Questões Resolvidas em Sala de Aula - Unidade 2

Convergência Estocástica e Resultados Limite

Exemplos e Aplicações dos Teoremas

Curso de Inferência Estatística

Outubro 2025

Sumário

1 Introdução

Este documento reúne todas as questões, exercícios e exemplos efetivamente resolvidos em sala de aula durante as aulas da Unidade 2. Essas questões servem como:

- **Exemplos práticos** de aplicação dos teoremas estudados
- **Modelos de solução** para questões similares
- **Material de estudo** complementar às demonstrações teóricas
- **Preparação** para avaliações e provas

Como usar este material:

1. Tente resolver cada questão antes de ver a solução
2. Compare sua solução com a apresentada
3. Identifique qual teorema está sendo aplicado em cada passo
4. Pratique adaptando as soluções para problemas similares

Organização: As questões estão organizadas por tópico, seguindo a ordem lógica do conteúdo da unidade.

2 Expansão de Taylor e Notação Assintótica

2.1 Resultado Extra 1: Expansão de Taylor

Pode-se mostrar que se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável até a ordem n em um ponto x_0, sua expansão em série de Taylor em torno de x_0 pode ser escrita como: Quando $x \to x_0$,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right) \qquad \text{(Extra 1)}$$

Em que $F^{(k)}$ é a derivada de ordem k de $F(\cdot)$.

2.2 Exercício: Produto de Expansões

Exercício 2.1. Mostre que

$$\log(1 + x) \cdot e^x = x + O(x^2), \quad \text{quando } x \to 0$$

Solução 2.1. Note que, de (Extra 1), valem-se

Para e^x:

$$e^x = e^0 + x + o(x) = 1 + x + O(x^2) \tag{1}$$

Para $\log(1 + x)$:

$$\log(1 + x) = \log(1) + \frac{1}{1 + x}\left[x + o(x)\right]_{x\to 0} = x + O(x^2) \tag{2}$$

Portanto:

$$\log(1 + x) \cdot e^x = [x + O(x^2)] \cdot [1 + x + O(x^2)] = x + O(x^2)$$

Observação 2.1. Este tipo de cálculo é fundamental para:

- Provas do TCL usando funções geradoras de momentos
- Análise assintótica de estimadores
- Simplificações em aproximações de primeira e segunda ordem

3 Convergência em Probabilidade

3.1 Questão Extra 3: Razão de Estimadores

Questão 3.1 (Extra 3)**.** Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $\mu, \sigma^2 < \infty$. Mostre que:

$$\frac{\overline{X}_n}{S_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{\mu}{\sigma^2}$$

Solução 3.1. **Passo 1:** Aplicar a Lei Fraca dos Grandes Números (Resultado 1P) para cada componente.

Pelo resultado 1P:

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu \quad \text{e} \quad S_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \sigma^2$$

Passo 2: Aplicar as propriedades algébricas da convergência em probabilidade (Resultado 4P).

Pelo resultado 4P, que estabelece propriedades algébricas de convergência em probabilidade, temos que se $U_n \xrightarrow{P} u$ e $V_n \xrightarrow{P} v$ com $v \neq 0$, então:

$$\frac{U_n}{V_n} \xrightarrow{P} \frac{u}{v}$$

Conclusão:

$$\frac{\overline{X}_n}{S_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{\mu}{\sigma^2} \quad \square$$

Observação 3.1 (Importância Prática). Este resultado mostra que a razão de estimadores consistentes converge para a razão dos parâmetros. É útil em:

- Construção de estatísticas de teste
- Estimação de razões de parâmetros
- Verificação de consistência de estimadores compostos

3.2 Questão Extra 4: Teorema da Função Contínua

Questão 3.2 (Extra 4 - Aplicação do Resultado 5P)**.** Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim U(0, \theta)$ para $\theta > 0$. Mostre que

$$T_n^2 = X_{n:n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta^2$$

Solução 3.2. **Resultado 5P (Teorema da Função Contínua):** Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s tal que $U_n \xrightarrow{P} u$ e $g(\cdot)$ uma função contínua. Então:

$$g(U_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} g(u)$$

Aplicação ao problema:
Sabe-se (de resultados anteriores) que $X_{n:n} \xrightarrow{P} \theta$.
Defina $g(x) = x^2$. Esta função é contínua em todo $\mathbb{R}$.
Pelo Resultado 5P:

$$X_{n:n}^2 = g(X_{n:n}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} g(\theta) = \theta^2 \quad \square$$

Observação 3.2 (Generalização). O Teorema da Função Contínua é extremamente poderoso. Para qualquer transformação contínua g:

- Se T_n é consistente para θ
- Então $g(T_n)$ é consistente para $g(\theta)$

Exemplos práticos: $\sqrt{S_n^2}$ é consistente para σ, $\log(\bar{X}_n)$ é consistente para $\log(\mu)$, etc.

4 Convergência em Distribuição

4.1 Questão Extra 5: Distribuição Limite do Máximo

Questão 4.1 (Extra 5)**.** Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d tais que $X_i \sim U(0, \theta)$ para $\theta > 0$.
Encontre a distribuição limite da sequência

$$U_n = \frac{n}{\theta}(\theta - T_n) \quad \text{para} \quad T_n \triangleq X_{n:n}.$$

Solução 4.1. **Passo 1:** Encontrar a f.d.a. de $T_n = X_{n:n}$.
Como $X_i \sim U(0, \theta)$, temos $F_{X_i}(x) = x/\theta$ para $x \in (0, \theta)$.
Para o máximo de n v.a.'s i.i.d.:

$$F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t) = P(\text{todas } X_i \leq t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \mathbb{I}_{(0,\theta)}(t) + \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(t)$$

Passo 2: Encontrar a f.d.a. de U_n por transformação.
Para $u > 0$:

$$\begin{aligned}
F_{U_n}(u) = P(U_n \leq u) &= P\left(\frac{n}{\theta}(\theta - T_n) \leq u\right) && (3)\\
&= P\left(-T_n \leq \frac{\theta u}{n} - \theta\right) && (4)\\
&= P\left(T_n \geq \theta\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) && (5)\\
&= 1 - F_{T_n}\left(\theta\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) && (6)\\
&= 1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n && (7)
\end{aligned}$$

Passo 3: Calcular o limite quando $n \to \infty$.
Usando o resultado limite clássico $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n = e^{-u}$:

$$\lim_{n\to\infty} F_{U_n}(u) = 1 - e^{-u} = F_U(u)$$

onde $F_U(u)$ é a f.d.a. de uma v.a. $E \sim \text{Exp}(1)$.
Conclusão:

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} E \sim \text{Exp}(1) \quad \square$$

Observação 4.1 (Teoria dos Valores Extremos). Este resultado é um caso particular da teoria dos valores extremos. A distribuição exponencial aparece naturalmente como limite para o máximo de variáveis uniformes após normalização adequada. Este é um dos três tipos de distribuições limite para máximos (tipo I de Gumbel, tipo II de Fréchet, tipo III de Weibull).

4.2 Questão 4: Chi-quadrado pelo TCL

Questão 4.2 (Questão 4 - 20/10/25)**.** Sejam $X_n \sim \chi^2_n$ e $U_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}(X_n - n)$. Para $n \to \infty$ encontre a distribuição limite de U_n.
Lembre: $\frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{\text{Var}(X_n)}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

Solução 4.2. **Método da Função Geradora de Momentos**
Passo 1: Calcular $M_{U_n}(t)$.

$$M_{U_n}(t) = E\left[e^{tU_n}\right] = E\left[e^{\frac{t}{\sqrt{2n}}(X_n - n)}\right] \tag{8}$$

$$= e^{-\frac{tn}{\sqrt{2n}}} \cdot M_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right) \tag{9}$$

$$= e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}t} \cdot M_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right) \tag{10}$$

Passo 2: Usar que $X_n \sim \chi^2_n \equiv \Gamma(n/2, 1/2)$.
A f.m.g. de $G \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ é $M_G(t) = (1 - t/\beta)^{-\alpha}$.
Logo:

$$M_{X_n}(t) = (1 - 2t)^{-n/2}$$

Portanto:

$$M_{U_n}(t) = e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}t} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}t\right)^{-n/2}$$

Passo 3: Usar logaritmo para simplificar.

$$\log M_{U_n}(t) = -\sqrt{\frac{n}{2}}t - \frac{n}{2}\log\left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}t\right)$$

Passo 4: Expansão de Taylor de $\log(1 - x)$ em torno de zero.

$$\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

Para $x = \sqrt{\frac{2}{n}}t$:

$$\log\left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}t\right) = -\sqrt{\frac{2}{n}}t - \frac{t^2}{n} + O\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right)$$

Passo 5: Substituir e simplificar.

$$\log M_{U_n}(t) = -\sqrt{\frac{n}{2}}t - \frac{n}{2}\left(-\sqrt{\frac{2}{n}}t - \frac{t^2}{n} + O\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right)\right) \tag{11}$$

$$= -\sqrt{\frac{n}{2}}t + \sqrt{\frac{n}{2}}t + \frac{t^2}{2} + O\left(\frac{t^3}{\sqrt{n}}\right) \tag{12}$$

$$= \frac{t^2}{2} + o(1) \tag{13}$$

Passo 6: Tomar limite e concluir.

$$\lim_{n\to\infty} M_{U_n}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{\log M_{U_n}(t)} = e^{t^2/2}$$

Esta é a f.m.g. de $Z \sim N(0,1)$.
Conclusão:

$$U_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1) \quad \square$$

Observação 4.2 (TCL para Chi-quadrado). Este resultado mostra que a distribuição qui-quadrado se aproxima da normal para grandes graus de liberdade. É um caso particular do TCL aplicado a somas de v.a.'s qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

Fórmula geral: Para $X_n \sim \chi^2_n$:

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Equivalentemente: $X_n \approx N(n, 2n)$ para n grande.

5 Teorema Central do Limite

5.1 Questão Extra 6: TCL para Bernoulli

Questão 5.1 (Extra 6)**.** Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ com $p = \frac{1}{2}$ e

$$U_n = 2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right).$$

Estude a distribuição limite de U_n.

Solução 5.1. **Método da Função Geradora de Momentos**

Passo 1: Reescrever U_n em termos da soma.

$$U_n = 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}}$$

Passo 2: Calcular $M_{U_n}(t)$.

$$\begin{aligned}
M_{U_n}(t) = E\left[e^{tU_n}\right] &= E\left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i - t\sqrt{n}}\right] && (14)\\
&= e^{-t\sqrt{n}} E\left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i}\right] && (15)\\
&= e^{-t\sqrt{n}} \prod_{i=1}^n E\left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}X_i}\right] && (16)\\
&= e^{-t\sqrt{n}} \left[M_{X_1}\left(\frac{2t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n && (17)
\end{aligned}$$

Passo 3: Calcular $M_{X_1}(s)$ para Bernoulli.
Para $X_1 \sim \text{Bernoulli}(1/2)$:

$$M_{X_1}(s) = E[e^{sX_1}] = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot e^s = \frac{1+e^s}{2}$$

Logo:

$$M_{X_1}\left(\frac{2t}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1+e^{2t/\sqrt{n}}}{2}$$

Passo 4: Substituir e simplificar.

$$M_{U_n}(t) = e^{-t\sqrt{n}}\left(\frac{1+e^{2t/\sqrt{n}}}{2}\right)^n$$

Passo 5: Expansão de $e^{2t/\sqrt{n}}$ em Taylor.

$$e^{2t/\sqrt{n}} = 1 + \frac{2t}{\sqrt{n}} + \frac{2t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

Logo:

$$M_{X_1}\left(\frac{2t}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}\left[2 + \frac{2t}{\sqrt{n}} + \frac{2t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right] = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

Passo 6: Continuar a simplificação (requer expansão logarítmica e limite).
Após desenvolver usando $\log M_{U_n}(t)$ e tomar limites (cálculos análogos à Questão 4), obtém-se:

$$\lim_{n\to\infty} M_{U_n}(t) = e^{t^2/2}$$

Conclusão:

$$U_n = 2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1) \quad \square$$

Observação 5.1 (TCL Aplicado). Este é um exemplo clássico de aplicação do TCL. Note que:

- $E[X_i] = 1/2$, $\text{Var}(X_i) = 1/4$
- Pela forma padrão do TCL: $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2)}{1/2} \xrightarrow{d} N(0,1)$

- Multiplicando por 1/2: $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2) \xrightarrow{d} N(0, 1/4)$
- Multiplicando por 2: $2\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2) \xrightarrow{d} N(0, 1)$ □

Este resultado também fornece aproximação normal para a binomial:

$$S_n = \sum X_i \sim \text{Binomial}(n, 1/2) \approx N(n/2, n/4)$$

5.2 Exercício 11 Q: Função Contínua e Qui-quadrado

Exercício 5.1 (Exercício 11 Q - Teorema 3.7.6.4(a))**.** Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. reais tais que $\mu = \mathbb{E}\{X_i\} < \infty$ e $\sigma^2 = \text{Var}\{X_i\} < \infty$. Mostre que

$$n \left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{d} Q,$$

tal que $Q \sim \chi_1^2$.

Solução 5.2. **Teorema 3.7.6.4(a) (Função Contínua para Convergência em Distribuição):**

Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s e U uma v.a. Seja $g(\cdot)$ uma função contínua. Se $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} U$, então $g(U_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d} g(U)$.

Aplicação ao problema:

Passo 1: Definir Z_n e aplicar o TCL.

Defina:

$$Z_n \triangleq \sqrt{n} \left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \right) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma}$$

Pelo Teorema Central do Limite:

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z \sim N(0, 1)$$

Passo 2: Aplicar o teorema da função contínua.

Defina $g(x) = x^2$. Esta função é contínua em $\mathbb{R}$.

Pelo Teorema 3.7.6.4(a):

$$g(Z_n) = Z_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z^2$$

onde $Z \sim N(0, 1)$.

Passo 3: Identificar a distribuição de Z^2.

É um resultado clássico que se $Z \sim N(0, 1)$, então $Z^2 \sim \chi_1^2$.

Passo 4: Observar que $Z_n^2 = n \left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \right)^2$.

Conclusão:

$$n \left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \right)^2 = Z_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z^2 \sim \chi_1^2 \quad \square$$

Observação 5.2 (Aplicações Importantes). Este resultado é fundamental para:

1. **Testes de hipóteses:** Base para o teste de Wald
2. **Intervalos de confiança:** Permite construir ICs sem assumir normalidade
3. **Estatística qui-quadrado:** Mostra como qui-quadrado surge naturalmente de normais

Generalização: Se $Z_1, \ldots, Z_k$ são $N(0, 1)$ independentes, então $\sum_{i=1}^k Z_i^2 \sim \chi_k^2$.

6 Teorema de Slutsky

6.1 Questão Extra 4: Aplicação do Teorema de Slutsky

Questão 6.1 (Extra 4 - Teorema de Slutsky)**.** Sejam $\{X_n, n \geq 1\} \overset{i.i.d.}{\sim} U(0, \theta)$, $T_n = X_{n:n}$,

$$U_n = n \cdot (\theta - T_n)/\theta \quad \text{e} \quad Q_n = n \cdot (\theta - T_n)/T_n.$$

Encontre a distribuição limite de Q_n.

Solução 6.1. **Resultado 39 (Teorema de Slutsky):** Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ e $\{V_n, n \geq 1\}$ duas sequências de v.a.'s tais que

$$U_n \xrightarrow{d} U \quad \text{e} \quad V_n \xrightarrow{p} v \text{ (constante)},$$

então:

1. $U_n + V_n \xrightarrow{d} U + v$
2. $U_n \cdot V_n \xrightarrow{d} U \cdot v$
3. $U_n/V_n \xrightarrow{d} U/v$ (se $v \neq 0$)

Aplicação ao problema:
Passo 1: Identificar resultados conhecidos.
Como já discutido (ver Questão Extra 5):

- $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \theta$ (convergência em probabilidade do máximo)
- $U_n = \frac{n(\theta - T_n)}{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{d} E \sim \text{Exp}(1)$ (convergência em distribuição)

Passo 2: Expressar Q_n em termos de U_n e T_n.

$$Q_n = \frac{n(\theta - T_n)}{T_n} = \frac{n(\theta - T_n)}{\theta} \cdot \frac{\theta}{T_n} = U_n \cdot \frac{\theta}{T_n}$$

Passo 3: Analisar $\frac{\theta}{T_n}$.
Como $T_n \xrightarrow{p} \theta$, pelo Resultado 4P (álgebra de convergência em probabilidade) ou teorema da função contínua:

$$\frac{\theta}{T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{p} \frac{\theta}{\theta} = 1$$

Passo 4: Aplicar o Teorema de Slutsky.
Temos:

- $U_n \xrightarrow{d} E \sim \text{Exp}(1)$
- $\frac{\theta}{T_n} \xrightarrow{p} 1$

Pelo Resultado 39 (Slutsky):

$$Q_n = U_n \cdot \frac{\theta}{T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} E \cdot 1 = E \sim \text{Exp}(1)$$

Conclusão:

$$Q_n = \frac{n(\theta - T_n)}{T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \text{Exp}(1) \quad \square$$

Observação 6.1 (Poder do Teorema de Slutsky). Este exemplo ilustra perfeitamente o poder do Teorema de Slutsky:

- **Substituição de parâmetros:** Podemos substituir θ por T_n sem alterar a distribuição limite
- **Combinação de convergências:** Misturamos convergência em distribuição (U_n) com convergência em probabilidade (θ/T_n)
- **Aplicação prática:** Em inferência estatística, frequentemente substituímos parâmetros desconhecidos por estimadores consistentes

Interpretação: Embora Q_n use o estimador T_n no denominador ao invés do verdadeiro θ, a distribuição limite é a mesma!

7 Método Delta

7.1 Questão Extra 10: Método Delta para Poisson

Questão 7.1 (Extra 10 - Método Delta)**.** Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Encontre a distribuição assintótica de

$$\sqrt{n}\left(\overline{X_n^3} - \lambda^3\right).$$

Solução 7.1. **Teorema de Mann-Wald (Método Delta):**

Prova do teorema (apresentada em aula):

Considere

$$\sqrt{n}\,[g(T_n) - g(\theta)] = U_n \cdot V_n,$$

em que

$$U_n = \sqrt{n}(T_n - \theta) \quad \text{e} \quad V_n = \frac{g(T_n) - g(\theta)}{T_n - \theta}.$$

Note que $T_n - \theta = \frac{U_n}{\sqrt{n}}$.

Como $U_n \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ e $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} 0$, pelo Teorema de Slutsky:

$$T_n - \theta \xrightarrow{P} 0$$

Daí, pela definição de derivada $g'(x) = \lim_{z \to x} \frac{g(z)-g(x)}{z-x}$:

$$V_n \xrightarrow{P} g'(\theta)$$

Assim, pelo Teorema de Slutsky:

$$\sqrt{n}\,[g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow{d} N\left(0, [g'(\theta)]^2\,\sigma^2\right)$$

Aplicação ao problema:

Passo 1: Verificar condições para aplicar o Método Delta.

Para Poisson(λ): $E[X_i] = \lambda$ e $\text{Var}(X_i) = \lambda < \infty$.

Pelo TCL:

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda) \xrightarrow{d} N(0, \lambda)$$

Passo 2: Definir a função g e calcular sua derivada.
Queremos a distribuição de $\overline{X_n^3}$, que podemos escrever como transformação de $\bar{X}_n$.
Defina $g(x) = x^3$.
Então:

$$g'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad g'(\lambda) = 3\lambda^2$$

Passo 3: Aplicar o Método Delta.
Pelo Método Delta, com $T_n = \bar{X}_n$, $\theta = \lambda$, $\sigma^2 = \lambda$:

$$\sqrt{n}\left[\bar{X}_n^3 - \lambda^3\right] \xrightarrow{d} N\left(0, [g'(\lambda)]^2 \cdot \lambda\right) = N\left(0, 9\lambda^4 \cdot \lambda\right) = N(0, 9\lambda^5)$$

Conclusão:

$$\sqrt{n}\left(\overline{X_n^3} - \lambda^3\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, 9\lambda^5) \quad \square$$

Observação 7.1 (Método Delta - Guia Prático). **Quando usar:**

- Você tem $\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$
- Você quer a distribuição de $g(T_n)$ para alguma função g

Receita:

1. Calcule $g'(\theta)$
2. Verifique que $g'(\theta) \neq 0$
3. A distribuição assintótica é: $\sqrt{n}[g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow{d} N(0, [g'(\theta)]^2\sigma^2)$

Casos comuns:

- $g(x) = \sqrt{x}$: $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $g(x) = \log(x)$: $g'(x) = \frac{1}{x}$
- $g(x) = x^k$: $g'(x) = kx^{k-1}$
- $g(x) = \frac{1}{x}$: $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

8 Consistência de Estimadores

8.1 Questão 3.23: Consistência do EMV para Uniforme

Questão 8.1 (Q 3.23)**.** Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim U(0, \theta)$. Mostre que o estimador de MV para θ, $T_n = X_{n:n}$, é consistente para θ.

Solução 8.1. **Método da Definição de Consistência**

Um estimador T_n é consistente para θ se $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$, ou equivalentemente, se para todo $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta \left\{|T_n - \theta| < \varepsilon\right\} = 1$$

Passo 1: Encontrar a f.d.a. de $T_n = X_{n:n}$.
Para $X_i \sim U(0, \theta)$, temos $F_{X_i}(x) = x/\theta$ para $0 \leq x \leq \theta$.

A f.d.a. do máximo é:

$$\begin{align} F_{T_n}(t) &= P_\theta(T_n \le t) \tag{18} \\ &= P_\theta\left\{\bigcap_{i=1}^{n} X_i \le t\right\} \tag{19} \\ &\overset{\text{iid}}{=} [F_{X_1}(t)]^n \tag{20} \\ &= \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^n, & 0 \le t \le \theta, \\ 1, & t > \theta \end{cases} \tag{21} \end{align}$$

Passo 2: Calcular $P_\theta\left\{|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon\right\}$.
Para $\varepsilon > 0$:

$$P_\theta\left\{|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon\right\} = P_\theta\left\{\theta - \varepsilon < X_{n:n} < \theta + \varepsilon\right\} \tag{22}$$

Como $X_{n:n} \le \theta$ sempre (é o máximo de v.a.'s em $(0, \theta)$):

$$= P_\theta\left\{\theta - \varepsilon < X_{n:n} < \theta\right\}$$

Usando a f.d.a.:

$$\begin{align} &= F_{X_{n:n}}(\theta) - F_{X_{n:n}}(\theta - \varepsilon) \tag{23} \\ &= 1 - F_{X_{n:n}}(\theta - \varepsilon) \tag{24} \end{align}$$

Caso 1: Se $\varepsilon \ge \theta$: $\theta - \varepsilon \le 0$, logo $F_{X_{n:n}}(\theta - \varepsilon) = 0$ e $P = 1$.
Caso 2: Se $\varepsilon < \theta$: $0 < \theta - \varepsilon < \theta$, logo:

$$F_{X_{n:n}}(\theta - \varepsilon) = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n$$

Portanto:

$$P_\theta\left\{|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon\right\} = \begin{cases} 1, & \varepsilon \ge \theta, \\ 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n, & \varepsilon < \theta \end{cases}$$

Passo 3: Calcular o limite quando $n \to \infty$.
Para $\varepsilon < \theta$ fixo:

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\left\{|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon\right\} = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n\right] = 1 - 0 = 1$$

pois $0 < 1 - \frac{\varepsilon}{\theta} < 1$.
Conclusão:
Para todo $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\left\{|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon\right\} = 1$$

Logo:

$$X_{n:n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta \quad \square$$

O estimador de máxima verossimilhança $T_n = X_{n:n}$ é consistente para θ.

Observação 8.1 (Propriedades do EMV para Uniforme). **Características importantes:**

1. **Viesado:** $E[X_{n:n}] = \frac{n\theta}{n+1} < \theta$ (viesado para baixo)
2. **Consistente:** Como provado, $X_{n:n} \xrightarrow{P} \theta$
3. **Taxa de convergência:** $n(X_{n:n} - \theta) \xrightarrow{d} \text{Exp}(1)$ (mais rápido que $\sqrt{n}$!)
4. **Suficiente:** $X_{n:n}$ é estatística suficiente para θ

Estimador não-viesado alternativo:

$$\tilde{\theta}_n = \frac{n+1}{n} X_{n:n}$$

Este é não-viesado, mas tem variância ligeiramente maior.

Comparação com método dos momentos: O estimador de momentos $\hat{\theta}_n^{MM} = 2\bar{X}_n$ é:

- Não-viesado: $E[2\bar{X}_n] = \theta$
- Consistente: $2\bar{X}_n \xrightarrow{P} \theta$
- Menos eficiente: $\text{Var}(2\bar{X}_n) = \frac{\theta^2}{3n}$ vs $\text{Var}(X_{n:n}) \approx \frac{\theta^2}{n^2}$ para n grande

O EMV é assintoticamente muito mais eficiente!

9 Observações Finais e Dicas de Estudo

9.1 Resumo dos Principais Métodos

1. **Convergência em Probabilidade:**
   - LFGN diretamente
   - Propriedades algébricas (Resultado 4P)
   - Teorema da função contínua (Resultado 5P)
2. **Convergência em Distribuição:**
   - TCL para médias amostrais
   - Função geradora de momentos + limite
   - F.d.a. + limite pontual
   - Teorema da função contínua
3. **Combinação de Convergências:**
   - Teorema de Slutsky (produto, soma, divisão)
   - Método Delta (transformações não-lineares)
4. **Consistência:**
   - Definição direta via probabilidades
   - EQM $\to 0$
   - LFGN + função contínua

9.2 Estratégias para Resolver Questões

1. Identifique o que é pedido:

- Convergência em probabilidade? ($\xrightarrow{P}$)
- Convergência em distribuição? ($\xrightarrow{d}$)
- Distribuição limite específica?
- Consistência de estimador?

2. Identifique o que você tem:

- Variáveis i.i.d.? Qual distribuição?
- Momentos finitos?
- Média amostral? Máximo? Mínimo?
- Transformação de estimador?

3. Escolha a ferramenta adequada:

- Média amostral + convergência simples $\rightarrow$ LFGN
- Média amostral + distribuição $\rightarrow$ TCL
- Transformação contínua $\rightarrow$ Teorema da função contínua
- Transformação não-linear + distribuição $\rightarrow$ Método Delta
- Parâmetro desconhecido $\rightarrow$ Slutsky
- Máximo/mínimo de uniforme $\rightarrow$ F.d.a. + limite

4. Execute com cuidado:

- Verifique todas as condições dos teoremas
- Escreva os passos claramente
- Use notação correta
- Justifique cada aplicação de teorema

9.3 Erros Comuns a Evitar

1. **Confundir $\xrightarrow{P}$ com $\xrightarrow{d}$**
2. **Esquecer de verificar condições:**
   - Momentos finitos para LFGN/TCL
   - Continuidade para teorema da função contínua
   - $g'(\theta) \neq 0$ para método delta

3. **Padronização incorreta no TCL:**

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \quad \text{(correto)} \quad \text{vs} \quad \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{(equivalente)}$$

4. **Aplicar Slutsky incorretamente:**
   - Precisa: $U_n \xrightarrow{d} U$ E $V_n \xrightarrow{p} v$ (constante)
   - Não funciona se ambos convergem apenas em distribuição

5. **Esquecer $[g'(\theta)]^2$ no método delta**

6. **Não identificar corretamente a distribuição limite:**
   - Z^2 com $Z \sim N(0,1)$ é χ^2_1, não $N(0,1)$

9.4 Checklist de Revisão

Antes da prova, certifique-se de que sabe:

- ☐ Enunciar LFGN (versões simples e de Khinchin)
- ☐ Enunciar TCL (versão clássica)
- ☐ Enunciar Teorema de Slutsky
- ☐ Enunciar Método Delta
- ☐ Teorema da função contínua (P e d)
- ☐ Definição de consistência
- ☐ Propriedades algébricas de convergência em P
- ☐ Como usar f.m.g. para convergência em d
- ☐ Expansões de Taylor básicas (e^x, $\log(1+x)$)
- ☐ Calcular $E[X]$ e $\text{Var}(X)$ para distribuições comuns
- ☐ Identificar quando cada teorema se aplica
- ☐ Resolver todas as questões deste documento sozinho

Boa sorte nos estudos!