① semipositive? ② 特征值 eigenvalue? ③ 行列式? 关系. ⑤ 正交矩阵 orthogonal matrix

④ 奇异值 singular value

(1) 矩阵特征值之积 = 矩阵行列式 $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A = |A|$

矩阵特征值之和 = 矩阵的迹 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$, $A \in R^{n\times n}$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ are eignvalues of A

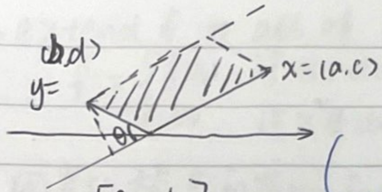
if $A \in S^n$ $A = UDU^{-1}$

$\det A = \det(UDU^{-1})$
$= \det(U)\det(U^{-1})\det(D)$
$= \det(UU^{-1})\det(D)$
$= \det(I)\det(D)$
$= \det(D)$
$= \det\begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

$S_+^{n\times n}$ 半正定矩阵 ⇒ 特征值非负 ⇒ 行列式非负 ⇒ 矩阵A可逆

(2) 二维空间中行列式的值(的绝对值)表示列向量张成的平行四边形的面积

三维空间中行列式的值(的绝对值)表示列向量张成的六面体的体积



$S = |x||y|\sin\theta$
$= |x||y|\sqrt{1-\cos^2\theta} = |x|\cdot|y|\sqrt{1-\frac{xy}{|x|\cdot|y|}} = |ad-bc| = |\det A|$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

if $\det A = 0$ ⇒ ($S=0$) 列向量线性相关. 不能张成平行四边形

或可将看为矩阵相当于线性变换

if $\det = 0$ ⇒ 意味着线性变换后压缩为一个线 (2-D case)

降维压缩, 不能还原 ⇒ A不可逆

⇒ $A^{-1}$ exists ⇔ $\det(A) \neq 0$

(3) $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$ $\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$. $\det(A^T) = \det(A)$

(4) SVD 分解 for $S^n$ → 谱分解

if $A \in S_+^n$, then $\det A \geq 0$

if $A \in S_{++}^n$, then $\det A > 0$ ⇒ $A^{-1}$ exists ⇒ A列向量线性无关

有n个非0特征值

if $A \in S^n$. 有n个 eigenvalues. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$, 以及 corresponding eigenvectors $w_1, w_2, \cdots w_n$

↳ $A = W\Sigma W^{-1}$ → 一般令 $\|w_i\| = 1$ (特征向量标准化) ⇒ $W^TW = I$ 即 $W^T = W^{-1}$ ⇒ $A = W\Sigma W^T$

$W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$

$\Sigma = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

(5) if $\lambda_1 \cdots, \lambda_n$ are eigenvalues of A, $A \in S^n$, then $I + tA = B$'s eigenvalues are

$t \in R$

$(1+t\lambda_1), (1+t\lambda_2), \cdots, (1+t\lambda_n)$

↳ 经常将 A 写成 $UDU^T$ 形式后, 再将 D 写成 $D = Z + tV = Z^{\frac{1}{2}}(I + Z^{-\frac{1}{2}}tVZ^{-\frac{1}{2}})Z^{\frac{1}{2}}$

$= Z^{\frac{1}{2}}(I + tA')Z^{\frac{1}{2}}$ $A' = Z^{-\frac{1}{2}}VZ^{\frac{1}{2}}$

或 $D = I + tD'$ 的形式

$D' = A' = Z^{-\frac{1}{2}}VZ^{\frac{1}{2}}$

⇒ $A = U(I+tD')U^T$ 转变为 single variable t 的 function

$\rightarrow I + A^TA \in S^n_{++}$
$I + aa^T \in S^n_{++}$

(6) $\forall A \in R^{m\times n}$, $A^TA \in S^n_+$ $\Rightarrow$ 同样 if $a \in R^n$. $A = a \cdot a^T \in S^n_+$

<pf> $x^T(A^TA)x = (Ax)^T(Ax) = \langle Ax, Ax\rangle \geq 0$

(7) singular value. 奇异值

let $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 为 $A^TA$ 的 n 个特征值 $\Rightarrow \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ 为 A 的 singular value

$\hookrightarrow \sigma(A) = \sqrt{\lambda(A^TA)}$

由于 $A^TA \in S^n_+$ 所以 $\lambda_i \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_i}$ 存在

(8) norm2 of Matrix A is the maximum singular value of A

$\|A\|_2 = \sigma_{max}(A) = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$

(9) Orthogonal Matrix

$A^T = A^{-1} \Rightarrow AA^{-1} = I = AA^{-1}$

$\hookrightarrow det(AA^T) = det(A)^2 = det(I) = 1$

$\Rightarrow$ 正交矩阵行列式为 $\pm 1$

(10) if A 的特征值是 $\lambda$. 则 $A^{-1}$ 的特征值是 ~~$\frac{1}{\lambda}$~~ 大