Вычислительные алгоритмы.

Гразов Владимир Михайлович 502 л.

ЛР каж. неделю — физ., биолог., хим., геолог.

Дисциплина Вычи. * объед. в себе алг. вычи матем.

На 3м курсе — Моделирование — там приходится пробежаться через алг.

На 6м семестре будет подразумеваться, что мы это всё знаем

- Аппрокс ф-й
- Реш. сист. нелин. ур
- Диф-е
- Взятие кратных интегралов

1 мод. — 6 нед.	перед. каж. мод. — РК;
2 мод. — 11 нед.	старайся сдавать вовремя;
3 мод — 17 нед.	зач не менее ЛР должны быть сданы все, иначе не будет зачёт

7 ЛР; делать в сооб. с уч. со выходом дист. обучения

Контр вопросы задаются при приёме ЛР, заочно.

gradov@bmstu.ru

На лекциях отмечают.

#К ЛР можно уже приступать

Аппроксимация функций.

По сути замена одной ф-ии другой, (в более прост. виде).

Или опр. зн. ф. в отдел. зад. ф-ии

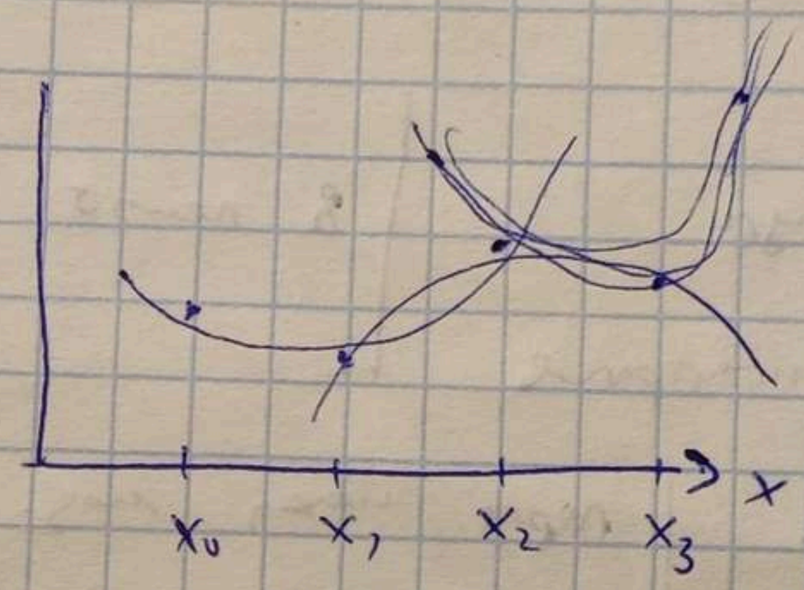
Напр.:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x)$$ аппрокс. с пом-о СЛАУ.

Вопрос - аппрокс. ли попуд. сист. задачу. Это надо доказывать.

1)

x	y

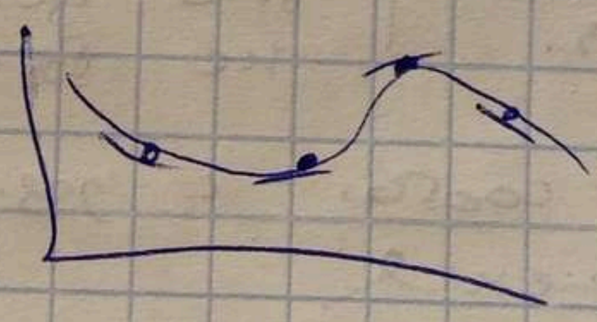


– прямые интерполяции

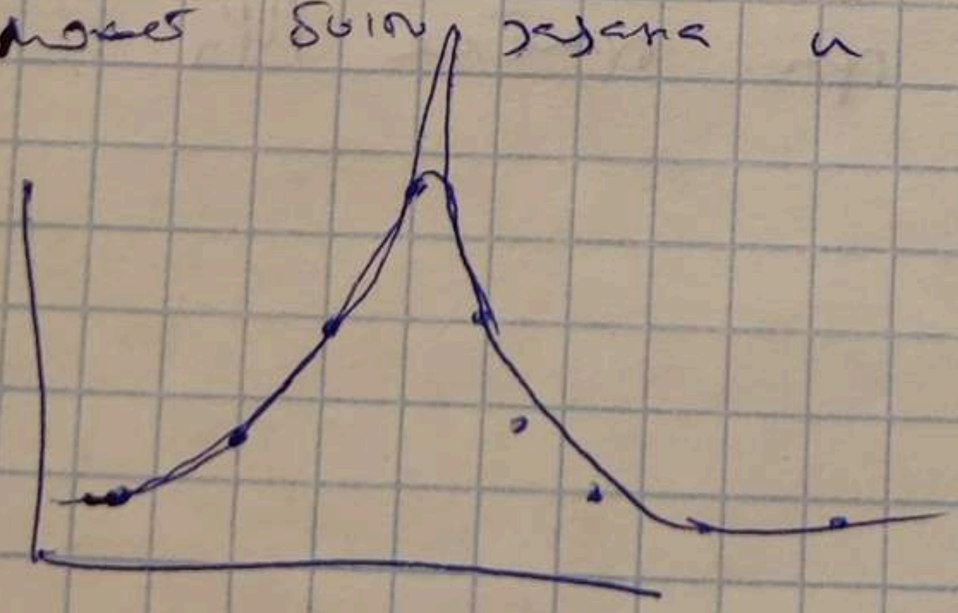
обл. исх. ф и новая в одних точках удов

2)

когда произв. резкие



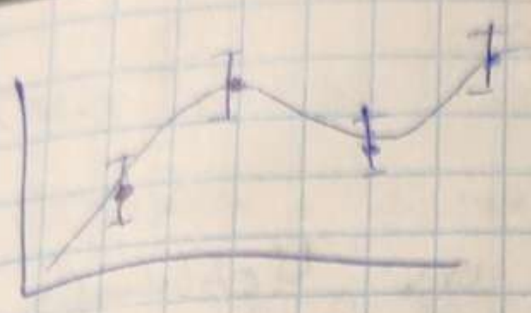
может быть задана и возр. произв.



если ф-я прямая – сплайном можно аппрок.

у сплайна непр. 1 и 2 пр-е в наиз. точках

Сплайн может дать большую ошибку.



наилучшее среднее квадратичное приближение, когда большая погрешность в данных

Аппрок-ия: полином Ньютона, Эрмита, Сплайн и др.

Аппроксимация.

I. Интерполяция

#1. Функции одной переменной.

таблица

$y(x) \longrightarrow \varphi(x, \bar{a})$, $\bar{a} = \{a_0, a_1, \dots a_n\}$

$\varphi(x_i, \bar{a}) = y_i$, $i = \overline{0,n}$

находим эти параметры.

В общ. случае – это нелин. интерполяция.

1.1. Линейная интерполяция

вид φ задается.

$$\varphi(x, \bar{a}) = \sum_{k=\overline{0,n}} a_k \varphi_k(x)$$

φ_k – базисные функции; ЛНЗ

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0,n}$$

– СЛАУ size one $(n+1)$ порядка

Определитель линейной системы:

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \dots & & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$ – опр. Чебышева $\neq 0$

Frequent

Частный случай: $\varphi_k(x) = x^k$

$$\varphi(x, \bar{a}) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \mathcal{P}_n(x)$$ – полином n-й степ;

Для аппрок. полиномом n-й степени, нужно (n+1) узла.

Вопр. к ЛР

Полином доб степени, кот. равна кол-ву условий – 1.

$$\underbrace{a_0, a_1, \dots a_n}_{a_{n+1}}, \quad a_0 \text{ – св. член.}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{x_i^k}_{\varphi_k(x_i)} = y_i, \quad i = \overline{0,n}$$

Определитель Вандермонда; он $\neq 0$, если узлы не совпадают

Опр. Вандермонда $\to 0$, при росте узлов $\to \infty$.

Плохо обусл. системы решаются с помощью регуляризации.

Можно проще, без СЛАУ:

Строим полином, исп-я подход Ньютона.

(1.1.1.) Полином Ньютона (ф)

можно даже лучше, реже новый — проход и физ LHS

реально равно / имеем;

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = P_n(x_0) + (x-x_0)P(x_0,x_1) +$$

#запись одного и того же полинома в разных формах

$$+ (x-x_0)(x-x_1)P_n(x_0,x_1,x_2) + \dots$$

$$+ \dots (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})P(x_0,x_1,\dots,x_n)$$

$$P(x_0,x_1) \overset{def}{=} \frac{P(x_0)-P(x_1)}{x_0-x_1}$$ – разделённая разность 1го порядка

$$P(x_0,x_1,x_2) = \frac{P(x_0,x_1)-P(x_1,x_2)}{x_0-x_2}$$ – 2го порядка

$$\vdots$$

$$P(x_0,\dots x_n) = \frac{P(x_0,\dots x_{n-1}) - P(x_1,\dots,x_n)}{x_0-x_n}$$

Пример 1. Постр полином Ньютона по двум точкам.

x	y
x_0	y_0
y_1	y_1

$$P_1(x) = y_0 + (x-x_0)P(x_0,x_1) =$$

$$= y_0 + (x-x_0)\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$$

Ф-ра прямой прохоз. через две точки

Пример 2.

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2

$$P_2 = y_0 + (x-x_0)\frac{x_0-y_1}{x_0-x_1} + (x-x_0)(x-x_1)\underbrace{P(x_0,x_1,x_2)}_{\frac{P(x_0,x_1)-P(x_1,x_2)}{x_0-x_2}} =$$

$$= \frac{\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1} - \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}}{x_0-x_2}$$

Пример 3

x	y
-0,50	0,707
-0,25	0,924
0,00	1,0
0,25	0,924
0,50	0,707
→ 0,75	0,383
1,0	0,00

При $x = 0,6$ вычислить. $n = 4$

Построить интерп полином 4-й степени.

Сначала нужно выбр 5 узлов, поэтому ближайшее всем принимает и ...

Собрсен последовательно:

0,50; 0,75; 0,25; 1,0; 0,00

в мантиссе оставлял 3 знака после запятой

1) выбрать последовательно; не надо строить по всей таблице
2) проводим проверку; строим вспомогательный массив — это быстрее

Экстраполяция — предупреждает пользователя; самый ненадёжный вывод сообщ. о ней, и прочч. экстрапол — умнее.

x	y	$y(x_i, x_k)$	$y(x_i, x_k, x_e)$	$y(x_i, x_k, x_e, x_n)$
0	1	$\frac{1-0,924}{-0,25} = -0,304$		
0,25	0,924		$P(x_0, x_1, x_2)$ $-1,128$	
		$-0,868$		$0,363$
0,5	0,707		$-0,836$	
		$-1,296$		$0,149$
0,75	0,383		$-0,472$	$0,512$
		$-1,532$		
1	0,00			

Эти DD будут исп. ся в полиноме; осн. нужен быть только для них выше

$$y(x) = 1 + (x-0)(-0,304) + (x-0)(x-0,25)(-1,128) +$$
$$+ (x-0)(x-0,25)(x-0,5)(0,363) +$$
$$+ (x-0)(x-0,25)(x-0,5)(x-0,75)(0,149)$$

$y(0,6) = 0,589$; $y_{точн}(0,6) = 0,588$

На практике степень полинома обычно равняется 5, 6, 7, 8. Если он такая? – нужно взять степень обрез.
Если погрешность большая – меньше –
На практике берут большие погрешности и много значит (5 мин +).

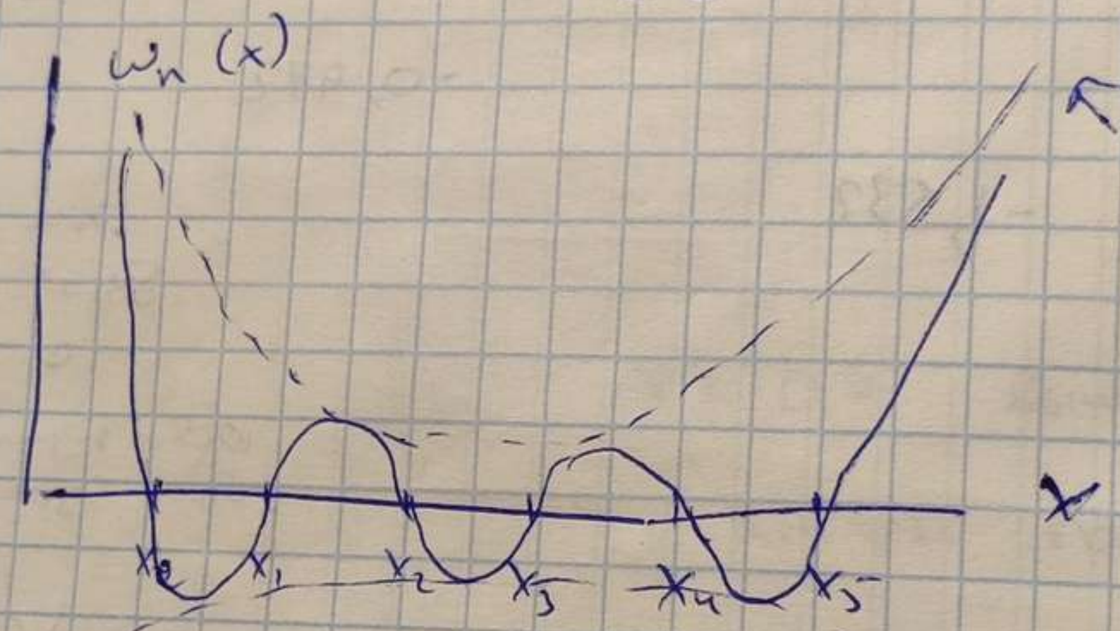
Рассмотрим разные пров. помощи ...

Погрешность интерполяции (абсолютная)

$$|y(x) - P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|$$

где $M_{n+1} = \max\limits_{x_0 \le x \le x_n} |y^{(n+1)}(x)|$ – макс. знач. $(n+1)$ произв.

$$\omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$



#близок к краям погрешность интерполяции увеличивается

априорная оценка

Степень полинома оцен. по кол-ву его слагаемых.

Если при доб. нов. слагаемых ф-я улет. в пред. погрешность – останавливаем.

Если улетает – выкинуть таблицу / не исп. lin interp.

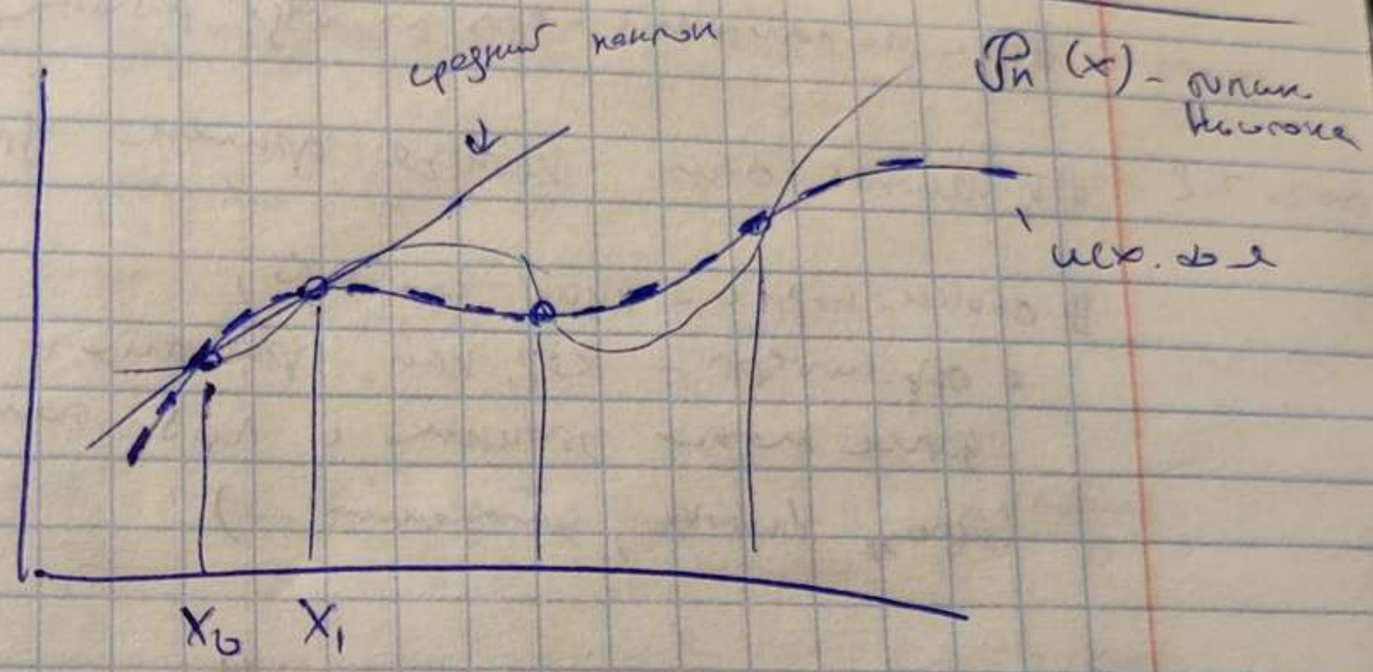
Введение выравнивающих переменных

Полином Эрмита.

когда в наз. поле задача не только ф-я, но и её произв-я, а м.б. и неск. пр-х; в нек. помимо полин. и не был зад. пр-х. обычно не больше 2х.

x	y	y'	y''
x_0	y_0	y_0'	y_0''
x_1	y_1	y_1'	y_1''

Зя произв-я не имеет геометр. образа.



Полином Эрмита - полином Ньютона с кратными (совпадающими) узлами.

$$H_n(x) = P_n(x, \underbrace{x_0, x_0 \dots x_0}_{n_0}, \underbrace{x_1, x_1 \dots x_1}_{n_1} \dots \underbrace{x_k, x_k \dots x_k}_{n_k})$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n+1$$

Пример на сп. лекции.

ЛР делать;

Отчёты приёмка делать, если потребуют от ВМ вх; вых; зад; тест; треб. рез-т; ов. на вопр.

а так произв форма сдачи,

посмотр. пр-мы; на резк. заданных

Рк мо - запр. по мат. сдачи; мож. прис. и взр. гр: 42, 43 вт. с 12:00 253

I мо - 2 ЛР; II п. - 4ЛР; III п. - 2ЛР.;

y, x пр-ла не меняется

Обр. интерп: мен. столбцы;
интерп-ция $x=0$; рез-т — корень

хорошее нач. приближ. для уточнения

разность с помощью ф-ции

будет ли раб. прим при зад. ф-ции?

ф-я не монотонна — есть ли общ. работа

к монот. ф-ии можно применить дихотомию

общий корень — куча способов;
- обр. интерп — хор. нач. приближ.
далее можно уточнить с люб. помощью
(метод Ньютона; дихотомии —)

В Эрмите есть полином 4 степени
(нужно 5 узлов);
x_0, x_0, x_1, x_1, x_2

реальн. ЗК: проблема ~~[illegible]~~ нет пр. + не все знач.

Как из ф-ии в нелин. все нужно работать?

TODO: интерп. Эрмита; $n=4$ для 5 точек, а не 6.

21.02.23

Лекция 2.

$$H_n(x) = P_n(x, \underbrace{x_0, x_0 \dots x_0}_{n_0}, \underbrace{x_1 \dots x_1}_{n_1}, \dots \underbrace{x_k \dots x_k}_{n_k})$$

зададим все производные
в точке до n_0-1
в точке x_0

$$\sum_{i=0}^{k} n_i = n+1$$

$$P_n(x, x_0, x_1, \dots, x_n) =$$
$$= y_0 + \sum_{k=1}^{n} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})\,P(x_0, x_1, \dots x_k)$$

x	y	y'	y''
✓	✓	✓	✓
✓	✓	✓	✓
x_0	y_0	y_0'	y_0''
$x \to$			
x_1	y_1	y_1'	y_1''
✓	✓	✓	✓

если брать

y_0, y_1, y_0', y_0'' – полином 3-й степени

или

y_0, y_1, y_1', y_1'' – тоже полином 3-й степ.

или

y_0, y_1, y_0', y_1' – тоже

Все: $y_0, y_0', y_0'', y_1, y_1', y_1''$ – полин. Эрмита 5-й степени.

x	y	$y(x,x)$	$y(x,x,x)$
x_0	y_0		
		y_0'	
x_0	y_0		$\frac{1}{2} y_0''$
		y_0'	
x_0	y_0		$\frac{\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1} - y_0'}{x_0-x_1}$
		$\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$	
x_1	y_1		---
		y_1'	
x_1	y_1		$\frac{1}{2} y_1''$
		y_1'	
x_1	y_1		

$$y(\underbrace{x_0, x_0 \dots x_0}_{m}) = \frac{1}{(m-1)!} y^{(m-1)}$$

– как это получить: идем полным Ньютоне; дифференцируем; потом устремляем все x к x_0; все лог. к x_0 стремится.

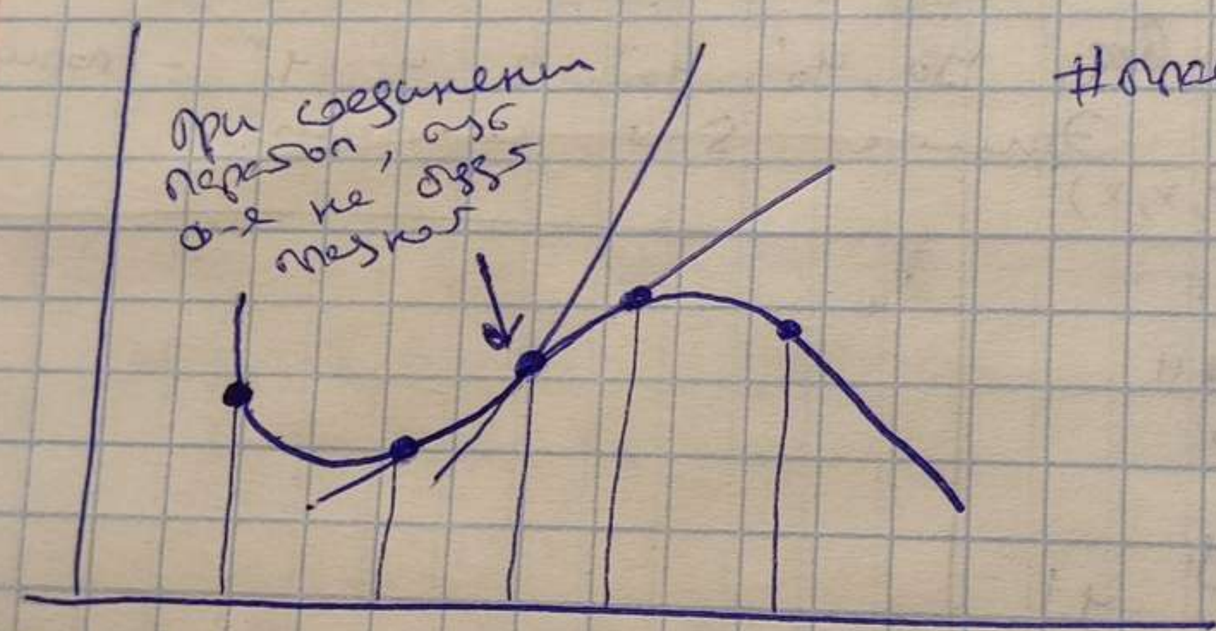
$$P(x, x_0 \ldots) = y_0 + (x - x_0) P(x_0, x_1) +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1) P(x_0, x_1, x_2) +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) P(x_0, x_1, x_2, x_3) -$$

– продолж. и $x \to x_0$, выполняет формул.

$$P(x_0, x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = y_0'$$, но с ош. так не получится.

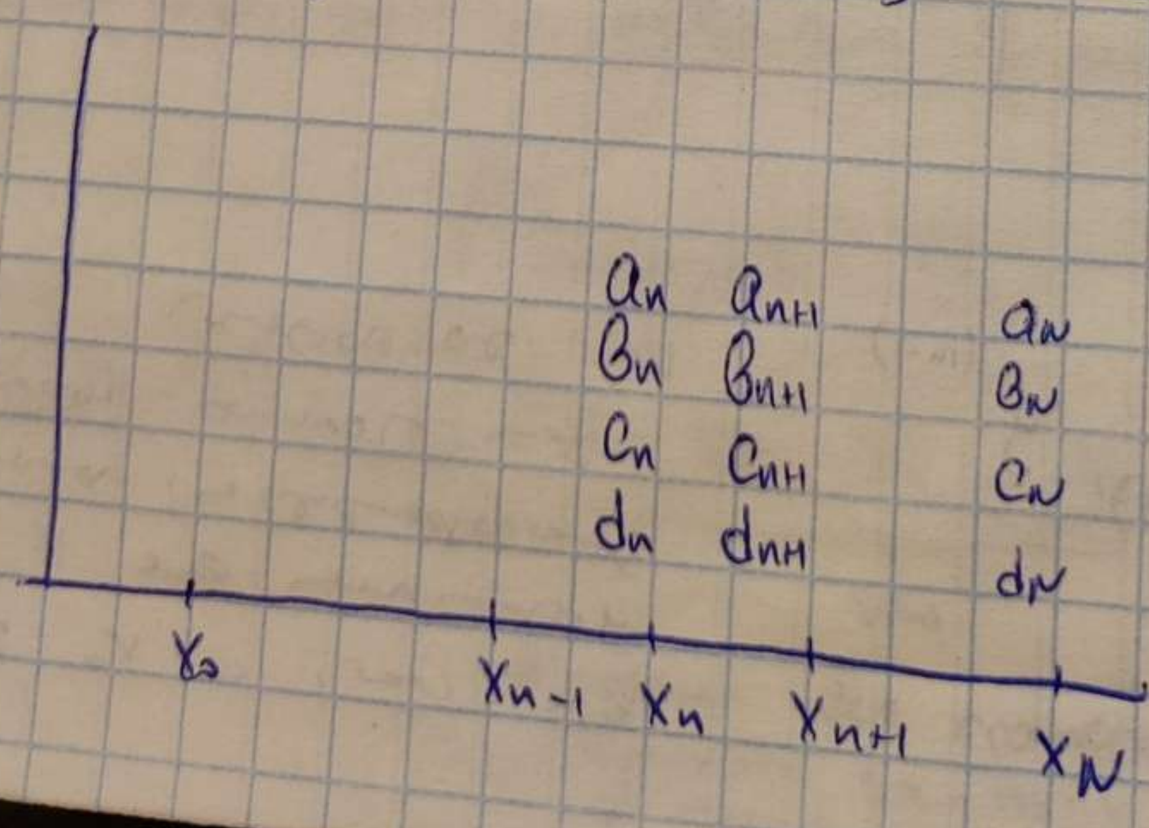
17.03 Интерполяция с помощью сплайнов

#Правильный многочлен



Кубический сплайн непрерывен со своим 1 и 2 производным.

Будем рассм. – о кубический сплайн



В n-ном интервале $(x_{n-1}; x_n)$

$$\varphi_n(x) = a_n + b_n(x - x_{n-1}) + c_n(x - x_{n-1})^2 + d_n(x - x_{n-1})^3 \quad (1)$$

Вначале опр-м все коэф-ты: 4N коэф-в; на весь сеанс работы запоминаем их; потом идем, в какой интервал попадает нужное значение и подбираем a_i, b_i, c_i, d_i в зав-ти от интервала

$$\varphi_{n+1}(x) = a_{n+1} + b_{n+1}(x - x_n) + c_{n+1}(x - x_n)^2 + d_{n+1}(x - x_n)^3 \quad (2)$$

Выпишем все ограничения.

$$\varphi_n(x_{n-1}) = a_n = y_{n-1}, \quad n = 1, N \quad (3) \quad \} N \text{ ур-й}$$

$$\varphi_n(x_n) = a_n + b_n h_n + c_n h_n^2 + d_n h_n^3 = y_n, \quad n = 1, N \quad (4) \quad \} N \text{ ур-й}$$

$h_n = x_n - x_{n-1}$; h_n - длина интервала; расстояние между узлами;

Все интервалы разные.

Найдем и сшиваем производные:

По (1)

$$\varphi_n'(x) = b_n + 2c_n(x - x_{n-1}) + 3d_n(x - x_{n-1})^2$$

$$\varphi_n''(x) = 2c_n + 6d_n(x - x_{n-1})$$

В т. x_n:

$$\left.\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n + 2c_n h_n + 3d_n h_n^2 \quad (5) \quad \} N-1 \\ 2c_{n+1} &= 2c_n + 6d_n h_n \\ c_{n+1} &= c_n + 3d_n h_n \quad (6) \quad \} N-1 \end{aligned}\right\} 2N-2$$

$(2)'|_{x_n}$

равенство 1 и 2 произ. в общем, где соответствующие интервалы

всего есть $4N-2$ уравнений / $4N$

Рассмотрим

$$\begin{cases} \varphi_1''(x_0)=0 \quad : \quad 2c_1 + 6d_1(x_0-x_0)=0 \to c_1=0 \ (7) \\ \varphi_N''(x_N)=0 \quad : \quad 2c_N + 6d_N(x_N-x_{N-1})=0 \to \cancel{c_N=0 \ (8)} \end{cases}$$

$$\to c_N + 3d_N h_N = 0 \quad (8)$$

$c_{N+1}=$

теперь условие $S \to$ опр. полн. достаточно

Коэф. сплайна a_n, b_n, c_n, d_n, $n=\overline{1,N}$ находятся из системы уравнений:

$(3) \div (8)$

~~(4)~~

~~(5)~~

можно вып. матрицу коэф-в, но можно решать проще:

Преобр. СУ (3)-(6) таким обр., чтобы в рез. остались только коэф. c_n

из (6) выраж. d_n;

подст. этот c_n в (4), получ. уже, в нем коэф. b_n)

a_n опр. сразу из (3)

подст. полн. ур. выр. из (4) b_n, и выр. из (6) d_n,

подст. b_{n+1}

1)

1) (6): $d_n \to d_n(c_n)$

2) $d_n(c_n) \to$ (4)

2) (4): $b_n(d_n(c_n)) = b_n(c_n)$

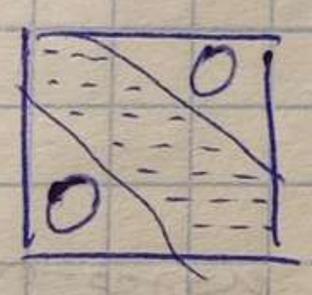
3) сдвиг индекса b_n на $1 \to b_{n+1}$

и) подст. c_{n+1} в (5)
c_n, d_n ; полн. ур-е, в нач. остав.
только c_n с разн. индексом

Полученная система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ h_{n-1} c_{n-1} + 2(h_{n-1} + h_n) \cdot c_n + h_n \cdot c_{n+1} = \\ = 3\left(\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}}\right) \quad / 2 \le n \le N \\ \text{Введём дополнительный интервал для } c_{N+1} \\ \text{в (6) вместо } n \text{ подст. } N: \ c_{N+1} = c_N + 3 d_N h_N \\ \hookrightarrow c_{N+1} = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

Матрица системы имеет трёхдиагональный вид:



- их удобно решать методом прогонки

Сист. ур-й (9) – СЛАУ с трёхдиагональной матрицей. Такие системы решаются методом прогонки.

(Обратная ход: прямой ход, обратный ход, показать все подст-и.)

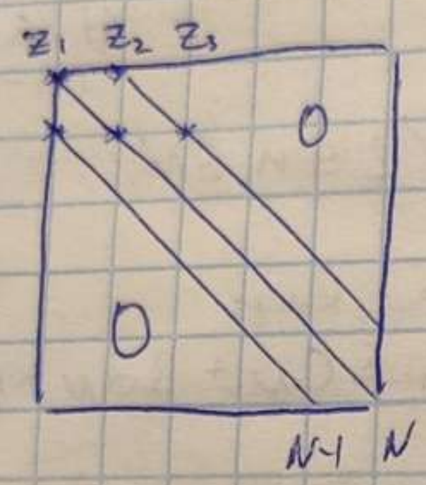
Метод прогонки (сущест. часто исп. в заданиях.)
Инт. также для реш. диф. ур-й

Канон. форма СЛАУ с трёхдиаг. матр

z_n # обозначим c_n

$$\begin{cases} A_n z_{n-1} - B_n z_n + D_n z_{n+1} = -F_n, & n = \overline{1,N} \\ K_1 z_1 + M_1 z_2 = P_1 \\ K_N z_N + M_N z_{N-1} = P_N \end{cases} \quad (*)$$

обозначим левое краевое условие



Применим к нашей задаче:

$z_n \equiv c_n$

$A_n = h_{n-1}$

$B_n = -2(h_{n-1} + h_n)$

прогоночные коэф-ты; завязаны друг на друга; разрешены сверху

$$z_n = \xi_{n+1} z_{n+1} + \eta_{n+1} \quad (10)$$

$$z_{n-1} = \xi_n z_n + \eta_n$$

$$A_n \xi_n z_n + A_n \eta_n - B_n z_n + D_n z_{n+1} = -F_n$$

$$z_n = -\frac{D_n}{A_n \xi_n - B_n} z_{n+1} - \frac{A_n \eta_n + F_n}{A_n \xi_n - B_n}$$

$$z_n = \frac{D_n}{B_n - A_n \xi_n} z_{n+1} + \frac{A_n \eta_n + F_n}{B_n - A_n \xi_n} \quad (11)$$

Будем: (из 10 и 11):

$$\xi_{n+1} = \frac{D_n}{B_n - A_n \xi_n} \qquad \eta_{n+1} = \frac{A_n \eta_n + F_n}{B_n - A_n \xi_n} \qquad (12)$$

нужно не было деления на 0: $|B_n| \ldots$

Прямой ход: находим все рек. коэф;

Обратный ход: находим все z_n

Итог: между прогон. зад. с вол. двух этапов:

1) вычисляются прогоночные коэф-ты „прямой ход" по (12)

2) „обр-ход" по (10) определяется все z.

Как найти нач. прогон. коэф-в.:

$$z_1 = \xi_2 z_2 + \eta_2$$

$$(*): \quad z_1 = -\frac{M_1}{K_1} z_2 + \frac{P_1}{K_1}$$

$$\xi_2 = -\frac{M_1}{K_1}, \quad \eta_2 = \frac{P_1}{K_1}$$

в нач. сл. $K_1 = 1, M_1 = 0, P_1 = 0$

$\xi_2 = 0, \eta_2 = 0$

При задании коэф-х c, ос. опр по формулам:

$$a_n = y_{n-1}$$

$$d_n = \frac{c_{n+1} - c_n}{3h_n}$$

$$b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{1}{3} h_n (c_{n+1} + 2c_n)$$

$c_{N+1} = 0$ помним об этом

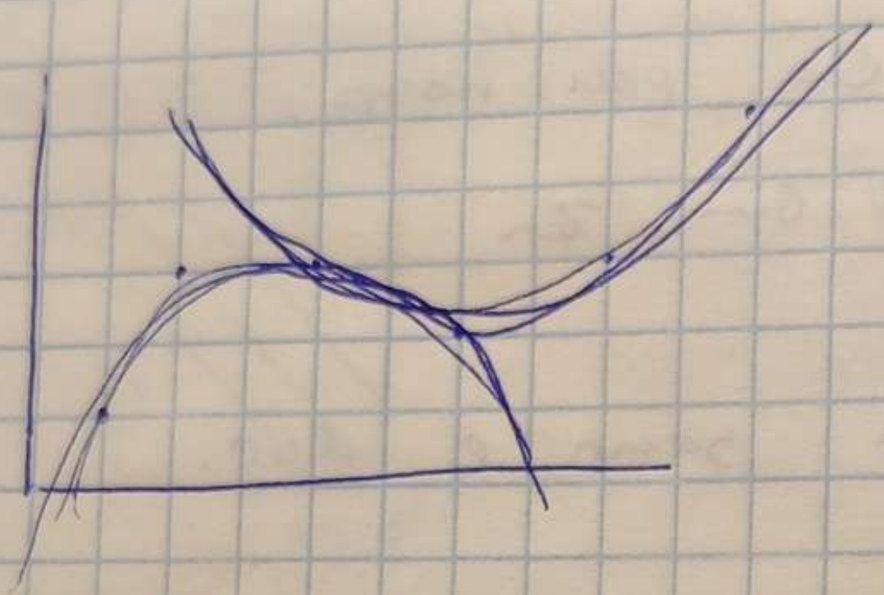
Вот. Сплайн.

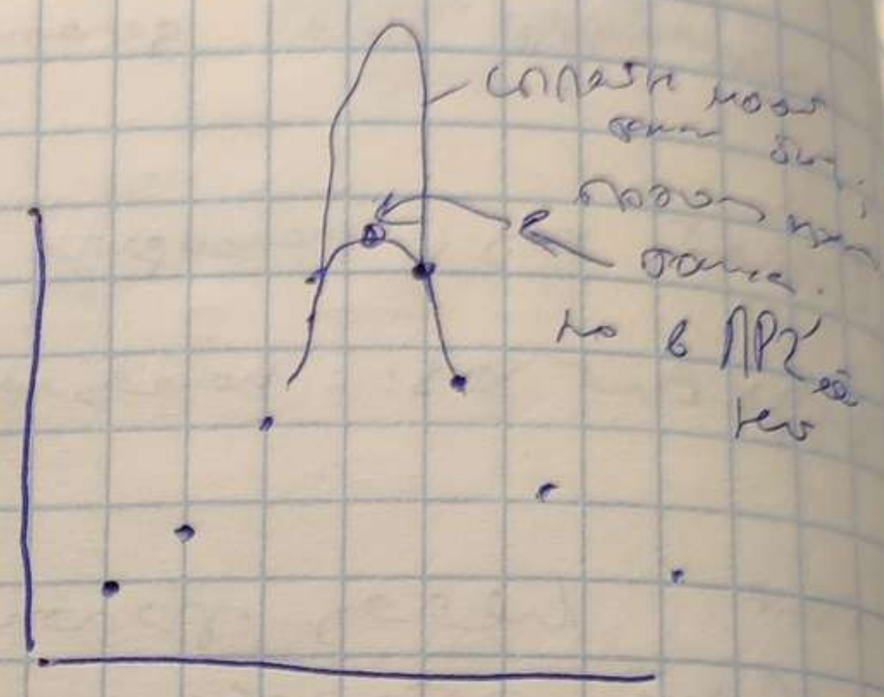
ПОДО: сделать доп. вопр. сплайн
(для сам. на 1000 интерполяций);

можно применять и пратр-ю сплайна

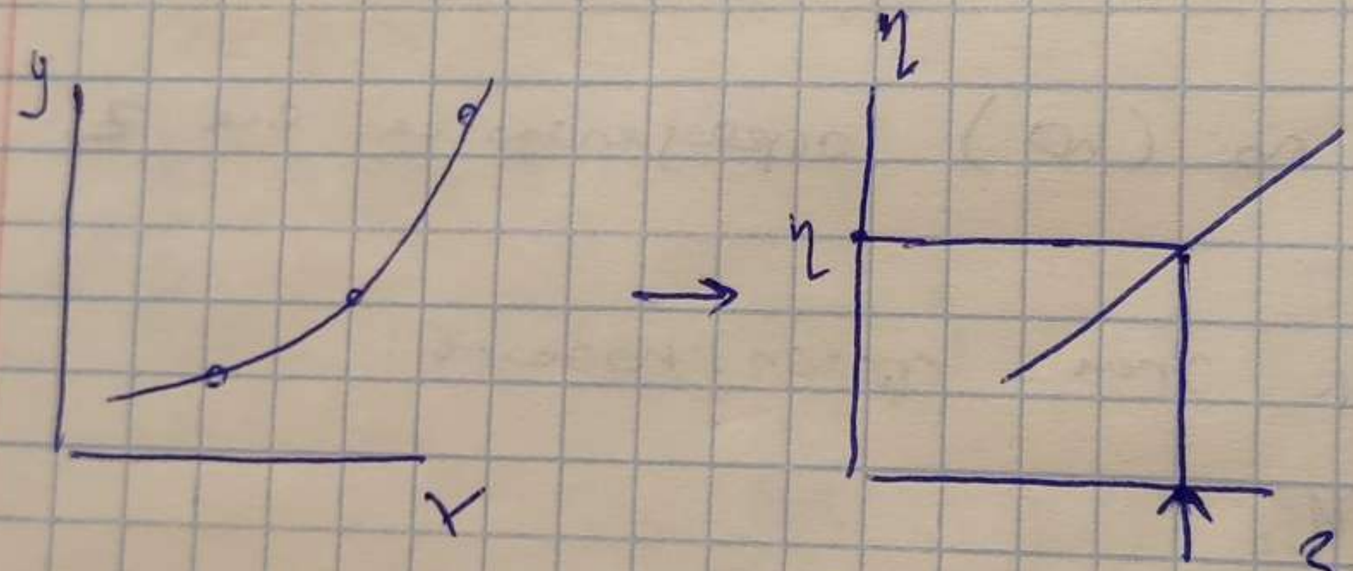
07.03.

Лекция 8.





Нелинейная интерполяция



Выравнивание переменных

$\xi = \xi(x)$ $\quad$ $\eta = \eta(y)$

Пример 1:

$y = ce^{dx}$

$\ln y = \ln c + dx$

$\eta = \ln y; \quad \xi = x$

$\eta = \beta + d\xi$

$y = e^{\eta}$

при линеаризации, выравн. перем. нужно точно вычислить производные

если здесь точно посчит. прежнюю линию

Пример 2.

$y = cx^m$

$\ln y = \ln c + m \ln x$

$\ln y = \eta$, $\ln x = \xi$

$\eta = \alpha + m\xi$ # прямая зависимость в логе

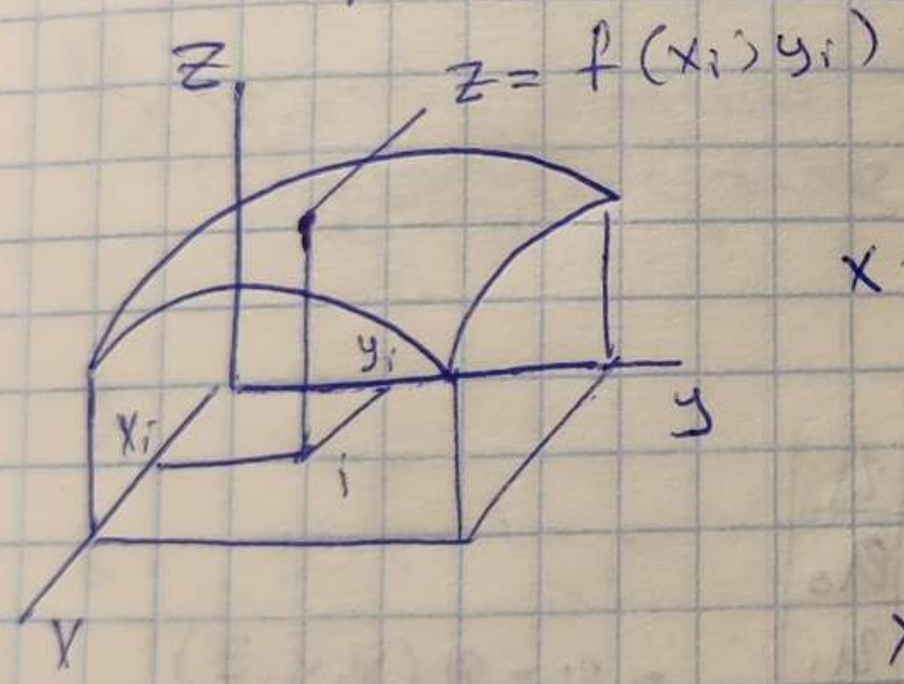
$\underline{y = e^{\eta}}$ # надо не забыть после провед. обр интерполяции

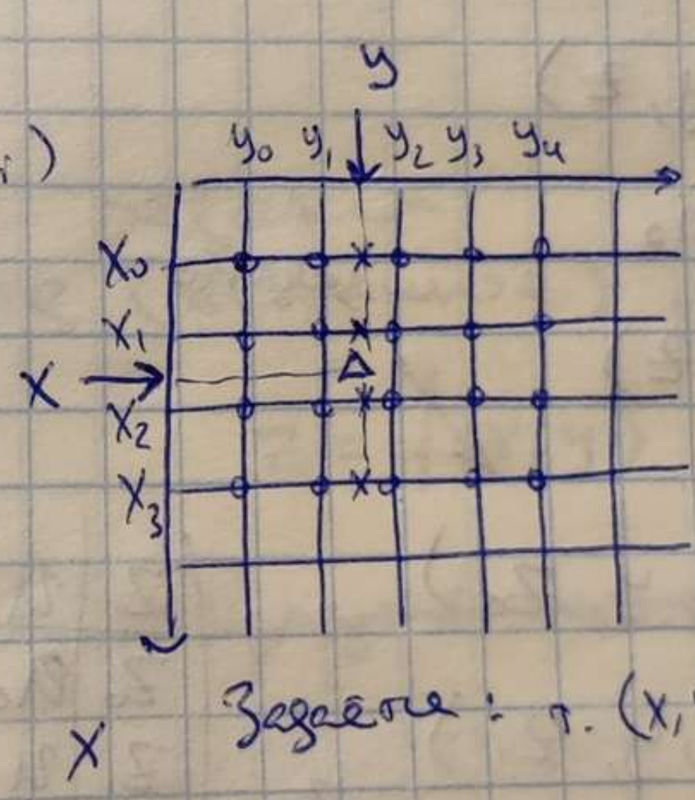
Пр. 3. $y = \frac{a_0}{a_1 + a_2 x^2}$

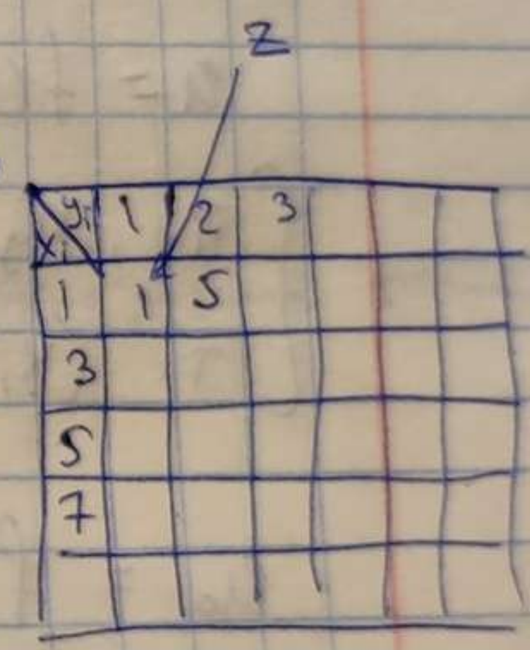
// тоже можно свести к прямой линии

Многомерная интерполяция.

$z = f(x, y)$







Задача: т. (x, y), n_x, n_y — шаги сетки

В случае задачи ф-ии на рег. сетке сильно упрощ., обр. взаимно ⊥ переем, ∥ линиям ∥ осям коорд. (обр., в кот. ф-я задана по x и по y)

Пусть $n_x = 3$, $n_y = 4$;

$z = f(x, y)$; $z_0 = f(x_0, y)$ — проинтерполируем по y, найти z_0

$z_k = f(x_k, y)$

Вернемся к ф-ям:

$z_0 = f(x_0, y_0)$
$z_1 = f(x_1, y_1)$
$\vdots$
$z_3 = f(x_3, y_3)$

$\rightarrow$

X	Z
x_0	z_0
x_1	z_1
x_2	z_2
x_3	z_3

$\rightarrow$ интерп. по z; $\rightarrow z = f(x, y)$

Интерп. по y;

Интерп. по разным напр. независимо. (пока y по выходу; z - по столбцу напр.)

Обобщение на ф-ии ~~3~~ с большим кол-вом переменных проводится почти так же, как было рассмотрено, а именно:

$$u = f(x, y, z)$$

$$\begin{cases} n_x;\ n_y,\ n_z \\ T.\ (x, y, z) \end{cases}$$ - задано.

$u_0 = f(x, y, z_0)$
$u_1 = f(x, y, z_1)$
$\vdots$
$u_{n_z+1} = f(x, y, z_{n_z+1})$

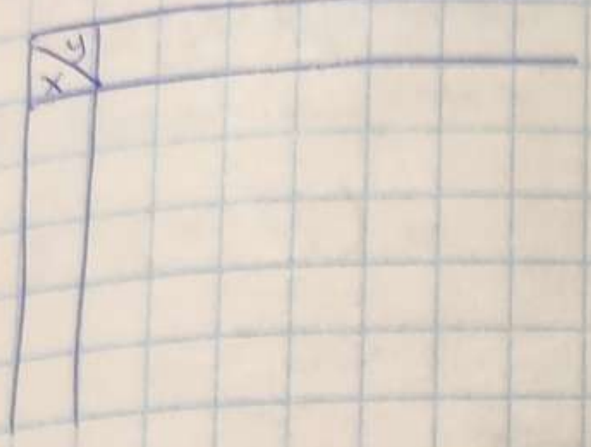
$\xrightarrow{z}$

z	u
z_0	u_0
z_1	u_1
$\vdots$	$\vdots$
z_{n_z+1}	u_{n_z+1}

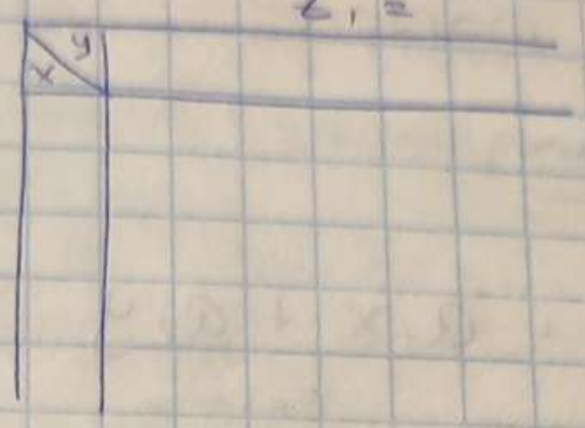
$\rightarrow u = u(x, y, z)$

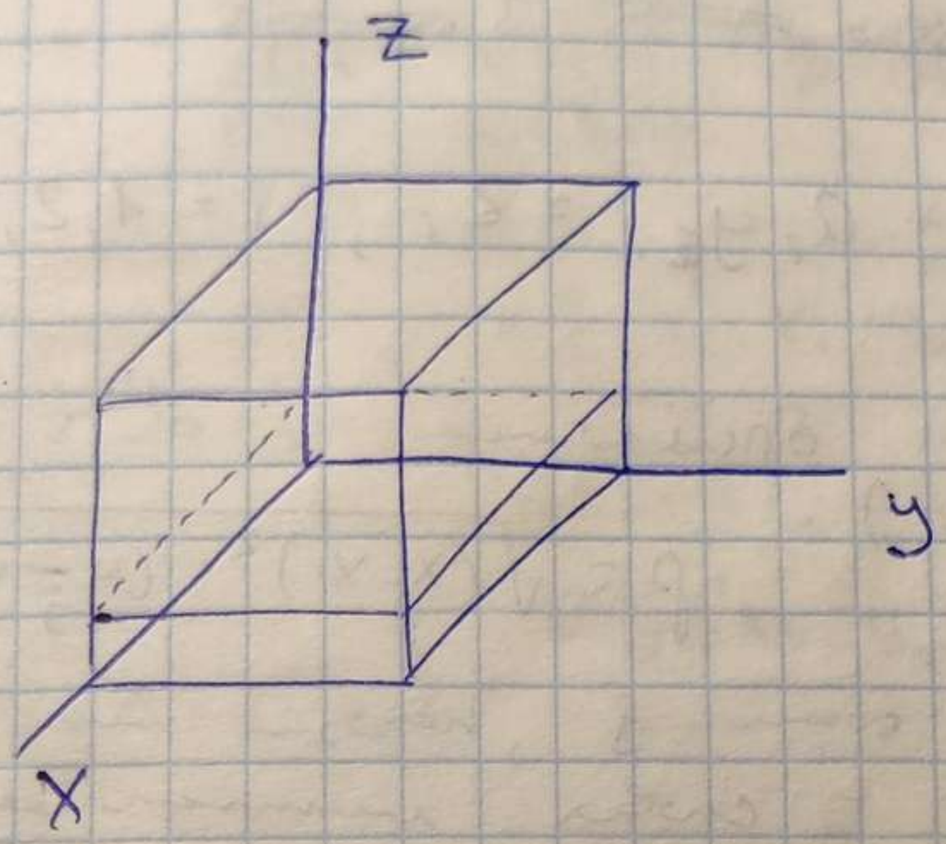
Чтобы проинтерп. ф-ю 10 перем., нужно мин. ф-ю, которая умеет интерп. по 9-ти перем.

$z_0 =$



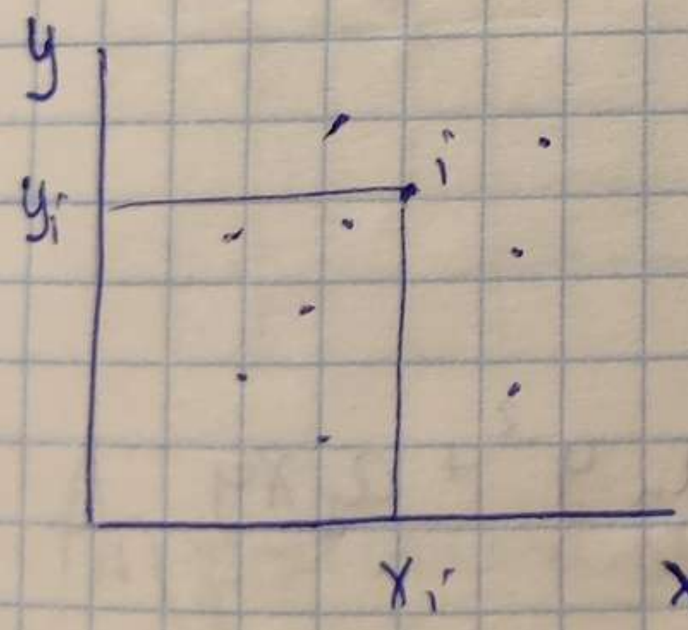
$z_1 =$





Второй случай задания:
нерегулярное (хаотичное) размещение точек

$$z = f(x, y)$$



~~Двумерный полином~~

~~1-й степени~~

при хаотичном размещении точек, задача решается в лоб - строится многомерный полином

Двумерный полином

1-й степени

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

Знаем ⇒ нужно ~~[illegible]~~ выбрать 3 точки

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i = z_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Узлы выбираем близкие (по расстоянию):

$$\rho = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2};$$

перебрали все точки j, нашли ближ. реб; из оставшихся — снова ближайшая

если полин. 1-й степ — точки не должны лежать на одной прямой, иначе $\det = 0$ будет; другие элементы — на одной прямой — $\det = 0$.

2-й степени

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy$$

18:25

Нов-ть 2го порядка определяется по нескольким точкам

Двумерный полином Ньютона

Многомерная интерп. двумерным полин. Ньютона

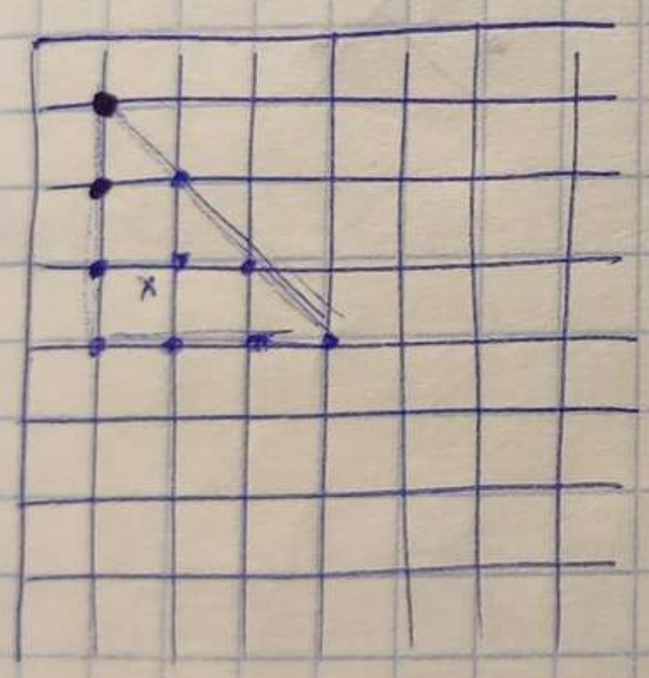
$$P_n(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} z(x_0, x_1, \dots, x_i; y_0, y_1, \dots y_j) \cdot$$

$$\cdot \prod_{p=0}^{i-1} (x - x_p) \prod_{q=0}^{j-1} (y - y_q)$$

$$z(x_0, x_1; y_0, y_1) = \frac{z(x_0, x_1, y_0) - z(x_0, x_1, y_1)}{y_0 - y_1}$$

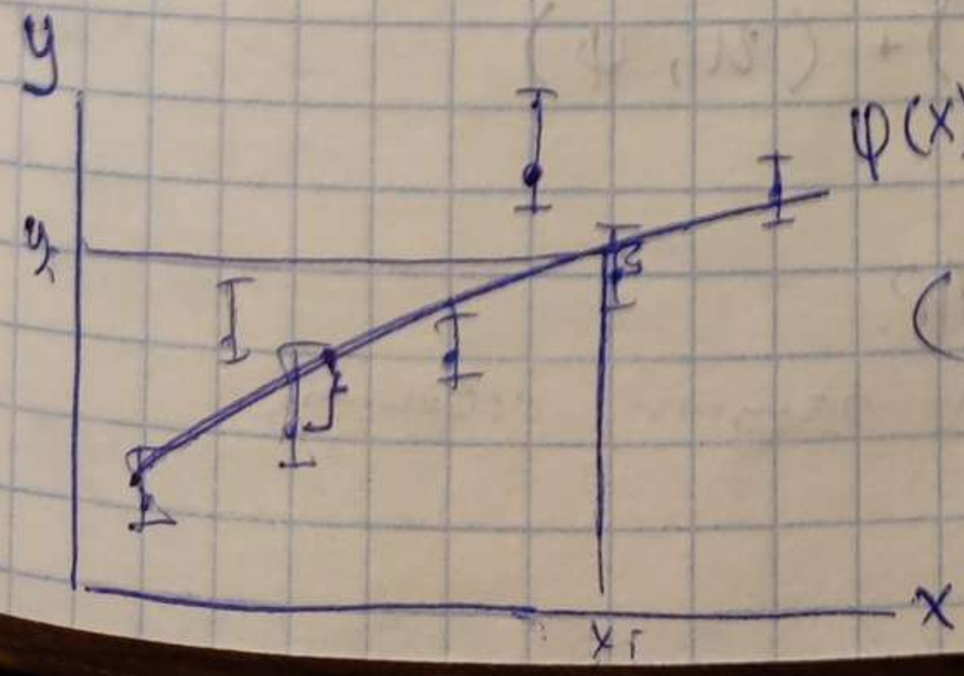
$\leftarrow$ если $-\infty$, то меняем

$$z(x_0, x_1, y_0) = \frac{z(x_0, y_0) - z(x_1, y_0)}{x_0 - x_1}$$



Интерполяция экспонентой

Аппроксимация. Среднее квадратичное приближение



$\varphi(x)$ – аппрокс. кривая

$(y_i - \varphi(x_i))$ – погрешность аппроксимации

Равномерное приближение – имеет минимум максимального отклонения, строит вершины, жёстко

$$I = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \varphi(x_i))^2 \to \min \quad \{\varphi(x)\}$$

(на нем класс ф-ий $\varphi(x)$)

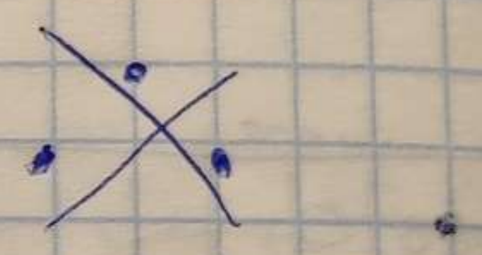
– наилучшее среднеквадратичное (Гильбертово) приближение

Для упрощ. записи введём понятие скалярного произведения сеточных (дискретно-заданных, табличных) функций:

$$(f, \psi) = \sum_{i=0}^{n} \rho_i f(x_i) \psi(x_i)$$

↑ каждой точке приписываем вес, чем больше вес, – тем ближе $\varphi(x)$ к точке.

#Веса зат зат степень свободы



$$I = ((y - \varphi), (y - \varphi))$$

1. $(f, \psi) = (\psi, f)$
2. $(cf, \psi) = c(f, \psi)$

18:48

3. $(f + u, \psi) = (f, \psi) + (u, \psi)$

// во 2 модуле будет 2 ЛР.
// в конце ЛР нужно вопр. для защиты, обязат.,
подготовиться

Лекция 4.

Наилучшее ср.-кв. приближ.

21.03.23

Сумма квадратов отклонения → min.

$$I = \sum_{i=0}^{N} \rho_i [y_i - \varphi(x_i)]^2 \equiv \sum_{i=0}^{N} \rho_i [y_i - \varphi(x_i)][y_i - \varphi(x_i)] =$$

← суммирование по точкам

$$\equiv ((y-\varphi), (y-\varphi))$$

Исп-е св-ва скалярн. пр-я в функц. пространстве:

$$I = (y, y) - 2(y, \varphi) + (\varphi, \varphi)$$

Предст. φ в виде обобщ. многочлена базисных ф-й

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{} \underbrace{\varphi_k}_{}(x)$$

← суммирование по номерам базисных ф-й

степени ф-ии; станд. полин. Эрмита, Чебышева, Лежандра

некий набор ЛНЗ ф-й

(лин. т.к. неизв. коэф. входят линейно)(?)

$$I = (y, y) - 2\left(y, \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k\right) + (\varphi, \varphi) =$$

в этом выр. уже всё, кроме коэф.: $I = I(a_0, a_1, \dots, a_n)$

$$= (y, y) - 2\sum_{k=0}^{n} a_k (y, \varphi_k) + \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n} a_k \cdot a_m (\varphi_k, \varphi_m) \to \min$$

потом всё равно придётся к этому переходить

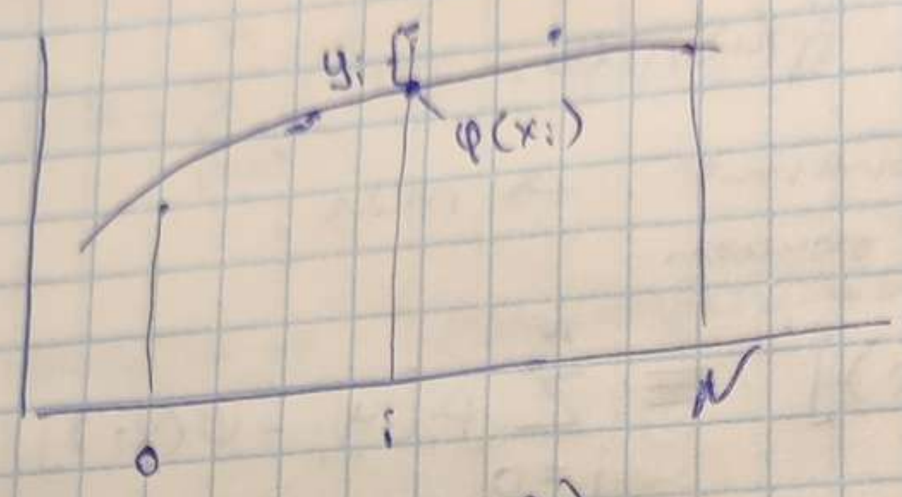
Имеем сумму многих переменных a_k, ФНП m.

min. есть все произв. ~~по перв~~ по нез. пер. равны 0;

экстремум окажется минимумом, но мы проверять не будем

Для отыск. мин., необх. вычисл. пр-е $\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0$, $k = 0, 1 \dots n$

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0 + \dots + a_i\varphi_i + \dots + a_n\varphi_n$$



$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (?) \qquad \varphi(x_i) = \Sigma = y_i \quad (?)$$

Дифференцируем по k

$$-2(y, \varphi_k) + 2\sum_{m=0}^{n} a_m (\varphi_k, \varphi_m) = 0$$

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{n} (\varphi_k, \varphi_m) a_m = (y, \varphi_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n \equiv \overline{0,n}$$

сист из $(n+1)$ неизв. сис опр. коэф a_k

$$\begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \dots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix}$$ – опр. Грамма

если этот опр-ль $\neq 0$, то

(?) Наилучш. ср.кв. приближ. ф-ии, представ. в виде суммы ЛНЗ. ф-й существует.

ф-я положительная.

В простом и самом распр. варианте:

$\varphi_k(x) = x^k$

Тогда:

$$\sum_{m=0}^{n} (x^k, x^m) a_m = (y, x^k), \quad k=\overline{0,n} \qquad (1)$$

$$(x^k, x^m) = \sum_{i=0}^{N} \rho_i (x_i^k \cdot x_i^m) = \sum_{i=0}^{N} \rho_i x_i^{k+m}$$

$$(y, x^k) = \sum_{i=0}^{N} \rho_i y_i x_i^k$$

скалярные пр-я

Пример:

$n=1, \quad \varphi_k(x) = x^k$

Тогда $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$

Из (1): $\underline{k=0}$,

$$\begin{cases} (x^0, x^0) a_0 + (x^0, x^1) a_1 = (y, x^0) \\ \underline{k=1}, \ (x^1, x^0) a_0 + (x^1, x^1) a_1 = (y, x^1) \end{cases}$$

Распр. скалярные пр-я:

(слева направо по строке)

$$\sum_{i=0}^{N} \rho_i \cdot a_0 + \sum_{i=0}^{N} \rho_i x_i a_1 = \sum_{i=0}^{N} \rho_i y_i$$

$$\sum_{i=0}^{N} \rho_i x_i a_0 + \sum_{i=0}^{N} \rho_i x_i^2 a_1 = \sum_{i=0}^{N} \rho_i y_i x_i$$

→ всё время умн. на x_i

↓ всё вр. умн. на x_i

Лучше самим проги писать; ~~это вы~~ выгоднее было написать, чем в нужных разобраться

это будет из решения систем ур.

Разн. сист. ур-й в общ. случае ~~реш~~ решается методом Гаусса.

сначала к верхнетреуг. виду; потом назад и единичный привести

Решение: Воспользуемся формулами Крамера:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=0}^{N} p_i y_i \cdot \sum_{i=0}^{N} p_i x_i^2 - \sum_{i=0}^{N} p_i y_i x_i \cdot \sum_{i=0}^{N} p_i x_i}{\sum_{i=0}^{N} p_i \sum_{i=0}^{N} p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{N} p_i x_i\right)^2}$$

~~# 25~~

сколько в базис о-л - столько и ур-й - столько и неизвестных

;

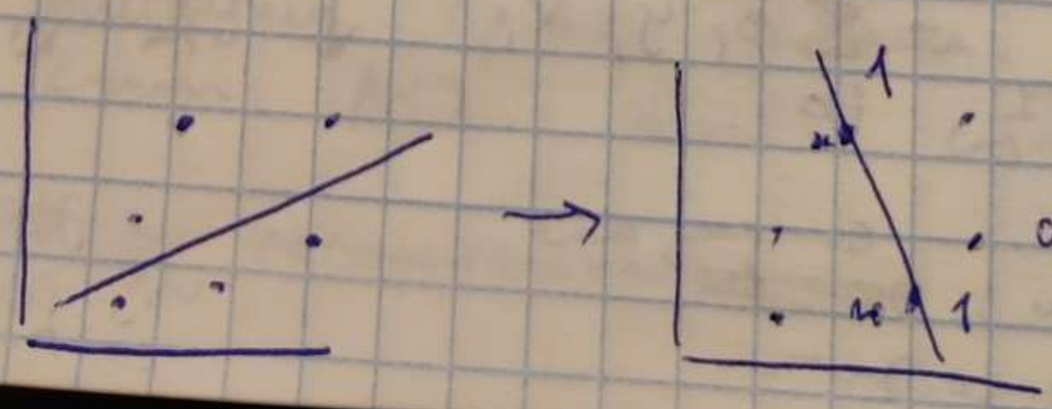
$$a_1 = \frac{\dots}{\det}$$

Вот это метод наим. квадратов.

Веса - это „ценность" точки.

Напр.: $p_i \sim \frac{1}{\varepsilon_i^2}$ - точность; чем точнее задана точка, тем больше у неё вес

веса дают новую степень свободы



$\varphi_k = x^k$ + дискр. точки

- метод наим. квадратов называется

$n \ll N$ $(n = 1; 2;\ N = 10)$

если выбир. степ. полинома $n = N-1$

- есть возм. подгр. полином точно по этим точкам; причем точно пройдет по узлам;

ср. кв. приближ. прямр в прошлр интерполяция.

2п. - прямая линия

3п. - парабола, прох. по точкам

Как сист. программы?

1)

2) зад. 20 т.; подбор полином 1 степ; проверк. ~~вес~~ вес 3 разн. точек; посм. отн. ли прям

3) задать 5-7 т.; $n = N-1$; кривая больше точно пройдет по этим точкам

сверхвысокие ст-ни не ортогональны, поэтому

$n \leq 5-6, 7$; опр-м

если $n \geq N$ иногда будет рег., иногда не будет (деление на 0), будет попытка рассчитывать в определителе.

Замечание: разделенную разность было бы сделано в лаб.

$$I = \sum_{i=0}^{N} p_i \left(y_i - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots a_n x^n\right)^2$$

- продиф. его по a_i, $i = \overline{0,n}$ $\left\{ \frac{\partial I}{\partial a_i} = 0, \; i = \overline{0,n} \right.$, получим

то же самое.

$z = f(x, y)$

$z = a_0 + a_1 x + a_2 y$

ЛР4

16 нед.

$$J = \sum_{i=0}^{N} p_i \left(z_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 y_i\right)^2 \to \min$$

прогноз.

Приближение методом наим. кв-в
(как решать диф-ур. и использ. этот подход)
(можно еще интегр. ~~диф~~ ур.)

Прим. дискретного метода наим. квадратов
и решение диф. ур-я второго порядка
(~~краевые усл.~~).
(прилож. к реш. краевых задач)

Задача - найти такую ф-ю, уд. обеим
усл. - с ур-е сист. покоящ.

$$\begin{cases} \overbrace{u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u}^{Lu \text{ - диф. оператор}} = f(x) \\ \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = A \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = B \\ a \le x \le b \end{cases}$$

#краевые усл

Найти приближ. решение этого ур-я,
(точного - нет); хотим получить в виде ф-ии;
для любого x.
(в виде разл-я по наим-ю ф-ии)

Добавим ~~в~~ пробл. реш. в виде ряда по какому-н. базису.

Базис (ЛНЗ сист.): $u_0(x), u_1(x) \dots u_n(x)$

u_0 должна удовл. однор. ур-ю, кроме $A, B \neq 0$

$$\begin{cases} Lu = f(x) \\ l_a u = A \\ l_b u = B \end{cases}$$

u_0 подбир. из усл. что $\left.\begin{matrix} l_a u_0 = A \\ l_b u_0 = B \end{matrix}\right\}$ неоднор. гр. усл.

$u_1, \dots, u_n$ – подбир. из условия $\left.\begin{matrix} l_a u_k = 0 \\ l_b u_k = 0 \end{matrix}\right\}$ однор. гр. усл-я

Решение ищем в виде
(приближ.; n – полное)

$$y(x) = u_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x)$$; такая y уд. чрезв. условиям

Если y подст. в ур-е, получ. нек. число –

Подставим наше решение y в исходное ур-е;
Левая часть не совпадает с правой и получим „невязку".

$$R(x_i, c_1, \dots, c_n) = Ly(x_i) - f(x) = Lu_0(x_i) + \sum_{k=1}^{n} c_k L u_k(x_i) - f(x_i)$$

оператор линейный ⇒ вып. всё, что вып. для лин. опер. КАЛОНОВА

$$c_k \to \sum_{i=0}^{N} R^2(x_i, c_1, \dots, c_n) \to \min$$

т.е. $\frac{\partial I}{\partial c_k} = 0, \quad k = \overline{1,n}$.

Сумма нв. отн. должна быть мин.

<u>Пример:</u> Решить ур-е

$$\begin{cases} u'' + (1+x^2)u + 1 = 0 \\ u(\pm 1) = 0 \end{cases}$$

<u>Базис:</u>

$u_0(x) = 0$ очевидно

$u_k(x) = x^{2k-2}(1-x^2)$

$u_1(x) = 1 - x^2$

$u_2(x) = x^2(1-x^2) = x^2 - x^4$

кр-усл. удовл.; осталось уд. сист ур-я.

решение симметричное; кр-усл. сим.

В силу св-в симметри рассм отр. $[0;1]$:

$y(x) = c_1(1-x^2) + c_2(x^2-x^4)$

$y'(x) = -2xc_1 + c_2(2x-4x^3)$

$y''(x) = -2c_1 + c_2(2-12x^2)$

Получим невязку:

$R(x_i, c_1, c_2) = 1 - (1+x_i^4)c_1 + (2-11x_i^2+x_i^6)c_2$

#поскольку у нас и

#невязка в каждой точке зависит от x_i

Составляем сумму невязок

$$I = \sum_{i=0}^{N} R(x_i, c_1, c_2) = \sum_{i=0}^{N} (1+\alpha_i c_1 + \beta_i c_2)^2 \to \min,$$

где $\alpha_i = -(1+x_i)^4$, $\beta_i = (2-11x_i^2 - x_i^6)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial c_1} = 0 = \sum_{i=0}^{N} 2(1+\alpha_i c_1 + \beta_i c_2)\alpha_i = \\ \overset{/2}{=} \sum_{i=0}^{N} \alpha_i + \sum_{i=0}^{N} \alpha_i^2 c_1 + \sum_{i=0}^{N} \beta_i \alpha_i c_2 = 0 \quad (/2) \\ \dfrac{\partial I}{\partial c_2} = 0 = \ldots = \sum_{i=0}^{N} \beta_i + \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \beta_i c_1 + \sum_{i=0}^{N} \beta_i^2 c_2 = 0 \end{cases}$$

- сист. для опр c_1, c_2.

Мы выбрали такие точки: $x = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

#поближе выбрать; не нам же их искать.

$$\begin{cases} 4{,}870 \cdot c_1 + 3{,}243\, c_2 = 4{,}383 \\ 3{,}243\, c_1 + 25{,}366\, c_2 = 1{,}819 \end{cases}$$

$c_1 = 0{,}932$

$c_2 = -0{,}0474$

$y(x) = 0{,}932(1-x^2) - 0{,}0474(x^2 - x^4)$

- поб. провести предв. анализ решения; тест. на инт. неров. с помощ. пот. ур-я лучше решать.

Но надо будет подобр. фиг, чтобы для УЗ. решал не зан. произвольно выбрана

$x=0,\ y=1$ $\quad u_0(x)=1-x$

$x=1,\ y=0$ $\quad u_1(x)=x(1-x)$

$u_2(x)=x^2(1-x)$

зачем задать 0 на концах

если подбор ф., чтобы они удов. кравн. зад. УЗ.

но они должны быть ЛНЗ.

Метод Коллокации - приравнивает невязки к 0, производные не вычисляем

невязка - несоотв. между ЛЧ и ПрЧ

сравнение пол., чтобы уже совпадало с нек. точках

выб. 2 точ., прир. невязку к 0

(если 2 конц. точки надо)

выб. нек. точ., в кот. совп. УЗ.

~~# но это менее строгое условие~~

в методе наим. кв. - исп. наим. знач. в гильбертовом пространстве

метод Коллокации - более строгое условие; но он можно лишь опр. кол-во точек ~~фик~~ вуз в методе м. кв. - само упуд.

на моделировании всё нам пригодится, в численных методах

Лекция 5.

04.04.

2 модуль зачаны на 11 нед. – 2 ЛР;
3 модуль – 2 ЛР; # зачёт ставится по итогам защиты модулей

Аппроксимацию а-5 запомнить.

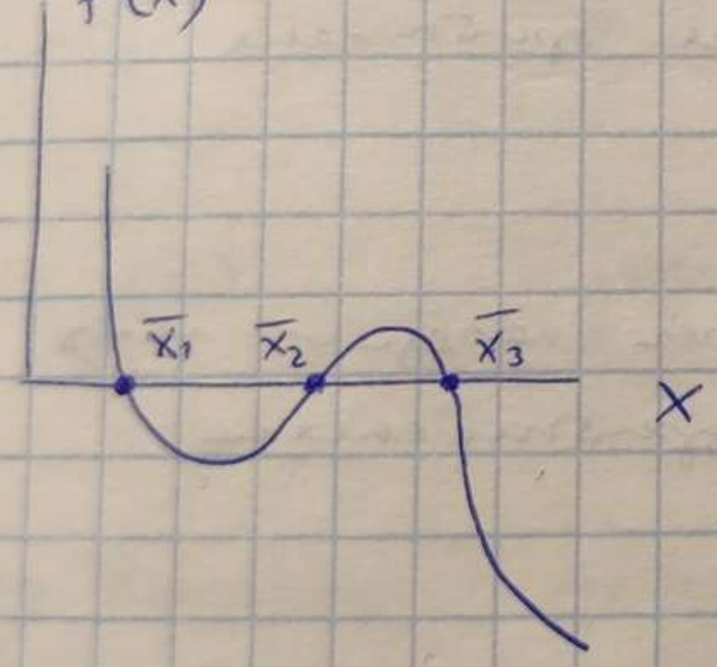
Нелинейные уравнения.

При реш. нелин. – сводим их к лин. системам.

На посл. лекции – много методов при реш СЛАУ:

Расс. одно ур-е с одним неизв.

1. Нелинейное ур-е $f(x)=0$.



$\bar{x}_i$ – корни;

как правило, аналит. реш. нелин. ур-е невозм; только численно.

1.1. Метод простой итерации

$x=\varphi(x)$ – можно сделать всегда

$\varphi(x)=x+\psi(x)\cdot f(x)$; $\psi(x)$ – любая ф-я (всегда мно полож. либо отр.)

$\cancel{x}=\cancel{x}+\psi(x)\cdot f(x)$

$\psi(x)\cdot f(x)=0$

$f(x)=0$

$x^{(s)} = \varphi(x^{(s-1)})$ — метод простых итераций — берём пос. нач. приближение

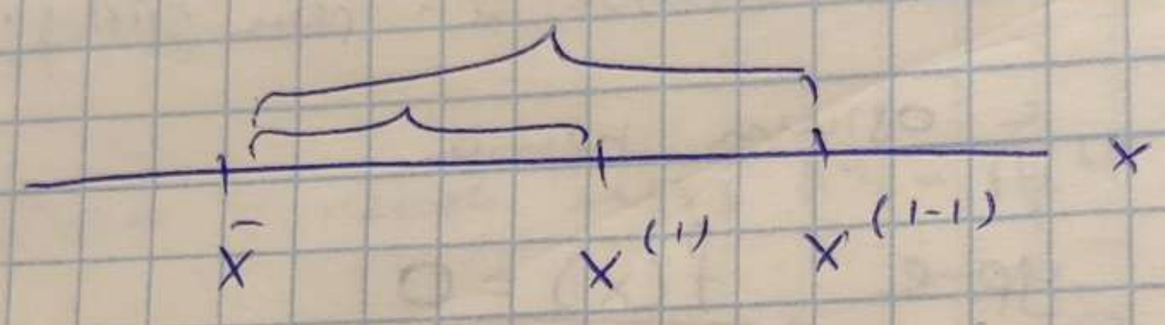
Пусть $\bar{x}$ — точный корень уравнения.

$x^{(1)} - \bar{x} = \varphi(x^{(s-1)}) - \varphi(\bar{x}) =$ # особенности только лин. члены; вообще — ~~φ~~ ос. ин. с остат. погрешнос. изо # $\varphi'(\xi)$

разложим в ряд Тейлора

$= \varphi(\bar{x}) + \varphi'(x')\frac{(x^{(1)} - \bar{x})}{1!} - \varphi(\bar{x}) = \varphi'(\bar{x})\xi \cdot$

$\cdot (x^{(s-1)} - \bar{x})$



Если $|\varphi'(\bar{x})| < 1$, то процесс будет сходиться; наз. последующее приближение будет приближ. корня.

Когда $\varphi' < 0$ — хорошо; корни находятся под двумя последовательными приближениями; меняется знак наз. рез.

Если $|\varphi'(\bar{x})| \geq 1$ — не сходится; удаляемся от корня.

Сходимость — метод простых итераций — линейная сходимость — отн. медленная.

1.2. Метод Ньютона

$x^{(s-1)}$

$f(x^{(s)}) = f(x^{(s-1)}) + f'(x^{(s-1)})(x^{(s)} - x^{(s-1)}) = 0$

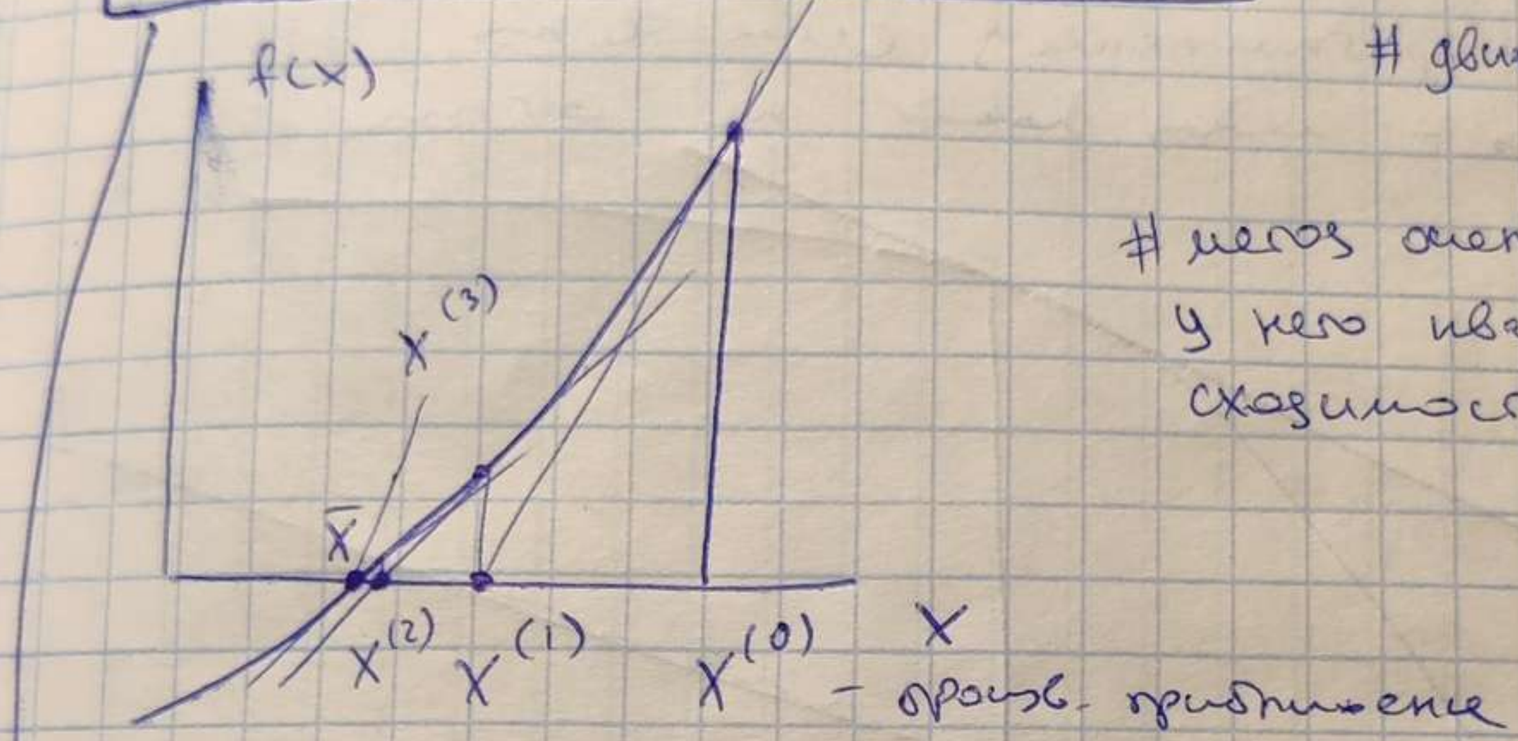
$$\Delta x^{(s)} = x^{(s)} - x^{(s-1)}$$

$$f(x^{(s-1)}) + f'(x^{(s-1)})\,\Delta x^{(s)} = 0$$

$$\Delta x^{(s)} = x^{(s)} - x^{(s-1)} = -\frac{f(x^{(s-1)})}{f'(x^{(s-1)})}$$

$$\underbrace{x^{(s)} = x^{(s-1)} - \frac{f(x^{(s-1)})}{f'(x^{(s-1)})}}$$ – ф-ла Ньютона

движение вдоль касательной



метод очень быстрый, у него квадратичная сходимость.

– произв. приближение

$$x^{(s)} = \varphi(x^{(s-1)}) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Метод Ньютона – метод простой итерации с пог. правой часть выбрана таким образом.

$$x^{(s)} - \bar{x} = \varphi(x^{(s-1)}) - \varphi(\bar{x}) =$$

$$= \cancel{\varphi(\bar{x})} + \cancel{\varphi'(\bar{x})}\,(x^{(s-1)} - \bar{x}) + \frac{\varphi''(\bar{x})}{2!}(x^{(s-1)} - \bar{x})^2 + \ldots -$$

$$\varphi'(\bar{x}) \to 0$$

$$- \cancel{\varphi(\bar{x})}$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} =$$

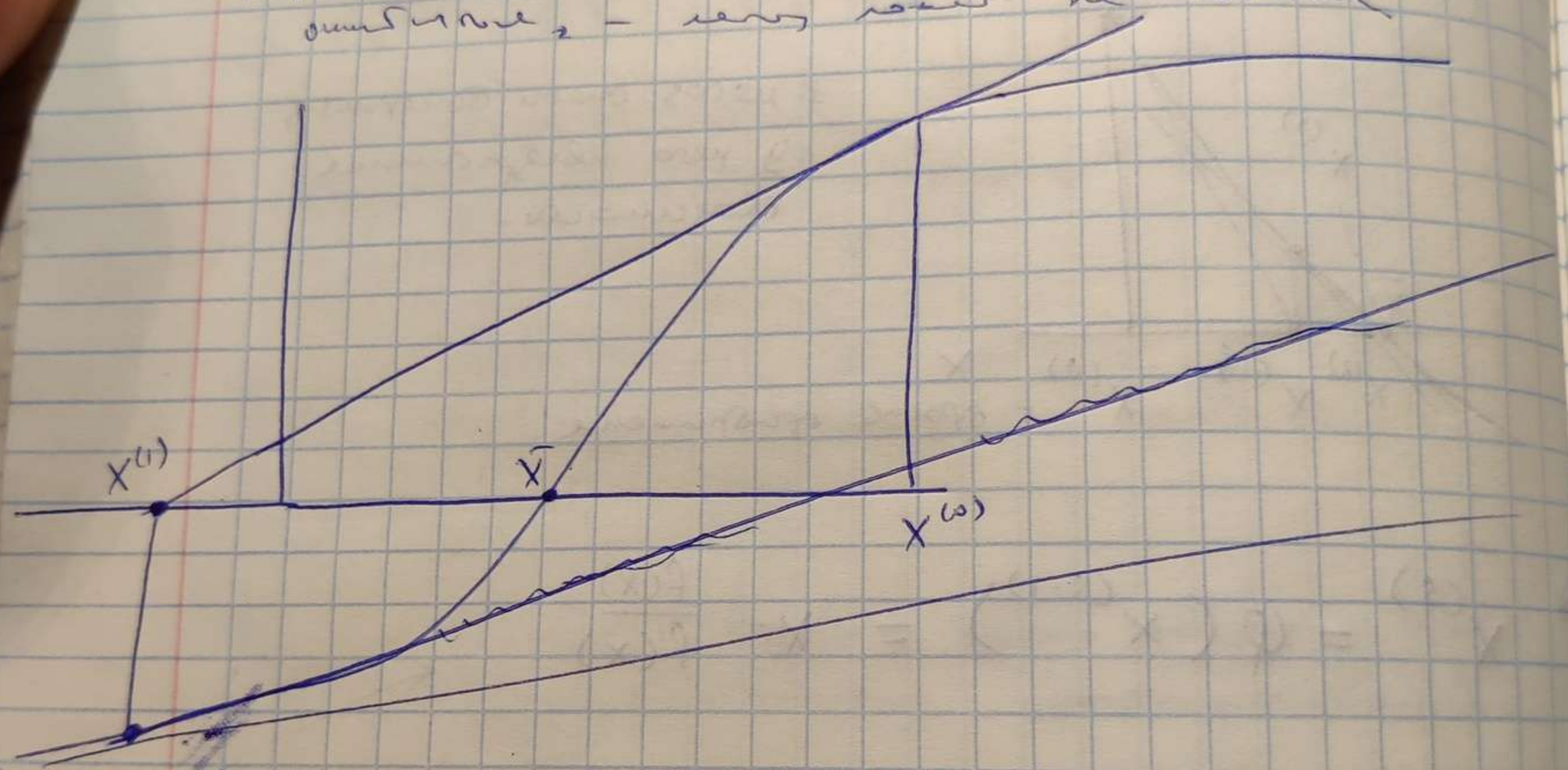
$$= \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}, \quad \varphi'(\bar{x}) = 0$$

$$x^{(s)} - \bar{x} = \frac{\varphi''(\bar{x})}{2!}\left(x^{(s-1)} - \bar{x}\right)^2$$

Высокая сходимость среди всех методов; применительно к Сист. Нелин. ур. — единственный применимый.

Проблемы метода Ньютона:

- начальное приближение; если с ним ошибиться, — метод может не сойтись



можно найти корень, а потом его приближать; удобнее метода Ньютона с любой точности

отсюда тем, что желательно будет приближаться и ∅ при приближ. к корню ~~крат~~ нечетн. кратности.

когда наши хаотичные повед. — кор. по приближ. ∞ раз — остановим итерационный процесс и отсеиваем то что получилось, когда сумма величины было положительным.

1.3. Метод секущих (производная заменяется двумя точками)

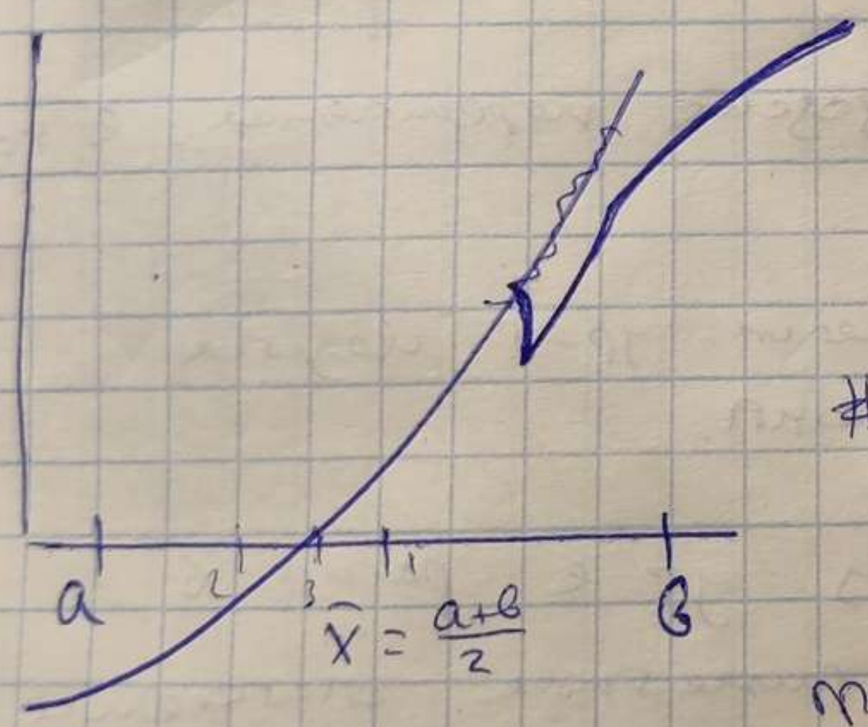
1.4. Метод хорд

1.5. Дихотомия (метод половинного деления)

1.6. Метод парабол (сетка; 2 точки заменяем прямой; сверху точная функция — данным методом можно отыскивать комплексные корни)! (но хорошая для примен. других методов)

1.7. Обратная интерполяция — грубая оценка; от степени полинома зависит

Среди всех самый надёжный — дихотомия; как только достиг. участок, на кот. точно есть корень — найдём его всегда.



$f(a) \cdot f(\bar{x}) < 0, \; b = \bar{x}$

else, $a = \bar{x}$

дихотомия; медленный, но надёжный; но им нельзя найти корни чётной кратности

Мейн. недостаток — метод не обобщается на системы уравнений; (если бы обобщался — точно его бы и использовали)

в методе Ньютона точности 3 знака

всё время численно вычисляется

$$y = \int_a^x (\qquad) dx = 0$$

$$\left| \frac{b-a}{\bar{x}} \right| < \varepsilon$$ такое усл. оконч.; x м.б. $\to 0$

$|b-a| < \varepsilon |\bar{x}| + \varepsilon_1$ — усл. окончания поиска корня.

10^{-5} — это хватает

ПР5 # Все эти вопросы не разные, а не полно опис
1 реш. сист. нелин. ур-й.

2. Системы нелинейных уравнений.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\underline{\bar{f}(\bar{x}) = 0}$$

задача переписана в ноч

задача отыск. реш. сист. нелин. ур-й сводится к поиску экстремума ФНП.
(поиск единственный) (-Рассена)

Метод Ньютона – наход. ур-е расп. в ряд Тейлора; удерж. линейное слагаемое; получает СЛАУ. разло. в ряд Тейлора в точке (s) (точка многомерная)

$$f_k(x_1^{(s)} \dots x_n^{(s)}) =$$

$$= f_k(x_1^{(s-1)}, x_2^{(s-1)}, \dots, x_n^{(s-1)}) +$$

$$+ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}\Big|_{s-1}(x_1^{(s)} - x_1^{(s-1)}) + \frac{\partial f_k}{\partial x_2}\Big|_{s-1}(x_2^{(s)} - x_2^{(s-1)})$$

(в точке s-1)

$$+ \dots + \frac{\partial f_k}{\partial f_n}\Big|_{s-1} (x_n^{(s)} - x_n^{(s-1)}) = 0$$

~~#Пер~~ # для всех 0-5 делаем. Надо найти - $x^{(1)}$ (?)

линеаризовали СУ по Ньютону

$$x_i^{(s)} - x_i^{(s-1)} = \Delta x_i^{(s)}$$ - обозначим так;

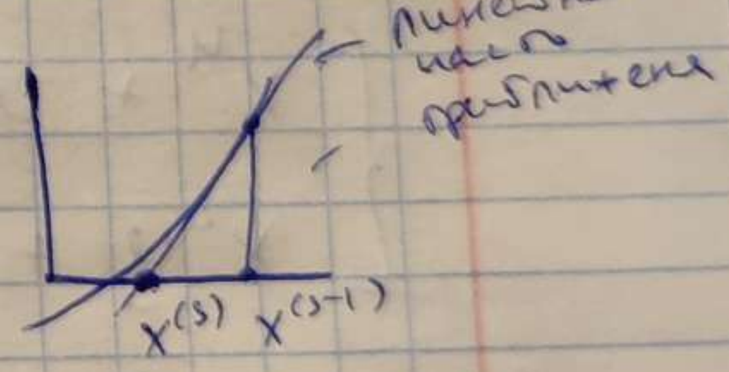
после этого СУ прим. опред. вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial i}\Big|_{s-1} \cdot \Delta x_i^{(s)} = -f_k(x_1^{(s-1)}, \dots, x_n^{(s-1)}), k=\overline{1,n}$$

(итерация)

матрица этой системы - производные по соотв. переменным:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$ - матрица Якоби



(Г)(?)

теорема Канторовича сущ. реш.;

на практике задаём:

- нач. приближение $\bar{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$ # переменных м.б. высока.

в основном приходится решать нелинейные задачи;

прих. к лин.; нел. изв. подходы

Как упростить полин. наш приближение:

1) можно перейти к логарифмам → метод корня только в u^+.

2) в термодинамике – сложные непрер. системы; многомерная пов-ть с одним экстремумом – ток минимум энергии; 2) → системе наложены на нач. ограничения;

переход к логарифмам позв. изб. от рассм. отриц. энергий.

Пример: Линеаризовать систему ур-й: (для $n=2$)

$$\begin{cases} x^4 + \cos(xy) = 5 \\ x^2 y + y^2 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + \cos(xy) - 5 = 0 \\ x^2 y + y^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

это всё просто числа

$$\begin{cases} \left(4x^3 - \sin(xy)\, y\right)\Big|_{(s-1)} \Delta x^{(s)} - \sin(xy)\, x\Big|_{(s-1)} \Delta y^{(s)} = \\ = \left(5 - x^4 - \cos(xy)\right)\Big|_{(s-1)} \\ 2xy\Big|_{s-1} \cdot \Delta x^{(s)} + \left(x^2 + 2y\right)\Big|_{s-1} \Delta y^{(s)} = \left(8 - x^2 y - y^2\right)\Big|_{s-1} \end{cases}$$

– находим $\Delta x^{(s)}, \Delta y^{(s)} \longrightarrow \begin{cases} x^{(s)} = x^{(s-1)} + \Delta x^{(s)} \\ y^{(s)} = y^{(s-1)} + \Delta y^{(s)} \end{cases}$

и т.д. находим до тех пор, пока

$$\left| \frac{\Delta X^{(s)}}{X^{(s)}} \right| < \varepsilon \quad , \quad \left| \frac{\Delta y^{(s)}}{y^{(s)}} \right| < \varepsilon$$

удовл.

получ. новую СЛАУ

продолжает процесс, пока в общ. случае:

$$\max_{1 \le i \le n} \left| \frac{\Delta X_i^{(s)}}{X_i^{(s)}} \right| < \underline{\varepsilon} \qquad (*)$$

$10^{-4} - 10^{-6}$ (обрезание)

(ранее ОДУ $10^{-4} - 10^{-5}$)

1) ~~Линеризуем~~

2) ~~Заданное нач.~~

3) ~~рен оти X~~

4) ~~реш. нов. прогн.~~

вычисл. мат. должны знать позн, эконом. разраб - ПО

Алгоритм метода Ньютона:

1) Линеаризуем сист; раскладывая каждое ур-е системы в ряд Тейлора, ост-но предыдущего приближение $X_i^{(s-1)}$

2) Зададим начальным приближением

$$\bar{X}^{(0)} = (X_1^{(0)}, X_2^{(0)} \dots X_n^{(0)})^T$$

(с потолка; но в общ. случае-не совсем с потолка - примерно понимаем, где корень)

(в общ. случ., понимаем куда решать)

3) находим производные, вход. в матрицу линеар. системы и правую часть

(в СЛАУ; матр. ур. RHS ур.)

4) находим все ΔX_i на первой итерации; $X_i^{(1)} = X_i^{(0)} + \Delta X_i^{(1)}$

5) находим все переменные $X_i^{(1)}$

6) при найденном X_i, находим

7) $0 \to s-1$; $1 \to s$ процесс продолжается с членом $0 \to s-1$; $1 \to s$

8) процесс обусловливается, когда (*)

ЛР5 # реш. нелин ДУ 2-го порядка ... лог

на некот лекции дадут ЛР5, новые без начней

ЛР3

по 4м точкам повторяется (?)

18.04

Лекция 6.

на сл. неделе тоже что и ЛР, ОК, НК.

обязательно сначала реализ. алг., нет разъяснения;

принцип. правило, нет ~~...~~ не программируем, СЛАУ;

обязательно выбрать шаг;

~~...~~ диск. зад. начальн; ~~...~~ какие выбрать правил, чтобы

не зам реализ. алг

Пример. Решение методом Ньютона нелинейных разностных схем.

(наиболее сложн и на практике наиб. часто применяется этот метод) в ЛР5 будет приготовлен)

реш. краевой задачи

$$\begin{cases} u''(x) = f(x, u) \\ a \le x \le b \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases} \quad (1)$$

в ЛР4 можно прибегнуть к аналог. реш.

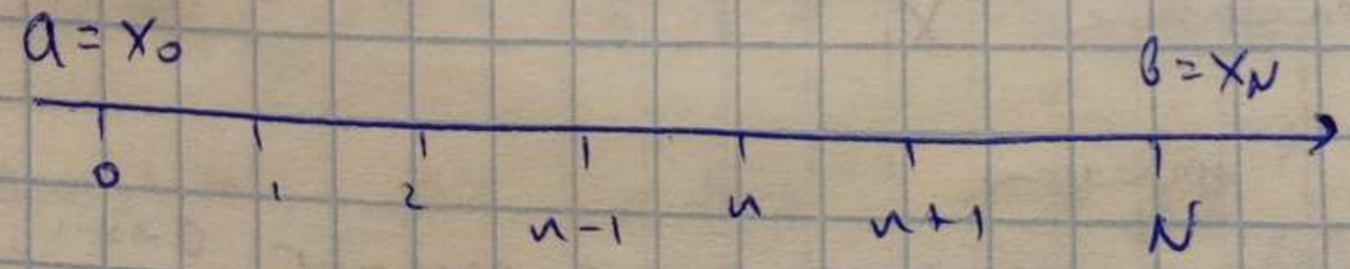
нам-то нелин. о-л

(напр.: $f(x,u) = ue^{-u^2 x}$)

исходные условия задачи

будем искать решение задачи; введем сетку

$f(x,u)$, α, β



$$\omega_h = \{ x_n : x_n = a + nh,\ n = \overline{0,N},\ h = \frac{b-a}{N} \}$$

пусть α — то значит симметрич. сеточная

разностное представление второй производной; при этом ошибка h^2 порядка точности

$$\begin{cases} \cancel{y_n =} \dfrac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} = f(x_n, y_n), \quad n = 1, N-1 \\ y_0 = \alpha \\ y_N = \beta \end{cases} \qquad (2)$$

— разностная схема; система нелин. ур-й

(решая соот. найдём y_n)

$$|y_n - u(x_n)| \to 0, \text{ при } h \to 0$$

пусть $h \to 0$, $n \to \infty$, сетка неогр-но сгущается; если ~~разност.~~ $\cancel{y_n \to u_n}$, то мы стремится к точному реш. ДУ

Нелин. (из-за $f(x_n, y_n)$)

Система с $N+1$ неизвестными; из решения системы будем получать результат;

Получим разностную схему (2), аппроксим. исх. диф. задачу (1).

В данной ситуации система ур-й (2) — нелинейна. Данную нелин. систему будем решать методом Ньютона.

$$y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} - h^2 f(x_n, y_n) = 0$$

таких ур-й — $N+1$

$$(F(y_{n-1}, y_n, y_{n+1}) = 0)$$

Линеаризуем по Ньютону.

ур-е лин. сравнения по

Применяем процедуру Ньютона получим:

#s-номер итерации

$$y_{n-1}^{(s-1)} - 2y_n^{(s-1)} + y_{n+1}^{(s-1)} - h^2 f(x_n, y_n^{(s-1)}) \quad (*)$$

$$\# \; F(y_{n-1}, y_n, y_{n+1})\Big|_{s-1} + \frac{\partial F}{\partial y_{n-1}}\Big|_{s-1} \Delta y_{n-1}^{(s)} + \frac{\partial F}{\partial y_n}\Big|_{s-1} \cdot \Delta y_n^{(s)} + \frac{\partial F}{\partial y_{n+1}} \Delta y_{n+1}^{(s)}$$

– идет разложение ФНП в ряд Тейлора; линейные слагаемые идут; ~~[illegible]~~ смешанные слагаемые отбрасываем сложные, только лин. оставим

#вектор разложения – s-1 приближение

$$(*) \quad \Delta y_{n-1}^{(s)} - 2\Delta y_n^{(s)} - h^2 f'_u\Big|_{s-1} \Delta y_n^{(s)} + \Delta y_{n+1}^{(s)} = 0$$

$$\# \; f'_u = \frac{\partial f}{\partial u}; \; f(x,u)$$

$$\begin{cases} \Delta y_{n-1}^{(s)} - (2 + h^2 f'_u)\Big|_{s-1} \Delta y_n^{(s)} + \Delta y_{n+1}^{(s)} = \\ = -\left(y_{n-1}^{(s-1)} - 2y_n^{(s-1)} + y_{n+1}^{(s-1)} - h^2 f(x_n, y_n^{(s-1)})\right) \\ \Delta y_0 = 0 \\ \Delta y_N = 0 \end{cases} \quad (3)$$

всё прямо линейно, бегаем с пред. шагом

#т.к. знаем конечные значения, <u>поправки</u>, если бы не поправки были-не

#получили опять неизв. Δ; м-ца сист. с пред. знач. матрицей, но теперь – линейная

~~Получим~~ Получим СЛАУ (3). Эта СЛАУ – ~~трехдиагональная~~ система с трёх диаг. матрицей. Такие системы решаются методом прогонки. После того, как решение найдено, новое значение s получается!

$$y_k^{(s)} = y_k^{(s-1)} + \Delta y_k^{(s)}, \quad k = n-1, n, n+1$$

|

где величины, кот. позв. в ходе итерационных процедур Ньютона

(на сколько приращается ф-я на каждом шаге)

по сут - некое приращение, поэтому Δ -

-нас реально инт. ~~поэтому~~:

$$\Delta y_{n-1}^{(s)}$$

$$\updownarrow$$

$$y_{n-1}^{(s)} - y_{n-1}^{(s-1)}$$

Он самый бол., чем отдел. и рез. чер. дост. знач. ~~на~~ тек. чер.)

$y_n^{(0)} \longrightarrow$ линейная ф-я, кот. удовл. краевым условиям, например,

$$y^{(0)}(x) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{b-a}(x-a)$$

#Лучше взять здесь ф-ю, кот. удовл. краевым условиям; пусть линейно

начальное приближение с которым берётся - это проблема метода Ньютона; и ей тоже посвящ-вё разделы.

$$y_n^{(0)} = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{b-a}(x_n - a) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{b-a} nh$$

<u>Пример и пример:</u> в кач. конкр. ф-ии f в предыд. насл. (1) рассмотрим $f(x,y) = ye^{-xy^2}$.

Разностная схема принет вид:

$$\Delta y_{n-1}^{(s)} - \left[2 + h^2\left(e^{-x_n y_n^2} - 2x_n y_n e^{-x_n y_n^2}\right)\right]_{s-1} \cdot$$

$$\cdot\ \Delta y_n^{(s)} + \Delta y_{n-1}^{(s)} = -\underbrace{\left(y_{n-1}^{(s-1)} - 2y_n^{(s-1)} + y_{n+1}^{(s-1)} - h^2 y_n e^{-x_n y_n^2}\Big|_{s-1}\right)}_{F_n}$$

Канон. форма можно получить:

$$A_n \Delta y_{n-1}^{(s)} - B_n \cdot \Delta y_{n-1}^{(s)} + C_n \Delta y_n^{(s)} = -F_n$$

$$A_n = 1$$

$$C_n = 1$$

$$B_n = A_n + C_n + h^2\left(e^{-x_n y_n^2} - 2y_n^2 x_n e^{-x_n y_n^2}\right)\Big|_{s-1},$$

$$F_n = \left(y_{n-1}^{(s-1)} - 2y_n^{(s-1)} + \ldots\ldots\right)$$

$$\Delta y_n^{(s)} = \xi_{n+1} \Delta y_{n+1}^{(s)} + \eta_{n+1}$$

→ метод прогон. коэф.

← метод Δy.

#100 точек ⇒ 101 переменная, 101 неизвестных,
(?) 101 урав
(101 т.к. нулевое + 0)

от 0 до 100 — 101 точка; 0, 1, 2 — 3 точки; $N+1$

$\Delta y_0^{(s)} = \xi_1 \Delta y_1^{(s)} + \eta_1$

$\Delta y_0 = 0 \Rightarrow \xi_1 = 0, \ \eta_1 = 0$
всегда

точно нас сплайны; всегда начальные прогон. коэф. будут 0 мн.

~~если в (2)~~
в (2)
некоторые прехнепрер. ф-ц для произвольн.,
сколь. вып. непрер. производ.;

если бы h^4 использовали, было бы не 3 непрер.,
причём он непрер. Гельдера непр.

есть и непрерывные непрер.; непрер. непр. не совсем

в инженерных ~~ПМ~~ приходится заменять непрер. непрер.

в реальных задачах A, B, C сам зависят от искомой ф-ии;
вторые прямые на самом деле не такие

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda(u)\frac{du}{dx}\right) = f(x,u)$$; придётся вычислять производные от коэффициентов

„Я всё понял, но только что это за порядок S?"

18 нед. максимум; дальше экзаменац. сессия

на 3л семе приходится; всё повисло в более сложном варианте

Нелинейные системы заканчиваем.

Численное дифференцирование.

ПР – спрашивать не понятно, отнуж прав часть, что даже f'_x, показать всё, отнуж берётся

~~Числен~~ ~~Применение~~

высш. произв. – ремесло ; вопрос

высш. интегр. – искусство

1) применение, когда надо высш. производные от сложных аналитически заданных ф-ий (в виде формул)

2) для ф-й, заданных таблично, а

3) в задачах, связанных с решением ДУ

Рассмотрим 2 подхода к построению формул численного диф-я:
(при пос. шаге дают одинаковые рез-ты, но не идентичны)

1. полиномиальные ф-ии

2. разложение в ряд Тейлора

ЧБ – со 8 – 502 ?

ПК – ПР 12:00 (у нас);

15:40 – ПР (2)

1. Идея метода состоит в построении интерполяционного многочлена с последовательно увеличивающимся числом узлов.

$$y(x) = y_0 + (x-x_0)\,y(x_0,x_1) +$$
$$+ (x-x_0)(x-x_1)\,y(x_0,x_1,x_2) +$$
$$+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\,y(x_0,x_1,x_2,x_3) + \dots$$

~~Построим~~ # знач-е полином Ньютона

Найдем связь при разных степенях;

~~если пока сходится~~

если продолжение сходится с уже имеющимся полином, то нам ничего не нужно.

$$y'(x) = \overset{(1)}{y(x_0,x_1)} + \overset{(2)}{[(x-x_0)+(x-x_1)]\,y(x_0,x_1,x_2)} +$$
$$+ [(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_1)(x-x_2)]\cdot$$
$$\cdot \overset{(3)}{y(x_0,x_1,x_2,x_3)}$$

- получим прив., подходящее для сравнения.)

(1), прав (2) совп. до сим., прав (3), если степень меньше, чем узлов полин — остальные

полином выше чем 5-й степень нужно не берем;

с уже имеющ — уже н-ть значимых знак.;

недостаточно полином, можно обсчет решать с заме выс прим

$$y''(x) = 2y(x_0, x_1, x_2) +$$
$$+ 2[(x-x_0) + (x-x_1) + (x-x_2)]\, y(x_0, x_1, x_2, x_3) +$$
$$+ \dots$$

$$y'''(x) = \overset{(3!)}{6}\, y(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots$$

своего рассчитанных разных с производных

$$y^{(n)}(x) = n!\, y(x_0, \overset{\text{(не равн } x_0)}{x_1}, \dots, x_n) + O(h)$$

$h \to 0$

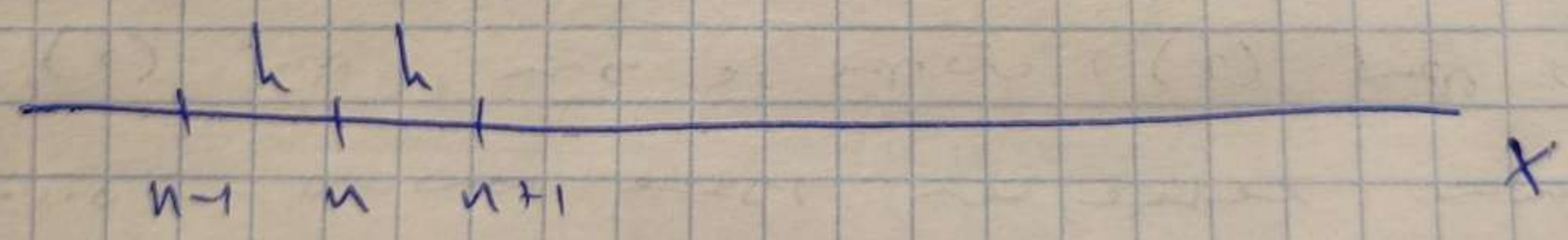
порядок полином б-п.

~~порядок~~ — ~~мал~~ мал порядок

whact $n+1$ член — $\underline{1}$ — перв порядок полином при $h \to 0$

2. Разложение в ряд Тейлора.

Ждем сетчатые ф-я с постоянным шагом (если не с пост — разн. ряд тем)



Обозначим

$$y_n \equiv y(x_n), \quad y'_n \equiv y'(x_n) \qquad (4)$$

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n + \frac{h^4}{4!} y^{IV}_n + \dots$$

$$y_{n-1} = y_n - h y'_n + \frac{h^2}{2} y''_n - \frac{h^3}{3!} y'''_n + \frac{h^4}{4!} y^{IV}_n + \dots \qquad (5)$$

из (4):

$$y_n' = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \frac{h}{2} y_n'' + \dots =$$

– правая разностная производная

$$= \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O(h)$$

Величина порядка малости h

ЛР

Вопрос ЛЛЛ задачи

мож мож ст $\mathbb{R}$-но мин точн.

somam usen. y psn. бе сходимости

мож мож. 1 – ЗДСМ h^2

мож мож $\mathbb{R}$ – ЗДСМ ~~бесо~~ h^{13}

(бе h^{12})(?)

из (5):

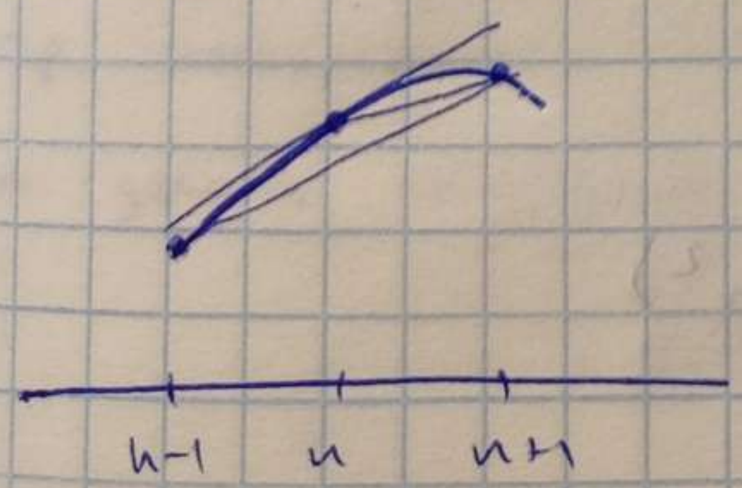
$$y_n' = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + \frac{h}{2} y_n'' = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h)$$

– левая разностная производная

из (4)–(5):

$$y_n' = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + \frac{2h^2}{3!} y''' = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + O(h^2)$$

– центральная разностная пр-я



центр разн. всёго более

Вторая часть (4)+(5): #сложим (4)(5), получим y_n'', выразим

$$y_n'' = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} - \frac{h^2}{4!} y_n^{IV} =$$

$$= \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + O(h^2)$$

– погрешность и O с тем же порядком, как и h^2 $\Rightarrow$ вторый порядок точности

Схема второго порядка и без погрешности

02.05.23

Лекция 7.

#численное дифференцирование

Получение формул повышенного порядка точности ...

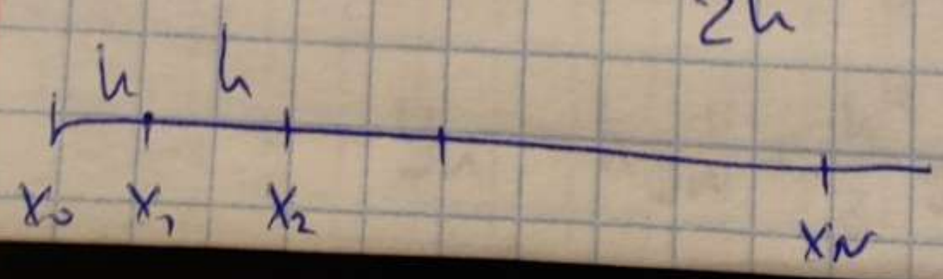
Односторон. разн. произв.

$$y_n' = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O(h)$$

или $$y_n' = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h)$$

Центр. разн. произв.

$$y_n' = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + O(h^2)$$



Ф-ла второго порядка в точности с крайней левой точке.

y_0' с точн. $O(h^2)$

разлож. в ряд Тейлора

этот член пропадает через первое слагаемое; $\frac{h^2}{h} = h$

разл. в ряд Тейлора O_1, y_1

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + \frac{h}{1!} y_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' + \dots \\ y_2 = y_0 + \frac{2h}{1!} y_0' + \frac{(2h)^2}{2!} y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} y_0''' + \dots \end{cases} \quad (1)$$

Сраз. сразу видно, что в ф-ле второго порядка, нет. производ. h^2, но остается производ. h^3

Для получ. 2го порядка, надо избавиться от этого слагаемого

(на h делим обе части)

ПР: получение ф-лы с 3м порядком точности — получ. 3й член; от h^2 и h^3 избавились; ост. h^4; $/h \to h^3 \to O(h^3)$

$y_3 \to 3h$; $y_{10} \to 10h$ берет в нач

получ. нов. знач. и нач. ф. знач., нет соотв. h; чтобы при дел. на h остался h с нужн. пор. точности.

нет самое интересное — нет он меньше, т.к. $h \to 0$ $h<1$

Чтобы решить задачу ($R \sim O(h^2)$) погрешность (невязка на самом деле), исп. из (1) слагаемые содержащие h^2.

Для этого умнож. перв. ур на 4 и вычитает из 2го

$$4y_1 - y_2 = 4y_0 - y_0 + 4hy_0' - 2hy_0' + O(h^3)$$

$$y_0' = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2)$$

А теперь мы хотим получ. ф-лу 3го пор. точности для ~~перв~~ y_0' в первом узле:

из этого ур-я будет исп. h^2 и h^3, при $\frac{h^4}{h} = h^3$.

ПР: какие методы для повыш. пор. точн. на знаете?

получ. ф-лы в крайнем узле (это) дифф-я полинома Ньютона, метод прогонки надо

в кр. пре

Замечание: ф-ла для 2-й пр-й в т. n из 2-й пор. точности

$$y_n'' = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + O(h^2)$$

ПР: показать, что в крайнем узле для ф-лы не обеспеч. 2-й пор. т.) а какой? показать

Как это делается:

погр. (невязка) $R = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} - y_n'' =$

$$= \frac{y_n - \frac{h}{1!} y_n' + \frac{h^2}{2!} y_n'' - \frac{h^3}{3!} y_n''' + \dots - 2y_n + y_n + \frac{h}{1!} y_n' + \frac{h^2}{2!} y_n'' + \dots}{h^2} - y_n'' \approx \frac{y^{IV} \cdot h^4}{h^2}$$

$y'(x - x_{\text{центр. разн.}})$ — отсюда и $-h$ # нет пред. пер.

в ц-узле только h попад; гол. разложение — y_0; изуч. этого происходит.

Ф-лы Рунге. #интересны и по идее и по практ. рез.

Посчитаем пр-е по двум сеткам (одна — об. сетка; др — по этому выбр.)

получим абс. погрешность решения

в т. x — зав. от шага h — фикс. ф-ла

$$z = \Phi(x, h) + \psi(x) h^p + O(h^{p+1}) \quad (1)$$

(точн. нет нужен) (приб. ф-ла) — структура погрешности

$$\# \; y' = \frac{y_{n+1} - y_n}{2} + \frac{y''}{2!} h + O(h^2)$$

Делаем это же величину на др. шаге:

$$z = \Phi(x, mh) + \psi(x)(mh)^p + O(h^{p+1})$$

$$0 = \Phi(x, h) - \Phi(x, mh) + \psi(x) h^p (1 - m^p) + O(h^{p+1})$$

$$R = \psi(x) h^p = \frac{\Phi(x, h) - \Phi(x, mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1})$$

p — пор. мет. ди-ки; нет мн.

Пер-ф-ла Рунге позв. опр-ть абсолютную погрешность

#Основана всегда в осн. позд

разделим R на ∞. знач, мы получим

#деление на самую величину пер

Вторая ф-ла Рунге:

$$\mathcal{L} = \Phi(x,h) + \frac{\Phi(x,h) - \Phi(x,mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1}) \quad (2)$$

#порядок ф-л увеличивается

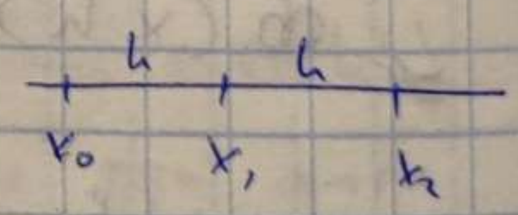
ф-ла трапеций - $O(h^2)$

ф-ла Симпсона - $O(h^4)$

Пример: получим ф-лу численного интегрирования Симпсона исп-я ф-лу трапеций

#применим ф-лы Рунге и ф-ла трапеций на разных сетках, получим ф-лы Симпсона

Симпсон: $\int_{x_n}^{x_{n+2}} f(x)\,dx$



Возьмём 3 узла: x_n, x_{n+1}, x_{n+2}

Ф-ла трапеций с шагом h:

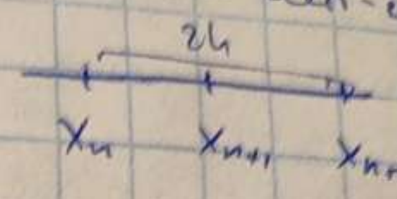
$$I(h) = h\left(\frac{f_n}{2} + f_{n+1} + \frac{f_{n+2}}{2}\right)$$

—"— с —"— 2h:

#выкинули узел через 1

$$I(2h) = 2h\left(\frac{f_n + f_{n+2}}{2}\right)$$

при шаге 2h f_{n+1} не исп-ся



По 2-ой ф-ле Рунге

ф-лы не сразу сетка

$$I_1 = I(x,h) + \frac{I(x,h) - I(x,2h)}{\underset{\substack{\uparrow \\ h\to 2h}}{(m=2)}^{p=2} - 1} =$$

$$= \frac{4I(x,h) - I(x,2h)}{3} = \frac{1}{3}\left[4h\left(\frac{f_n}{2} + f_{n+1} + \frac{f_{n+2}}{2}\right) - h(f_n + f_{n+2})\right] = \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}) - \text{ф-ла Симпсона}$$

по ф-ле Рунге должна тел пор. $O(h^3)$, но это симметрия ост $O(h^4)$ получается)

2 – максимум, насколько можно пр. порядок (?)

ф-ла для всего участка,

$$I_{\text{пр}} = h\left[\frac{f_0 + f_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f_i\right] - \frac{1}{12}h^2(b-a)f''(\xi)$$

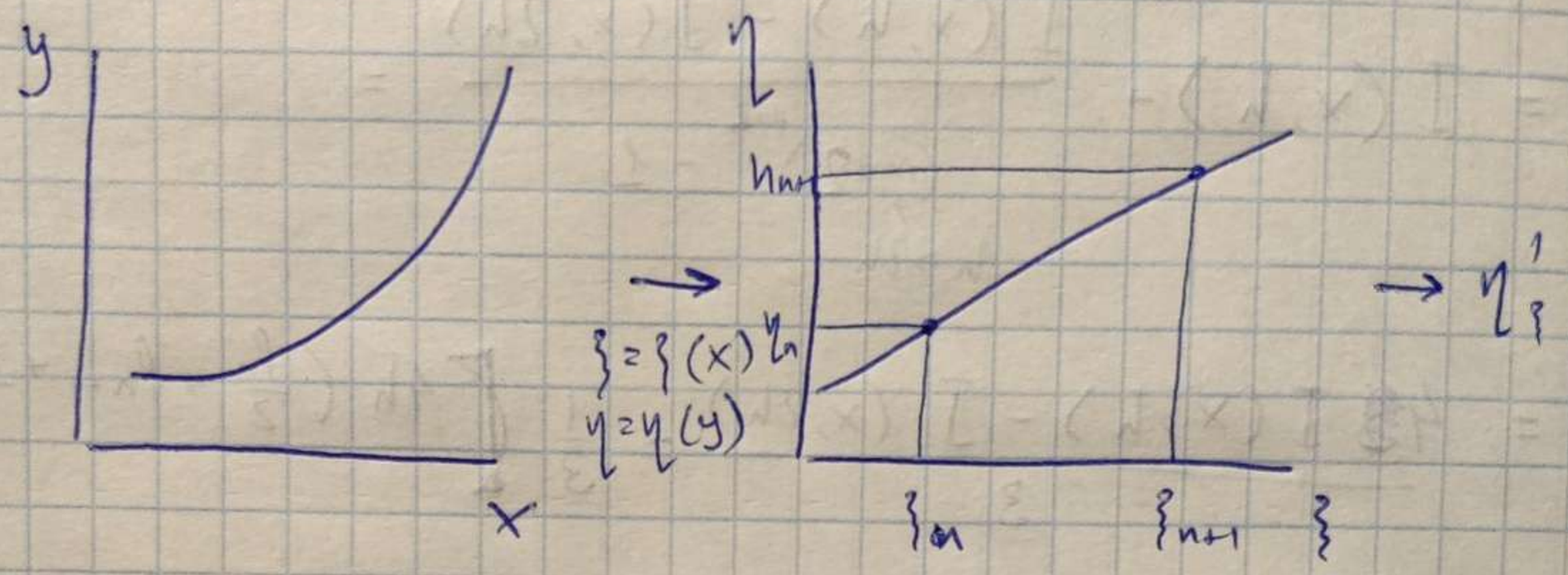
$$I_{\text{Симп}} = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N-2}{2}}(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}) - \frac{h^4}{180}f^{IV}(\xi_i)(b-a)$$

ПР: исп-е ф-лы Рунге, получ. пов. оцен. ф-лы на краевом: узлах

Одновр. рзн не один шаг, не 2h шага; подсчитано; должны получ. оцен. для y_0'.

Можно и число с числа — раб., если не слог задач пока о-по-; просто вместо $\Phi(x, h)$ числа подставить свои расчёты.

Выравнивающие переменные.



В новых переменных

$$\eta'_\xi = \frac{\eta_{n+1} - \eta_n}{\xi_{n+1} - \xi_n}$$ (для всех точек одинаковы, если в прям. боковых)

$$y'_x = y'_\eta \cdot \eta'_\xi \cdot \xi'_x = \underbrace{\eta'_\xi \cdot \frac{\xi'_x}{\eta'_y}}$$

Пример:

Пусть $y = ax^p$ # a и p не знаем

$\eta = \ln y$ $\quad \eta = \ln a + p \ln x = \ln a + p\xi$ –

$\xi = \ln x$ – прямая линия;

производная вычисляется легко

$\xi'_x = \frac{1}{x}$, $\eta'_y = \frac{1}{y}$; $y'_x = \eta'_\xi \cdot \frac{y}{x}$

ист-е выравн., перен-е мы можем очень мало вычислять производные (если хорошо подберёт их).

Пример 2

Пусть $y = ae^{bx}$

$\ln y = \ln a + bx$

$\eta = y$

$\xi = x$

$\eta = \ln a + b\xi$

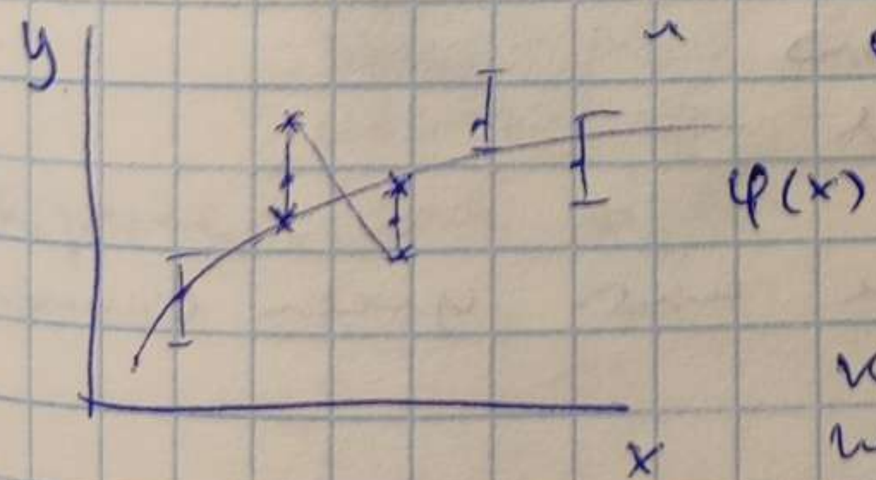
выравн. переменные

позволяет выравнить кривую; в лучшем случае - выровнять её в прямую

$y = \dfrac{a_0 x}{a_1 + a_2 x}$ - выраж. перем. ввести

Нахождение производной дифференцированием предварительно ~~сглаженной~~ сглаживающей кривой.

ЛРЧ



если данные заданы с погрешностью - пр-е очень изобличительно

кривая сглаживает нашу невязку, вычисляя пр-ю, работает с кривой; обоснования нет, но интуитивно понятно

Пр-е от истинной ф-ии ~~сдер~~ заменяется пр-ю от аппроксимирующей кривой

$y'_x \approx \varphi'_x$

Если $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$ тогда $y'_x = a_1$.

Ошибка всё равно — была тут с дробью часть при моделировании реального перехода — получает время.

Это оптимальный шаг;

Метод регулеризации; при этом шаге

ведёт и пом., где пр-е плавно меняется с элемент. шага

16.05 # проблема. зайти, сам зад. делается

пол лекции, будет вам материал на все ЛР

написать, отсеминарить, как дошел, но

программа рег. правильно;

будет зач.; досконально разобраться с проблемой

Лекция 8.

Алгоритмы численного интегрирования.

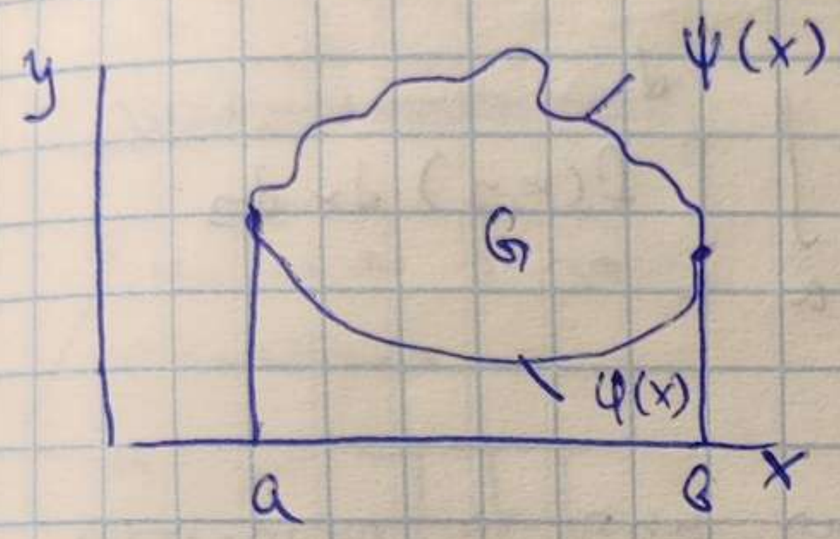
смысл, что однократный инт. уже вычисл (ЛР5)

ЛР6 — краткого интеграл есть; не будем неправильно вычислять

всё время 2D интегр. разов.

Вычисление двукратных интегралов.

$$I = \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$$



$$I = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$ – сведение интеграла к повт-му

достаточно, чтобы ∃л инт. от полезн ф-и

если прямоуг. обл-ть – не имеет значения в каком пор. интегрир-ть

инт-ть прих. всегда, когда ф-я не имеет разрыва.

$$I = \int_a^b F(x)\,dx, \text{ где } F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

метод. знач. ф-ии – F – ть интегрир. соб-ть однократн. инт.

$$I = \sum_{i=0}^{N} A_i F(x_i)$$

A_i – веса квадратурных ф-л (напр. при инт. полезн. трапеций)

КВАДРАТУРНЫХ

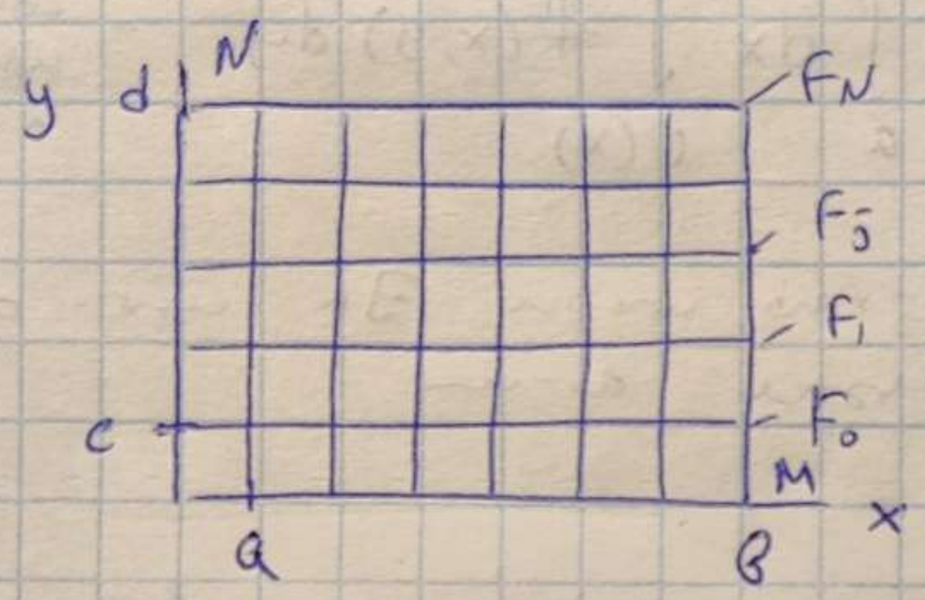
Например, для ф-лы трапеций $A_0 = \frac{1}{2}$, $A_1 = A_2 = \ldots = A_{N-1} = 1$, $A_N = \frac{1}{2}$

1, 4, 2, 2 ..., 2, 4, 1 – Симпсон.

$$F(x_i) = \sum_{j=0}^{m_i} B_j f(x_i, y_i)$$

$$I = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{m_i} A_i B_j f(x_i, y_i)$$ — общ. ф-ла инт.

Пояснение к получ. ф-ле:



$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$$

— формула инт. по парн. напр.

$$I = \left[\frac{1}{2}(F_0 + F_N) + \sum_{i=1}^{N-1} F_i \right] h_y$$, где F_k $k=\overline{0,N}$ (для узл. y)

$$F_k = \left[\frac{1}{2}\left(f(x_0, y_k) + f(x_M, y_k) \right) + \sum_{j=1}^{M-1} f(x_j, y_k) \right] h_x$$

— ф-ла последовательного интегрирования

ф-ла определённ

~~# если ф-ла~~

можно свои методы инт-я по каждым напр-ю инт-я;

если ф-ла меняется разно, зависит от прим

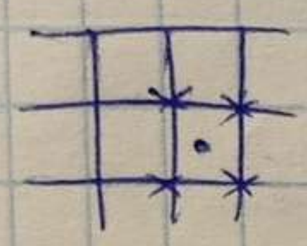
Изложенный подход и будем называть интеграл. по последовательным интегрированием метод сеток -

прямые на шаблонных алгоритм

если пробный интеграл - таким же образом;

~~Посл. инт.~~

Т.к. для задачи гаусс. инт. применимо, двойное инт-е сведётся к



инт. Ньютона 1-го сп.;

Опять обеспечена надёжность одного решения;

Изменим шаги, сетки, сравнится и по мере уменьш. шагов, они должны выходить на константы

При методе послед. инт. кратные вз. интегрирования и пост-ти времени однократных;

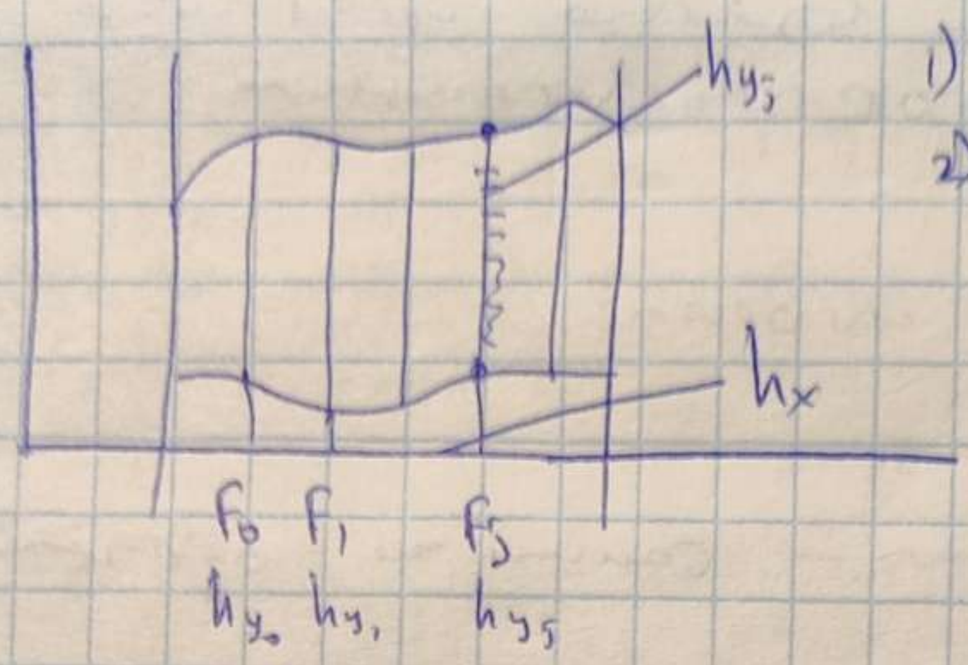
время инт-я растёт таким образом, но выигрыш повторного интеграла; ~~решает~~

многократное время ...

$$F_k = h\left[\frac{1}{2}\left(f(x_0, y_k) + f(x_M, y_k)\right) + \sum_{j=1}^{M-1} f(x_j, y_k)\right], \quad k=\overline{0,N}$$

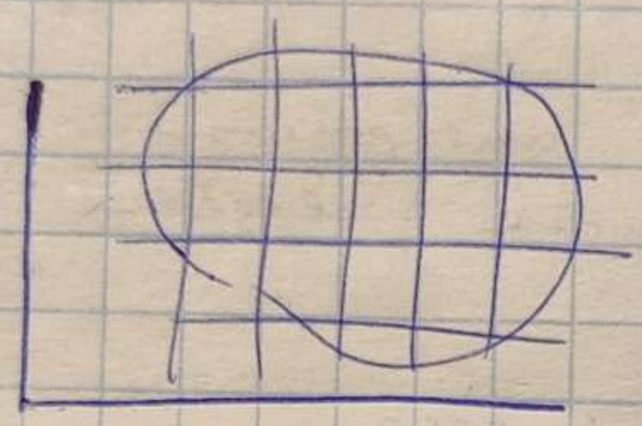
одном. инт. по одному напр., по ср., ... обр. в массив;

одномерные интегр. в сплае; полином Ньютона применим



1) нижняя остр.
2) ~~обрез~~ нижняя нижн.

~~Пос~~ бесх
непрерывно сплошн
выпукл непрерывн



~~Пос~~ дыр. сплошн. по обеим нижн — 3 зона

если произвольная область, опер. прямоуг.;
выш. ∝ резать область — смотр $f \approx 0$,
но не совершенно так делать

Метод Гаусса — метод наивысш. алг. точности

Формула наивысшей алг. точности

Ф-ла Гаусса при одномерном интегр

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i) \quad \# N \text{ узлов}$$

узлы заранее не выбираются в этой точности;
метод. прал. — 100 узлов; отс в 3 р лучше

знач. ф-ции в узлах, узлы и веса квад-ки опр-ся одновременно и хранят на задачи

$$I = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{N} A_i f(t_i) \quad (1)$$ (почти ф-ла Гасса)

рассм. неразрешимую с-му, в кот. квад. A_i и t_i неизв.; их надо опр.

A_i и t_i будем выбир. исх. из того, чтобы (1) было точно для ~~всех~~ полиномов наивысшей возм. степени; для этих степеней полиномов ф-ла дает точный рез-т за-порешно $= 0$.

$n = 2N-1$ – наивысшая степень полинома;

по предположен выбираем полин. кот-го узлы

$N=5 \Rightarrow n=9$ (10 коэф полин.); выполн. в всех полин. степ. 0...9 дает точн. рез-т.

$f(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^k$ (2) – полином; для того, чтобы ф-ла была точна для полинома (2), она должна быть точна для всех степеней $t^k, k=\overline{0,n}$

$$\int_{-1}^{1} t^k\,dt = \sum_{i=1}^{N} A_i t_i^k, \quad k=\overline{0,n} \quad (3)$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\,dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-1}^{1} t^k\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{N} A_i t_i^k = \sum_{i=1}^{N} A_i \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k t_i^k}_{f(t_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} A_i f(t_i)$$

если вып. (3), то вып. и (1) - формула.

$$\int_{-1}^{1} t^k\,dt = \left.\frac{t^{k+1}}{k+1}\right|_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{k+1}, & \text{если } k\text{-чёт} \\ 0, & \text{нечёт} \end{cases} \qquad (4)$$

Из Т.о. $\Rightarrow$ (3), с учётом (4)

имеем систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N} A_i t_i^k = \begin{cases} \frac{2}{k+1}, & k\text{-чёт} \\ 0, & k\text{-нечёт} \end{cases} \qquad (5)$$

$$
\begin{cases}
k=0, & \sum_{i=1}^{N} A_i = 2 \\
k=1, & \sum_{i=1}^{N} A_i t_i = 0 \\
k=2, & \sum_{i=1}^{N} A_i t_i^2 = \frac{2}{3} \\
\vdots & \vdots \\
k=2N-1, & \sum_{i=1}^{N} A_i t_i^{2N-1} = 0
\end{cases}
\qquad (6)
$$

порядок кв. $2N-1$ обязательно

Всего $2N$ неизвестных A_i, t_j

- Система СУ даже для фасада.

N - кол-во узлов разбиения $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ СУ нелин. $\Rightarrow$ линеаризуем, исп. все корни по t

численное приближ. в общ. случае формулы невозможно, но в ЛП можно

- но так не реш-задачи

Узлы рассчит-ся из спец. ортогон. полиномов; разбиение кол-во, их множество опр-ся типом рассеяния

Чтобы сделать рассм. процедуру до конца рассмотрим полиномы Лежандра

Полиномы Лежандра.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

ортогональные полиномы, полином от $(-1) = -1$ от полинома ...

Свойства $P_n(x)$

1. $\int_{-1}^{1} Q_m(x) P_n(x)\, dx = 0$, если $m < n$

$Q_m(x)$ – полином степ. m

2. $P_n(x) = \frac{1}{n}\left[(2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-1}(x)\right]$

~~# полин~~ 3. На отрезке $[-1;1]$ ~~корни~~ полином Лежандра имеет N различных и действительных корней.

Идея — хотим избежать решения СЛ.

Рассм. ф-ю $f(t) = t^k P_N(t)$

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} t^k P_N(t)\,dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots N-1$$

— по св-ву (1)

Если полин. ст. степ. не выше, чем $2N-1$

к ~~порядкам~~ интегралу, под знаком интеграла которого стоит полином степени не выше $2N-1$ ф-ла Гаусса применима, даёт точное равенство.

$$\int_{-1}^{1} t^k P_N(t)\,dt = \sum_{i=1}^{N} A_i f(t_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} A_i t_i^k P_N(t_i) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$n?$

Данное рав-во заведомо будет вып-ся, если положить $P_N(t_i) = 0$, т.е. t_i явл. корнем полинома Лежандра степени N.

A_i - опр из первых N ур-й

ф-ла (1), в кач-ве узлов t_i м-ся

корнями полинома Лежандра степени N,

а весовые коэф-ты A_i опр из (6)

(из первых N ур-й)

При этих условиях (1) наз.

формулой Гаусса.

Алгоритм постр-я ф-лы Гаусса

Сведём реш-е к выбору

1. Задаёмся кол-во узлов N.

(1, 2, 4, 10, 100)

$N=2$, тогда опр-ли сис $2N-1=3$ ур-ния

со 3 неизв.

2. Искали корни полинома Лежандра

$P_N(t)=0$

3. Из (6), опр-ли t_i, на которых A_i

кач-ва первых N ур-й, методом

Гаусса, наир.

Для перех. к произвольным пределам интегрирования вся линейное преобр.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

(заменим сегмент)

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2}$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i),$$

$$x_i = \frac{b-a}{2} t_i + \frac{a+b}{2},$$

t_i – корни $P_N(t)$

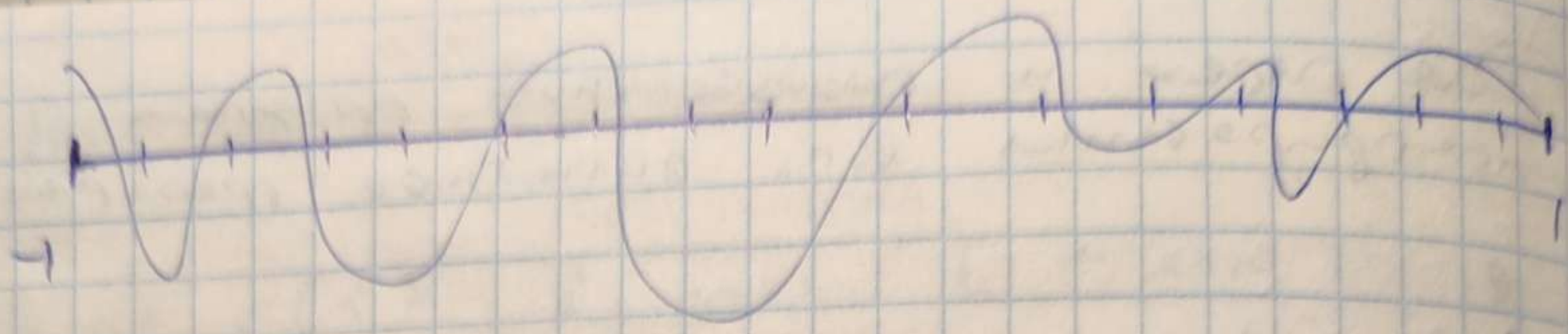
N; нах. корн $P_N(t) = 0$;

оценен. ω из; нахо $f(x_i)$; A_i

t_i – корн. полин Лежандра; x_i

Пр. $[-1;1]$ на $2N$ отрезк. разбиваем; если на каждом отрезке k узл. Гаусс; $\Rightarrow$ $2N$ узл.

Полин на отрезке ст. мог. ст. на $\frac{1}{2}$ раз меньше.



Ф-ия Гаусса в интеграле Крылова - 40000 корней

если нашли полож. корни - отриц. симметричны

отсюда св-ва полин Лежандра всегда - ограничены
разговор