Teorema da Aproximação Universal

Caio Lins

9 de março de 2021

1 Teorema da aproximação de Weierstrass

Desejamos mostrar que dada uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, podemos aproximá-la arbitrariamente bem por funções polinomiais $p : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Em outras palavras, seja $C([a, b])$ o espaço das funções contínuas em $[a, b]$. Indicamos por $\|\varphi\|_\infty$ a norma do supremo de uma função limitada $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, ou seja,

$$\|\varphi\|_\infty = \sup \{|\varphi(x)| \ ; \ x \in [a, b]\} .$$

Então é verdade que

Teorema 1.1. *Dada $f \in C([a, b])$, para todo $\varepsilon > 0$ existe um polinômio $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\|f - p\|_\infty < \varepsilon.$$

Inicialmente, observamos que basta provar o teorema para o caso $f \in C([0, 1])$. De fato, dada $f \in C([a, b])$, considere o homeomorfismo $\varphi : [0, 1] \to [a, b]$ dado por $\varphi(x) = a + (b - a)x$, cuja inversa é $\varphi^{-1} : [a, b] \to [0, 1]$ dada por $\varphi^{-1}(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Então a função $g = f \circ \varphi$ pertence a $C([0, 1])$ e, dado $\varepsilon > 0$, se existe um polinômio $p(x)$ com $\|g - p\|_\infty < \varepsilon$, temos também, como φ^{-1} é um polinômio de grau 1,

$$\left\|g \circ \varphi^{-1} - p \circ \varphi^{-1}\right\|_\infty < \varepsilon.$$

Como $g \circ \varphi^{-1} = f$ e $p \circ \varphi^{-1}$ é um polinômio, o resultado vale também para $C([a, b])$.

Em seguida, devemos definir a classe de polinômios que utilizaremos na demonstração.

Definição 1.1. Dada $g : X \to \mathbb{R}$ definimos o n-ésimo polinômio de Bernstein de g como

$$B_n(x, g) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}. \tag{1}$$

Note a semelhança entre os polinômios de Bernstein e a expansão binomial de $(1 + (1 - x))^n$. De fato, temos $B_n(x, 1) = (1 + (1 - x))^n = 1$. Mais geralmente, para toda constante $c \in \mathbb{R}$ tem-se $B_n(x, c) = c$.

Utilizaremos essa semelhança para obter algumas identidades essenciais para a demonstração do Teorema 1.1. Dados p e q reais, começamos considerando a expansão binomial de $(p+q)^n$:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Considerando ambos lados da igualdade como funções de p, podemos derivá-los com relação a essa variável, obtendo

$$n(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^{k-1} q^{n-k}.$$

Multiplicando ambos lados por p/n, ficamos com

$$p(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \tag{2}$$

Essa é a primeira identidade, válida para todos $p, q \in \mathbb{R}$. Derivando novamente com relação a p e multiplicando ambos lados por p/n obtemos

$$p^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) (p+q)^{n-2} + \frac{p}{n}(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \tag{3}$$

a segunda identidade que utilizaremos.

Como consideramos $f, g \in C([0,1])$, segue da Definição 1.1 que se $f \geq 0$, então $B_n(x, f) \geq 0$ e, se $f \leq g$, então $B_n(x, f) \leq B_n(x, g)$.

Com essas ferramentas, podemos então apresentar a

Demonstração do Teorema 1.1. Observamos inicialmente que como f é uma função contínua definida em um compacto, é uniformemente contínua. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in [0,1]$ satisfazem $|x - y| < \delta$ então

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Agora, definimos $M \overset{\text{def}}{=} \|f\|_\infty$ e fixamos $\xi \in [0,1]$. Logo, se $|x - \xi| \geq \delta$ temos

$$|f(x) - f(\xi)| \leq 2M \leq 2M \left(\frac{x - \xi}{\delta}\right)^2.$$

Combinando as duas últimas desigualdades, concluímos que para todo $x \in [0,1]$ vale

$$|f(x) - f(\xi)| \leq 2M \left(\frac{x - \xi}{\delta}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Vamos aproximar f pelos seus polinômios de Bernstein. Seja $B_n(x, f)$ o n-ésimo polinômio de Bernstein de f, avaliado em x. Então

$$\begin{aligned}
|B_n(x, f) - f(\xi)| &= |B_n(x, f - f(\xi))| && (5)\\
&\leq B_n\left(x, 2M \left(\frac{x - \xi}{\delta}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{2}\right) && (6)\\
&= \frac{2M}{\delta^2} B_n(x, (x - \xi)^2) + \frac{\varepsilon}{2} && (7)\\
&+ \frac{2M}{\delta^2} \left(B_n(x, x^2) + B_n(x, -2x\xi) + \xi^2\right) + \frac{\varepsilon}{2} && (8)\\
&= \frac{2M}{\delta^2} \left(B_n(x, x^2) - 2\xi B_n(x, x) + \xi^2\right) + \frac{\varepsilon}{2}. && (9)
\end{aligned}$$

Aqui fizemos uso das propriedades de $B_n(x, f)$ que seguem de $x \in [0,1]$, discutidas anteriormente. Utilizando as equações (2) e (3), com a substituição $p = x$ e $q = 1 - x$, concluímos que

$$B_n(x, x) = x$$

e que

$$B_n(x, x^2) = x^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{x}{n}.$$

Substituindo em (9), ficamos com

$$\begin{aligned}
\frac{2M}{\delta^2}\left(B_n(x, x^2) - 2\xi B_n(x, x) + \xi^2\right) + \frac{\varepsilon}{2} &= \frac{2M}{\delta^2}\left(x^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{x}{n} - 2\xi x + \xi^2\right) + \frac{\varepsilon}{2} && (10)\\
&= \frac{2M}{\delta^2}\left(x^2 + \frac{x - x^2}{n} - 2\xi x + \xi^2\right) + \frac{\varepsilon}{2} && (11)\\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\delta^2}(x - x^2) + \frac{2M}{\delta^2}(x - \xi)^2. && (12)
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$|B_n(x, f) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\delta^2}(x - x^2) + \frac{2M}{\delta^2}(x - \xi)^2. \tag{13}$$

Como essa desigualdade vale para todo $x \in [0,1]$, em especial é válida para $x = \xi$. Fazendo essa substituição, obtemos

$$|B_n(\xi, f) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\delta^2}(\xi - \xi^2). \tag{14}$$

Facilmente podemos verificar que $\xi - \xi^2 \leq \frac{1}{4}$ para todo $\xi \in [0,1]$. Logo,

$$|B_n(\xi, f) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2}. \tag{15}$$

Por fim, tomando $n > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$, temos $\frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ e, assim,

$$|B_n(\xi, f) - f(\xi)| < \varepsilon. \tag{16}$$

Como o valor de n obtido para que essa desigualdade seja satisfeita depende apenas de ε (lembramos que δ depende apenas de ε, pela continuidade uniforme de f), ela é válida para todo $\xi \in [0,1]$, ou seja,

$$\|B_n(\cdot, f) - f\|_\infty < \varepsilon. \qquad \square$$