

# Unidade 2 - Compilação Completa

## Convergência Estocástica e Resultados Limite

Curso de Inferência Estatística

Outubro 2025

### **Sumário**

# 13♥10♥25

- Revisão: James Baxly.

## 3.7(a) Revisão de Convergência Estocástica

### 3.7.1(a) Alguns resultados limites

$$(R.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1, \quad (1)$$

$$(R.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad (2)$$

$$(R.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x. \quad (3)$$

**Exemplo:** Uma ilustração do uso destes resultados é a aproximação da Binomial para Poisson: Seja  $X \sim \text{Binomial}(n, p_n)$  tal que  $p_n = \frac{\lambda}{n} \in (0, 1)$ , então

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \quad (4)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)! k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \quad (5)$$

$$= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \quad (6)$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{n-j}{n}\right) \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \quad (7)$$

e, portanto, ...

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(X = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \quad (8)$$

$$(1(R2))$$

$$e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\frac{\lambda^k}{k!} \quad e^{-\lambda} \quad (1(R3)) \quad (1(R2))$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{isto é } X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Poisson}(\lambda)$$

### 3.7.2 (O) e (o) para seqüências de números reais

Sejam  $\{a_n, n \geq 1\}$  e  $\{b_n, n \geq 1\}$  duas seqüências de números reais. Os seguintes conceitos são importantes:

$$a_n = O(b_n) \quad \text{se e só se} \quad \exists k > 0, n_0 \in \mathbb{N}(k) : \frac{|a_n|}{|b_n|} \leq k, \quad \forall n \geq n_0$$

isto é, se  $|a_n/b_n|$  é limitada para  $n$  suficientemente grande. Em particular:

$$a_n = O(1) \quad \text{implica} \quad \exists k > 0, n_0 : |a_n| \leq k, \quad \forall n \geq n_0$$

**Ex:**  $10n^2 + n = O(n^2)$  pois

$$\frac{10n^2 + n}{n^2} = 10 + \frac{1}{n} \leq 11, \quad \forall n \geq 1$$

$$10 + \frac{1}{1} = 11, \quad 10 + \frac{1}{2} = 10.5, \quad 10 + \frac{1}{3} \approx 10.333$$

**Ex:**  $n^2 = O(6n^2 + n)$  pois

$$\frac{n^2}{6n^2 + n} = \frac{1}{6 + n^{-1}} \leq \frac{1}{6}, \quad \forall n \geq 1 \quad (9)$$

$$\frac{n^2}{6n^2 + n} = \frac{1}{6 + n^{-1}} \leq \frac{1}{6 + (1)^{-1}} = \frac{1}{7}$$

$a_n = \theta(b_n)$  se, sse,  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \frac{a_n}{b_n} \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0$ , isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ . Em particular,  $a_n = \theta(1)$  implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (10)$$

**Ex:**  $n = \theta(n^2)$  pois

$$\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (11)$$

**Ex:**  $n^{-1} = \theta(1)$  pois

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (12)$$

#### **Teorema (Extra 1) [Propriedades de $O(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ ]**

Sejam  $\{a_n, n \geq 1\}$ ,  $\{b_n, n \geq 1\}$ ,  $\{c_n, n \geq 1\}$  e  $\{d_n, n \geq 1\}$  seqüências de números reais, valem-se:

(i) Se  $a_n = O(b_n)$ , então  $a_n = o(b_n)$ .

(ii) Se  $a_n = O(b_n)$  e  $c_n = O(d_n)$ , então ...

$$O(b_n)O(d_n)$$

$$<\text{iii.1}> \quad a_n \cdot c_n = O(b_n \cdot d_n)$$

$$<\text{iii.2}> \quad |a_n|^5 = O(|b_n|^5)$$

$$<\text{iii.3}> \quad a_n + c_n = O(\max\{|b_n|, |d_n|\}), \quad \text{em que } r > 0$$

(iii) Se  $a_n = \Theta(b_n)$  e  $c_n = \Theta(d_n)$ , então

$$<\text{iii.1}> \quad a_n \cdot c_n = \Theta(b_n \cdot d_n)$$

$$<\text{iii.2}> \quad |a_n|^5 = \Theta(|b_n|^5)$$

<iii.3>  $a_n + c_n = \Theta(\max\{|b_n|, |d_n|\})$   
(iv) Se  $a_n = O(b_n)$  e  $c_n = \Theta(d_n)$ , então

$$a_n \cdot c_n = \Theta(b_n \cdot d_n)$$

(v) Se  $a_n = O(b_n)$  e  $b_n = \Theta(c_n)$ ,  $O(\Theta(c_n)) = \Theta(c_n)$

$$a_n = \Theta(c_n)$$

**Exemplo:**

$$O(n^{-1/3}) + O(n^{-1/2}) \stackrel{\text{iii.3}}{=} O(\max\{n^{-1/3}, n^{-1/2}\}) = O(n^{-1/3})$$

**Exemplo:**

$$\begin{aligned} O(1) + O(n^{-1/3}) + O(n^{-1/2}) &= O(1) + O(n^{-1/3}) \\ &\stackrel{\text{iii.3}}{=} \Theta(1) + O(\Theta(1)) \stackrel{\text{v}}{=} \Theta(1) + \Theta(1) \\ &\stackrel{\text{iii}}{=} \Theta(1) \end{aligned}$$

### 3.7.3 (2) $O(\cdot)$ e $o(\cdot)$ para função reais de valor real

$\Rightarrow f(x) = O(g(x))$  quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se

$$\forall k > 0, \exists \varepsilon > 0 : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq k, \forall x, |x - x_0| < \varepsilon$$

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

$\Rightarrow f(x) = O(g(x))$  quando  $x \rightarrow \infty (-\infty)$  se, e só se

$$\forall k > 0, \exists M > 0 (M > 0) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq k, \forall x > M (\forall x < M)$$

**Ex:**  $8x^2 = O(x^2)$  quando  $x \rightarrow \infty$  pois

$$\frac{8x^2}{x^2} = 8$$

$\Rightarrow f(x) = o(g(x))$  quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon, \forall x, |x - x_0| < \delta$$

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$\Rightarrow f(x) = o(g(x))$  quando  $x \rightarrow \infty (-\infty)$  se, e só se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 (M > 0) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon, \forall x > M (\forall x < M)$$

**Ex:**  $8x^2 \neq o(x^2)$  pois

$$\frac{8x^2}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 8$$

**Ex:**  $8x^2 = o(x^3)$  pois

$$\frac{8x^2}{x^3} = \frac{8}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

Pode-se mostrar que se  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função derivável até a ordem  $n$  em um ponto  $x_0$ , sua expansão em série de Taylor em torno de  $x_0$  pode ser escrita como: Quando  $x \rightarrow x_0$ ,

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (\text{Extra 1})$$

Em que  $F^{(k)}$  é a derivada de ordem  $k$  de  $F(\cdot)$ .

**Ex:** Mostre que

$$\log(1+x) \cdot e^x = x + O(x^2), \quad \text{quando } x \rightarrow 0 \quad (13)$$

**Solução:** Note que, de (Extra 1), valem-se

$$e^x = e^0 + x + o(x) = 1 + x + O(x^2) \quad (14)$$

e

$$\log(1+x) = \log(1) + \frac{1}{1+x} [x + o(x)]_{x \rightarrow 0} = x + O(x^2) \quad (15)$$

Logo,

$$e^x \log(1+x) = [1 + x + O(x^2)] [x + O(x^2)] \quad (16)$$

$$= [1 + x + O(x^2)] x + [1 + x + O(x^2)] O(x^2) \quad (17)$$

$$= x + x^2 + x \cdot O(x^2) + O(x^2) + x \cdot O(x^2) + O(x^2) \cdot O(x^2) \quad (18)$$

$$= x + x^2 + O(x^3) + O(x^2) + O(x^3) + O(x^4) \quad (19)$$

$$= x + x^2 + O(x^2) + O(x^3) + O(x^4) \quad (20)$$

$$= x + x^2 + O(x^2) = x + O(x^2) + O(x^2) \quad (21)$$

$$= x + O(x^2) \quad (22)$$

### 3.7.4(a) Convergência em Probabilidade

**Definições (3.7.4.1(a))** Considere uma sequência de v.a.'s de valores reais  $\{U_n, n \geq 1\}$ .  $U_n$  converge em probabilidade a um número  $u$  para  $n \rightarrow \infty$  se, e só se:

$$P(|U_n - u| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (23)$$

Este caso é denotado como:

$$U_n \xrightarrow{P} u \quad (24)$$

15/10/25

### Definição 3.7.42(a)

Sejam  $\{U_n, n \geq 1\}$  uma sequência de v.a.'s e  $U$  uma v.a.

$$U_n \xrightarrow{P} U \text{ se e só se } U_n - U \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} 0.$$

### Resultado 19: Versão simples da Lei fraca dos grandes números

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  v.a.'s i.i.d. com  $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$  e  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ . Então:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \mu.$$

### Prova

Para um  $\varepsilon > 0$  qualquer, pela desigualdade de Tchebysheff:

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) &= P\left((\bar{X}_n - \mu)^2 \geq \varepsilon^2\right) \\ &\leq \varepsilon^{-2} \mathbb{E}\left[(\bar{X}_n - \mu)^2\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2} \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Logo,

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \mu.$$

### Questão (extra 1)

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  v.a.'s com  $\mu < \infty$  e  $\sigma^2 < \infty$ . Mostre que:

$$S_n^2 \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \sigma^2.$$

**Solução** Note que

$$S_n^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=2}^n Y_i^2 \quad \text{para } Y_i \sim N(0, \sigma^2), \tag{26}$$

em que  $Y_1, \dots, Y_n$  são v.a.'s de Helmer.

Além disso,

$$\text{Var}(Y_i^2) = \mathbb{E}[Y_i^4] - \mathbb{E}^2[Y_i^2] \tag{27}$$

$$= 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4 < \infty, \quad \text{uma vez que:} \tag{28}$$

Como

$$M_{Y_i^2}(t) = e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} \tag{29}$$

$$\left. \frac{dM_{Y_i^2}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} \right|_{t=0} = \left. t \sigma^2 e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} \right|_{t=0} = 0 = \mathbb{E}(Y_i) \tag{30}$$

$$\left. \frac{d^2 M_{Y_i^2}(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = t^2 \sigma^4 e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} + \sigma^2 e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} \Big|_{t=0} = \sigma^2 = \mathbb{E}(Y_i^2) \quad (31)$$

$$\left. \frac{d^3 M_{Y_i^2}(t)}{dt^3} \right|_{t=0} = t^3 \sigma^6 e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} + 2t \sigma^4 e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} + t \sigma^4 e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} \Big|_{t=0} = 0 = \mathbb{E}(Y_i^3) \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^4 M_{Y_i^2}(t)}{dt^4} \right|_{t=0} &= t^4 \sigma^8 e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} + 3t^2 \sigma^6 e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} \\ &\quad + 2t^2 \sigma^6 e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} + 2\sigma^4 e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} + t^2 \sigma^6 e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} + \sigma^4 e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} \Big|_{t=0} \\ &= 3\sigma^4 = \mathbb{E}(Y_i^4) \end{aligned} \quad (33)$$

Note que  $S_n^2$  tem uma representação de média amostral, então pelo resultado 1P,

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2}{n-1} \xrightarrow{P} \mathbb{E}[Y_i^2] = \sigma^2 \quad (34)$$

**Resultado 2P:** Sejam  $\{T_n, n \geq 1\}$  uma sequência de variáveis reais tais que para algum  $r \geq 0$  e  $a \in \mathbb{R}$  vale-se que

$$\mathbb{E}_{g_n} = \mathbb{E}[|T_n - a|^r] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{então} \quad (35)$$

$$T_n \xrightarrow{P_{n \rightarrow \infty}} a \quad (36)$$

**Prova:** Para qualquer  $\varepsilon > 0$ , por usar a desigualdade de Markov:

$$P\{|T_n - a| \geq \varepsilon\} = P\{|T_n - a|^r \geq \varepsilon^r\} \quad (37)$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[|T_n - a|^r]}{\varepsilon^r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (38)$$

Logo,

$$T_n \xrightarrow{P_{n \rightarrow \infty}} a \quad (39)$$

## Questão (Ex. 2)

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  v.a.'s para  $\theta > 0$ . Mostre que

$$T_n = X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta. \quad (40)$$

## Solução

Note que

$$F_{T_n}(t) = [F_{X_{(1)}}(t)]^n \quad \text{e} \quad f_{T_n}(t) = n[F_{X_{(1)}}(t)]^{n-1} f_{X_{(1)}}(t) \quad (41)$$

e como

$$F_{X_{(1)}}(t) = \frac{t}{\theta} I_{(0,\theta)}(t) + I_{(\theta,\infty)}(t) \quad (42)$$

e

$$f_{X_{(1)}}(t) = \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(t), \quad (43)$$

temos

$$F_{T_n}(t) = \frac{t}{\theta^n} t^{n-1} I_{(0,\theta)}(t) + I_{(\theta,\infty)}(t) \quad (44)$$

e

$$f_{T_n}(t) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} I_{(0,\theta)}(t). \quad (45)$$

As seguintes expressões tipo momento podem ser derivadas:

$$E[T_n] = \int_0^\theta t \cdot \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} dt \quad (46)$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^\theta = \frac{n}{n+1} \theta. \quad (47)$$

$$E[T_n^2] = \int_0^\theta t^2 \cdot \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} dt \quad (48)$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left[ \frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^\theta = \frac{n}{n+2} \theta^2 \quad (49)$$

$$E[(T_n - \theta)^2] = E[T_n^2] - 2\theta E[T_n] + \theta^2 \quad (50)$$

$$= \frac{n}{n+2} \theta^2 - \frac{2n}{n+1} \theta^2 + \theta^2 \quad (51)$$

$$= \theta^2 \left\{ \frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1 \right\} \quad (52)$$

$$= \theta^2 \left\{ \frac{n^2 + n - 2n^2 - 4n + n^2 + 3n + 2}{(n+2)(n+1)} \right\} \quad (53)$$

$$= \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (54)$$

Logo, pelo resultado 2p:

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta \quad (55)$$

## Resultado 3P (Lei fraca dos grandes números de Khinchine)

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  v.a.'s reais i.i.d. com

$$E[X_i] = \mu < \infty, \quad \text{Então} \quad \overline{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu \quad (56)$$



## Prova

Sejam  $M_{\bar{X}_n}(t)$  e  $M_{X_i}(t)$  f.m.g. de  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  e  $X_i$ , respectivamente. Logo, para  $t \in \mathbb{R}$ , vale-se:

$$M_{\bar{X}_n}(t) = M_{\frac{S_n}{n}}(t) \stackrel{\text{p.v.}}{=} \prod_{i=1}^n M_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) \quad (57)$$

$$= \left[ M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n \quad (3P.1)$$

Expandindo em série de Taylor  $M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)$  em torno de zero (dado que  $M_{X_1}(0) = 1$  e  $M'_{X_1}(0) = \mu$ ) até a 1ª ordem, tem-se:

$$M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) = M_{X_1}(0) + M'_{X_1}(0)\frac{t}{n} + \theta\left(\frac{t}{n}\right) \quad (58)$$

$$= 1 + \mu\frac{t}{n} + \theta\left(\frac{t}{n}\right) \quad (59)$$

Daí, usando resultado limite (R.3):

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^k \quad (60)$$

$$M_{\bar{X}_n}(t) = \left[1 + \frac{\mu t}{n} + \theta\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{t\mu} = M_\mu(t) \quad (61)$$

Como a variável limite é degenerada em

$$\mu, \quad \bar{X}_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \mu \quad (62)$$

**Resultado 4P** Sejam  $\{U_n, n \geq 1\}$  e  $\{V_n, n \geq 1\}$  duas sequências de v.a.'s tais que

$$U_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} u \quad \text{e} \quad V_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} v \quad (63)$$

então:

$$(i) \quad U_n + V_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} u + v$$

$$(ii) \quad U_n \cdot V_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} u \cdot v$$

$$(iii) \quad \frac{U_n}{V_n} \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \frac{u}{v} \text{ se } P(V_n = 0) = 0, \forall n, \text{ e } v \neq 0$$

**(Extra 3)** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  v.a.'s i.i.d. tais que  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  para  $\mu, \sigma^2 < \infty$ . Mostre que:

$$\frac{\bar{X}_n}{S_n^2} \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu}{\sigma^2} \quad (64)$$

**Solução:** Pelo resultado 1P,

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \mu \quad \text{e} \quad S_n^2 \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \sigma^2 \quad (65)$$

Pelo resultado 4P:

$$\frac{\bar{X}_n}{S_n^2} \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu}{\sigma^2} \quad (66)$$

**Resultado 5P**

Sejam  $\{U_n, n \geq 1\}$  uma sequência de v.a.'s tal que

$$U_n \xrightarrow{P} u \quad \text{e} \quad g(\cdot) \text{ uma função contínua.} \quad (67)$$

Então

$$g(U_n) \xrightarrow{P} n \rightarrow \infty g(u) \quad (68)$$

**Prova:** Note que se  $g(x)$  é contínua, então: dado algum  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|g(x) - g(u)| \geq \varepsilon \Rightarrow |x - u| \geq \delta \quad (69)$$

Assim, para  $n$  suficientemente grande

$$0 \leq P(|g(U_n) - g(u)| \geq \varepsilon) \leq P(|U_n - u| \geq \delta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (70)$$

Então,

$$g(U_n) \xrightarrow{P} n \rightarrow \infty g(u) \quad \square \quad (71)$$

**Q (extra 4)** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  v.a.'s i.i.d. tais que  $X_i \sim U(0, \theta)$  para  $\theta > 0$ .  
Mostre que

$$T_n^2 = X_{n:n}^2 \xrightarrow{P} n \rightarrow \infty \theta^2 \quad (72)$$

**Solução:**

Como  $X_{n:n} \xrightarrow{P} \theta$  e  $g(x) = x^2$  é contínua, então pelo resultado 5P

$$X_{n:n}^2 \xrightarrow{P} n \rightarrow \infty \theta^2 \quad (73)$$

### 3.15(a) Convergência em Distribuição

**Definição (3.15.1(a))** Sejam  $\{U_n, n \geq 1\}$  uma sequência de v.a.'s tal que  $F_n(u)$  é a f.d.a de  $U_n$  e  $U$  uma v.a com f.d.a  $F(u)$ .

$U_n$  converge em distribuições para  $U$  quando  $n \rightarrow \infty$ , denotado por

$$U_n \xrightarrow{D} U \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty,$$

se e somente se

$$F_n(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(u) \quad \text{em todos os pontos de continuidade de } F(\cdot).$$

**Q (Extra 5)** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  v.a.'s i.i.d tais que  $X_i \sim U(0, \theta)$  para  $\theta > 0$ .  
Encontre a distribuição limite da sequência

$$U_n = \frac{n}{\theta}(\theta - T_n) \quad \text{para} \quad T_n \triangleq X_{n:n}.$$

**Solução** Note que a f.d.a de  $T_n$  é

$$F_{T_n}(t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \mathbb{I}_{(0, \theta)}(t) + \mathbb{I}_{(\theta, \infty)}(t) \quad (74)$$

A f.d.a de  $U_n$  é dada por (para  $u \in (0, \theta)$ ):

$$\begin{aligned}
F_{U_n}(u) &= \mathbb{P}(U_n \leq u) = \mathbb{P}\left(\frac{n}{\theta}(\theta - T_n) \leq u\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-T_n \leq \frac{\theta}{n}u - \theta\right) \\
&= \mathbb{P}\left(T_n \geq \theta\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) \\
&= 1 - F_{T_n}\left(\theta\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right), \quad u > 0.
\end{aligned} \tag{75}$$

Daí,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{U_n}(u) = 1 - e^{-u} = F_U(u), \quad \text{que é a fda de } E \in \text{EXP}(1).$$

Então,

$$U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E.$$

**Resultado 10:** Sejam  $\{U_n, n \geq 1\}$  uma sequência de v.a.'s tal que  $M_{U_n}(t)$  é a fgm de  $U_n$  e  $U$  uma v.a. com fgm  $M_U(t)$ , então

$$\text{Se } M_{U_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M_U(t), \text{ então } U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} U.$$

**Q (extra 6)** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  v.a.'s i.i.d. tais que  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$  com  $p = \frac{1}{2}$  e

$$U_n = 2\sqrt{n} \left( \bar{X}_n - \frac{1}{2} \right).$$

Estude a distribuição limite de  $U_n$ .

**Solução:** Note que

$$U_n = \frac{2 \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}}.$$

$$M_{U_n}(t) = E \left[ e^{\frac{2t}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i - t\sqrt{n}} \right] = e^{-t\sqrt{n}} E \left[ e^{\frac{2t}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i} \right]$$

$$= e^{-t\sqrt{n}} \left( E \left[ e^{\frac{2t}{\sqrt{n}} X_1} \right] \right)^n$$

$$= e^{-t\sqrt{n}} \left( (1-p) + p \cdot e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}} \right)^n$$

$$\theta = \frac{1}{2} e^{-t\frac{\sqrt{n}}{n}} \left[ 1 + e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}} \right] \tag{76}$$

$$= \frac{1}{2^n} \left[ e^{-t\sqrt{n}} + e^{t\sqrt{n}} \right] \tag{77}$$

$$M_{U_n}(t) = \frac{1}{2} \left( e^{-t\frac{\sqrt{n}}{n}} + e^{t\frac{\sqrt{n}}{n}} \right)^n \tag{78}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + \theta \left( \frac{t^2}{n} \right) \right) \left( 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + \theta \left( \frac{t^2}{n} \right) \right) \right]^n \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 2 + \frac{t^2}{n} + \theta \left( \frac{t^2}{n} \right) \right]^n \quad (80)$$

$$R_n = \theta \left( \max \left[ \frac{t^2}{n}, \frac{t^2}{n^2} \right] \right) \quad (81)$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} + \frac{t^2}{n} + R_n \right\} \quad (82)$$

Em que  $R_n = O(n^{-2})$ . Assim, de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{t^2}{2n} \right)^n = e^{t^2/2} \quad (83)$$

$$M_{U_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{t^2/2} = M_U(t) \quad (84)$$

que é a fgm de  $Z \sim N(0, 1)$ , logo

$$U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Z \quad (85)$$

## 20-10-25

**Questão 4** Sejam  $X_n \sim \chi_n^2$  e  $U_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}(X_n - n)$ . Para  $n \rightarrow \infty$  encontre a distribuição limite de  $U_n$ .

**Lembre:**  $\frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{Var(X_n)}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$ .

## Solução

$$M_{U_n}(t) = E[e^{tU_n}] = E\left[e^{\frac{t}{\sqrt{2n}}(X_n - n)}\right] \quad (86)$$

$$= e^{-\frac{tn}{\sqrt{2n}}} \cdot M_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right) \quad (87)$$

A fmg de  $G \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  é  $M_G(t) = (1 - \frac{t}{\beta})^{-\alpha}$ .

Como  $X_n \sim \chi_n^2$  é equivalente a  $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , então:

$$M_{U_n}(t) = e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}t} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}t\right)^{-n/2} \quad (88)$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}t\right)^{-n/2} \cdot e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}t} \quad (89)$$

Tomando o  $\log(\cdot)$  em ambos os lados da última identidade:

$$\log M_{U_n}(t) = -\sqrt{\frac{n}{2}}t - \frac{n}{2} \log \left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}t\right) \quad (90)$$

Note que a seguinte expressão em série de Taylor em torno de zero se verifica:

$$\log(1-x) = 0 + \left[ -\frac{1}{1-x} \right]_{x=0} x + \frac{\left[ -\frac{1}{(1-x)^2} \right]_{x=0}}{2} x^2 + O(x^3) \quad (91)$$

$$\log M_{U_n}(t) = -\sqrt{\frac{n}{2}}t - \frac{n}{2} \left( -\sqrt{\frac{2}{n}}t - \frac{t^2}{n} + O\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right) \right) \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \log M_{U_n}(t) &= \sqrt{\frac{n}{2}} \left[ t + \frac{t^2}{2n} - \sqrt{1 + \frac{2t^2}{n}} \right] + O\left( \sqrt{\frac{2t^2}{n}} \cdot O\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \right) \\ &= \frac{t^2}{2} + O\left( \frac{t^2}{n} + \left( \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{t^2}{n^{3/2}} \right) \right) \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{n} + O\left( \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{t^2}{n^{3/2}} \right) = O\left( \sqrt{\frac{n}{2}} \right) \\ &= \frac{t^2}{2} + O\left( \frac{t^2}{n} \right) \\ t \rightarrow 0 \quad &\frac{t^2}{2} + O\left( \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Então:

$$M_{U_n}(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2} + O(n^{-1})\right)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{U_n}(t) = e^{t^2/2} = M_Z(t) \quad \text{tal que} \quad Z \sim N(0, 1)$$

Logo:

$$U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z$$

**Resultado 20:** Seja  $\{U_n, n \geq 1\}$  uma sequência de VAs. Se  $U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} U$  então  $U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} U$ . A recíproca não é verdadeira, exceto quando  $U$  é uma VA degenerada em um valor.

## 20♡10♡25

**Resultado 39 (Teorema de Slutsky)** Sejam  $\{U_n, n \geq 1\}$  e  $\{V_n, n \geq 1\}$  duas sequências de v.a.'s tais que

$$U_n \xrightarrow{d} U \quad \text{e} \quad V_n \xrightarrow{p} v,$$

então:

1.  $U_n + V_n \xrightarrow{d} U + v$
2.  $U_n V_n \xrightarrow{d} U \cdot v$
3.  $U_n/V_n \xrightarrow{d} U/v$ , assumindo que  $P(V_n = 0) = 0, \forall n$  e  $v \neq 0$ .

**Q (Extra 4)** Sejam  $\{X_n, n \geq 1\} \stackrel{i.i.d.}{\sim} U(0, \theta)$ ,  $T_n = X_{n:n}$ ,

$$U_n = n \cdot (\theta - T_n)/\theta \quad \text{e} \quad Q_n = n \cdot (\theta - T_n)/T_n.$$

Encontre a distribuição limite de  $Q_n$ .

**Solução:** Como já discutido,

$$T_n \xrightarrow{p}_{n \rightarrow \infty} \theta \quad \text{e} \quad U_n \xrightarrow{d} E$$

tal que  $E \stackrel{d}{\sim} \text{Exp}(1)$ . Pelo resultado 4P,

$$\frac{\theta}{T_n} \xrightarrow{p}_{n \rightarrow \infty} 1.$$

Logo, do resultado 39:

$$Q_n = \frac{n \cdot (\theta - T_n)}{\theta} \cdot \frac{\theta}{T_n} \xrightarrow{d}_{n \rightarrow \infty} E.$$

### 3.7.6 (a) Teorema Central do Limite (TCL)

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  VAs iid tais que  $\mu = \mathbb{E}\{X_i\} < \infty$  e  $\sigma^2 = \text{Var}\{X_i\} < \infty$ .

Considere estudar a distribuição limite de  $\bar{X}_n$  e  $S_n^2$ . Na literatura,

$$Z_n = \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \tag{93}$$

Versão padronizada da média amostral para  $\sigma$  conhecido.

$$T_n = \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \right) \tag{94}$$

Versão padronizada da média amostral para  $\sigma$  desconhecido.

No que segue, apresentam-se algumas versões do TCL.

#### Teorema 3.7.6.1(a) [TCL]

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma VA tal que  $\mu = \mathbb{E}\{X_i\} < \infty$  e  $\sigma^2 = \text{Var}\{X_i\} < \infty$ .

Então

$$\sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty \tag{95}$$

### Q (extra 9)

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma a.a de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  tal que  $\mu, \sigma^2 < \infty$ . Encontre a distribuição assintótica de

$$H_n = \sqrt{n} (S_n^2 - \sigma^2) \tag{96}$$

## Solução

Usando a transformação de Helmet:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n Y_i^2, \quad \text{para } Y_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (97)$$

Que caracteriza  $S_n^2$  como uma média amostral de  $Y_i^2$ . Pelo Teo (3.7, 6.1(a)):

$$U_n = (n-1)^{-1/2} [S_n^2 - E(Y_i^2)] \xrightarrow{d} N(0, \text{Var}(Y_i^2)) \quad (98)$$

Como  $E(Y_i^2) = \sigma^2$  e  $\text{Var}(Y_i^2) = 2\sigma^4$ :

$$U_n = (n-1)^{-1/2} [S_n^2 - \sigma^2] \xrightarrow{d} N(0, 2\sigma^4) \quad (99)$$

Defina

$$V_n = \frac{n}{n-1} \quad (100)$$

$$P(|V_n - 1| \geq \varepsilon) = P(|V_n - 1|^2 \geq \varepsilon^2) \quad (\text{Desigualdade de Tschebisheff}) \quad (101)$$

$$\Rightarrow \leq \frac{E[|V_n - 1|^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\left(\frac{n}{n-1} - 1\right)^2}{\varepsilon^2} \quad (102)$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2 \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (103)$$

Logo  $V_n \rightarrow 1$ . Então  $\sqrt{V_n} \xrightarrow{P} 1$ , pelo resultado 5P.

Finalmente,

$$H_n = \sqrt{V_n} \cdot U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, 2\sigma^4) \quad (104)$$

### **Teorema (3.7.6.2(a)) [Teorema de Man Wald]**

Seja  $\{T_n, n \geq 1\}$  uma sequência de v.a.'s reais tais que

$$\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2(\theta)) \quad (105)$$

Seja  $g(\cdot)$  uma função contínua de valor real tal que

$$g'(\theta) = \frac{2g(\theta)}{2\theta} \quad (106)$$

é finita e não nula.

Então tem-se

$$\sqrt{n}[g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2(\theta) g'(\theta)^2) \quad (107)$$

### **Prova:**

Considere

$$\sqrt{n}[g(T_n) - g(\theta)] = U_n \cdot V_n, \quad (108)$$

em que

$$U_n = \sqrt{n}(T_n - \theta) \quad \text{e} \quad V_n = \frac{g(T_n) - g(\theta)}{T_n - \theta}. \quad (109)$$

Note que

$$T_n - \theta = \frac{U_n}{\sqrt{n}}. \quad (110)$$

Como

$$U_n \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{do Teo. Slutsky,} \quad (111)$$

temos

$$T_n - \theta \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} 0. \quad (112)$$

Daí,

$$V_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} g'(\theta), \quad \text{pela definição} \quad (113)$$

$$g'(x) = \lim_{g \rightarrow x} \frac{g(x) - g(z)}{g - x}. \quad (114)$$

Assim, pelo Teo. Slutsky,

$$\sqrt{n} [g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow{d}_{n \rightarrow \infty} N \left( 0, [g'(\theta)]^2 \sigma^2 \right). \quad (115)$$

### Q (extra 16)

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  v.a.'s i.i.d. tais que  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ . Encontre a distribuição assintótica de

$$\sqrt{n} \left( \bar{X}_n^3 - \lambda^3 \right). \quad (116)$$

### Solução

Pode-se mostrar que

$$E\{X_i^3\} = \lambda < \infty \quad \text{e} \quad \text{Var}\{X_i^3\} = \lambda < \infty. \quad (117)$$

Pelo Teo. (3.7.6.1(a)).

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \lambda) \sqrt{\lambda} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, 1) \quad (118)$$

Tomando  $g(\lambda) = \lambda^3$  e usando Teo (3.7.6.2(a)),

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n^3 - \lambda^3) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N \left( 0, \left[ 3 \cdot \lambda^2 \cdot \sqrt{\lambda} \right]^2 \right) \quad (119)$$