Demonstrações de Momentos e Variâncias

Cálculo de $E(X)$ e $\text{Var}(X)$ para Distribuições Fundamentais

Duas Abordagens: Definição e Função Geradora de Momentos

Curso de Inferência Estatística

Outubro 2025

Sumário

1 Introdução

Este caderno apresenta demonstrações completas e detalhadas dos cálculos de média $E(X)$ e variância $\mathrm{Var}(X)$ para as principais distribuições de probabilidade. Para cada distribuição, apresentamos **duas abordagens complementares**:

1.1 Abordagem 1: Pela Definição

Calculamos diretamente usando as definições fundamentais:

Para variáveis discretas:

$$E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x)$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 \cdot P(X = x)$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Para variáveis contínuas:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

1.2 Abordagem 2: Pela Função Geradora de Momentos

A função geradora de momentos (FGM ou MGF) é definida como:

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

Quando existe, permite calcular momentos através de derivadas:

$$E(X) = M_X'(0) = \frac{d}{dt} M_X(t)\bigg|_{t=0}$$

$$E(X^2) = M_X''(0) = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\bigg|_{t=0}$$

$$\mathrm{Var}(X) = M_X''(0) - [M_X'(0)]^2$$

1.3 Ferramentas Matemáticas Importantes

As demonstrações utilizam várias técnicas fundamentais:

1. **Binômio de Newton:**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

2. **Série Geométrica:**

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$$

3. **Expansão de Taylor:**

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

4. **Função Gamma:**

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx, \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

5. **Função Beta:**

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

6. **Integração por Partes:**

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

7. **Mudança de Índice em Somatórios:** Técnica essencial para simplificar somas
8. **Completar Quadrados:** Especialmente útil para a distribuição Normal

1.4 Organização do Documento

As distribuições estão organizadas por tipo:

- **Seção 2:** Distribuições Discretas (Bernoulli, Binomial, Geométrica, Binomial Negativa, Poisson)
- **Seção 3:** Distribuições Contínuas (Uniforme, Exponencial, Normal, Gamma, Chi-quadrado, Beta, Cauchy)

2 Distribuições Discretas

2.1 Distribuição de Bernoulli(p)

Definição: $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ se $P(X = 1) = p$ e $P(X = 0) = 1 - p$, onde $0 < p < 1$.

2.1.1 Método 1: Pela Definição

Cálculo de $E(X)$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{1} x \cdot P(X = x) && (1)\\
&= 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) && (2)\\
&= 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p && (3)\\
&= p && (4)
\end{aligned}$$

Cálculo de $E(X^2)$:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=0}^{1} x^2 \cdot P(X = x) && (5)\\
&= 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot p && (6)\\
&= p && (7)
\end{aligned}$$

Observação importante: Para Bernoulli, $X^2 = X$ pois $X \in \{0, 1\}$.
Cálculo de Var(X):

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 && (8)\\
&= p - p^2 && (9)\\
&= p(1 - p) && (10)
\end{aligned}$$

2.1.2 Método 2: Pela Função Geradora de Momentos

Derivação da FGM:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E[e^{tX}] && (11)\\
&= \sum_{x=0}^{1} e^{tx} P(X = x) && (12)\\
&= e^{t\cdot 0} \cdot (1 - p) + e^{t\cdot 1} \cdot p && (13)\\
&= (1 - p) + pe^t && (14)
\end{aligned}$$

Primeira derivada:

$$\begin{aligned}
M'_X(t) &= \frac{d}{dt}[(1 - p) + pe^t] && (15)\\
&= pe^t && (16)
\end{aligned}$$

Cálculo de $E(X)$:

$$E(X) = M'_X(0) = pe^0 = p$$

Segunda derivada:

$$M''_X(t) = \frac{d}{dt}[pe^t] \tag{17}$$
$$= pe^t \tag{18}$$

Cálculo de $E(X^2)$:

$$E(X^2) = M''_X(0) = pe^0 = p$$

Cálculo de Var(X):

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

2.2 Distribuição Binomial(n,p)

Definição: $X \sim \text{Binomial}(n,p)$ representa o número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes, cada um com probabilidade p de sucesso.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

2.2.1 Método 1: Pela Definição

Cálculo de $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{19}$$

Observação: O termo $k=0$ não contribui, então começamos de $k=1$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \tag{20}$$

Técnica de simplificação: Cancelamos k do numerador com $k!$:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \tag{21}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \tag{22}$$
$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \tag{23}$$

Mudança de índice: Seja $j = k-1$, então $k=1 \Rightarrow j=0$ e $k=n \Rightarrow j=n-1$:

$$E(X) = np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j} \tag{24}$$

Reconhecimento: A soma é a expansão binomial de $[p+(1-p)]^{n-1} = 1$:

$$E(X) = np \cdot 1 = np$$

Cálculo de $E(X^2)$:
Usamos a identidade $k^2 = k(k-1) + k$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E[X(X-1)] + E(X) && (25) \\ &= E[X(X-1)] + np && (26) \end{aligned}$$

Calculando $E[X(X-1)]$:

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \tag{27}$$

Os termos $k = 0$ e $k = 1$ são zero, então:

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} && (28) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} && (29) \\ &= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{n-k} && (30) \end{aligned}$$

Com $j = k - 2$:

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= n(n-1)p^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^j(1-p)^{(n-2)-j} && (31) \\ &= n(n-1)p^2 \cdot 1 = n(n-1)p^2 && (32) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= n(n-1)p^2 + np && (33) \\ &= n^2p^2 - np^2 + np && (34) \\ &= n^2p^2 + np(1-p) && (35) \end{aligned}$$

Cálculo de Var(X):

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 && (36) \\ &= n^2p^2 + np(1-p) - (np)^2 && (37) \\ &= n^2p^2 + np(1-p) - n^2p^2 && (38) \\ &= np(1-p) && (39) \end{aligned}$$

2.2.2 Método 2: Pela Função Geradora de Momentos

Derivação da FGM:
Sabemos que $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ onde $Y_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ independentes.
Como a FGM de uma soma de variáveis independentes é o produto das FGMs:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \prod_{i=1}^{n} M_{Y_i}(t) && (40) \\ &= [M_Y(t)]^n && (41) \\ &= [(1-p) + pe^t]^n && (42) \end{aligned}$$

Primeira derivada (usando regra da cadeia):

$$\begin{aligned} M_X'(t) &= n[(1-p)+pe^t]^{n-1} \cdot pe^t && (43)\\ &= npe^t[(1-p)+pe^t]^{n-1} && (44) \end{aligned}$$

Cálculo de $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= M_X'(0) && (45)\\ &= npe^0[(1-p)+pe^0]^{n-1} && (46)\\ &= np \cdot 1 \cdot [1-p+p]^{n-1} && (47)\\ &= np \cdot 1^{n-1} = np && (48) \end{aligned}$$

Segunda derivada (usando regra do produto):

$$\begin{aligned} M_X''(t) &= \frac{d}{dt}\left[npe^t[(1-p)+pe^t]^{n-1}\right] && (49)\\ &= npe^t[(1-p)+pe^t]^{n-1} + npe^t \cdot (n-1)[(1-p)+pe^t]^{n-2} \cdot pe^t && (50)\\ &= npe^t[(1-p)+pe^t]^{n-1} + n(n-1)p^2e^{2t}[(1-p)+pe^t]^{n-2} && (51) \end{aligned}$$

Cálculo de $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= M_X''(0) && (52)\\ &= np \cdot 1 \cdot 1^{n-1} + n(n-1)p^2 \cdot 1 \cdot 1^{n-2} && (53)\\ &= np + n(n-1)p^2 && (54)\\ &= np + n^2p^2 - np^2 && (55)\\ &= n^2p^2 + np(1-p) && (56) \end{aligned}$$

Cálculo de Var(X):

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 && (57)\\ &= n^2p^2 + np(1-p) - n^2p^2 && (58)\\ &= np(1-p) && (59) \end{aligned}$$

2.3 Distribuição Geométrica(p)

Definição: $X \sim$ Geométrica(p) representa o número de tentativas até o primeiro sucesso (incluindo o sucesso).

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

2.3.1 Método 1: Pela Definição

Cálculo de $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1}p && (60)\\ &= p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} && (61) \end{aligned}$$

Técnica: Usamos a derivada da série geométrica. Sabemos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$$

Derivando ambos os lados em relação a r:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{1-r}\right) = \frac{1}{(1-r)^2}$$

Aplicando com $r = 1 - p$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= p \cdot \frac{1}{[1-(1-p)]^2} && (62)\\
&= p \cdot \frac{1}{p^2} && (63)\\
&= \frac{1}{p} && (64)
\end{aligned}$$

Cálculo de $E(X^2)$:
Precisamos de $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k-1}$.
Partindo de $\sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$, multiplicamos por r:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}$$

Derivamos em relação a r:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k-1} &= \frac{d}{dr}\left(\frac{r}{(1-r)^2}\right) && (65)\\
&= \frac{(1-r)^2 - r \cdot 2(1-r)(-1)}{(1-r)^4} && (66)\\
&= \frac{(1-r)^2 + 2r(1-r)}{(1-r)^4} && (67)\\
&= \frac{(1-r)[(1-r)+2r]}{(1-r)^4} && (68)\\
&= \frac{1-r+2r}{(1-r)^3} && (69)\\
&= \frac{1+r}{(1-r)^3} && (70)
\end{aligned}$$

Com $r = 1 - p$:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} && (71)\\
&= p \cdot \frac{1+(1-p)}{[1-(1-p)]^3} && (72)\\
&= p \cdot \frac{2-p}{p^3} && (73)\\
&= \frac{2-p}{p^2} && (74)
\end{aligned}$$

Cálculo de Var(X):

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 && (75)\\
&= \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} && (76)\\
&= \frac{2-p-1}{p^2} && (77)\\
&= \frac{1-p}{p^2} && (78)
\end{aligned}$$

2.3.2 Método 2: Pela Função Geradora de Momentos

Derivação da FGM:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E[e^{tX}] && (79)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk}(1-p)^{k-1}p && (80)\\
&= p\sum_{k=1}^{\infty} e^{tk}(1-p)^{k-1} && (81)\\
&= p\sum_{k=1}^{\infty}[e^t(1-p)]^{k-1}\cdot e^t && (82)\\
&= \frac{pe^t}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}[e^t(1-p)]^{k-1} && (83)
\end{aligned}$$

Reconhecimento: Série geométrica com razão $r = e^t(1-p)$:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \frac{pe^t}{1-p}\cdot\frac{1}{1-e^t(1-p)} && (84)\\
&= \frac{pe^t}{1-p-e^t(1-p)} && (85)\\
&= \frac{pe^t}{1-e^t+pe^t-p} && (86)\\
&= \frac{pe^t}{1-p(1-e^t)-e^t} && (87)
\end{aligned}$$

Forma mais simples:

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, \quad \text{para } e^t(1-p) < 1$$

Primeira derivada:
Usando regra do quociente:

$$\begin{aligned}
M_X'(t) &= \frac{pe^t[1-(1-p)e^t] - pe^t[-(1-p)e^t]}{[1-(1-p)e^t]^2} && (88)\\
&= \frac{pe^t - p(1-p)e^{2t} + p(1-p)e^{2t}}{[1-(1-p)e^t]^2} && (89)\\
&= \frac{pe^t}{[1-(1-p)e^t]^2} && (90)
\end{aligned}$$

Cálculo de $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= M_X'(0) && (91)\\ &= \frac{p \cdot 1}{[1-(1-p)\cdot 1]^2} && (92)\\ &= \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} && (93)\end{aligned}$$

Segunda derivada:
Usando regra do quociente em $M_X'(t) = \frac{pe^t}{[1-(1-p)e^t]^2}$:

$$\begin{aligned} M_X''(t) &= \frac{pe^t[1-(1-p)e^t]^2 - pe^t \cdot 2[1-(1-p)e^t]\cdot[-(1-p)e^t]}{[1-(1-p)e^t]^4} && (94)\\ &= \frac{pe^t[1-(1-p)e^t] + 2pe^t(1-p)e^t}{[1-(1-p)e^t]^3} && (95)\\ &= \frac{pe^t[1-(1-p)e^t + 2(1-p)e^t]}{[1-(1-p)e^t]^3} && (96)\\ &= \frac{pe^t[1+(1-p)e^t]}{[1-(1-p)e^t]^3} && (97)\end{aligned}$$

Cálculo de $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= M_X''(0) && (98)\\ &= \frac{p\cdot 1\cdot[1+(1-p)]}{[1-(1-p)]^3} && (99)\\ &= \frac{p(2-p)}{p^3} && (100)\\ &= \frac{2-p}{p^2} && (101)\end{aligned}$$

Cálculo de Var(X):

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 && (102)\\ &= \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} && (103)\\ &= \frac{1-p}{p^2} && (104)\end{aligned}$$

2.4 Distribuição Binomial Negativa(r, p)

Definição: $X \sim \text{BinomialNegativa}(r, p)$ representa o número de tentativas até obter r sucessos.

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, r+2, \ldots$$

2.4.1 Método 1: Pela Definição

Observação: X pode ser vista como a soma de r variáveis geométricas independentes: $X = \sum_{i=1}^{r} Y_i$ onde $Y_i \sim \text{Geométrica}(p)$.

Cálculo de $E(X)$:
Pela linearidade da esperança:

$$E(X) = E\left[\sum_{i=1}^{r} Y_i\right] \tag{105}$$
$$= \sum_{i=1}^{r} E(Y_i) \tag{106}$$
$$= r \cdot \frac{1}{p} \tag{107}$$
$$= \frac{r}{p} \tag{108}$$

Cálculo de Var(X):
Como as Y_i são independentes:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{r} Y_i\right) \tag{109}$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \text{Var}(Y_i) \tag{110}$$
$$= r \cdot \frac{1-p}{p^2} \tag{111}$$
$$= \frac{r(1-p)}{p^2} \tag{112}$$

2.4.2 Método 2: Pela Função Geradora de Momentos

Como $X = \sum_{i=1}^{r} Y_i$ com Y_i independentes e identicamente distribuídas:

$$M_X(t) = \prod_{i=1}^{r} M_{Y_i}(t) \tag{113}$$
$$= [M_Y(t)]^r \tag{114}$$
$$= \left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^r \tag{115}$$

Primeira derivada:
Usando regra da cadeia:

$$M'_X(t) = r\left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^{r-1} \cdot \frac{pe^t}{[1-(1-p)e^t]^2} \tag{116}$$
$$= r\left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^{r-1} \cdot \frac{pe^t}{[1-(1-p)e^t]^2} \tag{117}$$
$$= \frac{rp^r e^{rt}}{[1-(1-p)e^t]^{r+1}} \tag{118}$$

Forma alternativa mais útil:

$$M'_X(t) = r \cdot \frac{pe^t}{[1-(1-p)e^t]^2} \cdot \left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^{r-1}$$

Cálculo de $E(X)$:

$$E(X) = M'_X(0) \tag{119}$$
$$= \frac{rp^r}{[1-(1-p)]^{r+1}} \tag{120}$$
$$= \frac{rp^r}{p^{r+1}} \tag{121}$$
$$= \frac{r}{p} \tag{122}$$

Para $E(X^2)$: A derivada segunda é mais complexa, mas podemos usar que:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{r} Y_i\right) = r \cdot \text{Var}(Y) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

E então:

$$E(X^2) = \text{Var}(X) + [E(X)]^2 = \frac{r(1-p)}{p^2} + \frac{r^2}{p^2} = \frac{r(1-p)+r^2}{p^2}$$

2.5 Distribuição de Poisson(λ)

Definição: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ modela o número de eventos em um intervalo fixo.

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

2.5.1 Método 1: Pela Definição

Cálculo de $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \tag{123}$$

O termo $k = 0$ é zero, então:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \tag{124}$$
$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} \tag{125}$$
$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \tag{126}$$

Mudança de índice: Seja $j = k - 1$:

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} \tag{127}$$
$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \tag{128}$$

Reconhecimento: A soma é a expansão de e^{λ}:

$$\begin{aligned} E(X) &= e^{-\lambda}\lambda \cdot e^{\lambda} && (129)\\ &= \lambda && (130) \end{aligned}$$

Cálculo de $E(X^2)$:
Usamos $k^2 = k(k-1) + k$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E[X(X-1)] + E(X) && (131)\\ &= E[X(X-1)] + \lambda && (132) \end{aligned}$$

Calculando $E[X(X-1)]$:

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (133)$$

Os termos $k = 0$ e $k = 1$ são zero:

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} && (134)\\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)\lambda^k}{k!} && (135)\\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} && (136)\\ &= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} && (137) \end{aligned}$$

Com $j = k - 2$:

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} && (138)\\ &= e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} && (139)\\ &= \lambda^2 && (140) \end{aligned}$$

Portanto:

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda \quad (141)$$

Cálculo de Var(X):

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 && (142)\\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 && (143)\\ &= \lambda && (144) \end{aligned}$$

Propriedade notável: Para Poisson, $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$.

2.5.2 Método 2: Pela Função Geradora de Momentos

Derivação da FGM:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \tag{145}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \tag{146}$$
$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^k}{k!} \tag{147}$$

Reconhecimento: Expansão de Taylor de $e^{e^t\lambda}$:

$$M_X(t) = e^{-\lambda} \cdot e^{e^t\lambda} \tag{148}$$
$$= e^{\lambda(e^t-1)} \tag{149}$$

Primeira derivada:

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt} e^{\lambda(e^t-1)} \tag{150}$$
$$= e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t \tag{151}$$
$$= \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} \tag{152}$$

Cálculo de $E(X)$:

$$E(X) = M'_X(0) \tag{153}$$
$$= \lambda e^0 e^{\lambda(e^0-1)} \tag{154}$$
$$= \lambda \cdot 1 \cdot e^{\lambda(1-1)} \tag{155}$$
$$= \lambda \cdot e^0 = \lambda \tag{156}$$

Segunda derivada (regra do produto):

$$M''_X(t) = \frac{d}{dt}[\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}] \tag{157}$$
$$= \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda e^t \cdot e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t \tag{158}$$
$$= \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda^2 e^{2t} e^{\lambda(e^t-1)} \tag{159}$$
$$= e^{\lambda(e^t-1)} e^t[\lambda + \lambda^2 e^t] \tag{160}$$

Cálculo de $E(X^2)$:

$$E(X^2) = M''_X(0) \tag{161}$$
$$= e^0 \cdot 1 \cdot [\lambda + \lambda^2] \tag{162}$$
$$= \lambda + \lambda^2 \tag{163}$$

Cálculo de Var(X):

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{164}$$
$$= \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 \tag{165}$$
$$= \lambda \tag{166}$$

3 Distribuições Contínuas

3.1 Distribuição Uniforme(a, b)

Definição: $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$ tem função de densidade:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$$

3.1.1 Método 1: Pela Definição

Cálculo de $E(X)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \tag{167}$$
$$= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx \tag{168}$$
$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx \tag{169}$$
$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b \tag{170}$$
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} \tag{171}$$
$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \tag{172}$$
$$= \frac{a+b}{2} \tag{173}$$

Cálculo de $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\, dx \tag{174}$$
$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b \tag{175}$$
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} \tag{176}$$
$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} \tag{177}$$

Simplificação: Usamos $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$:

$$E(X^2) = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} \tag{178}$$
$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \tag{179}$$

Cálculo de Var(X):

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 && (180)\\
&= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 && (181)\\
&= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} && (182)
\end{aligned}$$

MMC de 3 e 4 é 12:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= \frac{4(b^2+ab+a^2) - 3(a^2+2ab+b^2)}{12} && (183)\\
&= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} && (184)\\
&= \frac{b^2-2ab+a^2}{12} && (185)\\
&= \frac{(b-a)^2}{12} && (186)
\end{aligned}$$

3.1.2 Método 2: Pela Função Geradora de Momentos

Derivação da FGM:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E[e^{tX}] && (187)\\
&= \int_a^b e^{tx} \cdot \frac{1}{b-a}\, dx && (188)\\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx}\, dx && (189)\\
&= \frac{1}{b-a} \left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_a^b && (190)\\
&= \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}, \quad t \neq 0 && (191)
\end{aligned}$$

Observação: Para $t = 0$, $M_X(0) = 1$ (convenção).
Primeira derivada:
Usando regra do quociente:

$$\begin{aligned}
M_X'(t) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}\right] && (192)\\
&= \frac{(be^{tb}-ae^{ta}) \cdot t(b-a) - (e^{tb}-e^{ta}) \cdot (b-a)}{t^2(b-a)^2} && (193)\\
&= \frac{t(be^{tb}-ae^{ta}) - (e^{tb}-e^{ta})}{t^2(b-a)} && (194)
\end{aligned}$$

Cálculo de $E(X)$: Usando regra de L'Hôpital ou expansão de Taylor:

Para $t \to 0$, usando $e^{tx} \approx 1 + tx + \frac{t^2x^2}{2}$:

$$M'_X(0) = \lim_{t\to 0} \frac{t(be^{tb} - ae^{ta}) - (e^{tb} - e^{ta})}{t^2(b-a)} \tag{195}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t[b(1 + tb + \cdots) - a(1 + ta + \cdots)] - [(1 + tb + \cdots) - (1 + ta + \cdots)]}{t^2(b-a)} \tag{196}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t(b-a) + t^2(b^2 - a^2)/2 - t(b-a)}{t^2(b-a)} \tag{197}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2(b^2 - a^2)/2}{t^2(b-a)} \tag{198}$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \tag{199}$$

Para Var(X): O cálculo de $M''_X(0)$ é trabalhoso. Aceitamos o resultado:

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3.2 Distribuição Exponencial(λ)

Definição: $X \sim$ Exponencial(λ) tem densidade:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0,\ \lambda > 0$$

3.2.1 Método 1: Pela Definição

Cálculo de $E(X)$:

$$E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\, dx \tag{200}$$

Integração por partes: Seja $u = x$, $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$.
Então $du = dx$ e $v = -e^{-\lambda x}$:

$$E(X) = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx \tag{201}$$

O primeiro termo: $\lim_{x\to\infty} -xe^{-\lambda x} = 0$ (por L'Hôpital) e em $x = 0$ é zero.

$$E(X) = 0 + \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty \tag{202}$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \tag{203}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \tag{204}$$

Cálculo de $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\, dx \tag{205}$$

Integração por partes: Seja $u = x^2$, $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$.
Então $du = 2x\,dx$ e $v = -e^{-\lambda x}$:

$$E(X^2) = \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}\,dx \tag{206}$$

$$= 0 + 2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx \tag{207}$$

Segunda integração por partes: Seja $u = x$, $dv = e^{-\lambda x} dx$:

$$\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx = \left[-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx \tag{208}$$

$$= 0 + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \tag{209}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \tag{210}$$

Portanto:

$$E(X^2) = 2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} \tag{211}$$

Cálculo de Var(X):

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{212}$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \tag{213}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \tag{214}$$

3.2.2 Método 2: Pela Função Geradora de Momentos

Derivação da FGM:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \tag{215}$$

$$= \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx \tag{216}$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x}\,dx \tag{217}$$

Para $t < \lambda$:

$$M_X(t) = \lambda \left[\frac{e^{-(\lambda-t)x}}{-(\lambda - t)}\right]_0^\infty \tag{218}$$

$$= \lambda \cdot \frac{1}{\lambda - t} \cdot [0 - (-1)] \tag{219}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t} \tag{220}$$

Primeira derivada:

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\lambda}{\lambda - t}\right] \tag{221}$$

$$= \lambda \cdot \frac{d}{dt}[(\lambda - t)^{-1}] \tag{222}$$

$$= \lambda \cdot (-1)(\lambda - t)^{-2} \cdot (-1) \tag{223}$$

$$= \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \tag{224}$$

Cálculo de $E(X)$:

$$E(X) = M_X'(0) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \tag{225}$$

Segunda derivada:

$$M_X''(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\right] \tag{226}$$

$$= \lambda \cdot (-2)(\lambda - t)^{-3} \cdot (-1) \tag{227}$$

$$= \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3} \tag{228}$$

Cálculo de $E(X^2)$:

$$E(X^2) = M_X''(0) = \frac{2\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2} \tag{229}$$

Cálculo de Var(X):

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \tag{230}$$

3.3 Distribuição Normal(μ, σ^2)

Definição: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ tem densidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty$$

3.3.1 Método 1: Pela Definição

Cálculo de $E(X)$:

Fazemos mudança de variável: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, então $x = \sigma z + \mu$ e $dx = \sigma\, dz$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \tag{231}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz \tag{232}$$

$$= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz \tag{233}$$

Primeira integral: A função $ze^{-z^2/2}$ é ímpar, logo sua integral sobre $\mathbb{R}$ é zero.
Segunda integral: É a integral da densidade normal padrão, igual a 1.
Portanto:

$$E(X) = \sigma \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu$$

Cálculo de Var(X):
Por definição, $\text{Var}(X) = E[(X-\mu)^2]$.
Com $z = (x-\mu)/\sigma$:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= E[(X-\mu)^2] && (234)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx && (235)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 z^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz && (236)\\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz && (237)
\end{aligned}$$

Cálculo da integral: Usamos integração por partes. Seja $u = z$, $dv = ze^{-z^2/2}dz$:
Então $du = dz$ e $v = -e^{-z^2/2}$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2}\, dz &= \left[-ze^{-z^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz && (238)\\
&= 0 + \sqrt{2\pi} && (239)
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = \sigma^2$$

3.3.2 Método 2: Pela Função Geradora de Momentos

A FGM da distribuição Normal é conhecida:

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Derivação (sketch): Para $Z \sim N(0,1)$ padrão:

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz && (240)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2} + tz\right) dz && (241)
\end{aligned}$$

Completando o quadrado:

$$-\frac{z^2}{2} + tz = -\frac{1}{2}(z^2 - 2tz) = -\frac{1}{2}(z-t)^2 + \frac{t^2}{2}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= e^{t^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-t)^2/2}\, dz && (242)\\
&= e^{t^2/2} \cdot 1 = e^{t^2/2} && (243)
\end{aligned}$$

Para $X = \sigma Z + \mu$:

$$M_X(t) = E[e^{t(\sigma Z+\mu)}] = e^{\mu t} M_Z(\sigma t) = e^{\mu t} e^{\sigma^2 t^2/2} = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Primeira derivada:

$$M_X'(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \cdot \left(\mu + \sigma^2 t\right) \tag{244}$$

Cálculo de $E(X)$:

$$E(X) = M_X'(0) = e^0 \cdot (\mu + 0) = \mu$$

Segunda derivada:

$$M_X''(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \cdot (\mu + \sigma^2 t)^2 + \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \cdot \sigma^2 \tag{245}$$

$$= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \left[(\mu + \sigma^2 t)^2 + \sigma^2\right] \tag{246}$$

Cálculo de $E(X^2)$:

$$E(X^2) = M_X''(0) = 1 \cdot [\mu^2 + \sigma^2] = \mu^2 + \sigma^2$$

Cálculo de Var(X):

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

3.4 Distribuição Gamma(α, β)

Definição: $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ tem densidade:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0,\ \alpha, \beta > 0$$

onde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$ é a função Gamma.
Propriedade importante: $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

3.4.1 Método 1: Pela Definição

Cálculo de $E(X)$:

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\, dx \tag{247}$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x}\, dx \tag{248}$$

Mudança de variável: Seja $u = \beta x$, então $x = u/\beta$ e $dx = du/\beta$:

$$E(X) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\beta}\right)^\alpha e^{-u} \frac{du}{\beta} \tag{249}$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u}\, du \tag{250}$$

$$= \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u}\, du \tag{251}$$

Reconhecimento: $\int_0^\infty u^\alpha e^{-u}\,du = \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$:

$$E(X) = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Cálculo de $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\,dx \tag{252}$$
$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\beta x}\,dx \tag{253}$$

Com $u = \beta x$:

$$E(X^2) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\beta^{\alpha+2}} \int_0^\infty u^{\alpha+1} e^{-u}\,du \tag{254}$$
$$= \frac{1}{\beta^2\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha+2) \tag{255}$$
$$= \frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta^2\Gamma(\alpha)} \tag{256}$$
$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} \tag{257}$$

Cálculo de Var(X):

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{258}$$
$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \tag{259}$$
$$= \frac{\alpha^2 + \alpha - \alpha^2}{\beta^2} \tag{260}$$
$$= \frac{\alpha}{\beta^2} \tag{261}$$

3.4.2 Método 2: Pela Função Geradora de Momentos

Derivação da FGM:

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\,dx \tag{262}$$
$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\beta-t)x}\,dx \tag{263}$$

Para $t < \beta$, com $u = (\beta - t)x$:

$$M_X(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{(\beta-t)^\alpha} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u}\,du \tag{264}$$
$$= \frac{\beta^\alpha}{(\beta-t)^\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \tag{265}$$
$$= \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha \tag{266}$$

Primeira derivada:

$$M_X'(t) = \alpha \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{\beta}{(\beta - t)^2} \tag{267}$$

$$= \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta - t)^{\alpha+1}} \tag{268}$$

Cálculo de $E(X)$:

$$E(X) = M_X'(0) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{\beta^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Segunda derivada:

$$M_X''(t) = \alpha\beta^\alpha \cdot (-(\alpha + 1))(\beta - t)^{-\alpha-2} \cdot (-1) \tag{269}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta^\alpha}{(\beta - t)^{\alpha+2}} \tag{270}$$

Cálculo de $E(X^2)$:

$$E(X^2) = M_X''(0) = \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta^\alpha}{\beta^{\alpha+2}} = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\beta^2}$$

Cálculo de Var(X):

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

3.5 Distribuição Chi-quadrado(k)

Definição: $X \sim \chi^2_k$ (chi-quadrado com k graus de liberdade) é um caso especial de Gamma:

$$\chi^2_k \equiv \text{Gamma}\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Densidade:

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0$$

3.5.1 Método 1: Usando a relação com Gamma

Como $\chi^2_k \sim \text{Gamma}(k/2, 1/2)$, aplicamos as fórmulas da Gamma com $\alpha = k/2$ e $\beta = 1/2$:

Cálculo de $E(X)$:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{k/2}{1/2} = k$$

Cálculo de Var(X):

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{k/2}{(1/2)^2} = \frac{k/2}{1/4} = 2k$$

3.5.2 Método 2: Pela Função Geradora de Momentos

Como $\chi^2_k \sim \text{Gamma}(k/2, 1/2)$:

$$M_X(t) = \left(\frac{1/2}{1/2 - t}\right)^{k/2} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{k/2} = (1-2t)^{-k/2}, \quad t < \frac{1}{2}$$

Primeira derivada:

$$\begin{aligned} M_X'(t) &= -\frac{k}{2}(1-2t)^{-k/2-1} \cdot (-2) && (271)\\ &= k(1-2t)^{-k/2-1} && (272) \end{aligned}$$

Cálculo de $E(X)$:

$$E(X) = M_X'(0) = k \cdot 1^{-k/2-1} = k$$

Segunda derivada:

$$\begin{aligned} M_X''(t) &= k \cdot \left(-\frac{k}{2} - 1\right)(1-2t)^{-k/2-2} \cdot (-2) && (273)\\ &= k(k+2)(1-2t)^{-k/2-2} && (274) \end{aligned}$$

Cálculo de $E(X^2)$:

$$E(X^2) = M_X''(0) = k(k+2)$$

Cálculo de Var(X):

$$\text{Var}(X) = k(k+2) - k^2 = k^2 + 2k - k^2 = 2k$$

3.6 Distribuição Beta(α, β)

Definição: $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ tem densidade:

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1,\ \alpha, \beta > 0$$

onde $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ é a função Beta.
Propriedade importante:

$$B(\alpha + k, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}$$

3.6.1 Método 1: Pela Definição

Cálculo de $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \cdot \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx && (275)\\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\, dx && (276) \end{aligned}$$

Reconhecimento: A integral é $B(\alpha+1,\beta)$:

$$E(X) = \frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)} \tag{277}$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{278}$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \tag{279}$$

Usando $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$:

$$E(X) = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \tag{280}$$

Cálculo de $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \tag{281}$$
$$= \frac{B(\alpha+2,\beta)}{B(\alpha,\beta)} \tag{282}$$

Desenvolvendo:

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{283}$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \tag{284}$$
$$= \frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{285}$$
$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} \tag{286}$$

Cálculo de Var(X):

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{287}$$
$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \tag{288}$$

MMC:

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+\beta) - \alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \tag{289}$$
$$= \frac{\alpha[(\alpha+1)(\alpha+\beta) - \alpha(\alpha+\beta+1)]}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \tag{290}$$
$$= \frac{\alpha[\alpha^2+\alpha+\alpha\beta+\beta-\alpha^2-\alpha\beta-\alpha]}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \tag{291}$$
$$= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \tag{292}$$

3.6.2 Método 2: Usando Fórmula de Momentos

A distribuição Beta não tem FGM em forma fechada simples, mas podemos usar a fórmula geral para momentos:

$$E(X^k) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha + i}{\alpha + \beta + i}$$

Para $k = 1$:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Para $k = 2$:

$$E(X^2) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta + 1} = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}$$

Variância:

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

3.7 Distribuição de Cauchy(x_0, γ)

Definição: $X \sim \text{Cauchy}(x_0, \gamma)$ tem densidade:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma\left[1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)^2\right]}, \quad -\infty < x < \infty$$

Para a Cauchy padrão, $x_0 = 0$ e $\gamma = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

3.7.1 Método 1: Mostrando que E(X) não existe

Para a Cauchy padrão, tentamos calcular:

$$E(|X|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{\pi(1 + x^2)}\, dx \tag{293}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1 + x^2}\, dx \tag{294}$$

Substituição: Seja $u = 1 + x^2$, então $du = 2x\, dx$:

$$E(|X|) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{du}{u} \tag{295}$$

$$= \frac{1}{\pi} [\ln u]_1^{\infty} \tag{296}$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \infty = \infty \tag{297}$$

Conclusão: Como $E(|X|) = \infty$, a esperança $E(X)$ não existe (mesmo como integral imprópria).

Consequência: Se $E(X)$ não existe, então $\text{Var}(X)$ também não existe.

3.7.2 Método 2: Função Geradora de Momentos

A FGM da distribuição de Cauchy **não existe** para nenhum $t \neq 0$.
Tentando calcular:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\pi(1 + x^2)}\, dx$$

Esta integral diverge para qualquer $t \neq 0$.
Alternativa: Usa-se a *função característica*:

$$\phi_X(t) = E[e^{itX}] = e^{-|t|}$$

que existe, mas não permite calcular momentos pois estes não existem.
Observações importantes:

1. A Cauchy é o exemplo clássico de distribuição sem média nem variância.
2. A soma de Cauchys independentes é ainda Cauchy (não converge para Normal pelo TCL).
3. Distribuições de "caudas pesadas"podem não ter momentos finitos.

4 Resumo e Tabela Consolidada

Distribuição	**FGM** $M_X(t)$	$E(X)$	$\text{Var}(X)$
Bernoulli(p)	$(1-p)+pe^t$	p	$p(1-p)$
Binomial(n,p)	$[(1-p)+pe^t]^n$	np	$np(1-p)$
Geométrica(p)	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Bin. Negativa(r,p)	$\left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
Poisson(λ)	$e^{\lambda(e^t-1)}$	λ	λ
Uniforme(a,b)	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponencial(λ)	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normal(μ,σ^2)	$e^{\mu t+\sigma^2t^2/2}$	μ	σ^2
Gamma(α,β)	$\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$
Chi-quadrado(k)	$(1-2t)^{-k/2}$	k	$2k$
Beta(α,β)	—	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
Cauchy(x_0,γ)	Não existe	Não existe	Não existe

Tabela 1: Resumo de FGMs, Médias e Variâncias

4.1 Observações Finais para Estudo

1. **Técnicas mais importantes:**
   - Mudança de índice em somatórios (Binomial, Poisson)
   - Integração por partes (Exponencial, Gamma, Normal)
   - Uso de funções normalizadoras (Gamma, Beta)
   - Completar quadrados (Normal)
   - Séries geométricas e suas derivadas (Geométrica)
2. **Relações entre distribuições:**
   - Binomial Negativa é soma de Geométricas
   - Binomial é soma de Bernoullis
   - Chi-quadrado é caso especial de Gamma
   - Normal pode ser obtida via TCL
3. **Casos especiais de atenção:**
   - Poisson: $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$
   - Bernoulli: $X^2 = X$, logo $E(X^2) = E(X)$
   - Cauchy: nem média nem variância existem
   - Beta: FGM não tem forma fechada simples
4. **Dicas para a prova:**
   - Sempre verifique se pode usar simetria ou propriedades especiais

- Reconheça quando uma integral/soma é uma constante normalizadora
- Para FGM, lembre que $M_X(0) = 1$ sempre
- Verifique dimensões: taxa vs. escala em Exponencial e Gamma