Teorema da Aproximação Universal

Caio Lins

28 de abril de 2021

Conteúdo

1 Teorema da Representação de Riesz

Esse teorema possui diversas formulações. Em geral, elas têm como objetivo representar os funcionais lineares contínuos em um dado espaço vetorial de uma maneira mais natural, associando-os a elementos daquele mesmo espaço ou de outro.

Apesar de a versão que abordaremos inicialmente não ser a utilizada na demonstração do teorema da aproximação universal, acreditamos que é importante apresentar esse teorema primeiro no contexto mais geral de espaços de Hilbert.

1.1 Em espaços de Hilbert

Da forma que será primeiramente enunciado, esse resultado trata da associação natural que existe entre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e o seu dual, $\mathcal{H}^*$. Apesar de ser um fato de certa forma trivial para espaços de dimensão finita, sua demonstração não é tão óbvia para espaços de Hilbert em geral. Para demonstrá-lo, precisamos, antes, de passar por três resultados preliminares. O leitor poderá encontrar alguns dos conceitos de análise funcional utilizados no apêndice correspondente.

Lema 1. *Dados v, w pertencentes a $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, tem-se que $v \perp w$, ou seja, $\langle v, w \rangle = 0$, se, e somente se,*

$$\|v + \lambda w\| \geq \|v\|. \tag{1}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Evidementemente temos

$$0 \leq \|v + \lambda w\|^2 = \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle v, w \rangle) + |\lambda|^2 \|w\|^2.$$

Se $v \perp w$, então temos

$$\begin{aligned} \|v + \lambda w\|^2 &= \|v\|^2 + |\lambda|^2 \|w\|^2 \\ &\geq \|v\|^2, \end{aligned}$$

de onde a desigualdade (1) segue. Reciprocamente, se vale (1) para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, em especial tomando $\lambda = -\langle w, v \rangle / \|w\|^2$ e elevando ambos lados ao quadrado ficamos com $0 \leq -|\langle v, w \rangle|^2$, o que implica $v \perp w$. □

Lema 2 (Lei do paralelogramo)**.** *Dados v, w pertencentes a $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, tem-se*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Como a demonstração desse lema consiste simplesmente em expandir o lado esquerdo da igualdade e usar as propridedades de produto interno, será deixada a cargo do leitor.

Antes do próximo resultado, uma definição. Dado um subespaço E de um espaço com produto interno V, definimos

$$E^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \text{ para todo } w \in E\}.$$

Teorema 1.1 (Projeção ortogonal). *Se E é subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert H, então*

$$H = E \oplus E^{\perp}.$$

Demonstração. Dado $v \in H$, definimos $\delta = \inf\{\|v - w\| : w \in E\}$. Seja $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de E tais que $\|v - w_n\| \to \delta$. Então, sendo k e ℓ números naturais, aplicando a lei do paralelogramo para os vetores $w_k - v$ e $w_\ell - v$ obtemos:

$$2\|w_k - v\|^2 + 2\|w_\ell - v\|^2 = \|w_k + w_\ell - 2v\|^2 + \|w_k - w_\ell\|,$$

o que implica, remanejando e lembrando que $(w_k + w_\ell)/2 \in E$,

$$\begin{aligned}\|w_k - w_\ell\| &= 2\|w_k - v\|^2 + 2\|w_\ell - v\|^2 - 4\|(w_k + w_\ell)/2 - v\|^2 \\ &\leq 2\|w_k - v\|^2 + 2\|w_\ell - v\|^2 - 4\delta^2.\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que (w_n) é uma sequência de Cauchy. Como H é um espaço de Hilbert, temos que $w_n \to w \in E$, pois E é fechado e, pela continuidade da norma, temos $\|v - w\| = \delta$.

Intuitivamente, w é o elemento de E mais próximo de v. Logo, é razoável esperar que ele seja a projeção ortogonal de v em E. Para confirmar essa suspeita, devemos verificar que $v - w \in E^{\perp}$. De fato, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e todo $u \in E$ temos

$$\|(v - w) + \lambda u\| = \|v + (-w + \lambda u)\| \geq \delta = \|v - w\|.$$

Portanto, pelo lema 1, concluímos que $v - w \in E^{\perp}$. Sendo assim, temos $v = w + (v - w)$, onde $w \in E$ e $v - w \in E^{\perp}$. Para mostrar a unicidade dessa decomposição, suponha que $v = w_1 + u_1 = w_2 + u_2$, onde $w_1, w_2 \in E$ e $u_1, u_2 \in E^{\perp}$. Então

$$w_1 - w_2 = u_2 - u_1 \in E \cap E^{\perp},$$

o que implica $w_1 - w_2 = u_2 - u_1 = 0$, ou seja, $w_1 = w_2$ e $u_1 = u_2$. $\square$

Agora podemos prosseguir para o principal resultado dessa subseção.

Teorema 1.2 (Teorema da representação de Riesz em espaços de Hilbert). *Dado um espaço de Hilbert H e seu dual H^*, a função*

$$\begin{aligned}\gamma : &H \to H^* \\ &v \mapsto \gamma(v) = f_v,\end{aligned}$$

tal que $f_v = \langle v, \cdot\rangle$, é uma isometria antilinear e sobrejetiva em H^*.

Demonstração. Para mostrar que γ é uma isometria, provaremos que $\|f_v\| = \|v\|$ para todo $v \in H$. De fato, se $v = 0$ isso é evidente. Fixado $v \in H\setminus\{0\}$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos $|f_v(w)| = |\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$. Logo, $\|f_v\| \leq \|v\|$. Por outro lado, temos $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = f_v(v) \leq \|f_v\|\|v\|$, ou seja, $\|v\| \leq \|f_v\|$ e acabamos.

Além disso claramente γ é antilinear, pois

$$\gamma(\alpha v + w) = \langle \alpha v + w, \cdot \rangle = \bar{\alpha}\langle v, \cdot \rangle + \langle w, \cdot \rangle = \bar{\alpha}\gamma(v) + \gamma(w).$$

A parte menos óbvia, e que dá nome ao teorema, é a da sobrejetividade. Repare que, com essa propriedade, todo funcional $f \in H^*$ fica unicamente associado a um determinado $v \in H$ tal que $f = \gamma(v)$. Dizemos, então, que v *representa* f. Para demonstrá-la, utilizaremos o teorema 1.1.

Dado $f \in H^*$, se $f = 0$ então naturalmente $f = \gamma(0)$. Se $f \neq 0$, repare que $\ker(f)$, o núcleo de f, é um subespaço próprio fechado de H. Pelo teorema 1.1, temos

$$H = \ker(f) \oplus \ker(f)^{\perp},$$

de onde concluímos que existe $w \in \ker(f)^{\perp}$ satisfazendo $\|w\| = 1$. Agora uma observação simples, porém fundamental: para todos $u, v \in H$ temos $f(v)u - f(u)v \in \ker(f)$. Logo, para todo $v \in H$ temos

$$\langle w, f(v)w - f(w)v \rangle = 0,$$

o que implica, desenvolvendo,

$$f(v) = \langle \overline{f(w)}w, v \rangle.$$

Sendo assim, $f = \gamma(\overline{f(w)}w)$. □