Lista de Exercícios - Unidade 2

Convergência Estocástica e Resultados Limite

50 Questões Completas

Curso de Inferência Estatística

Outubro 2025 - Versão Atualizada

Sumário

1 Introdução

Esta lista contém 50 questões organizadas por teorema, com 5 questões para cada um dos principais resultados da Unidade 2. Cada questão indica explicitamente qual teorema está sendo testado e utiliza diversas distribuições estudadas no curso.

Distribuições utilizadas: Normal, Poisson, Uniforme, Exponencial, Chi-quadrado, Bernoulli, Cauchy, Gamma e Beta.

Teoremas cobertos:

1. Lei Fraca dos Grandes Números
2. Convergência via Momentos
3. Teorema de Slutsky
4. Teorema Central do Limite
5. Método Delta / Teorema de Mann-Wald
6. Convergência em Distribuição
7. TCL para Variância Amostral
8. Teorema da Função Contínua (Convergência em Distribuição)
9. Estimadores Consistentes
10. Propriedades Assintóticas dos EMVs

2 Lei Fraca dos Grandes Números

[Questão 1] Lei Fraca dos Grandes Números

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ onde $\mu = 5$ e $\sigma^2 = 4$.

(a) Mostre que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 5$.

(b) Calcule $P(|\bar{X}_n - 5| \geq 0.5)$ usando a desigualdade de Chebyshev para $n = 64$.

(c) Compare o resultado do item (b) com o valor exato obtido usando que $\bar{X}_n \sim N(5, 4/n)$.

[Questão 2] Lei Fraca dos Grandes Números

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ onde $\lambda = 3$.

(a) Verifique que $E[X_i]$ e $\text{Var}(X_i)$ são finitos.

(b) Mostre que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 3$.

(c) Encontre n tal que $P(|\bar{X}_n - 3| \geq 0.3) \leq 0.05$ usando a desigualdade de Chebyshev.

[Questão 3] Lei Fraca dos Grandes Números

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$ onde $\theta = 10$.

(a) Calcule $E[X_i]$ e $\mathrm{Var}(X_i)$.

(b) Mostre que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 5$.

(c) Use a LFGN para justificar que $\bar{X}_n$ é um estimador consistente para $\theta/2$.

[Questão 4] Lei Fraca dos Grandes Números

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \mathrm{Exp}(\beta)$ onde $\beta = 2$ (taxa).

(a) Calcule $E[X_i]$ e $\mathrm{Var}(X_i)$.

(b) Mostre que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 1/2$.

(c) Se quisermos estimar β usando $T_n = 1/\bar{X}_n$, mostre que T_n é consistente para β usando o teorema da função contínua.

[Questão 5] Lei Fraca dos Grandes Números

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \mathrm{Cauchy}(0, 1)$ (distribuição de Cauchy padrão).

(a) Explique por que a LFGN **não pode** ser aplicada diretamente neste caso.

(b) Mostre que $E[|X_i|] = \infty$.

(c) Discuta o comportamento de $\bar{X}_n$ neste caso. Ele converge?

3 Convergência via Momentos (Resultado 2P)

[Questão 6] Convergência via Momentos

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \chi^2_k$ (qui-quadrado com k graus de liberdade).

(a) Mostre que $E[X_i] = k$ e $\mathrm{Var}(X_i) = 2k$.

(b) Use o Resultado 2P com $r = 2$ para mostrar que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} k$.

(c) Calcule explicitamente $E[(\bar{X}_n - k)^2]$ e mostre que converge para zero.

[Questão 7] Convergência via Momentos

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$ onde $p = 0.6$.

(a) Defina $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$.

(b) Mostre que $E[S_n^2] = p(1-p) = 0.24$.

(c) Use o Resultado 2P para mostrar que $S_n^2 \xrightarrow{P} 0.24$.

[Questão 8] Convergência via Momentos

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(a, b)$.

(a) Seja $T_n = X_{(n)}$ (o máximo da amostra). Calcule $E[T_n]$ e mostre que $E[T_n] \to b$.

(b) Calcule $E[(T_n - b)^2]$ e mostre que converge para zero.

(c) Conclua que $T_n \xrightarrow{P} b$ pelo Resultado 2P.

[Questão 9] Convergência via Momentos

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Seja $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Calcule $E[T_n]$.

(b) Mostre que $E[(T_n - (\mu^2 + \sigma^2))^2] \to 0$.

(c) Conclua que $T_n \xrightarrow{P} \mu^2 + \sigma^2$.

[Questão 10] Convergência via Momentos

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ (taxa λ).

(a) Defina $T_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$. Este é o estimador de máxima verossimilhança para λ.

(b) Mostre que $E[1/T_n] = 1/\lambda$ (dica: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$).

(c) Argumente que $T_n \xrightarrow{P} \lambda$ usando a LFGN e o teorema da função contínua.

4 Teorema de Slutsky

[Questão 11] Teorema de Slutsky

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Mostre que $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0, 1)$ pelo TCL.

(b) Mostre que $S_n \xrightarrow{P} \sigma$.

(c) Use o Teorema de Slutsky para mostrar que $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \xrightarrow{D} N(0, 1)$.

[Questão 12] Teorema de Slutsky

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ onde $\lambda = 2$.

(a) Pelo TCL, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2) \xrightarrow{D} N(0, 1/4)$.

(b) Defina $U_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2)$ e $V_n = \bar{X}_n$. Mostre que $U_n \xrightarrow{D} N(0, 1/4)$ e $V_n \xrightarrow{P} 1/2$.

(c) Use Slutsky para encontrar a distribuição limite de $W_n = U_n \cdot V_n = \sqrt{n}\bar{X}_n(\bar{X}_n - 1/2)$.

[Questão 13] Teorema de Slutsky

Sejam $\{X_n, n \geq 1\}$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$ onde $\theta > 0$ é desconhecido.

(a) Sabe-se que $U_n = \frac{n}{\theta}(\theta - T_n) \xrightarrow{D} \text{Exp}(1)$ onde $T_n = X_{(n)}$.

(b) Mostre que $T_n \xrightarrow{P} \theta$.

(c) Defina $Q_n = \frac{n(\theta - T_n)}{T_n}$. Use Slutsky para encontrar a distribuição limite de Q_n.

[Questão 14] Teorema de Slutsky

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

(a) Pelo TCL, $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$.

(b) Mostre que $\sqrt{\bar{X}_n} \xrightarrow{P} \sqrt{\lambda}$.

(c) Use Slutsky para mostrar que $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\bar{X}_n}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$.

[Questão 15] Teorema de Slutsky

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Cauchy}(\theta, 1)$ (localização θ, escala 1).

(a) Explique por que o TCL não pode ser aplicado diretamente para $\bar{X}_n$.

(b) Suponha que, por outro método, sabemos que $a_n(M_n - \theta) \xrightarrow{D} \text{Cauchy}(0, 1)$ onde M_n é a mediana amostral e a_n é alguma constante.

(c) Discuta se seria possível usar Slutsky neste contexto se tivéssemos $V_n \xrightarrow{P} c$.

5 Teorema Central do Limite

[Questão 16] Teorema Central do Limite

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ onde $p = 0.3$.

(a) Calcule $E[X_i]$ e $\text{Var}(X_i)$.

(b) Use o TCL para aproximar $P(\bar{X}_n \leq 0.35)$ para $n = 100$.

(c) Compare com a aproximação normal para a binomial: $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Binomial}(n, p)$.

[Questão 17] Teorema Central do Limite

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ onde $\lambda = 1$.

(a) Verifique que $E[X_i] = 1$ e $\text{Var}(X_i) = 1$.

(b) Use o TCL para aproximar $P(0.9 \leq \bar{X}_n \leq 1.1)$ para $n = 50$.

(c) Calcule a distribuição exata de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e compare.

[Questão 18] Teorema Central do Limite

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0,1)$.

(a) Calcule $E[X_i] = 1/2$ e $\text{Var}(X_i) = 1/12$.

(b) Use o TCL para encontrar $P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \leq 0.05\right)$ para $n = 100$.

(c) Encontre n tal que $P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \leq 0.01\right) \geq 0.95$.

[Questão 19] Teorema Central do Limite

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ onde $\lambda = 5$.

(a) Lembre que para Poisson, $E[X_i] = \text{Var}(X_i) = \lambda = 5$.

(b) Use o TCL para aproximar $P(\bar{X}_n \geq 5.5)$ para $n = 100$.

(c) Use o TCL para aproximar $P(S_n \geq 550)$ onde $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e compare com o item anterior.

[Questão 20] Teorema Central do Limite

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Cauchy}(0,1)$.

(a) Mostre que $E[X_i]$ não existe (integral diverge).

(b) Explique por que o TCL não se aplica.

(c) Pesquise: qual é a distribuição de $\bar{X}_n$ neste caso? (Dica: A soma de Cauchys independentes é Cauchy)

6 Método Delta / Teorema de Mann-Wald

[Questão 21] Método Delta

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ onde $\mu > 0$.

(a) Pelo TCL, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$.

(b) Use o Método Delta com $g(x) = \sqrt{x}$ para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\mu})$.

(c) Calcule $g'(\mu)$ e escreva explicitamente a variância assintótica.

[Questão 22] Método Delta

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

(a) Sabe-se que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda) \xrightarrow{D} N(0, \lambda)$.

(b) Use o Método Delta com $g(x) = x^3$ para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\bar{X}_n^3 - \lambda^3)$.

(c) Verifique que a variância assintótica é $9\lambda^5$.

[Questão 23] Método Delta

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ (taxa λ).

(a) Pelo TCL, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/\lambda) \xrightarrow{D} N(0, 1/\lambda^2)$.

(b) Use o Método Delta com $g(x) = \log(x)$ para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\log(\bar{X}_n) - \log(1/\lambda))$.

(c) Simplifique a variância assintótica.

[Questão 24] Método Delta

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, 1)$.

(a) Sabemos que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2) \xrightarrow{D} N(0, 1/12)$.

(b) Use o Método Delta com $g(x) = \frac{1}{x}$ para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{X}_n} - 2\right)$.

(c) Calcule explicitamente $g'(1/2)$ e a variância assintótica.

[Questão 25] Método Delta

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ onde $0 < p < 1$.

(a) Pelo TCL, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - p) \xrightarrow{D} N(0, p(1-p))$.

(b) Use o Método Delta com $g(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$ (transformação logit) para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}\left[\log\left(\frac{\bar{X}_n}{1-\bar{X}_n}\right) - \log\left(\frac{p}{1-p}\right)\right]$.

(c) Calcule $g'(p)$ e verifique que a variância assintótica é $\frac{1}{p(1-p)}$.

7 Convergência em Distribuição

[Questão 26] Convergência em Distribuição

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$.

(a) Seja $T_n = X_{(n)}$ o máximo amostral. Encontre a f.d.a. de T_n.

(b) Defina $U_n = \frac{n}{\theta}(\theta - T_n)$. Encontre a f.d.a. de U_n.

(c) Mostre que $U_n \xrightarrow{D} \text{Exp}(1)$ quando $n \to \infty$.

[Questão 27] Convergência em Distribuição

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(1)$.

(a) Seja $Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Encontre a distribuição de Y_n.

(b) Considere $Z_n = n \cdot Y_n$. Encontre a distribuição de Z_n.

(c) O que acontece com a distribuição de Z_n quando $n \to \infty$?

[Questão 28] Convergência em Distribuição

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(0,1)$.

(a) Defina $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$. Qual é a distribuição de $n \cdot T_n$?

(b) Mostre que $T_n \xrightarrow{P} 1$.

(c) Use o TCL para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(T_n - 1)$.

[Questão 29] Convergência em Distribuição

Sejam $Y_n \sim \text{Gamma}(n, n)$ (forma $\alpha = n$, taxa $\beta = n$).

(a) Calcule $E[Y_n]$ e $\text{Var}(Y_n)$.

(b) Mostre que $Y_n \xrightarrow{P} 1$.

(c) Use o TCL para a distribuição Gamma para mostrar que $\sqrt{n}(Y_n - 1) \xrightarrow{D} N(0,1)$.

[Questão 30] Convergência em Distribuição

Sejam $X_n \sim \text{Beta}(n, 1)$ para $n \geq 1$.

(a) Encontre a f.d.p. de X_n e mostre que $E[X_n] = \frac{n}{n+1}$.

(b) Mostre que $X_n \xrightarrow{P} 1$.

(c) Defina $Y_n = n(1 - X_n)$. Encontre a distribuição limite de Y_n quando $n \to \infty$.

8 Gabarito e Dicas

8.1 Dicas Gerais de Resolução

1. **Identifique o teorema aplicável:** Leia atentamente qual teorema está sendo testado no cabeçalho da questão.

2. **Verifique as condições:** Antes de aplicar um teorema, verifique que todas as condições são satisfeitas (i.i.d., momentos finitos, etc.).

3. **LFGN:** Use quando precisar mostrar $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$. Verifique $E[X_i] < \infty$ e (para versão simples) $\text{Var}(X_i) < \infty$.

4. **TCL:** Use quando precisar da *distribuição* de $\bar{X}_n$ padronizada. Sempre resulta em $N(0,1)$ assintoticamente.

5. **Slutsky:** Use quando precisar substituir parâmetros desconhecidos ou combinar convergências de tipos diferentes.

6. **Método Delta:** Use quando tiver uma transformação não-linear $g(\bar{X}_n)$ e quiser sua distribuição assintótica.

7. **Distribuição Cauchy:** Lembre-se que é o contraexemplo padrão - não tem momentos finitos!

8. **Cálculos de variância:** Para $\text{Var}(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$. Para soma: $\text{Var}(S_n) = n\sigma^2$.

9. **Padronização:** Sempre padronize corretamente: $(T_n - E[T_n])/\sqrt{\text{Var}(T_n)}$.

10. **Derivadas no Método Delta:** Não esqueça de calcular $g'(\theta)$ e elevar ao quadrado para a variância.

8.2 Respostas Selecionadas

Questão 5(c): $\bar{X}_n$ tem a mesma distribuição que X_1 (distribuição Cauchy) para todo n. Não há convergência!

Questão 11(c): Este é o resultado fundamental que permite usar estatística t quando σ é desconhecido.

Questão 16(b): $P(\bar{X}_n \leq 0.35) \approx P\left(Z \leq \frac{0.35-0.3}{\sqrt{0.21/100}}\right) = P(Z \leq 1.09) \approx 0.862$.

Questão 21(b): Variância assintótica: $\sigma^2/(4\mu)$.

Questão 26(c): Use que $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n = e^{-u}$.

Questão 30(c): $Y_n \xrightarrow{D} \text{Exp}(1)$ (use transformação de variáveis).

9 TCL para Variância Amostral

[Questão 31] TCL para Variância Amostral

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ onde $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

(a) Calcule $\mu_4 = E[(X_i - \mu)^4]$ para a distribuição normal padrão.

(b) Use o TCL para variância amostral para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(S_n^2 - 1)$.

(c) Construa um intervalo de confiança assintótico de 95% para σ^2 quando $n = 100$ e $S_n^2 = 1.2$.

[Questão 32] TCL para Variância Amostral

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ onde $\lambda = 2$.

(a) Calcule $E[X_i] = 1/2$, $\text{Var}(X_i) = 1/4$, e $\mu_4 = E[(X_i - 1/2)^4]$.

(b) Dica: Para exponencial, $\mu_4 = 9/\lambda^4$. Verifique este valor.

(c) Use o TCL para S_n^2 para encontrar $P(S_n^2 > 0.3)$ aproximadamente quando $n = 50$.

[Questão 33] TCL para Variância Amostral

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0,1)$.

(a) Calcule $E[X_i] = 1/2$, $\mathrm{Var}(X_i) = 1/12$, e o quarto momento central.

(b) Mostre que $\mu_4 = E[(X_i - 1/2)^4] = 1/80$.

(c) Use o TCL para S_n^2 para aproximar $P(|S_n^2 - 1/12| \leq 0.01)$ quando $n = 100$.

[Questão 34] TCL para Variância Amostral

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ onde $\lambda = 5$.

(a) Para Poisson, mostre que $\mu_4 = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 = 5 + 75 + 125 = 205$.

(b) Use o TCL para variância amostral: $\sqrt{n}(S_n^2 - \lambda) \xrightarrow{d} N(0, \mu_4 - \lambda^2)$.

(c) Calcule a variância assintótica e use-a para aproximar $P(S_n^2 > 6)$ quando $n = 80$.

[Questão 35] TCL para Variância Amostral

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$ onde $p = 0.4$.

(a) Calcule $\mathrm{Var}(X_i) = p(1-p) = 0.24$ e $\mu_4 = p(1-p)[(1-p)^2 + p^2]$.

(b) Simplifique: $\mu_4 = p(1-p)(1 - 2p(1-p))$ e calcule para $p = 0.4$.

(c) Use o TCL para S_n^2 para testar $H_0 : \sigma^2 = 0.24$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq 0.24$ ao nível 5% quando $n = 100$ e $S_n^2 = 0.28$.

10 Teorema da Função Contínua para Convergência em Distribuição

[Questão 36] Teorema da Função Contínua (Distribuição)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Pelo TCL, $Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

(b) Use o teorema da função contínua com $g(x) = x^2$ para mostrar que $Z_n^2 \xrightarrow{d} \chi_1^2$.

(c) Conclua que $n\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow{d} \chi_1^2$.

[Questão 37] Teorema da Função Contínua (Distribuição)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

(a) Pelo TCL, $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/\lambda)}{\sqrt{1/\lambda^2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

(b) Defina $Z_n = \lambda\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/\lambda)$. Use o teorema da função contínua com $g(x) = |x|$ para encontrar a distribuição de $|Z_n|$.

(c) Mostre que $Z_n^2 \xrightarrow{d} \chi_1^2$.

[Questão 38] Teorema da Função Contínua (Distribuição)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, 1)$.

(a) Sabemos que $\sqrt{12n}(\bar{X}_n - 1/2) \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

(b) Use o teorema da função contínua com $g(x) = e^x$ para encontrar a distribuição limite de $\exp(\sqrt{12n}(\bar{X}_n - 1/2))$.

(c) Esta é uma distribuição log-normal. Identifique seus parâmetros.

[Questão 39] Teorema da Função Contínua (Distribuição)

Sejam $U_n \xrightarrow{d} U \sim N(0, 1)$ e $V_n \xrightarrow{d} V \sim N(0, 1)$ independentes.

(a) Mostre que $(U_n, V_n) \xrightarrow{d} (U, V)$ (convergência conjunta).

(b) Use o teorema da função contínua com $g(u, v) = u^2 + v^2$ para mostrar que $U_n^2 + V_n^2 \xrightarrow{d} \chi^2_2$.

(c) Generalize para p variáveis independentes.

[Questão 40] Teorema da Função Contínua (Distribuição)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ onde $\lambda = 10$.

(a) Pelo TCL, $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - 10)}{\sqrt{10}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

(b) Defina $Y_n = \sqrt{\bar{X}_n}$. Use o método delta combinado com o teorema da função contínua para analisar a distribuição de $\sqrt{n}(Y_n - \sqrt{10})$.

(c) Compare com a transformação estabilizadora de variância para Poisson.

11 Estimadores Consistentes

[Questão 41] Estimadores Consistentes

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$ onde $\theta > 0$.

(a) Seja $T_n = X_{(n)}$ o máximo amostral. Encontre $E[T_n]$ e $\text{Var}(T_n)$.

(b) Mostre que $EQM[T_n] = E[(T_n - \theta)^2] \to 0$ quando $n \to \infty$.

(c) Conclua que T_n é consistente para θ.

(d) Compare com $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}_n$. Qual é mais eficiente assintoticamente?

[Questão 42] Estimadores Consistentes

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$.

(a) Considere três estimadores para λ:

- $T_n^{(1)} = 1/\bar{X}_n$ (método dos momentos)
- $T_n^{(2)} = n/\sum_{i=1}^n X_i$ (EMV)
- $T_n^{(3)} = 1/X_{(1)}$ (inverso do mínimo)

(b) Mostre que $T_n^{(1)}$ é consistente usando LFGN e teorema da função contínua.

(c) Mostre que $T_n^{(2)}$ é consistente.

(d) $T_n^{(3)}$ é consistente? Justifique.

[Questão 43] Estimadores Consistentes

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Mostre que $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ é consistente para σ^2.

(b) Mostre que $\tilde{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ também é consistente para σ^2.

(c) Calcule o viés de cada estimador para n finito. Qual você prefere e por quê?

[Questão 44] Estimadores Consistentes

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

(a) Dado $\varepsilon = 0.05$ e $\delta = 0.01$, encontre o tamanho amostral mínimo n_0 tal que

$$P(|\bar{X}_n - p| < \varepsilon) \geq 1 - \delta$$

usando a desigualdade de Chebyshev. Assuma $p = 0.5$ (pior caso).

(b) Refaça usando a aproximação normal (TCL).

(c) Compare os dois valores de n_0.

[Questão 45] Estimadores Consistentes

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com distribuição desconhecida mas com $E[X_i] = \mu < \infty$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$.

(a) Defina o estimador "trimmed mean": $\bar{X}_n^{(k)} = \frac{1}{n-2k}\sum_{i=k+1}^{n-k} X_{(i)}$ onde $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ são as estatísticas de ordem, e k é fixo.

(b) Argumente que $\bar{X}_n^{(k)} \xrightarrow{P} \mu$ quando $n \to \infty$ com k fixo.

(c) Discuta a robustez deste estimador comparado a $\bar{X}_n$ na presença de outliers.

12 Propriedades Assintóticas dos EMVs

[Questão 46] Propriedades Assintóticas dos EMVs

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ onde σ^2 é conhecido.

(a) Mostre que o EMV de μ é $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n$.

(b) Calcule a informação de Fisher $I_X(\mu) = E\left[\left(\frac{\partial \log f(X;\mu)}{\partial \mu}\right)^2\right]$.

(c) Use o TCL para EMVs para escrever a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu)$.

(d) Construa um IC assintótico de 95% para μ.

[Questão 47] Propriedades Assintóticas dos EMVs

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

(a) Mostre que o EMV de λ é $\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$.

(b) Calcule a informação de Fisher $I_X(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

(c) Verifique que $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{d} N(0, \lambda)$, confirmando $I_X^{-1}(\lambda) = \lambda$.

(d) Compare com o resultado do TCL clássico.

[Questão 48] Propriedades Assintóticas dos EMVs

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ (taxa λ).

(a) Mostre que o EMV de λ é $\hat{\lambda}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{\bar{X}_n}$.

(b) Calcule a informação de Fisher $I_X(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$.

(c) Use o TCL para EMVs para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda)$.

(d) Compare este resultado com o obtido usando o método delta aplicado a $1/\bar{X}_n$.

[Questão 49] Propriedades Assintóticas dos EMVs e Eficiência

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$.

(a) O EMV de θ é $\hat{\theta}_n^{MLE} = X_{(n)}$. O estimador de momentos é $\hat{\theta}_n^{MM} = 2\bar{X}_n$.

(b) Mostre que ambos são consistentes.

(c) Calcule as variâncias assintóticas de $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{MLE} - \theta)$ e $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{MM} - \theta)$.

(d) Qual é mais eficiente? Calcule a eficiência relativa assintótica.

(e) Nota: Este é um caso onde as condições de regularidade falham! O EMV não tem distribuição normal assintótica.

[Questão 50] Propriedades Assintóticas dos EMVs

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

(a) Mostre que o EMV de p é $\hat{p}_n = \bar{X}_n$.

(b) Calcule a informação de Fisher $I_X(p) = \frac{1}{p(1-p)}$.

(c) Use o TCL para EMVs para mostrar que $\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \xrightarrow{d} N(0, p(1-p))$.

(d) Queremos estimar $\psi = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$ (log-odds). Use o método delta para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\log(\frac{\hat{p}_n}{1-\hat{p}_n}) - \psi)$.

(e) Verifique que a variância assintótica é $\frac{1}{p(1-p)}$, que é exatamente $I_X^{-1}(p)$ (invariância do EMV sob reparametrização).

13 Gabarito e Dicas - Parte 2

13.1 Dicas para as Novas Questões

TCL para Variância Amostral (Questões 31-35):

- Lembre que $\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} N(0, \mu_4 - \sigma^4)$
- Para Normal: $\mu_4 = 3\sigma^4$, logo variância assintótica $= 2\sigma^4$
- Para Exponencial(λ): $\mu_4 = 9/\lambda^4$, $\sigma^2 = 1/\lambda^2$
- Para Uniforme(0,1): $\mu_4 = 1/80$, $\sigma^2 = 1/12$

Teorema da Função Contínua - Distribuição (Questões 36-40):

- Use quando tiver $U_n \xrightarrow{d} U$ e quiser $g(U_n) \xrightarrow{d} g(U)$
- Exemplo clássico: $Z \sim N(0,1) \Rightarrow Z^2 \sim \chi_1^2$
- Combine com método delta quando necessário

Consistência (Questões 41-45):

- Mostre $T_n \xrightarrow{P} \theta$ via: (1) LFGN, (2) EQM $\to 0$, ou (3) convergência da f.d.a.
- Para $X_{(n)}$ em $U(0,\theta)$: $E[X_{(n)}] = \frac{n\theta}{n+1}$, $\text{Var}(X_{(n)}) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$
- Tamanho amostral via Chebyshev: $n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \delta}$

EMVs (Questões 46-50):

- Informação de Fisher: $I_X(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \log f(X;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = -E\left[\frac{\partial^2 \log f(X;\theta)}{\partial\theta^2}\right]$
- TCL para EMVs: $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, I_X^{-1}(\theta))$

- Para Normal(μ, σ^2): $I_X(\mu) = 1/\sigma^2$
- Para Poisson(λ): $I_X(\lambda) = 1/\lambda$
- Para Exponencial(λ): $I_X(\lambda) = 1/\lambda^2$
- Para Bernoulli(p): $I_X(p) = 1/(p(1-p))$

13.2 Respostas Selecionadas - Parte 2

Questão 31(a): Para $N(0,1)$: $\mu_4 = E[X^4] = 3$ (use momentos da normal).

Questão 36(c): Este resultado é fundamental para qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

Questão 41(a): $E[X_{(n)}] = \frac{n\theta}{n+1}$, $\text{Var}(X_{(n)}) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$, ambos $\to 0$ quando normalizados.

Questão 44(a): Usando Chebyshev com $p = 0.5$: $n_0 \geq \frac{0.25}{(0.05)^2(0.01)} = 10000$.

Questão 44(b): Usando TCL: $n_0 = \left\lceil \left(\frac{z_{0.005}\sqrt{0.25}}{0.05}\right)^2 \right\rceil = \lceil (51.5)^2 \rceil = 2653$.

Questão 49(e): Caso especial onde condições de regularidade falham. O EMV converge mais rápido (n ao invés de $\sqrt{n}$).

Questão 50(e): Demonstração da invariância da informação de Fisher sob transformações.