

NOIP 模拟题 Day1

Solution

Colin

1 计算几何

1.1 题意简述

见原题。

1.2 解法一

枚举所有可能的连接线段方案，确定唯一合法方案。对于每个询问，枚举所有线段，判断 OP 与线段是否相交，从而确定相交线段数量。

时间复杂度： $O(n! + qn)$ ，期望得分 40 分。

1.3 解法二

我们考虑改进解法一，由于题目要求线段不能相交，故我们可以在枚举连接线段方案的过程中，对不合法的方案进行剪枝。

时间复杂度： $O(n! + qn)$ ，期望得分 40-60 分。

1.4 解法三

由观察不难得出，一种合法的线段连接方案为：对 x 轴和 y 轴上的点进行排序后，按次序依次连接。且由反证法不难得出：这样的连接方案是唯一的。这样我们可以在较快的时间内，求得合法的线段连接方案。对于每个询问，我们依旧可以枚举所有线段，判断 OP 与线段是否相交，从而确定相交线段数量。

其中线段是否相交可用叉积判断，需注意可能要用到`long long`。

时间复杂度： $O(n\log n + qn)$ ，期望得分 80 分。

1.5 解法四

由观察不难得出，对于每一个询问， OP 只和在 P 左下角的线段相交。故我们可以二分在 P 左下角的最靠上的线段，从而得到答案。

时间复杂度： $O(n\log n + q\log n)$ ，期望得分 100 分。

2 花花的聚会

2.1 题意简述

有一棵 n 个节点的有根树，在某些节点 v_i ，可以选择花费 w_i 的代价，向上跳 $[1, k_i]$ 步。现有 q 个询问，询问一些节点跳到根的最少代价。

2.2 解法一

对于每个询问，暴力枚举所有可能的向上跳的方案，从而得到最少代价。在枚举过程中可加入各种剪枝。

期望得分 40 分。

2.3 解法二

对于每个询问，我们可以贪心地选择向上跳的方案。并使用相关的数据结构来提升效率。

期望得分 0-100 分。

2.4 解法三

不难发现，我们可以用动态规划的思想来解决这个问题。记 $f[u]$ 为 u 跳到根的最少代价。则不难得出转移方程： $f[u] = \min\{f[v] + w_i\}$ ，其中 v 是 u 的祖先，且存在一种车票 u_i, w_i, k_i 并满足 $\text{dep}[u] - \text{dep}[v] \leq k_i$ 。这个 DP 方程的边界条件为 $f[\text{root}] = 0$ 。这样对于每种车票，我们可以暴力枚举所有合法的 v ，从而求得答案。

时间复杂度为 $O(mn)$ ，期望得分 60-80 分。

2.5 解法四

考虑优化解法三的 DP 转移。事实上我们只需在较快的时间内求得树上某一段区间的 $\min\{f[u]\}$ ，即可较好地解决这个问题。而维护树上区间最值有树链剖分、动态树等许多数据结构能够胜任。在这里我们考虑用倍增的思想，维护 u 往上跳 2^i 步到的祖先 v 和 u 到 v 这一段 f 值的最小值，这样我们对于每一个节点 u 可以在 $O(\log n)$ 的时间内求得 $\min\{f[v]\}$ 。

时间复杂度为 $O(n \log n)$ ，期望得分 100 分。

3 文本编辑器

3.1 题意简述

见原题。

3.2 解法一

不考虑翻转操作，我们不难发现剩下的功能都是链表所较容易支持的。故我们考虑设计一个链表来维护文本，并记录两个光标的位置，从而可以在常数时间内完成删减及移动操作。

时间复杂度为 $O(n)$ ，期望得分 70 分。

3.3 解法二

对于翻转操作，我们暴力修改链表的复杂度是 $O(n)$ 的。而翻转操作又是平衡树的看家本领，故我们考虑使用 Splay 来维护文本。并通过翻转标记，使之支持翻转操作。

时间复杂度为 $O(n \log n)$ ，期望得分 90 分。

3.4 解法三

对于 $n = 4 \times 10^6$ 的数据，使用平衡树复杂度太高。我们继续考虑使用链表来维护文本。我们考虑在进行翻转操作时，只有两个端点元素的前驱和后继指针发生了实际变化，而中间元素的前驱和后继指针只是发生了交换。我们可以借鉴 Splay 的 lazy 标记的思想，对于每一个翻转操作，我们只实时修改两端的元素，对于中间元素只在两端维护标记。只有当中间元素被访问到时，才交换其前驱和后继指针，并移动标记。对于标记的消除和多个标记的情况，需要进行相关讨论。

事实上使用标记来处理中间元素的指针交换需讨论较多的情况，较为复杂。事实上我们可以不必维护标记。当我们发现左边下下个元素的后继指针不是左边下个元素时我们便可以交换左边下下个元素的前驱和后继指针；类似的，当我们发现右边下下个元素的前驱指针不是右边下个元素时我们便可以交换右边下下个元素的前驱和后继指针。这样我们就可以使用链表，较轻松地实现区间翻转操作了。

时间复杂度为 $O(n)$ ，期望得分 100 分。