ЗАДАНИЕ
на лабораторную работу №5

Тема: Программно- алгоритмическая реализация моделей на основе многомерных дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями I- III родов.

Цель работы. Получение навыков разработки алгоритмов решения смешанной краевой задачи для многомерных уравнений параболического и эллиптического типов и исследование соответствующей математической модели.

Исходные данные.

1. Уравнения.

1.1. Математические модели в самом общем квазилинейном виде.

a) Уравнение эллиптического типа в прямоугольных координатах

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial w}\right)+f(x,z,w,u)=0.$$

Результатом решения задачи является функция $u(x,z,w)$

b) Уравнение параболического типа в прямоугольных координатах

$$c(u)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial w}\right)+f(x,z,w,u).$$

Результатом решения задачи является функция $u(x,z,w,t)$

c) Уравнение параболического типа в цилиндрических координатах

$$c(u)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+f(x,z,z,u)$$

Результатом решения задачи является функция $u(r,\varphi,z,t)$

1.2. Более простые варианты моделей.

Формулируются за счет перехода к линейным постановкам и сокращению размерности уравнений до 2-х. Возможные варианты представлены ниже.

1.2.1. Линейная математическая модель с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(x,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\lambda(x,z)\frac{\partial u}{\partial w}\right)+f(x,z,w)=0,$$

$$c(x,z)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(x,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\lambda(x,z)\frac{\partial u}{\partial w}\right)+f(x,z)$$

1.2.2. Математическая модель с постоянными коэффициентами $\lambda(x,z)\equiv\lambda$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}+\frac{f(x,z)}{\lambda}=0\,.$$

Результатом решения задачи является функция $u(x,z,w)$.

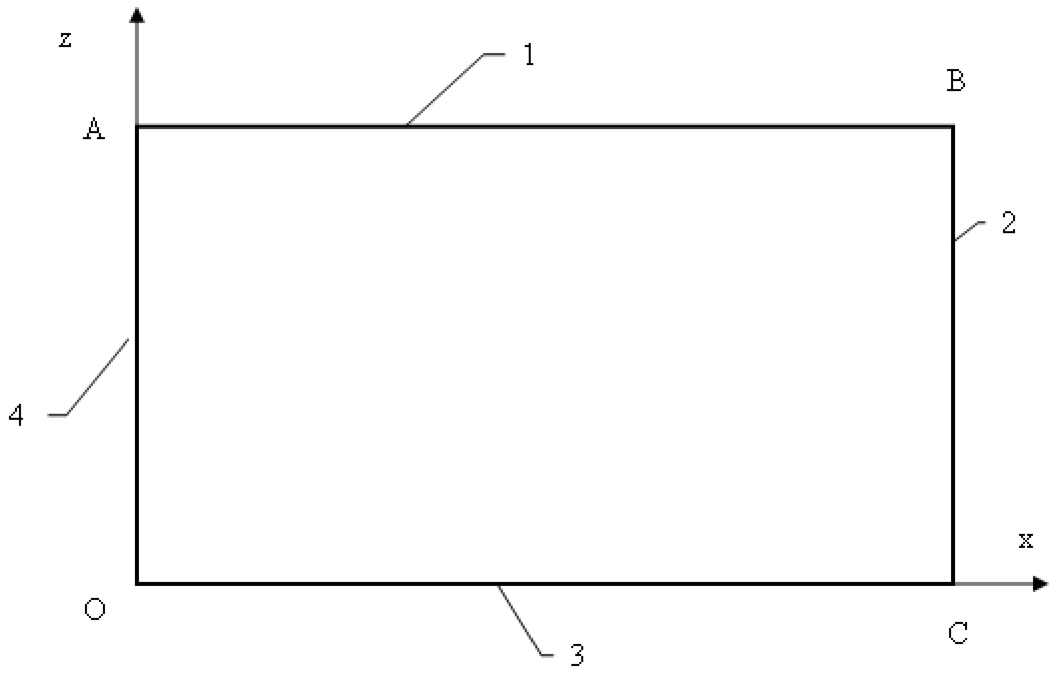
2. Область решения и дополнительные (начальные и краевые) условия (НУ и КУ).

Начальные условия ставятся в фиксированный момент времени в виде функции пространственных координат.

Постановки *краевых условий* более сложны. Для примера в случае двух переменных выбрана изображенная на рисунке пространственная область, представляющая собой прямоугольник OABC .

На границах 1-4 области могут быть заданы три варианта **краевых условий КУ –** I, II и III родов. Все размеры области известны, т.е. заданы координаты точек A,B,C (см. рисунок).

Указанные краевые условия на поверхностях 1-4 можно ставить в разных комбинациях. Для примера, рассмотрим 3 варианта постановки краевых условий на границах 1-4. Пусть для этого прямоугольника размеры OC=a, OA=b. Тогда на границах 4, 2, 3 и 1 краевые условия могут быть поставлены следующим образом, соответственно.



Вариант 1 (граница 4 – КУ II рода, остальные границы- КУ III рода):

$$\begin{cases} x=0,\ \textit{граница}\ 4,\ -k(u(0,z))\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=F_0, \\ x=a,\ \textit{граница}\ 2,\ -k(u(a,z))\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\alpha_2\,(u(a,z)-u_0), \\ z=0,\ \textit{граница}\ 3,\quad k(u(x,0))\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\alpha_3\,(u(x,0)-u_0), \\ z=b,\ \textit{граница}\ 1,\ -k(u(x,b))\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\alpha_4\,(u(x,b)-u_0) \end{cases}$$

Вариант 2 все КУ –III рода):.

$$\begin{cases} x=0,\quad k(u(0,z))\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\alpha_1\,(u(0,z)-u_0), \\ x=a,\ -k(u(a,z))\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\alpha_2\,(u(a,z)-u_0), \\ z=0,\quad k(u(x,0))\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\alpha_3\,(u(x,0)-u_0), \\ z=b,\ -k(u(x,b))\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\alpha_4\,(u(x,b)-u_0) \end{cases}$$

Вариант 3 (все КУ –I рода):

$$\begin{cases} x = 0, \ \ u(0,z) = u_0, \\ x = a, \quad u(a,z) = u_0, \\ z = 0, \quad u(x,0) = u_0, \\ z = b, \quad u(x,b) = u_0. \end{cases}$$

Еще раз отметим, что можно написать и многие другие комбинации краевых условий на поверхностях 1-4, ориентируясь на написанные выше условия.

Значения коэффициентов задачи задаются.

Например, в квазилинейном варианте коэффициенты могут быть заданы формулой или таблицей в завимимости от u.

Физическое содержание задачи (для понимания получаемых результатов при отладке программы**).**

Сформулированная математическая модель описывает в общем случае нестационарное трехмерное температурное поле $u(x,z,w,t)$ или $u(r,\varphi,z,t)$ в прямоугольной пластине или цилиндре. Функция f представляет внутренние объемные источники тепловыделения, например, за счет поглощения излучения в полупрозрачном материале пластины. Излучение может представлять собой, например, узконаправленный луч лазера. Краевые условия в варианте 1 соответствуют нагружению объекта тепловым потоком F_0 с одной стороны $x=0$, постоянным вдоль координаты z, и отводу тепла с трех других сторон при заданной температуре окружающей среды u_0. Можно считать, что пластина по этим границам охлаждается воздухом или водой, температура которых равна u_0, с коэффициентами теплоотдачи α_i, в общем случае отличающимися для каждой из сторон.

Параметрs c, λ являются теплоемкостью и коэффициентом теплопроводности материала пластины.

Для справки укажем, что в варианте 1 краевых условий на границе 4 тепло подводится, а на остальных 1-3 границах - отводится от пластины. В варианте 2 КУ на всех границах тепло отводится.

Результаты работы.

1. Численные алгоритмы, реализующие решение сформулированных задач методами конечных разностей.

2. Соображения по выбору оптимальных шагов по времени τ и пространству h_x, h_z. Шаги должны быть максимально большими при сохранении устойчивости разностной схемы и заданной точности расчета.

На практике точность расчета можно оценить разными способами.

1) Уменьшая шаги и наблюдая сходимость решений в фиксированной пространственной точке.

2) Проверяя, соблюдается ли при выбранных шагах h, τ баланс мощности после выхода на стационарное распределение температуры (в установившемся режиме), в этом режиме должно выполняться условие: отводимая мощность равна подводимой.

Вопросы при защите лабораторной работы

1. Приведите классификацию уравнений второго порядка, линейных относительно старших производных.

2. Какие существуют постановки задач для уравнений указанного типа?

3.Дайте определения многомерной разностной сетки, узлов, слоев, направлений, шаблона, разностной схемы.

4. Сравните явную и неявную разностные схемы двумерного уравнения параболического типа, построенные на пятиточечном и десятиточечном шаблонах.

5. Чем отличается продольно-поперечная схема от локально-одномерного метода при реализации разностных схем в случае многомерных уравнений?

6. Как решаются нелинейные уравнения?

7. Как учесть нелинейности в краевых условиях?

8. Дайте определение аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных схем.

9. Проверьте устойчивость шеститочечной разностной схемы для одномерного уравнения параболического типа.

10. Оцените устойчивость явных и неявных разностных схем для параболического уравнения, используя метод разделения переменных.

11. Докажите теорему о сходимости приближенного разностного решения к точному решению исходной дифференциальной задачи.

12. Как соотносятся порядок аппроксимации и порядок точности разностных схем.

Методика оценки работы.

Модуль 3, срок - 17-я неделя.

1. Задание полностью выполнено - 9 баллов (минимум).

2. В дополнение к п.1 даны исчерпывающие ответы на все вопросы - 15 баллов (максимум).