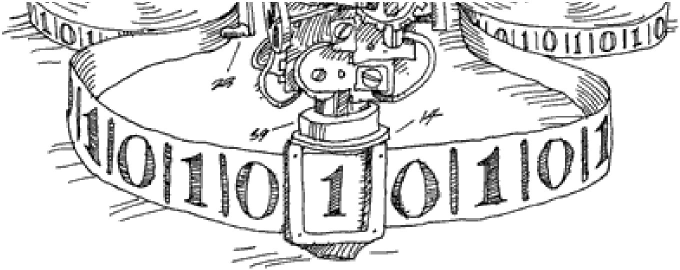
Theoretische Grundlagen der Informatik

Tutorium 4

Institut für Kryptographie und Sicherheit



Pumping Lemma Formalia

Behauptung: L ist nicht regulär.
Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$ wie im Pumping-Lemma

Wähle w = ________, $w \in L$, $|w| > n$

Beh: $\forall u, v, x : w = uvx, |uv| \leq n, v \neq \lambda$ gilt: $\exists i \in \mathbb{N}_0 : uv^i x \notin L$

Bew: ($\forall v$ gilt:)__________________________

____

Widerspruch zum Pumping Lemma $\Rightarrow$ L ist nicht regulär.

Chomsky-Normalform

1. Produktionen auf Terminale und Nicht-Terminale sortieren
2. Produktionen auf mehr als zwei Nicht-Terminale ersetzen
3. Produktionen auf λ ersetzen
4. Produktionen auf ein Nicht-Terminal ersetzen
5. Neues Startsymbol einführen falls $S \rightarrow \lambda$ existiert
6. ???
7. PROFIT

Alte Aufgabe 2

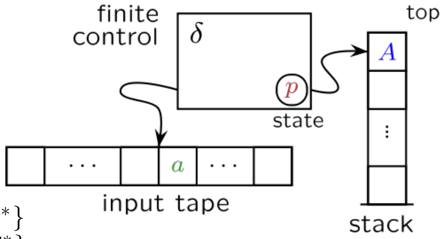
Gegeben sei die folgende Grammatik: $\mathcal{G} = (\mathcal{T}, \mathcal{V}, S, \mathcal{P})$ mit
$\mathcal{T} := \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{V} := \{S, A, D, M\}$,
$\mathcal{P} := \{S \to AMD \mid M, A \to AA \mid a, D \to DD \mid d, M \to bMc \mid \lambda\}$

1. Geben Sie die erzeugte Sprache an!
2. Wandeln Sie die gegebene kontextfreie Grammatik $\mathcal{G}$ in eine äquivalente kontextfreie Grammatik $\mathcal{G}'$ in Chomsky-Normalform um, indem sie jeden Schritt durch eine neue Grammatik beschreiben!
3. Zeigen oder widerlegen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob die folgenden Wörter in der Sprache $\mathcal{L}$ liegen, die durch die Grammatik $\mathcal{G}$ erzeugt wird!
   3.1 *aabbccdd*
   3.2 *abbcc*
   3.3 *abcdd*

Definition Kellerautomaten

Ein (nichtdeterministischer) **Kellerautomat** (NPDA bzw PDA, Pushdown Automaton) besteht aus $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$, wobei

- Q endliche Zustandsmenge
- Σ endliches Eingabealphabet
- Γ endliches Stack-Alphabet
- $q_0 \in Q$ Anfangszustand
- $Z_0 \in \Gamma$ Initialisierung des Stacks
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$
  - $\delta(q, a, Z) \subseteq \{(q, \gamma) : q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
  - $\delta(q, \lambda, Z) \subseteq \{(q, \gamma) : q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
- $F \subseteq Q$ Menge der akzeptierenden Endzustände, $F = \emptyset$ ist möglich.



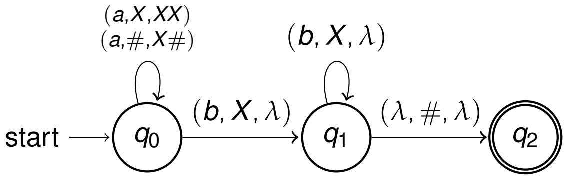
Zu Kellerautomaten

- Akzeptieren nach Eingabeende, wenn
  - der Stack leer ist *oder*
  - der Automat in einen akzeptierenden Zustand kommt.
- Sind im Allgemeinen nichtdeterministisch
- Man kann Endzustände auch aus der Definition weglassen und alternativ verlangen, dass der Automat genau bei leerem Keller akzeptiert.
- Man kann sogar alle Zustände bis auf einen weglassen und alles in die Kellerbelegung kodieren

Beispiel

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{\#, X\}$
- $Z_0 = \#$
- $F = \{q_2\}$



- Welche Sprache akzeptiert dieser Automat?

Alte Aufgabe 3

Gegeben sei folgende Sprache für das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$:

$$\mathcal{L} = \{w_1 w_2 \in \Sigma^* \mid w_1 \in \{a, b\}^*, w_2 \in \{b, c\}^*, \\ \#_a w_1 + \#_b w_1 = \#_b w_2 + \#_c w_2\}$$

Hier gibt $\#_x w$ die Häufigkeit des Vorkommens eines Zeichens $x \in \Sigma$ in einem Wort $w \in \Sigma^*$ an.

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ nicht regulär ist!
2. Geben Sie eine Chomsky-2-Grammatik an, die genau die Sprache $\mathcal{L}$ erzeugt!
3. Geben Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}$ an, der genau die Sprache $\mathcal{L}$ erkennt! Zeichnen Sie den Zustandsübergangsgraphen für $\mathcal{M}$!

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Karlsruher Institut für Technologie

Lemma

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ so als

$$z = uvwxy$$

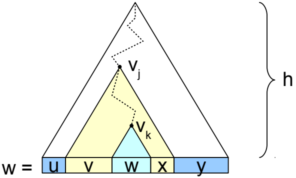
schreiben lässt, dass

- $|vx| \geq 1$,
- $|vwx| \leq n$ und
- für alle $i \geq 0$ das Wort $uv^i wx^i y \in L$ ist.

Beweisidee

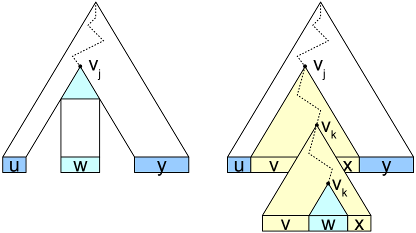
- Jeder Knoten im Ableitungsbaum (wie wir ihn in CYK sehen) steht für ein Nichtterminalsymbol
- Ab einer gewissen Höhe des Baumes (bzw. Länge des Wortes) muss ein Nichtterminal im Baum mehrmals in einer Reihe vorkommen
- Man kann also aus einem Nichtterminalsymbol dasselbe Symbol wieder ableiten
- Da das Wort durch jede Ableitung (außer zu Terminalsymbolen) länger wird, gibt es eine „Schleife“ beim Ableiten
- Diese Schleife kann man also „pumpen“, also beliebig oft (oder auch gar nicht) durchlaufen

Beweisidee



Gegeben: Wort $z \in L$
mit $|x| \geq n$

Ableitungsbaum T für z
mit Höhe $h \geq N$



Erzeugen von uv^0wx^0y Erzeugen von uv^2wx^2y

Pumping Lemma Formalia (kontextfrei)

Behauptung: L ist nicht kontextfrei.
Beweis:

Nehme an L sei kontextfrei.

Sei n beliebig aber fest.

Wähle z=________________ $\in L$ mit $|z| \geq n$

Beh.: $\forall u, v, w, x, y : uvwxy = z$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n, \exists i \in N$, so dass $uv^i wx^i y \notin L$.

Bew.:____

Widerspruch zum Pumping Lemma $\Rightarrow$ L ist nicht kontextfrei.

Beispiel

Karlsruher Institut für Technologie

Zeige, dass die Sprache

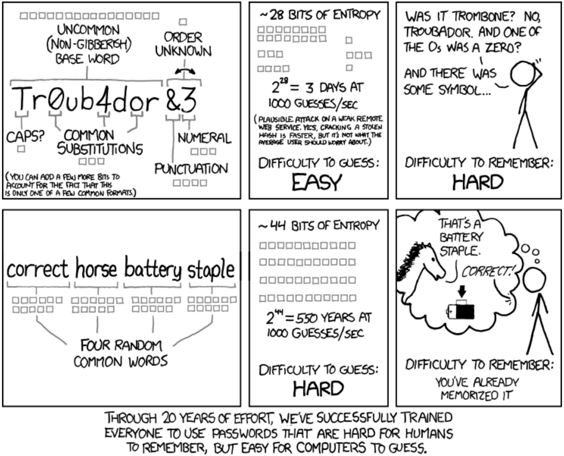
$$L = \{\omega\omega | \omega \in \{0,1\}^*\}$$

nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 1

1. Geben Sie für die Sprache $\mathcal{L} = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Grammatik des höchstmöglichen Chomsky-Typs an!
2. Zeigen Sie, dass die Sprache $\mathcal{L}' = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist!

Bis zum nächsten Mal!



Lizenzen