w + (v - w)$, onde $w \in E$ e $v - w \in E^{\perp}$. Para mostrar a unicidade dessa decomposição, suponha que $v = w_1 + u_1 = w_2 + u_2$, onde $w_1, w_2 \in E$ e $u_1, u_2 \in E^{\perp}$. Então

$$w_1 - w_2 = u_2 - u_1 \in E \cap E^{\perp},$$

o que implica $w_1 - w_2 = u_2 - u_1 = 0$, ou seja, $w_1 = w_2$ e $u_1 = u_2$. □

Agora podemos prosseguir para o principal resultado dessa subseção.

Teorema 1.2 (Teorema da representação de Riesz em espaços de Hilbert)**.** *Dado um espaço de Hilbert H e seu dual H^*, a função*

$$\begin{aligned}\gamma : &H \to H^* \\ &v \mapsto \gamma(v) = f_v,\end{aligned}$$

tal que $f_v = \langle v, \cdot\rangle$, é uma isometria antilinear e sobrejetiva em H^*.

Demonstração. Para mostrar que γ é uma isometria, provaremos que $\|f_v\| = \|v\|$ para todo $v \in H$. De fato, se $v = 0$ isso é evidente. Fixado $v \in H \setminus \{0\}$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos $|f_v(w)| = |\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$. Logo, $\|f_v\| \leq \|v\|$. Por outro lado, temos $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = f_v(v) \leq \|f_v\|\|v\|$, ou seja, $\|v\| \leq \|f_v\|$ e acabamos.

Além disso claramente γ é antilinear, pois

$$\gamma(\alpha v + w) = \langle \alpha v + w, \cdot \rangle = \bar{\alpha}\langle v, \cdot \rangle + \langle w, \cdot \rangle = \bar{\alpha}\gamma(v) + \gamma(w).$$

A parte menos óbvia, e que dá nome ao teorema, é a da sobrejetividade. Repare que, com essa propriedade, todo funcional $f \in H^*$ fica unicamente associado a um determinado $v \in H$ tal que $f = \gamma(v)$. Dizemos, então, que v *representa* f. Para demonstrá-la, utilizaremos o teorema 1.1.

Dado $f \in H^*$, se $f = 0$ então naturalmente $f = \gamma(0)$. Se $f \neq 0$, repare que $\ker(f)$, o núcleo de f, é um subespaço próprio fechado de H. Pelo teorema 1.1, temos

$$H = \ker(f) \oplus \ker(f)^{\perp},$$

de onde concluímos que existe $w \in \ker(f)^{\perp}$ satisfazendo $\|w\| = 1$. Agora uma observação simples, porém fundamental: para todos $u, v \in H$ temos $f(v)u - f(u)v \in \ker(f)$. Logo, para todo $v \in H$ temos

$$\langle w, f(v)w - f(w)v \rangle = 0,$$

o que implica, desenvolvendo,

$$f(v) = \langle \overline{f(w)}w, v \rangle.$$

Sendo assim, $f = \gamma(\overline{f(w)}w)$. □

1.2 Em teoria da medida

No contexto de teoria da medida, existem alguns resultados que são reconhecidos como "teorema da representação de Riesz". O mais conhecido estabelece que dual do espaço das funções cujo módulo é p integrável em um espaço de medida (Ω, Σ, μ), o espaço L_p, onde $1 < p < +\infty$, é representado pelo espaço L_q, onde $1/p + 1/q = 1$. Mais precisamente, se $G : L_p \to \mathbb{R}$ é um funcional linear limitado, então existe $g \in L_q$ tal que, para toda $f \in L_p$ temos

$$G(f) = \int fg \, \mathrm{d}\mu.$$

Se μ é uma medida σ-finita, então o resultado também é válido para L_1, cujo espaço dual é L_∞. Observe que se $p = q = 2$, então o espaço L_2 é um espaço de Hilbert e, então, o teorema da representação de Riesz se torna o mesmo apresentado na subseção anterior.

Outro teorema que também leva esse nome, e que é o que utilizaremos para provar o **TAU**, utiliza medidas para representar funcionais definidos num espaço de funções reais contínuas. A versão exata de que precisamos tem uma demonstração que foge do escopo deste trabalho, portanto, antes de apresentá-la vamos enunciar e demonstrar uma versão mais simples, que trata dos funcionais definidos em $C([a, b])$. Porém antes, uma definição:

Definição 1.1. Dado um espaço F formado pelas funções de um conjunto qualquer X em $\mathbb{R}$, um funcional linear $G : F \to \mathbb{R}$ é dito *positivo* se $G(f) \geq 0$ sempre que $f \geq 0$, ou seja, sempre que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$.

Observação. Perceba que se $f \leq g$ para todo $x \in X$, então $g - f \geq 0$, o que implica $G(g-f) \geq 0$ e, pela linearidade de G, $G(g) \geq G(f)$.

Teorema 1.3 (Teorema da representação de Riesz)**.** *Seja $J = [a, b]$. Se G é um funcional linear limitado positivo no espaço $C(J)$, munido com a norma do supremo, então existe uma medida γ, definida nos subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$, tal que*

$$G(f) = \int_J f \, \mathrm{d}\gamma. \tag{2}$$

para toda $f \in C(J)$. Além disso, $\|G\| = \gamma(J)$.

Demonstração. A demonstração aqui apresentada envolve conceitos e resultados não-triviais de teoria da medida, os quais ocupariam muito espaço se fossem apresentados em um apêndice como fizemos até aqui. O leitor não familiarizado com esse assunto pode utilizar o capítulo 9 do livro de onde obtemos essa prova, [Bar95], como referência.

Começamos definindo uma classe de funções auxiliares que nos será útil. Para todo t tal que $a \leq t < b$, seja $\varphi_{t,n}$ a função pertencente a $C(J)$ que é igual a 1 em $[a, t]$, é igual a 0 em $\left(t + \frac{1}{n}, b\right]$ e é linear em $\left(t, t + \frac{1}{n}\right]$. Se $n \leq m$ e $x \in J$, então $0 \leq \varphi_{t,m}(x) \leq \varphi_{t,m}(x) \leq 1$, de modo que, pela observação feita anteriormente, as sequências $(G(\varphi_{t,n}))_{n \in \mathbb{N}}$ são monótonas não-crescentes e limitadas. Portanto, para cada $t \in [a, b)$ podemos definir

$$g(t) = \lim_{n \to \infty} G(\varphi_{t,n}).$$

Além disso, pomos $g(t) = 0$ para $t < a$ e, se $t \geq b$, definimos $g(t) = G(\varphi_b)$, onde $\varphi_b(x) = 1$ para todo $x \in J$. Como $\varphi_{t_0,n} \leq \varphi_{t_1,n}$ para $t_0 \leq t_1$, vê-se que g é uma função monótona não-decrescente em $\mathbb{R}$.

Nosso objetivo é utilizar o teorema da extensão de Hahn para definir uma medida γ nos subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$, tal que $\gamma((\alpha, \beta]) = g(\beta) - g(\alpha)$, porém, para tanto, precisamos antes demonstrar que g é contínua pela direita. Isso é claro se $t < a$ ou se $t \geq b$, porém não se $t \in [a, b)$. Neste último caso, tome $\varepsilon > 0$ e seja $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que tenhamos

$$n_0 > \sup \left\{ 2, \frac{\|G\|}{\varepsilon} \right\}. \tag{3}$$

e, também,

$$g(t) \leq G(\varphi_{t,n_0}) \leq g(t) + \varepsilon. \tag{4}$$

Agora definimos uma nova função auxiliar. Seja $\psi_n \in C(J)$, $n > 2$, tal que ψ_n é igual a 1 em $\left[a, t + \frac{1}{n^2}\right]$, é igual a 0 em $\left(t + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}, b\right]$ e é linear em

$$\left(t + \frac{1}{n^2}, t + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Um exercício mecânico de analisar os valores de ψ_n e $\varphi_{t,n}$ nos pontos onde a diferença entre elas é máxima revela que $\|\psi_n - \varphi_{t,n}\|_\infty \leq \frac{1}{n}$. Logo,

$$\begin{aligned} G(\psi_n) - G(\varphi_{t,n}) &\leq |G(\psi_n) - G(\varphi_{t,n})| \\ &= |G(\psi_n - \varphi_{t,n})| \\ &\leq \|G\| \|\psi_n - \varphi_{t,n}\|_\infty \\ &\leq \frac{\|G\|}{n}, \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$G(\psi_n) \leq G(\varphi_{t,n}) + \frac{\|G\|}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Em especial, tomando $n \geq n_0$ ficamos com, devido a (3) e (4),

$$G(\psi_{n_0}) \leq g(t) + 2\varepsilon.$$

Como g é monótona não-decrescente, temos $g(t) \leq g\left(t + \frac{1}{n_0^2}\right)$. Além disso, se n é suficentemente grande é fácil ver que

$$\varphi_{t+\frac{1}{n_0^2},n} \leq \psi_{n_0},$$

o que implica $g\left(t + \frac{1}{n_0^2}\right) \leq G(\psi_{n_0})$. Com isso, concluímos que

$$g(t) \leq g\left(t + \frac{1}{n_0^2}\right) \leq g(t) + 2\varepsilon$$

e, assim, g é contínua pela direita.

Aplicando o teorema da extensão de Hahn, existe uma medida γ, nos subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$, tal que $\gamma\left((\alpha, \beta]\right) = g(\beta) - g(\alpha)$. Em particular, isso implica que $\gamma(E) = 0$, se $E \cap J = \emptyset$, que

$$\gamma([a, c]) = \gamma((a-1, a) \cup [a, c]) = \gamma((a-1, c]) = g(c)$$

e que $\|G\| = |G(\varphi_b)| = g(b) = \gamma(J)$.

Resta mostrar que, de fato, γ representa G no sentido de (2). Pela continuidade uniforme de f em J, fixamos $\varepsilon > 0$, e tomamos $\delta > 0$ tal que se $|x - y| < \delta$ e $x, y \in J$, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Agora seja $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ uma partição de J tal que $\sup\{t_k - t_{k-1}\} < \frac{\delta}{2}$ e tome $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente para que tenhamos $2/n < \inf\{t_k - t_{k-1}\}$ e, para $k = 1, \ldots, m$,

$$g(t_k) \leq G(\varphi_{t_k,n}) \leq g(t_k) + \frac{\varepsilon}{m\|f\|_\infty}. \tag{5}$$

Defina em J, então, as funções

$$f_1(x) = \varphi_{t_1,n}(x) + \sum_{k=2}^{m} f(t_k)\left(\varphi_{t_k,n}(x) - \varphi_{t_{k-1}n}(x)\right)$$

$$f_2(x) = f(t_1)\chi_{[t_0,t_1]}(x) + \sum_{k=2}^{m} f(t_k)\chi_{(t_{k-1},t_k]}(x).$$

Perceba que $f_1 \in C(J)$ e que f_2 é uma função escada em J. Está claro que $\sup\{|f_2(x) - f(x)| : x \in J\} \leq \varepsilon$ e com um certo esforço é possível mostrar que $\|f_1 - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Portanto, temos

$$|G(f) - g(f_1)| \leq \varepsilon\|G\|. \tag{6}$$

Rescrevendo (5), temos

$$0 \leq G(\varphi_{t_k,n}) - g(t_k) \leq \frac{\varepsilon}{m\|f\|_\infty}$$

para todo $k = 1, \ldots, m$. Logo, se $2 \leq k \leq m$, temos

$$\begin{aligned}\left|G(\varphi_{t_k,n} - \varphi_{t_{k-1},n}) - (g_{t_k} - g_{t_{k-1}})\right| &= \left|(G(\varphi_{t_k,n}) - g_{t_k}) - \left(G(\varphi_{t_{k-1},n} - g(t_{k-1}))\right)\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{m\|f\|_\infty}.\end{aligned}$$

Aplicando G a f_1 e integrando f_2 com respeito a γ, a desigualdade acima implica

$$\left| G(f_1) - \int_J f_2 \, \mathrm{d}\gamma \leq \varepsilon \right|. \tag{7}$$

Porém, como f_2 está a uma distância de no máximo ε de f, também temos

$$\left| \int_J f_2 \, \mathrm{d}\gamma - \int_J f \, \mathrm{d}\gamma \leq \varepsilon\gamma(J) \right|. \tag{8}$$

Combinando (6), (7), (8) e utilizando a desigualdade triangular, obtemos

$$\left| G(f) - \int_J f \, \mathrm{d}\gamma \right| \leq \varepsilon(2\|G\| + 1).$$

Como ε é arbitrário, temos (2). □

Observação. Como é demonstrado no capítulo 9 de [Bar95], se G for um funcional linear limitado qualquer em $C(J)$, podemos decompô-lo como $G = G^+ - G^-$, onde G^+ e G^- são funcionais lineares limitados positivos. Sendo γ e ν as medidas que representam G^+ e G^- no sentido de (2), respectivamente, se definirmos a medida com sinal $\mu = \gamma - \nu$, então teremos

$$G(f) = \int_J f \, \mathrm{d}\mu$$

para toda $f \in C(J)$.

Terminamos essa seção com uma versão mais geral desse teorema, que utilizaremos na prova do **TAU**. O leitor interessado em uma demonstração pode consultar a seção 13.5 de [Roy88].

Teorema da representação de Riesz. *Seja X um espaço compacto Hausdorff e $C(X)$ o espaço das funções reais contínuas em X. Então, a cada funcional linear limintado F em $C(X)$ corresponde uma única medida de Baire, finita, com sinal, ν em X tal que*

$$F(f) = \int f \, \mathrm{d}\nu$$

para cada f em $C(X)$. Além disso, $\|F\| = |\nu|(X)$.

Observação. Utilizaremos esse teorema com $X = [0, 1]^n$. Como nesse caso X é um espaço métrico compacto, a medida ν será uma medida de Borel.

Referências

[Roy88] H. L. Royden. *Real Analysis*. Ed. por Inc. Collier Macmillian Canada. Macmillian Publishing Company, 1988.

[Bar95] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Ed. por inc. John Wiley & Sons. Wiley-Interscience, 1995.

[Oli12] César R. de Oliveira. *Introdução à análise funcional*. Ed. por IMPA. IMPA, 2012.

A Elementos de Espaços Métricos

Aqui apresentamos noções básicas relativas a espaços métricos, amplamente utilizadas ao longo do texto.

Definição A.1. Dado um conjunto X qualquer, uma *métrica* em X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:

i) $d(x, x) = 0$;

ii) $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;

iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição A.2. Um *espaço métrico* é um par (X, d) onde X é um conjunto e d é uma métrica em X.

Por vezes, onde não houver prejuízo ao entendimento do texto, utilizaremos apenas o nome do conjunto para nos referirmos ao espaço métrico por ele formado.

Definição A.3. Um suconjunto M de um espaço métrico X é dito *limitado* se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) \leq c$ para todos $x, y \in M$. Nesse caso, o definimimos o *diâmetro* de M, denotado por $\operatorname{diam} M$, como $\sup \{d(x, y) : x, y \in M\}$. Se M é ilimitado, ou seja, para todo $c > 0$ existem $x, y \in M$ com $d(x, y) > c$, dizemos que $\operatorname{diam} M = \infty$.

Definição A.4. Dado um espaço métrico X e um ponto $a \in X$, chamamos de *bola aberta de raio r centrada em a* o conjunto

$$B(a, r) := \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

Definição A.5. Dado um espaço métrico X e um subconjunto $Y \subset X$, chamamos de *interior* de Y, e denotamos por $\operatorname{int} Y$, o subconjunto de Y formado pelos elementos $a \in Y$ tais que existe $r > 0$ satisfazendo $B(a, r) \subset Y$.

Definição A.6. Um subconjunto A de um espaço métrico X é dito *aberto* se $A = \operatorname{int} A$.

Definição A.7. Dado um subconjunto M de um espaço métrico X, um ponto $x \in X$ é dito *aderente* a M se toda bola aberta centrada em x tiver interseção não-vazia com M. Chamamos de *fecho* de M, e denotamos por $\overline{M}$, o conjunto dos pontos de aderência de M.

Definição A.8. Um subconjunto F de um espaço métrico X é dito *fechado* se $F = \overline{F}$.

Definição A.9. Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos do espaço métrico X, dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge* para $L \in X$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, vale $d(x_n, L) < \varepsilon$. Se para todo $L \in X$ é falso que $\lim x_n = L$, dizemos que (x_n) é *divergente*.

Definição A.10. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos do espaço métrico X é dita *de Cauchy* se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n, m \geq n_0$, vale $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Equivalentemente, (x_n) é de Cauchy se, para $n \geq n_0$, vale $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

Proposição A.1. *Toda sequência convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no espaço métrico X é de Cauchy.*

Demonstração. Seja $L = \lim x_n$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, para $n \geq n_0$, valha $d(x_n, L) < \varepsilon/2$. Então, se $n, m \geq n_0$ temos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, L) + d(x_m, L) = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \qquad \square$$

Exemplo 1. Embora toda sequência convergente seja de Cauchy, é falso que dado um espaço métrico qualquer, toda sequência de Cauchy convirja para um ponto pertencente a ele. Por exemplo, considerando o conjunto $\mathbb{Q}$ com a métrica d induzida pela métrica de $\mathbb{R}$, temos que toda sequência de racionais convergindo para um irracional é de Cauchy, mas diverge em $\mathbb{Q}$.

Proposição A.2. *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço métrico X é de Cauchy e possui um valor de aderência (ou seja, existe uma subsequência convergente (x_{n_k}) de (x_n)), então (x_n) converge para esse valor de aderência.*

Demonstração. Seja $L \in X$ o limite da subsequência (x_{n_k}). Então, dado $\varepsilon > 0$ conseguimos obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $k > k_0$, então $d(x_{n_k}, L) < \varepsilon/2$. Também conseguimos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq n_0$ então $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$. Tome $\ell > \max\{n_0, k_0\}$. Então claramente $n_\ell \geq \ell$ e, com isso,

$$d(x_\ell, L) \leq d(x_\ell, x_{n_\ell}) + d(x_{n_\ell}, L) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \qquad \square$$

Definição A.11. Um espaço métrico X é dito *completo* se toda sequência de Cauchy em X converge para um elemento de X.

Proposição A.3. *Um espaço métrico X é completo se, e somente se, dada uma sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ de conjuntos não-vazios fechados em X, tais que* $\lim \operatorname{diam} F_n = 0$, *existe $a \in X$ com*

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_i.$$

Demonstração. Suponha que X seja completo e considere $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como no enunciado do teorema. Para cada conjunto F_n, escolha $x_n \in F_n$, formando uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy. De fato, como $\lim \operatorname{diam} F_n = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, temos $d(x, y) < \varepsilon$ para todos $x, y \in F_n$. De $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ concluímos que $n, m > n_0$ implicam $x_n, x_m \in F_{n_0}$ o que implica $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Da completude de X concluímos que existe $a = \lim x_n$. Como todos F_n são fechados e, para $m \geq n$ temos $x_m \in F_n$, conclui-se que $a \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Suponha, agora, que X seja um espaço métrico no qual toda sequência de fechados como a do enunciado convirja. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Então $(\overline{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de conjuntos fechados tais que $\lim \operatorname{diam} \overline{F_n} = \lim \operatorname{diam} F_n = 0$. Por hipótese, existe $a \in \bigcap \overline{F_n}$. Como a é limite de sequência de pontos de F_k para todo $k \in \mathbb{N}$, para cada k podemos escolher $a_{n_k} \in F_k$ de modo que $d(a, a_{n_k}) < 1/k$ e, assim, $\lim a_{n_k} = a$. Claramente $n_k > k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, portanto, passando a uma subsequência se necessário, a_{n_k} é subsequência de (x_n) o que implica, como (x_n) é de Cauchy, $\lim x_n = a$. □

Teorema A.1 (Teorema da Categoria de Baire)**.** *Se X é um espaço métrico completo e $A_1, A_2, \dots$ são abertos densos em X, então*

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

é denso em X.

Demonstração. Devemos mostrar que dado V um conjunto aberto em X, temos $A \cap V \neq \emptyset$. Nossa estratégia será construir uma sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ de conjuntos fechados não-vazios tais que $\lim \operatorname{diam} F_n = 0$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subset A_n \cap V$. Então, pela Proposição A.3, o ponto x que satisfaz $\{x\} = \bigcap F_n$ é tal que $x \in V$ e $x \in F_n \subset A_n$ para todo n, ou seja, $x \in A$ e, portanto, $x \in A \cap V$.

Começamos obeservando que, como A_1 é denso, $A_1 \cap V$ é um conjunto aberto não-vazio. Logo, existe B_1 bola aberta não-vazia de raio menor que 1, tal que $\overline{B_1} \subset A_1 \cap V$. Suponha, agora, definidos $B_1, \dots, B_n$ de forma que, para todo $1 < k \leq n$, B_k é uma bola aberta não-vazia de raio menor que $1/k$ tal que $\overline{B_k} \subset V \cap A_k \cap B_{k-1}$. Novamente, como A_{n+1} é denso, $A_{n+1} \cap B_n$ é um conjunto aberto não vazio. Logo, definimos B_{n+1} como uma bola aberta não-vazia contida em $A_{n+1} \cap B_n$, de raio menor que $1/(n+1)$ tal que $\overline{B_{n+1}} \subset A_{n+1} \cap B_n \subset A_{n+1} \cap V$.

Com isso, obtemos uma sequência decrescente $B_1 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$ de bolas abertas não-vazias, com o raio de B_n menor que $1/n$, cujos fechos $\overline{B_1} \supset \cdots \supset \overline{B_n} \supset \cdots$ formam uma sequência decrescente de conjuntos fechados não-vazios, com $\operatorname{diam} \overline{B_n} \leq 1/n$ e $\overline{B_n} \subset A_n \cap V$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que, como apontado anteriormente, termina a prova. □

Terminaremos essa seção com a definição de função contínua, que será usada posteriormente.

Definição A.12. Dados espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y), uma função $f : X \to Y$ é dita *contínua* em $a \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $d_X(x, a) < \delta$, então $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

B Elementos de Análise Funcional

Aqui apresentaremos noções elementares que mesclam conceitos de Análise e de Álgebra Linear.

Definição B.1. Dado um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$, uma *norma* em V é uma função $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty)$ tal que

i) $\|v\| = 0$ se, e somente se $v = 0$ (normas são *positivas definidas*);

ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ para todo $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ (*homogeneidade absoluta*);

iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ para todos $v, w \in V$ (*desigualdade triangular*).

Uma função que cumpre as propriedades *ii* e *iii* acima é denominada uma *semi-norma*. Um espaço vetorial junto de sua norma e denominado um *espaço vetorial normado*. A menos de onde houver ambiguidade, utilizaremos o mesmo símbolo $\|\cdot\|$ para nos referir a normas de qualquer espaço vetorial normado. O vetor dentro do símbolo deixará claro a norma de qual espaço está sendo utilizada.

É interessante perceber que todo espaço vetorial normado é um espaço métrico, quando se introduz nele a métrica induzida pela norma: $(v, w) \mapsto \|v - w\|$. As propriedades de uma métrica são facilmente verificadas.

Definição B.2. Uma transformação linear $T : V \to W$ entre dois espaços vetoriais normados é dita *limitada* se existe $C \in [0, +\infty)$ tal que $\|Tv\| \leq C\|v\|$ para todo $v \in V$.

Essa definição naturalmente é diferente da definição usual de função limitada, pois, como $T(\lambda v) = \lambda(Tv)$, impossível termos $\|Tv\| \leq C$ para todo $v \in V$ se T é não nula.

O próximo teorema ilustra a utilidade dessa definição de transformação limitada.

Teorema B.1. *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais normados. As seguintes afirmativas são equivalentes:*

i) T é contínua;

ii) T é contínua em 0;

iii) T é limitada.

Demonstração. A implição de *i* para *ii* é óbvia. Suponha, agora, que T é contínua em 0. Tomando $\varepsilon = 1$, conseguimos $\delta > 0$ tal que se $\|v\| \leq \delta$, então $\|Tv\| < 1$. Agora, dado $v \in V$, $v \neq 0$, tome o vetor $v' := \delta v/\|v\|$. Claramente temos $\|v'\| = \delta$, ou seja, $\|Tv'\| < 1$, o que implica $\|Tv\| < \delta^{-1}\|v\|$. Logo, tomando $C = \delta^{-1}$, T é limitada. Por fim, se T é limitada, dados $a \in V$ e ε, tome $\delta < \varepsilon/C$. Com isso se $\|x - a\| < \delta$ temos:

$$\|Tx - Ta\| = \|T(x - a)\| \leq C\|x - a\| < C \cdot \varepsilon/C = \varepsilon.$$

Portanto, T é contínua. □

Denotamos pro $L(V, W)$ o conjunto das transformações lineares limitadas de V em W. Esse conjunto, com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial. Podemos, ainda, definir nele uma norma, dada por

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \sup \left\{ \frac{\|Tv\|}{\|v\|} : v \in V \setminus \{0\} \right\} && (9) \\ &= \sup \{\|Tv\| : v \in V, \|v\| = 1\} && (10) \\ &= \inf \{C : \|Tv\| \leq C\|v\| \text{ para todo } v \in V\}. && (11) \end{aligned}$$

Claramente os dois primeiros conjuntos são iguais, logo seus supremos também o são. Para ver que vale (11), perceba que, por (9), temos $\|Tv\| \leq \|T\|\|v\|$ para todo $v \in V$. Portanto, sendo A o conjunto em (11), temos $\|T\| \in A$, ou seja, $\inf A \leq \|T\|$. Além disso, dado $C \in A$, temos $C \geq \|Tv\|/\|v\|$ para todo $v \in V - \{0\}$. Logo, $\|T\| \leq C$ e, com isso, $\|T\| \leq \inf A$. Sendo assim, vale (11). As propriedades i), ii) e iii) decorrem diretamente das propriedades das normas de V e W e são facilmente verificadas. Sempre trataremos o conjunto $L(V, W)$ como um espaço vetorial normado munido dessa norma, a qual é denominada *norma de operador*. No caso especial em que $W = \mathbb{K}$, o espaço $L(V, \mathbb{K})$ é denominado *espaço dual* de V e é denotado por V^*. Os elementos de V^* são denominados *funcionais lineares*.

Definição B.3. Um *produto interno* no espaço vetorial V é um funcional $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$, de $V \times V$ em $\mathbb{K}$, de modo que, para todos $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ valha

i) $\langle \alpha v + u, w \rangle = \bar{\alpha}\langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$;

ii) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$;

iii) $\langle v, v \rangle \geq$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$.

O par $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamado, então, de *espaço com produto interno* ou *espaço pré-Hilbertiano.*

Como de costume, $\bar{\alpha}$ denota o complexo conjugado de α. Em um espaço vetorial com produto interno, a menos que se dia o contrário, tem-se $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. De fato essa função define uma norma em V, como será mostrado a seguir. Antes, porém, devemos estabelecer um resultado fundamental em espaços com produto interno.

Teorema B.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Em um espaço com produto interno $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, tem-se*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|\|w\|$$

para todos $v, w \in V$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $v = \lambda w$.

Demonstração. Se $\langle v, w \rangle = 0$, a igualdade é imediata. Caso contrário, então $w \neq 0$ e, para $\lambda \in \mathbb{K}$ tem-se

$$0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w \rangle = \|v\|^2 - \lambda\langle v, w \rangle - \bar{\lambda}\langle w, v \rangle + |\lambda|^2\|w\|^2.$$

tomando $\lambda = \langle w, v \rangle/\|w\|^2$ vem

$$0 \leq \|v\|^2 - |\langle v, w \rangle|^2/\|w\|^2,$$

o que implica

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2,$$

de onde o resultado se segue. Naturalmente a igualdade ocorre se e somente se existe λ tal que $\langle v - \lambda w, v - \lambda w \rangle = 0$, ou seja, $v = \lambda w$. $\square$

É fácil ver que as duas primeiras propriedades da norma são satisfeitas por $\|\cdot\|$ como definida anteriormente. Para verficar a desigualdade triangular perceba que

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w\rangle| + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\
&= (\|v\| + \|w\|)^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\cdot\|$ de fato é uma norma, denominada *norma induzida pelo produto interno.*

Definição B.4. Um *espaço de Hilbert* é um espaço com produto interno completo com relação à norma induzida pelo produto interno.