

Theoretische Grundlagen der Informatik

Tutorium 9

Institut für Kryptographie und Sicherheit



\mathcal{P} ist die Klasse aller Sprachen, die von einer deterministischen Turingmaschine in Polynomialzeit erkannt werden.

Formal

$$\mathcal{P} = \bigcup_k \text{TIME}(n^k)$$

\mathcal{NP} ist die Klasse aller Sprachen, die von einer **nicht**deterministischen Turingmaschine in Polynomialzeit erkannt werden.

Formal

$$\mathcal{NP} = \bigcup_k \text{NTIME}(n^k)$$

Ein Problem liegt in \mathcal{NP} -**schwer** (Englisch: \mathcal{NP} -hard) falls es **mindestens** so schwer ist wie jedes Problem in \mathcal{NP} .

Also: Ist $L \in \mathcal{NP}$ -schwer, dann ist jedes $L' \in \mathcal{NP}$ polynomiell reduzierbar auf L .

Formal

$$L \in \mathcal{NP}\text{-schwer} \Leftrightarrow \forall L' \in \mathcal{NP} : L' \preceq_p L$$

Nach dieser Definition kann L also auch schwerer sein als alle Probleme in \mathcal{NP} . Liegt L zusätzlich auch noch selbst in \mathcal{NP} , so nennt man L \mathcal{NP} -**vollständig**. (Englisch: \mathcal{NP} -complete)

Aufgabe B9 A3

Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Die Klasse \mathcal{NP} ist unter Schnittbildung abgeschlossen.
2. Die Klasse \mathcal{NP} ist unter Vereinigung abgeschlossen.

Dabei nehmen wir an, dass alle Sprachen über dem binären Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ definiert sind.

Kurzdefinition

Enthält der Graph einen Teilgraph von mindestens n Knoten, bei der jeder Knoten eine Kante zu jedem anderen Knoten des Teilgraphs hat?

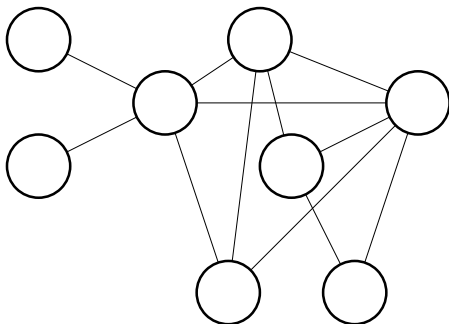
Formal

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Knoten $v \in V$ und Kanten $e = (v_1, v_2) \in E$ mit $v_1, v_2 \in V$ und eine $n \in \mathbb{N}$.

Gesucht: Ein Teilgraph $G' = (V', E')$ mit $|V'| \geq n$ und

$\forall v'_1, v'_2 \in V' : \exists e' \in E' : e' = (v_1, v_2)$.

Gibt es eine Clique der Größe 4 in diesem Graphen?



Gehen Sie bei dieser Aufgabe durchweg von der Annahme $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ aus.

Problem: 4-COLOR

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$

Gesucht: Gibt es eine Färbung der Knoten V , sodass je zwei durch eine Kante aus E miteinander verbundene Knoten unterschiedlich gefärbt sind, wenn nur vier unterschiedliche Farben zur Verfügung stehen?

Zeigen Sie, dass 4-COLOR \mathcal{NP} -vollständig ist!

Hinweis: Es kann hilfreich sein, wenn Sie die \mathcal{NP} - Vollständigkeit des Dreifärbbarkeitsproblems 3-COLOR verwenden.

Gehen Sie bei dieser Aufgabe durchweg von der Annahme $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ aus.

Es ist bekannt, dass sowohl das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik SAT als auch 3-SAT, das Erfüllbarkeitsproblem mit Beschränkung auf Klauseln mit nur 3 Literalen, \mathcal{NP} -vollständig sind.

Das Problem 3-CLIQUE ist wie folgt definiert:

Problem: 3-CLIQUE

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$

Gesucht: Gibt es eine Clique (vollständig verbundener Teilgraph) der Größe 3 in G ?

Zeigen Sie, dass 3-CLIQUE **nicht** \mathcal{NP} -vollständig ist!

Kurzdefinition

Teile eine Menge natürlicher Zahlen in zwei Teilmengen, sodass die Summen der Elemente der Teilmengen gleichgroß sind.

Formal

Gegeben: Natürliche Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$)

Gesucht: Gibt es eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sum_{1 \leq i \leq n, i \in J} a_i = \sum_{1 \leq i \leq n, i \notin J} a_i?$$

Welche dieser Mengen ist partitionierbar?

$$\{16, 8, 4, 3, 1, 1, 1\}$$

$$\{7, 4, 8, 2, 12, 8, 9, 3, 6\}$$

$$\{5, 8, 9, 2, 6, 4\}$$

Kurzdefinition

Teile eine Menge von Objekten mit Gewichten auf eine Menge von Behältern mit Maximallast, sodass jedes Objekt in einem Behälter ist und kein Behälter überladen ist.

Formal

Gegeben: Eine Behältergröße $b \in \mathbb{N}$, die Anzahl der Behälter $k \in \mathbb{N}$ und Objekte a_1, \dots, a_n ($n \in \mathbb{N}$) mit $a_i \in \mathbb{N}$, $a_i \leq b$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

Gesucht: Können die n Objekte so auf die k Behälter verteilt werden, dass kein Behälter überbeladen ist?

Seien die Gewichte der Objekte $\{3, 1, 4, 5, 1, 1\}$
und es existieren 3 Behälter mit Maximalgröße 5

Gibt es eine Verteilung ohne Überlastung?

Seien die Gewichte der Objekte $\{5, 4, 3, 3\}$
und es existieren 3 Behälter mit Maximalgröße 5

Gibt es eine Verteilung ohne Überlastung?

Gegeben sind die folgenden Probleme:

PARTITION:

Gegeben: Natürliche Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$)

Gesucht: Gibt es eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sum_{1 \leq i \leq n, i \in J} a_i = \sum_{1 \leq i \leq n, i \notin J} a_i?$$

BIN PACKING:

Gegeben: Eine Behältergröße $b \in \mathbb{N}$, die Anzahl der Behälter $k \in \mathbb{N}$ und Objekte a_1, \dots, a_n ($n \in \mathbb{N}$) mit $a_i \in \mathbb{N}$, $a_i \leq b$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

Gesucht: Können die n Objekte so auf die k Behälter verteilt werden, dass kein Behälter überbeladen ist?

Zeigen Sie, dass BIN PACKING \mathcal{NP} -hart ist, wobei PARTITION als \mathcal{NP} -vollständig vorausgesetzt werden darf!

Gegeben sind die folgenden Probleme:

PARTITION:

Gegeben: Natürliche Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$)

Gesucht: Gibt es eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sum_{1 \leq i \leq n, i \in J} a_i = \sum_{1 \leq i \leq n, i \notin J} a_i?$$

BIN PACKING:

Gegeben: Eine Behältergröße $b \in \mathbb{N}$, die Anzahl der Behälter $k \in \mathbb{N}$ und Objekte a_1, \dots, a_n ($n \in \mathbb{N}$) mit

$a_i \in \mathbb{N}$, $a_i \leq b$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

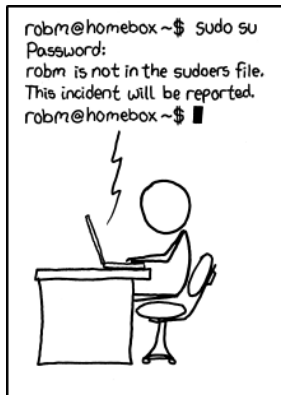
Gesucht: Können die n Objekte so auf die k Behälter verteilt werden, dass kein Behälter überbeladen ist?

Gegeben seien die Objekte der PARTITION-Probleminstanz $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (1, 1, 2, 3, 4, 5)$. Zeigen oder widerlegen Sie, ob das transformierte und das ursprüngliche Problem eine Lösung besitzen!

■ NP-Probleme

- Sat
- n-Sat ($n \geq 3$)
- n-Color ($n \geq 3$)
- Partition
- Clique
- Bin-Packing
- Traveling Salesman (TSP)
- Knapsack
- Vertex Cover
- Dominating Set
- Independent Set
- Hamilton Kreis
- Super Mario Bros.

Bis zum nächsten Mal!





Dieses Werk ist unter einem "Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland"-Lizenzvertrag lizenziert. Um eine Kopie der Lizenz zu erhalten, gehen Sie bitte zu <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/> oder schreiben Sie an Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.

Davon ausgenommen sind das Titelfeld, welches aus der März-April 2002 Ausgabe von American Scientist erschienen ist und ohne Erlaubnis verwendet wird, sowie das KIT Beamer Theme. Hierfür gelten die Bestimmungen der jeweiligen Urheber.