A partir dos conteúdos da Unidade 2 e do livro de referência "Métodos Assintóticos em Estatística" (MTODOS1), que abrange temas como Convergência Estocástica, Notação Assintótica (O, o, O_p, o_p) e Leis dos Grandes Números, apresento uma lista de 20 exercícios baseados nos conceitos vistos.

Os exercícios a seguir foram adaptados, em sua maioria, das seções de Exercícios do Capítulo 2 (Convergência Estocástica) e utilizam conceitos e resultados introduzidos tanto no Capítulo 1 (Notação Assintótica e Funções Características) quanto no Capítulo 2 do material.

Lista de Exercícios - Convergência Estocástica e Resultados Limite (20 Questões)

Seção I: Ordens de Magnitude de Sequências (O, o) e Convergência Estocástica (O_p, o_p)

1. Sejam $\{a_n\}_{n \ge 1}$ e $\{b_n\}_{n \ge 1}$ sequências de números reais. Se $a_n = O(b_n)$, prove que $a_n + c_n = O(\max\{|b_n|, |c_n|\})$, onde $\{c_n\}_{n \ge 1}$ é outra sequência de números reais.
2. Mostre que $n^2 = O(6n^2 + n)$ e justifique por que $n^2 \ne o(6n^2 + n)$.
3. Utilize o Teorema 1.2.1 e o Exemplo 1.2.2 para provar que $O(n^{-1/3}) + O(n^{-1/2}) = O(n^{-1/3})$.
4. Seja $\{X_n\}_{n \ge 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade dada por: $P(X_n = 1) = 1/n$ e $P(X_n = 0) = 1 - 1/n$, para $n \ge 1$. Prove que $X_n = o_p(1)$.
5. Sejam $\{X_n\}_{n \ge 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias e $\{a_n\}_{n \ge 1}$ uma sequência de números reais positivos tal que $E(X_n^2) = O(a_n^2)$ e $Var(X_n) = O(a_n^2)$. Prove que $X_n = O_p(a_n)$.
6. Seja $\{X_n\}_{n \ge 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tal que $E(X_n) \to c$, onde c é uma constante, e $Var(X_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. Usando a desigualdade de Chebyshev, prove que $X_n - c = o_p(1)$.
7. Se $a_n = O(b_n)$ e $X_n = O_p(a_n)$, prove que $X_n = O_p(b_n)$, onde $\{X_n\}_{n \ge 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias e $\{a_n\}_{n \ge 1}, \{b_n\}_{n \ge 1}$ são sequências de números reais e $b_n \ne 0$.
8. Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Se $S_n^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ é a variância amostral, prove que $S_n^2 - \sigma^2 = O_p(n^{-1/2})$.

Seção II: Modos de Convergência Estocástica (Probabilidade, Quase Certa e em Distribuição)

9. Defina a convergência de uma sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n \ge 1}$ para uma variável aleatória X em probabilidade ($X_n \xrightarrow{P} X$).
10. Defina a convergência de uma sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n \ge 1}$ para uma variável aleatória X em distribuição ($X_n \xrightarrow{D} X$).
11. Sejam $\{X_n\}_{n \ge 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que $P(X_n = 0) = 1 - 1/n$ e $P(X_n = n^2) = 1/n^2$, para $n \ge 1$. Mostre que $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$.
12. Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) com $X_i \sim U(0, \theta)$, para $\theta > 0$. Seja $T_n = X_{n:n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Prove que $T_n^2 \xrightarrow{P} \theta^2$.
13. Considere o Exemplo 2.3.7 em que X_n converge em probabilidade para $X=0$. Sejam $F_n(x)$ e $F(x)$ as funções de distribuição de X_n e X, respectivamente. Prove que $F_n(0) \ne F(0) = 1$. O

que este resultado implica sobre a convergência em distribuição?.

14. Sejam ${X_n}{n \ge 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $Var(X_n) \le c$, para todo $n \ge 1$, e $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ para $i \ne j$. Seja $S_n = \sum{j=1}^n X_j$. Prove que $\left{\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right}_{n \ge 1}$ converge para 0 em probabilidade.
15. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(t) = t-1$ se $t < 0$ e $f(t) = t+1$ se $t \ge 0$. Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias tais que $X = 0$ com probabilidade 1 e $X_n = -1/n$ com probabilidade 1, para $n=1, 2, \dots$. Prove que $X_n \xrightarrow{P} X$, mas $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$ não é satisfeita. (Este exercício destaca a necessidade de continuidade na aplicação do Teorema do Mapeamento Contínuo).
16. Sejam X_0 um vetor aleatório p-dimensional e ${X_n}{n \ge 1}$ e ${Y_n}{n \ge 1}$ sequências de vetores aleatórios p-dimensionais tais que $X_n \xrightarrow{D} X_0$ e $Y_n \xrightarrow{P} c$, onde c é um vetor constante em $\mathbb{R}^p$. Pelo Teorema de Slutsky (Teorema 2.3.16 i), qual é o limite em distribuição de $X_n + Y_n$?.

Seção III: Leis dos Grandes Números

17. Seja ${X_n}{n \ge 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com $E(X_1) = \mu \ne 0$ e $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Prove que $$ \frac{\sum{j=1}^n X_j}{\sqrt{n \sum_{j=1}^n X_j^2}} \xrightarrow{q.c.} \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\sigma^2}} $$ (Utilize a Lei Forte dos Grandes Números e o Teorema do Mapeamento Contínuo para limites quase certos).
18. Seja ${X_n}{n \ge 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com $X_i \sim N(0, 1)$. Determine o limite quase certo de $Q_n = \frac{\sum{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n (X_j - 1)^2}$ quando $n \to \infty$.
19. Seja ${X_n}_{n \ge 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes cujas distribuições de probabilidade são dadas por: $P(X_n = n) = P(X_n = -n) = 1/2n^2$ e $P(X_n = 0) = 1 - 1/n^2$. Decida se a Lei Forte dos Grandes Números (Kolmogorov, Teorema 2.4.4) se aplica a esta sequência.
20. Seja ${X_n}_{n \ge 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com distribuições de probabilidade dadas por: $P(X_n = n) = P(X_n = -n) = 1/2$ para $n=1, 2, \dots$. Prove que essa sequência **não** satisfaz a Lei dos Grandes Números.