Unidade 2 - Compilação Completa
Convergência Estocástica e Resultados Limite

Curso de Inferência Estatística

Outubro 2025

Sumário

13♡10♡25

- Revisão: James Baxly.
3.7(a) Revisão de Convergência Estocástica
3.7.1(a) Alguns resultados limites

$$(R.1) \qquad \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1, \tag{1}$$

$$(R.2) \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{2}$$

$$(R.3) \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x. \tag{3}$$

Exemplo: Uma ilustração do uso destes resultados é a aproximação da Binomial para Poisson: Seja $X \sim \text{Binomial}(n, p_n)$ tal que $p_n = \frac{\lambda}{n} \in (0,1)$, então

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \tag{4}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \tag{5}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \tag{6}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(\frac{n-j}{n}\right)\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \tag{7}$$

e, portanto, ...

$$\lim_{n\to\infty} p(X=k) = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) \tag{8}$$

$$(1(\text{R2}))$$

$$e \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \times \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \times \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\frac{\lambda^k}{k!} \quad e^{-\lambda} \quad (1(\text{R3})) \quad (1(\text{R2}))$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \text{isto é } X \overset{n\to\infty}{\sim} \text{Poisson}(\lambda)$$

3.7.2 (O) e (o) para sequências de números reais

Sejam $\{a_n, n \geq 1\}$ e $\{b_n, n \geq 1\}$ duas sequências de números reais. Os seguintes conceitos são importantes:

$$a_n = O(b_n) \quad \text{se e só se} \quad \exists k > 0,\, n_0 \in \mathbb{N}(k) : \frac{|a_n|}{|b_n|} \leq k, \quad \forall n \geq n_0$$

isto é, se $|a_n/b_n|$ é limitada para n suficientemente grande. Em particular:

$$a_n = O(1) \quad \text{implica} \quad \exists k > 0,\, n_0 : |a_n| \leq k, \quad \forall n \geq n_0$$

Ex: $10n^2 + n = O(n^2)$ pois

$$\frac{10n^2 + n}{n^2} = 10 + \frac{1}{n} \leq 11, \quad \forall n \geq 1$$

$$10 + \frac{1}{1} = 11, \quad 10 + \frac{1}{2} = 10.5, \quad 10 + \frac{1}{3} \approx 10.333$$

Ex: $n^2 = O(6n^2 + n)$ pois

$$\frac{n^2}{6n^2 + n} = \frac{1}{6 + n^{-1}} \leq \frac{1}{6}, \quad \forall n \geq 1 \tag{9}$$

$$\frac{n^2}{6n^2 + n} = \frac{1}{6 + n^{-1}} \leq \frac{1}{6 + (1)^{-1}} = \frac{1}{7}$$

$a_n = \theta(b_n)$ se, sse, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \frac{a_n}{b_n} \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, isto é, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Em particular, $a_n = \theta(1)$ implica que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{10}$$

Ex: $n = \theta(n^2)$ pois

$$\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{11}$$

Ex: $n^{-1} = \theta(1)$ pois

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{12}$$

Teorema (Extra 1) [Propriedades de $O(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$]
Sejam $\{a_n, n \geq 1\}$, $\{b_n, n \geq 1\}$, $\{c_n, n \geq 1\}$ e $\{d_n, n \geq 1\}$ sequências de números reais, valem-se:

(i) Se $a_n = O(b_n)$, então $a_n = o(b_n)$.

(ii) Se $a_n = O(b_n)$ e $c_n = O(d_n)$, então ...

$$O(b_n)O(d_n)$$

<iii.1> $a_n \cdot c_n = O(b_n \cdot d_n)$
<iii.2> $|a_n|^5 = O(|b_n|^5)$
<iii.3> $a_n + c_n = O\left(\max\{|b_n|, |d_n|\}\right)$, em que $r > 0$
(iii) Se $a_n = \Theta(b_n)$ e $c_n = \Theta(d_n)$, então
<iii.1> $a_n \cdot c_n = \Theta(b_n \cdot d_n)$
<iii.2> $|a_n|^5 = \Theta(|b_n|^5)$

<iii.3> $a_n + c_n = \Theta\left(\max\{|b_n|, |d_n|\}\right)$
(iv) Se $a_n = O(b_n)$ e $c_n = \Theta(d_n)$, então

$$a_n \cdot c_n = \Theta(b_n \cdot d_n)$$

(v) Se $a_n = O(b_n)$ e $b_n = \Theta(c_n)$, $O(\Theta(c_n)) = \Theta(c_n)$

$$a_n = \Theta(c_n)$$

Exemplo:

$$O(n^{-1/3}) + O(n^{-1/2}) \overset{\text{iii.3}}{=} O\left(\max\{n^{-1/3}, n^{-1/2}\}\right) = O(n^{-1/3})$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} O(1) + O(n^{-1/3}) + O(n^{-1/2}) &= O(1) + O(n^{-1/3}) \\ &\overset{\text{iii.3}}{=} \Theta(1) + O(\Theta(1)) \overset{\text{v}}{=} \Theta(1) + \Theta(1) \\ &\overset{\text{iii}}{=} \Theta(1) \end{aligned}$$

3.7.3 (2) O(·) e o(·) para função reais de valor real

$$\Rightarrow f(x) = O(g(x)) \quad \text{quando} \quad x \to x_0 \quad \text{se, e só se}$$
$$\forall k > 0,\ \exists \varepsilon > 0 : \ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq k,\ \forall x,\ |x - x_0| < \varepsilon$$
$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

$$\Rightarrow f(x) = O(g(x)) \quad \text{quando} \quad x \to \infty\ (-\infty) \quad \text{se, e só se}$$
$$\forall k > 0,\ \exists M > 0\ (M > 0) : \ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq k,\ \forall x > M\ (\forall x < M)$$

Ex: $8x^2 = O(x^2)$ quando $x \to \infty$ pois

$$\frac{8x^2}{x^2} = 8$$

$$\Rightarrow f(x) = o(g(x)) \quad \text{quando} \quad x \to x_0 \quad \text{se, e só se}$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon,\ \forall x,\ |x - x_0| < \delta$$
$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\Rightarrow f(x) = o(g(x)) \quad \text{quando} \quad x \to \infty\ (-\infty) \quad \text{se, e só se}$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0\ (M > 0) : \ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon,\ \forall x > M\ (\forall x < M)$$

Ex: $8x^2 \neq o(x^2)$ pois

$$\frac{8x^2}{x^2} \xrightarrow{x \to \infty} 8$$

Ex: $\quad 8x^2 = o(x^3) \quad$ pois

$$\frac{8x^2}{x^3} = \frac{8}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

Pode-se mostrar que se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável até a ordem n em um ponto x_0, sua expansão em série de Taylor em torno de x_0 pode ser escrita como: Quando $x \to x_0$,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right) \tag{Extra 1}$$

Em que $F^{(k)}$ é a derivada de ordem k de $F(\cdot)$.
Ex: Mostre que

$$\log(1 + x) \cdot e^x = x + O(x^2), \quad \text{quando } x \to 0 \tag{13}$$

Solução: Note que, de (Extra 1), valem-se

$$e^x = e^0 + x + o(x) = 1 + x + O(x^2) \tag{14}$$

e

$$\log(1 + x) = \log(1) + \frac{1}{1 + x}\left[x + o(x)\right]_{x\to 0} = x + O(x^2) \tag{15}$$

Logo,

$$e^x \log(1 + x) = \left[1 + x + O(x^2)\right]\left[x + O(x^2)\right] \tag{16}$$

$$= \left[1 + x + O(x^2)\right] x + \left[1 + x + O(x^2)\right] O(x^2) \tag{17}$$

$$= x + x^2 + x \cdot O(x^2) + O(x^2) + x \cdot O(x^2) + O(x^2) \cdot O(x^2) \tag{18}$$

$$= x + x^2 + O(x^3) + O(x^2) + O(x^3) + O(x^4) \tag{19}$$

$$= x + x^2 + O(x^2) + O(x^3) + O(x^4) \tag{20}$$

$$= x + x^2 + O(x^2) = x + O(x^2) + O(x^2) \tag{21}$$

$$= x + O(x^2) \tag{22}$$

3.7.4(a) Convergência em Probabilidade

Definições (3.7.4.1(a)) Considere uma sequência de v.a.'s de valores reais $\{U_n, n \geq 1\}$. U_n converge em probabilidade a um número u para $n \to \infty$ se, e só se:

$$P\left(|U_n - u| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{23}$$

Este caso é denotado como:

$$U_n \xrightarrow{P} u \tag{24}$$

15/10/25

Definição 3.7.42(a)

Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s e U uma v.a.

$$U_n \xrightarrow{P} U \text{ se e só se } U_n - U \xrightarrow{P}_{n\to\infty} 0.$$

Resultado 1P: Versão simples da Lei fraca dos grandes números

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Então:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \mu.$$

Prova

Para um $\varepsilon > 0$ qualquer, pela desigualdade de Tchebysheff:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) &= P\left(\left(\overline{X}_n - \mu\right)^2 \geq \varepsilon^2\right) \\ &\leq \varepsilon^{-2}\,\mathbb{E}\left[\left(\overline{X}_n - \mu\right)^2\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \xrightarrow{P}_{n\to\infty} 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Logo,

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \mu.$$

Questão (extra 1)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s com $\mu < \infty$ e $\sigma^2 < \infty$. Mostre que:

$$S_n^2 \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \sigma^2.$$

Solução Note que

$$S_n^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=2}^{n} Y_i^2 \quad \text{para} \quad Y_i \sim N(0, \sigma^2), \tag{26}$$

em que $Y_1, \ldots, Y_n$ são v.a.'s de Helmert.

Além disso,

$$\mathrm{Var}(Y_i^2) = \mathbb{E}[Y_i^4] - \mathbb{E}^2[Y_i^2] \tag{27}$$

$$= 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4 < \infty, \quad \text{uma vez que:} \tag{28}$$

Como

$$M_{Y_i^2}(t) = e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \tag{29}$$

$$\left.\frac{dM_{Y_i^2}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}\right|_{t=0} = \left.t\sigma^2 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}\right|_{t=0} = 0 = \mathbb{E}(Y_i) \tag{30}$$

$$\left.\frac{d^2M_{Y_i^2}(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = t^2\sigma^4 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + \sigma^2 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}\Big|_{t=0} = \sigma^2 = \mathbb{E}(Y_i^2) \tag{31}$$

$$\left.\frac{d^3M_{Y_i^2}(t)}{dt^3}\right|_{t=0} = t^3\sigma^6 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + 2t\sigma^4 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + t\sigma^4 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}\Big|_{t=0} = 0 = \mathbb{E}(Y_i^3) \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^4M_{Y_i^2}(t)}{dt^4}\right|_{t=0} &= t^4\sigma^8 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + 3t^2\sigma^6 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \\ &+ 2t^2\sigma^6 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + 2\sigma^4 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + t^2\sigma^6 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + \sigma^4 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}\Big|_{t=0} \\ &= 3\sigma^4 = \mathbb{E}(Y_i^4)\end{aligned} \tag{33}$$

Note que S_n^2 tem uma representação de média amostral, então pelo resultado 1P,

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2}{n-1} \xrightarrow{P} \mathbb{E}[Y_i^2] = \sigma^2 \tag{34}$$

Resultado 2P: Sejam $\{T_n, n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis reais tais que para algum $r \geq 0$ e $a \in \mathbb{R}$ vale-se que

$$\mathbb{E}_{g_n} = \mathbb{E}\left[|T_n - a|^r\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \text{então} \tag{35}$$

$$T_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} a \tag{36}$$

Prova: Para qualquer $\varepsilon > 0$, por usar a desigualdade de Markov:

$$P\{|T_n - a| \geq \varepsilon\} = P\{|T_n - a|^r \geq \varepsilon^r\} \tag{37}$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[|T_n - a|^r]}{\varepsilon^r} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{38}$$

Logo,

$$T_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} a \tag{39}$$

Questão (Ex. 2)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s para $\theta > 0$. Mostre que

$$T_n = X_{(n)} \xrightarrow{p} \theta. \tag{40}$$

Solução

Note que

$$F_{T_n}(t) = [F_{X_{(1)}}(t)]^n \quad \text{e} \quad F_{T_n}(t) = n[F_{X_{(1)}}(t)]^{n-1} f_{X_{(1)}}(t) \tag{41}$$

e como

$$F_{X_{(1)}}(t) = \frac{t}{\theta}\, I_{(0,\theta)}(t) + I_{(\theta,\infty)}(t) \tag{42}$$

e

$$f_{X_{(1)}}(t) = \frac{1}{\theta}\, I_{(0,\theta)}(t), \tag{43}$$

temos

$$F_{T_n}(t) = \frac{t}{\theta^n}\, t^{n-1}\, I_{(0,\theta)}(t) + I_{(\theta,\infty)}(t) \tag{44}$$

e

$$f_{T_n}(t) = \frac{n}{\theta^n}\, t^{n-1}\, I_{(0,\theta)}(t). \tag{45}$$

As seguintes expressões tipo momento podem ser derivadas:

$$E[T_n] = \int_0^\theta t \cdot \frac{n}{\theta^n}\, t^{n-1}\, dt \tag{46}$$

$$= \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta = \frac{n}{n+1}\,\theta. \tag{47}$$

$$E[T_n^2] = \int_0^\theta t^2 \cdot \frac{n \cdot t^{n-1}}{\theta^n}\, dt \tag{48}$$

$$= \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^\theta = \frac{n}{n+2}\theta^2 \tag{49}$$

$$E[(T_n-\theta)^2] = E[T_n^2] - 2\theta E[T_n] + \theta^2 \tag{50}$$

$$= \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{2n}{n+1}\theta^2 + \theta^2 \tag{51}$$

$$= \theta^2\left\{\frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1\right\} \tag{52}$$

$$= \theta^2\left\{\frac{n^2+n-2n^2-4n+n^2+3n+2}{(n+2)(n+1)}\right\} \tag{53}$$

$$= \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{54}$$

Logo, pelo resultado 2p:

$$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta \tag{55}$$

Resultado 3P (Lei fraca dos grandes números de Khinchine)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s reais i.i.d. com

$$E[X_i] = \mu < \infty, \quad \text{Então} \quad \overline{X}_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \mu \tag{56}$$

Prova

Sejam $M_{\overline{X}_n}(t)$ e $M_{X_i}(t)$ f.m.g. de $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ e X_i, respectivamente. Logo, para $t \in \mathbb{R}$, vale-se:

$$M_{\overline{X}_n}(t) = M_{\frac{S_n}{n}}(t) \stackrel{\text{p.v.}}{=} \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) \tag{57}$$

$$= \left[M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \tag{3P.1}$$

Expandindo em série de Taylor $M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)$ em torno de zero (dado que $M_{X_1}(0) = 1$ e $M'_{X_1}(0) = \mu$) até a 1ª ordem, tem-se:

$$M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) = M_{X_1}(0) + M'_{X_1}(0)\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \tag{58}$$

$$= 1 + \mu\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \tag{59}$$

Daí, usando resultado limite (R.3):

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^k \tag{60}$$

$$M_{\overline{X}_n}(t) = \left[1 + \frac{\mu t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{t\mu} = M_\mu(t) \tag{61}$$

Como a variável limite é degenerada em

$$\mu, \quad \overline{X}_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \mu \tag{62}$$

Resultado 4P Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ e $\{V_n, n \geq 1\}$ duas sequências de v.a.'s tais que

$$U_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} u \quad \text{e} \quad V_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} v \tag{63}$$

então:

(i) $U_n + V_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} u + v$

(ii) $U_n \cdot V_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} u \cdot v$

(iii) $\frac{U_n}{V_n} \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \frac{u}{v}$ se $P(V_n = 0) = 0$, $\forall n$, e $v \neq 0$

(Extra 3) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $\mu, \sigma^2 < \infty$. Mostre que:

$$\frac{\overline{X}_n}{S_n^2} \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \frac{\mu}{\sigma^2} \tag{64}$$

Solução: Pelo resultado 1P,

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \mu \quad \text{e} \quad S_n^2 \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \sigma^2 \tag{65}$$

Pelo resultado 4P:

$$\frac{\overline{X}_n}{S_n^2} \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \frac{\mu}{\sigma^2} \tag{66}$$

Resultado 5P
Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s tal que

$$U_n \xrightarrow{P} u \quad \text{e} \quad g(\cdot) \text{ uma função contínua.} \tag{67}$$

Então

$$g(U_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} g(u) \tag{68}$$

Prova: Note que se $g(x)$ é contínua, então: dado algum $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - g(u)| \geq \varepsilon \;\Rightarrow\; |x - u| \geq \delta \tag{69}$$

Assim, para n suficientemente grande

$$0 \leq P\left(|g(U_n) - g(u)| \geq \varepsilon\right) \leq P\left(|U_n - u| \geq \delta\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{70}$$

Então,

$$g(U_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} g(u) \quad \square \tag{71}$$

Q (extra 4) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim U(0, \theta)$ para $\theta > 0$.
Mostre que

$$T_n^2 = X_{n:n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta^2 \tag{72}$$

Solução:
Como $X_{n:n} \xrightarrow{P} \theta$ e $g(x) = x^2$ é contínua, então pelo resultado 5P

$$X_{n:n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta^2 \tag{73}$$

3.15(a) Convergência em Distribuição

Definição (3.15.1(a)) Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s tal que $F_n(u)$ é a f.d.a de U_n e U uma v.a com f.d.a $F(u)$.

U_n converge em distribuições para U quando $n \to \infty$, denotado por

$$U_n \xrightarrow{D} U \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

se e somente se

$$F_n(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(u) \quad \text{em todos os pontos de continuidade de } F(\cdot).$$

Q (Extra 5) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d tais que $X_i \sim U(0, \theta)$ para $\theta > 0$.
Encontre a distribuição limite da sequência

$$U_n = \frac{n}{\theta}(\theta - T_n) \quad \text{para} \quad T_n \triangleq X_{n:n}.$$

Solução Note que a f.d.a de T_n é

$$F_{T_n}(t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \mathbb{I}_{(0,\theta)}(t) + \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(t) \tag{74}$$

A f.d.a de U_n é dada por (para $u \in (0, \theta)$):

$$\begin{aligned} F_{U_n}(u) &= \mathbb{P}(U_n \leq u) = \mathbb{P}\left(\frac{n}{\theta}(\theta - T_n) \leq u\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-T_n \leq \frac{\theta}{n}u - \theta\right) \\ &= \mathbb{P}\left(T_n \geq \theta\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) \end{aligned} \tag{75}$$

$$= 1 - F_{T_n}(\theta(1 - \frac{u}{n}))$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n, \quad u > 0.$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty} F_{U_n}(u) = 1 - e^{-u} = F_U(u), \quad \text{que é a fda de } E \in \text{EXP}(1).$$

Então,

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} E.$$

Resultado 1D: Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s tal que $M_{U_n}(t)$ é a fgm de U_n e U uma v.a. com fgm $M_U(t)$, então

$$\text{Se } M_{U_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} M_U(t), \text{ então } U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} U.$$

Q (extra 6) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ com $p = \frac{1}{2}$ e

$$U_n = 2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right).$$

Estude a distribuição limite de U_n.

Solução: Note que

$$U_n = \frac{2\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}}.$$

$$\begin{aligned} M_{U_n}(t) &= E\left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i - t\sqrt{n}}\right] = e^{-t\sqrt{n}} E\left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i}\right] \\ &= e^{-t\sqrt{n}}\left(E\left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}X_1}\right]\right)^n \\ &= e^{-t\sqrt{n}}\left((1-p) + p \cdot e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}}\right)^n \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{1}{2}e^{-t\frac{\sqrt{n}}{n}}\left[1 + e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}}\right] \tag{76}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[e^{-t\sqrt{n}} + e^{t\sqrt{n}}\right] \tag{77}$$

$$M_{Un}(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t\frac{\sqrt{n}}{n}} + e^{t\frac{\sqrt{n}}{n}}\right)^n \tag{78}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)\right]^n \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2}\left[2 + \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n \tag{80}$$

$$R_n = o\left(\max\left[\frac{t^2}{n}, \frac{t^2}{n^2}\right]\right) \tag{81}$$

$$= \left\{\frac{1}{2} + \frac{t^2}{n} + R_n\right\} \tag{82}$$

Em que $R_n = O(n^{-2})$. Assim, de

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t^2}{2n}\right)^n = e^{t^2/2} \tag{83}$$

$$M_{Un}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{t^2/2} = M_U(t) \tag{84}$$

que é a fgm de $Z \sim N(0,1)$, logo

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Z \tag{85}$$

20-10-25

Questão 4 Sejam $X_n \sim \chi^2_n$ e $U_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}(X_n - n)$. Para $n \to \infty$ encontre a distribuição limite de U_n.

Lembre: $\frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{Var(X_n)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

Solução

$$M_{U_n}(t) = E\left[e^{tU_n}\right] = E\left[e^{\frac{t}{\sqrt{2n}}(X_n - n)}\right] \tag{86}$$

$$= e^{-\frac{tn}{\sqrt{2n}}} \cdot M_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right) \tag{87}$$

A fmg de $G \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ é $M_G(t) = (1 - \frac{t}{\beta})^{-\alpha}$.
Como $X_n \sim \chi^2_n$ é equivalente a $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$, então:

$$M_{U_n}(t) = e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}t} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}t\right)^{-n/2} \tag{88}$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}t\right)^{-n/2} \cdot e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}t} \tag{89}$$

Tomando o $\log(\cdot)$ em ambos os lados da última identidade:

$$\log M_{U_n}(t) = -\sqrt{\frac{n}{2}}t - \frac{n}{2}\log\left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}t\right) \tag{90}$$

Note que a seguinte expressão em série de Taylor em torno de zero se verifica:

$$\log(1-x) = 0 + \left[-\frac{1}{1-x}\right]_{x=0} x + \frac{\left[-\frac{1}{(1-x)^2}\right]_{x=0}}{2} x^2 + O(x^3) \tag{91}$$

$$\log M_{U_n}(t) = -\sqrt{\frac{n}{2}}t - \frac{n}{2}\left(-\sqrt{\frac{2}{n}}t - \frac{t^2}{n} + O\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right)\right) \tag{92}$$

$$\begin{aligned}
\log M_{U_n}(t) &= \sqrt{\frac{n}{2}}\left[t + \frac{t^2}{2n} - \sqrt{1+\frac{2t^2}{n}}\right] + O\left(\sqrt{\frac{2t^2}{n}} \cdot O\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right) \\
&= \frac{t^2}{2} + O\left(\frac{t^2}{n} + \left(\sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{t^2}{n^{3/2}}\right)\right) \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{n} + O\left(\sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{t^2}{n^{3/2}}\right) = O\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \\
&= \frac{t^2}{2} + O\left(\frac{t^2}{n}\right) \\
t \to 0 \quad & \frac{t^2}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Então:

$$M_{U_n}(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2} + O(n^{-1})\right)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} M_{U_n}(t) = e^{t^2/2} = M_Z(t) \quad \text{tal que} \quad Z \sim N(0,1)$$

Logo:

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z$$

Resultado 2D: Seja $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de VAs. Se $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} U$ então $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} U$. A recíproca não é verdadeira, exceto quando U é uma VA degenerada em um valor.

20♡10♡25

Resultado 39 (Teorema de Slutsky) Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ e $\{V_n, n \geq 1\}$ duas sequências de v.a.'s tais que

$$U_n \xrightarrow{d} U \quad \text{e} \quad V_n \xrightarrow{p} v,$$

então:

1. $U_n + V_n \xrightarrow{d} U + v$
2. $U_n V_n \xrightarrow{d} U \cdot v$
3. $U_n/V_n \xrightarrow{d} U/v$, assumindo que $P(V_n = 0) = 0$, $\forall n$ e $v \neq 0$.

Q (Extra 4) Sejam $\{X_n, n \geq 1\} \overset{i.i.d.}{\sim} U(0, \theta)$, $T_n = X_{n:n}$,

$$U_n = n \cdot (\theta - T_n)/\theta \quad \text{e} \quad Q_n = n \cdot (\theta - T_n)/T_n.$$

Encontre a distribuição limite de Q_n.

Solução: Como já discutido,

$$T_n \xrightarrow{p}_{n\to\infty} \theta \quad \text{e} \quad U_n \xrightarrow{d} E$$

tal que $E \overset{d}{\sim} \text{Exp}(1)$. Pelo resultado 4P,

$$\frac{\theta}{T_n} \xrightarrow{p}_{n\to\infty} 1.$$

Logo, do resultado 39:

$$Q_n = \frac{n \cdot (\theta - T_n)}{\theta} \cdot \frac{\theta}{T_n} \xrightarrow{d}_{n\to\infty} E.$$

3.7.6 (a) Teorema Central do Limite (TCL)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ VAs iid tais que $\mu = \mathbb{E}\{X_i\} < \infty$ e $\sigma^2 = \text{Var}\{X_i\} < \infty$.

Considere estudar a distribuição limite de $\bar{X}_n$ e S_n^2. Na literatura,

$$Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right) \tag{93}$$

Versão padronizada da média amostral para σ conhecido.

$$T_n = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}\right) \tag{94}$$

Versão padronizada da média amostral para σ desconhecido.

No que segue, apresentam-se algumas versões do TCL.

Teorema 3.7.6.1(a) [TCL]

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma VA tal que $\mu = \mathbb{E}\{X_i\} < \infty$ e $\sigma^2 = \text{Var}\{X_i\} < \infty$.

Então

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{d} N(0,1), \quad n \to \infty \tag{95}$$

Q (extra 9)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ tal que $\mu, \sigma^2 < \infty$. Encontre a distribuição assintótica de

$$H_n = \sqrt{n}\left(S_n^2 - \sigma^2\right) \tag{96}$$

Solução

Usando a transformação de Helmet:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} Y_i^2, \quad \text{para } Y_i \sim N(0,\sigma^2) \tag{97}$$

Que caracteriza S_n^2 como uma média amostral de Y_i^2. Pelo Teo (3.7, 6.1(a)):

$$U_n = (n-1)^{-1/2}\left[S_n^2 - E(Y_i^2)\right] \xrightarrow{d} N\left(0, \text{Var}(Y_i^2)\right) \tag{98}$$

Como $E(Y_i^2) = \sigma^2$ e $\text{Var}(Y_i^2) = 2\sigma^4$:

$$U_n = (n-1)^{-1/2}\left[S_n^2 - \sigma^2\right] \xrightarrow{d} N\left(0, 2\sigma^4\right) \tag{99}$$

Defina

$$V_n = \frac{n}{n-1} \tag{100}$$

$$P\left(|V_n - 1| \geq \varepsilon\right) = P\left(|V_n - 1|^2 \geq \varepsilon^2\right) \quad \text{(Desigualdade de Tschebisheff)} \tag{101}$$

$$\Rightarrow \quad \leq \frac{E\left[|V_n - 1|^2\right]}{\varepsilon^2} = \frac{\left(\frac{n}{n-1} - 1\right)^2}{\varepsilon^2} \tag{102}$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2\,\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{103}$$

Logo $V_n \to 1$. Então $\sqrt{V_n} \xrightarrow{P} 1$, pelo resultado 5P.

Finalmente,

$$H_n = \sqrt{V_n} \cdot U_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0, 2\theta^4) \tag{104}$$

Teorema (3.7.6.2(a)) [Teorema de Man Wald]

Seja $\{T_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s reais tais que

$$\sqrt{n}\,(T_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N\left(0, \sigma^2(\theta)\right) \tag{105}$$

Seja $g(\cdot)$ uma função contínua de valor real tal que

$$g'(\theta) = \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \tag{106}$$

é finita e não nula.

Então tem-se

$$\sqrt{n}\,[g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N\left(0, \sigma^2(\theta)\, g'(\theta)^2\right) \tag{107}$$

Prova:

Considere

$$\sqrt{n}\,[g(T_n) - g(\theta)] = U_n \cdot V_n, \tag{108}$$

em que

$$U_n = \sqrt{n}(T_n - \theta) \quad \text{e} \quad V_n = \frac{g(T_n) - g(\theta)}{T_n - \theta}. \tag{109}$$

Note que

$$T_n - \theta = \frac{U_n}{\sqrt{n}}. \tag{110}$$

Como

$$U_n \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P}_{n\to\infty} 0, \quad \text{do Teo. Slutsky,} \tag{111}$$

temos

$$T_n - \theta \xrightarrow{P}_{n\to\infty} 0. \tag{112}$$

Daí,

$$V_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} g'(\theta), \quad \text{pela definição} \tag{113}$$

$$g'(x) = \lim_{g\to x} \frac{g(x) - g(z)}{g - x}. \tag{114}$$

Assim, pelo Teo. Slutsky,

$$\sqrt{n}\,[g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow{d}_{n\to\infty} N\left(0, [g'(\theta)]^2\,\sigma^2\right). \tag{115}$$

Q (extra 10)
Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Encontre a distribuição assintótica de

$$\sqrt{n}\left(\overline{X_n^3} - \lambda^3\right). \tag{116}$$

Solução
Pode-se mostrar que

$$E\{X_i^3\} = \lambda < \infty \quad \text{e} \quad \text{Var}\{X_i^3\} = \lambda < \infty. \tag{117}$$

Pelo Teo. (3.7.6.1(a)).

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \lambda\right)\sqrt{\lambda} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0,1) \tag{118}$$

Tomando $g(\lambda) = \lambda^3$ e usando Teo (3.7.6.2(a)),

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n^3 - \lambda^3\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N\left(0, \left[3 \cdot \lambda^2 \cdot \sqrt{\lambda}\right]^2\right) \tag{119}$$

Teorema (3.7.6.3(a)) [TCL para variância amostral]

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com média μ, variância σ^2 e $\mu_4 = \mathbb{E}[(X_1 - \mu)^4]$. Assuma que $0 < \mu_4 < \infty$ e $\mu_4 > \sigma^4$ (curtose > 1). Então,

$$\sqrt{n}\left(S_n^2 - \sigma^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N\left(0, \mu_4 - \sigma^4\right) \tag{120}$$

Prova:

Considere

$$W_n \triangleq (n-1)n^{-1}S_n^2, \quad Y_i \triangleq (X_i - \mu)^2 \quad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

e

$$\overline{Y}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
W_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 && (121)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu + \mu - \overline{X}_n\right)^2 && (122)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)^2 + 2(X_i-\mu)(\mu-\overline{X}_n) + (\mu-\overline{X}_n)^2\right] && (123)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - 2(\overline{X}_n-\mu)^2 + (\overline{X}_n-\mu)^2 && (124)\\
&= \overline{Y}_n - (\overline{X}_n-\mu)^2 && (125)
\end{aligned}$$

Ainda, vale-se

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(W_n - \sigma^2\right) &= \sqrt{n}\left(\overline{Y}_n - \sigma^2\right) - \sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right)^2 && (126)\\
&= U_n + V_n && (127)
\end{aligned}$$

Note que $\{Y_i\} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} [\mathbb{E}[Y_i] = \sigma^2,\ \mathrm{Var}(Y_i) = \mu_4 - \sigma^4]$. Daí, pelo Teorema (3.7.6.1(a)) (TCL),

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \mu_4 - \sigma^4) \quad \text{como já discutido,} \qquad (128)$$

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \qquad (129)$$

Daí, pelo Teorema de Slutsky,

$$\sqrt{n}\left(W_n - \sigma^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \mu_4 - \sigma^4) \qquad (130)$$

Agora escrevemos

$$\sqrt{n}\left(S_n^2 - \sigma^2\right) = \sqrt{n}\left(\frac{n}{n-1}W_n - \sigma^2\right) \qquad (131)$$

$$= \sqrt{n}\left(\frac{n}{n+1} - 1 + 1\right)\left(W_n - \sigma^2\right) \qquad (132)$$

$$= \sqrt{n}\left(W_n - \sigma^2\right) + \frac{\sqrt{n}}{n-1}W_n \qquad (133)$$

Como

$$\sqrt{n}\left(W_n - \sigma^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \mu_4 - \sigma^4), \qquad (134)$$

$$W_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \sigma^2, \quad \frac{\sqrt{n}}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{n}}{n-1} W_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0, \tag{135}$$

então, do Teorema de Slutsky,

$$\sqrt{n}\left(S_n^2 - \sigma^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \mu_4 - \sigma^4) \tag{136}$$

Teorema (3.7.6.4(a))
Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de reais e U uma variável real. Seja $g(\cdot)$ uma função contínua de valor real.
Se $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} U$, então $g(U_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d} g(U)$.

Exercício (11) Q
Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. reais tais que $\mu = \mathbb{E}\{X_i\} < \infty$ e $\sigma^2 = \mathrm{Var}\{X_i\} < \infty$. Mostre que

$$n\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{d} Q, \tag{137}$$

tal que $Q \sim \chi_1^2$.

Solução
Pelo $Z_n \triangleq \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma}\right)$, tem-se

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z \sim N(0,1). \tag{138}$$

Pelo Teorema (3.7.6.4(a)), como $g(x) = x^2$ é uma função contínua,

$$g(Z_n) = n\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z^2, \tag{139}$$

isto é, converge para $Q \sim \chi_1^2$.

3.7 Estimadores Consistentes

Consistência é uma propriedade de grandes amostras introduzida por Fisher (1922).
Seja

$$\{T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n); n \geq 1\}$$

uma sequência de estimadores para $\tau(\theta)$ tal que $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$.
Definição (3.7.1): T_n é consistente no sentido fraco para $\tau(\theta)$ se, e só se

$$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \tau(\theta) \tag{140}$$

T_n é inconsistente para $\tau(\theta)$ se T_n não converge em probabilidade para $\tau(\theta)$.
Obs 1: Dados $\varepsilon > 0$ e $\delta \in (0,1)$, $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta, \theta)$:

$$P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} \leq \delta \iff P_\theta\{|T_n - \theta| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \delta, \quad \forall n \geq n_0 \tag{141}$$

Obs 2: T_n é consistente se, e só se

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\{|T_n-\theta|>\varepsilon\}=0 \tag{142}$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\{|T_n-\theta|\le\varepsilon\}=1 \tag{143}$$

(Q 3.23) Sejam $X_1,\ldots,X_n$ uma amostra de $X\sim U(0,\theta)$. Mostre que o estimador de MV para θ, $T_n=X_{n:n}$, é consistente para θ.

Solução

Note que

$$F_{T_n}(t)=P_\theta(T_n\le t) \tag{144}$$

$$=P_\theta\left\{\bigcap_{i=1}^{n} X_i\le t\right\} \tag{145}$$

$$\overset{\text{iid}}{=}[F_{X_1}(t)]^n=\begin{cases}0, & t<0,\\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^n, & 0\le t\le\theta,\\ 1, & t>\theta\end{cases} \tag{146}$$

Para $\varepsilon>0$:

$$P_\theta\left\{|X_{n:n}-\theta|<\varepsilon\right\}=P_\theta\left\{\theta-\varepsilon<X_{n:n}<\theta+\varepsilon\right\} \tag{147}$$

$$=P_\theta\left\{\theta-\varepsilon<X_{n:n}<\theta\right\} \tag{148}$$

$$=F_{X_{n:n}}(\theta)-F_{X_{n:n}}(\theta-\varepsilon) \tag{149}$$

$$=\begin{cases}1, & \varepsilon\ge\theta,\\ 1-\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n, & \varepsilon<\theta\end{cases} \tag{150}$$

É, portanto:

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\left\{|X_{n:n}-\theta|<\varepsilon\right\}=1 \tag{151}$$

Logo,

$$X_{n:n}\xrightarrow[n\to\infty]{P}\theta \tag{152}$$

Obs 3: Um fato interessante é que se pode obter o tamanho amostral mínimo, diga-se n_0, tal que

$$P\left(|X_{n:n}-\theta|<\varepsilon\right)\ge 1-\delta, \tag{153}$$

em que $\varepsilon>0$ e $\delta\in(0,1)$ são constantes pré-especificadas para $\varepsilon<\theta$.

$$P\left(|X_{n:n}-\theta|<\varepsilon\right)\ge 1-\delta \tag{154}$$

$$\therefore 1-\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n\ge 1-\delta$$

$$\therefore \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n\le\delta$$

$$\therefore n \geq \frac{\log \delta}{\log\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)}$$

Assim:

$$n_0 = \left\lceil \frac{\log \delta}{\log\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)} \right\rceil + 1 \tag{155}$$

Para $\theta \leq \varepsilon$:

$$n_0 = 1$$

Obs: $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$ se $EQM_\theta[T_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Isto pode ser verificado pela desigualdade de Chebyschev. Para qualquer $\varepsilon > 0$ e $\theta \in \Theta$,

$$P_\theta\left(|T_n - \theta| > \varepsilon\right) \leq \frac{E_\theta\left[(T_n-\theta)^2\right]}{\varepsilon^2} \tag{156}$$

$$= \frac{EQM_\theta[T_n]}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{157}$$

Deste último resultado, $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$ implica que

$$B_\theta[T_n],\ Var_\theta[T_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{se } T_n \text{ é centrado}$$

basta checar

$$Var_\theta[T_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

3.8 Propriedades assintóticas do EMV

Neste seção veremos a normalidade assintótica para os EMVs, propriedades que é também satisfeita por outros estimadores. Para isto, temos que definir o conceito de eficiência.

Definição (3.4.1) Se dois estimadores $T_n^{(1)}$ e $T_n^{(2)}$ para $g(\theta)$ são ambos assintoticamente normais,

$$\sqrt{n}\left(T_n^{(1)} - g(\theta)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N\left(0, \sigma_1^2(\theta)\right) \tag{158}$$

e

$$\sqrt{n}\left[T_n^{(2)} - g(\theta)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{d} N\left(0, \sigma_2^2(\theta)\right), \tag{159}$$

então a eficiência relativa assintótica de $T^{(2)}$ com respeito a $T^{(1)}$ é definida como

$$\frac{\sigma_1^2(\theta)}{\sigma_2^2(\theta)} \tag{160}$$

Os EMVs são assintoticamente eficientes pelo teorema abaixo.

Teorema (3.8.1) [TCL para os EMVs]

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de X com fdp (ou fmp) $f(x;\theta)$ para $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ tal que Θ é um intervalo aberto.

Assuma que:

(A1) $\theta \mapsto f(x;\theta)$ é três vezes diferenciável sobre Θ, $\forall x \in \mathbb{X}$.

(A2)

$$\int_{\mathbb{X}} \frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)\, dx = 0 \quad \left(= \frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{X}} f(x;\theta)\, dx\right) \tag{161}$$

e

$$\int_{\mathbb{X}} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f(x;\theta)\, dx = 0 \quad \left(= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \int_{\mathbb{X}} f(x;\theta)\, dx \right) \tag{162}$$

(A3)

$$0 < I_X(\theta) \triangleq \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{\partial \log f(x;\theta)}{\partial\theta} \right)^2 \right] < \infty, \quad \forall \theta \in \Theta \tag{163}$$

(A4) Para cada $\theta_0 \in \Theta$, $\exists\ \varepsilon = \varepsilon(\theta_0) > 0$

$$\left| \frac{\partial^3 \log f(x;\theta)}{\partial\theta^3} \right| \leq g(x), \quad \forall \theta \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon], \tag{164}$$

em que

$$\int_X g(x) f(x;\theta)\, dx < \infty. \tag{165}$$

(A5) A equação de verossimilhança

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log f(x_i;\theta)}{\partial\theta} = 0 \tag{166}$$

tem uma solução consistente $\hat{\theta}_n$. Então

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N\left(0, I_X^{-1}(\theta_0)\right). \tag{167}$$