Teorema da Aproximação Universal

Caio Lins

15 de março de 2021

1 O Teorema de Hahn-Banach

Dado um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$, um *funcional linear* em V é uma função linear $f : V \to \mathbb{K}$. Se V é um espaço vetorial real (ou seja, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), um *funcional sublinear* em V é uma função $p : V \to \mathbb{R}$ tal que

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ e } p(\lambda x) = \lambda p(x) \text{ para todos } x, y \in V \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Observe que nada se exige sobre o sinal de p. Um exemplo de funcional sublinear é uma seminorma em V.

Teorema 1.1 (Hahn-Banach)**.** *Sejam V um espaço vetorial real, M um subespaço de V e p um funcional sublinear em V. Se f é um funcional linear em M dominado por p, ou seja, tal que $f(v) \leq p(v)$ para todo $v \in M$, então existe um funcional linear F em V, que coincide com f em M e que também é dominado por p. O funcional F é dito* extensão de Hahn-Banach *de f.*

Em outras palavras, se, em um espaço vetorial, temos um funcional sublinear que domina um funcional linear definido em um subespaço, podemos extender esse funcional ao espaço todo, mantendo a relação de dominância.

Antes de apresentar a demonstração do Teorema (1.1), vamos introduzir alguns conceitos de Teoria dos Conjuntos.

1.1 O Lema de Zorn

Dados conjuntos X uma *relação* de X em Y é um subconjunto R de $X \times Y$. Escreveremos xRy para indicar que $(x, y) \in R$. Perceba que uma função $f : X \to Y$ é uma relação de X em Y dada por $(x, y) \in f$ se, e somente se, $y = f(x)$. Quando $R \subset X \times X$, diremos que R é uma relação em X.

Uma *relação de ordem parcial* em X é uma relação que satisfaz, dados $x, y, z \in X$:

i) xRx (*reflexividade*);

ii) Se xRy e yRx, então $x = y$ (*antisimetria*);

iii) Se xRy e yRz, então xRz (*transitividade*).

O termo *parcial* é utilizado para indicar que podem existir elementos de X não relacionados por essa ordem. Caso tenhamos xRy ou yRx para todos $x, y \in X$, então R é dita uma relação de ordem *total*. Utilizaremos o símbolo $\prec$ para indicar uma ordem parcial. Dizemos então que $(X, \prec)$ é um conjunto parcialmente ordenado. Se $\prec$ também é total, $(X, \prec)$ é totalmente ordenado. Claramente todo subconjunto de X também é parcialmente ordenado, com a ordem induzida por $\prec$.

Um *elemento maximal* de um conjunto ordenado X é um elemento x tal que se $y \in X$ com $x \prec y$, então $y = x$. Uma *cota superior* de um subconjunto $Y \subset X$ é um elemento $x \in X$ tal que $y \prec x$ para todo $y \in Y$. Observe que se $\prec$ não é total, não necessariamente um elemento maximal de $Y \subset X$ é uma cota superior de Y.

Dois exemplos usuais de conjuntos ordenados são $\mathbb{R}$ e $\mathcal{P}(X)$, para um dado conjunto X. O primeiro é um conjunto totalmente ordenado pela ordem usual $\leq$, o qual não possui elemento maximal. O segundo se torna um conjunto ordenado ao dizermos que dados $A, B \subset X$, temos $A \prec B$ se, e somente se $A \subset B$. Essa ordem não é total e o único elemento maximal de $\mathcal{P}(X)$ é o próprio X.

Axioma (Lema de Zorn)**.** *Todo conjunto parcialmente ordenado, tal que todos seus subconjuntos totalmente ordenados possuam cota superior, possui elemento maximal.*

Encerramos essa apresentação com um resultado que exemplifica como o Lema de Zorn geralmente é utilizado.

Proposição 1. *Todo espaço vetorial não trivial, ou seja, que possui elementos não nulos, possui uma base.*

Demonstração. Seja V o espaço vetorial em questão, e A a coleção de todos os subconjuntos linearmente independentes de V. Claramente essa coleção é parcialmente ordenada pela relação de inclusão. Dada uma subcoleção $B \subset A$ totalmente ordenada, considere o conjunto

$$C = \bigcup_{\beta \in B} \beta.$$

Afirmamos que $C \in A$. De fato, dado um conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset C$, sejam $\beta_1, \ldots, \beta_n$ os conjuntos de B tais que $x_i \in \beta_i$ para todo $i \leq n$. Como B é totalmente ordenado, existe β_k tal que $\beta_i \subset \beta_k$ para todo $i \leq n$. Logo $\{x_i, \ldots, x_n\} \subset \beta_k$ e, como β_k é linearmente independente, também o são os x_i. Dessa forma, C é um conjunto linearmente independente, pertencente a A e que claramente é uma cota superior de B.

Portanto, aplicando o Lema de Zorn obtemos um elemento maximal Λ de A. Denotando por $\operatorname{Lin}\Lambda$ o conjunto formado pelas combinações lineares de elementos de Λ, afirmamos que $\operatorname{Lin}\Lambda = A$. Com efeito, supondo, por absurdo, que exista $v \in V - \operatorname{Lin}\Lambda$, temos que $\Lambda \cup \{v\}$ é linearmente independente, ou seja, pertence a A e contém Λ, um contradição pois Λ é maximal. $\square$

1.2 Demonstração do Teorema de Hahn-Banach

Seja $\{g_\lambda\}_{\lambda \in L}$, para algum conjunto de índices L, a coleção das extensões lineares de f em conjuntos M_λ tais que $M \subset M_\lambda \subset V$, que são dominadas por p. Como $f \in \{g_\lambda\}_{\lambda \in L}$, essa coleção é não-vazia e, portanto, podemos ordená-la parcialmente utilizando a relação de inclusão (considerando que g_λ é um subconjunto de $M_\lambda \times \mathbb{R}$). Desejamos mostrar que existe um elemento maximal de $\{g_\lambda\}_{\lambda\in L}$. Dado $L' \subset L$ tal que $\{g_\lambda\}_{\lambda\in L'}$ é uma subcoleção totalmente ordenada, definimos g como

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\lambda\in L'} g_\lambda,$$

ou seja, g é um funcional linear em $\bigcup_{\lambda\in L} M_\lambda$ tal que $g(v) = g_\lambda(v)$, onde $v \in M_\lambda$. De fato g está bem definida, pois se $v \in M_{\lambda_1} \cup M_{\lambda_2}$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ambos pertencentes a L', então podemos supor, sem perda de generalidade, que $g_{\lambda_2} \subset g_{\lambda_1}$ e, assim, $g_{\lambda_1}(v) = g_{\lambda_2}(v)$. É fácil verificar que g estende f e é dominado por p. Logo, g é uma cota superior de $\{g_\lambda\}_{\lambda\in L'}$ e, pelo Lema de Zorn, existe $F \in \{g_\lambda\}_{\lambda\in L}$, definido em $W \subset V$, maximal.

Intuitivamente é claro que F deve estar definida em todo o espaço V, de modo que é a extensão de Hahn-Banach de f. Para demonstrar esse fato, suponha, por absurdo, que ele seja falso, ou seja, que exista $\eta \in V - W$. Nossa estratégia será construir um uma extensão G de F, dominada por p, definida em $U = \mathrm{Lin}(W \cup \{\eta\})$, contradizendo a maximalidade de F.

Para definirmos G, basta atribuirmos um valor para $G(\eta)$. De fato, todo elemento de U é da forma $w + h\eta$, onde $w \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, pondo

$$G(w + \alpha\eta) = F(w) + \alpha G(\eta),$$

claramente G é uma extensão de F. O passo crucial é definir $G(\eta)$ de forma que G seja dominada por p. Para tanto, vamos nos atentar a algumas desigualdades. Dados $w_1, w_2 \in W$, vale

$$F(w_1) + F(w_2) = F(w_1 + w_2) \leq p(w_1 + w_2) \leq p(w_1 - \eta) + p(\eta + w_2).$$

Equivalentemente:

$$F(w_1) - p(w_1 - \eta) \leq p(\eta + w_2) - F(w_2).$$

Ou seja, temos

$$\sup \{F(w_1) - p(w_1 - \eta)\ ;\ w_1 \in W\} \leq \inf \{p(\eta + w_2) - F(w_2)\ ;\ w_2 \in W\}.$$

Defina, então, $G(\eta)$ de modo que

$$\sup \{F(w_1) - p(w_1 - \eta)\ ;\ w_1 \in W\} \leq G(\eta) \leq \inf \{p(\eta + w_2) - F(w_2)\ ;\ w_2 \in W\}.$$

Dessa forma, dado $w + \alpha\eta \in U$, se $\alpha > 0$ temos

$$\begin{aligned} G(w + \alpha\eta) &= F(w) + \alpha G(\eta) \\ &\leq F(w) + \alpha \left(p\left(\frac{w}{\alpha} + \eta\right) - F\left(\frac{w}{\alpha}\right)\right) \\ &= F(w) + p(w + \alpha\eta) - F(w) \\ &= p(w + \alpha\eta). \end{aligned}$$

Caso $\alpha < 0$:

$$\begin{aligned}
G(w + \alpha\eta) &= F(w) + \alpha G(\eta) \\
&\leq F(w) + \alpha \left(F\left(\frac{w}{|\alpha|}\right) - p\left(\frac{w}{|\alpha|} - \eta\right)\right) \\
&= F(w) - F(w) - p(-w - \alpha\eta) \\
&= p(w + \alpha\eta).
\end{aligned}$$

Se $\alpha = 0$, G coincide com F e claramente é dominada por p. Sendo assim, chegamos a uma contradição com a maximalidade de F, o que conclui a prova.