信号与系统 Cheat Sheet

1 概念 & 时域分析

1.1 欧拉公式

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \implies \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) \\ \sin x = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}) \end{cases}$$

1.2 冲激函数

加权 $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$

抽样
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

尺度 $\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$

1.3 卷积

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]h[n-k]$$

矩形波:上底 宽-窄,下底 宽+窄,高为窄门面 积乘以宽门的高

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) dt; \ f(t) * \delta(t) = f(t);$$

$$f(t) * \delta'(t) = f'(t)$$

1.4 系统

因果 输出只和当前输入与之前的输入有关

稳定 有界输入产生有界输出

时不变 输入发生时移,输出发生同样时移

增量线性 零状态与输入成线性; 零输入与零状态成线性。

2 CFT
$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$
$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

2.1 FT 常用变换对

2.2 FT 性质

线性 $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i F_i(\omega)$

奇偶虚实

比例 $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

时移 $f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$ 幅度谱不变,相位谱线性增加

微分
$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

 $(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \left(\frac{d}{dt}\right)^n F(\omega)$

积分
$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega)$$
 $F(0)$ 对应直流分量

有限时宽: $\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(t) dt = 0$

巻积
$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega)$$

 $f_1(t)f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$

对偶
$$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

帕斯瓦尔 能量守恒, $\|X(\omega)\|^2$ 为能量密度谱 $\int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|X(\omega)\|^2 d\omega$

2.3 周期信号 FT

正余弦 $\cos \omega_1 t \leftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)]$ $\sin \omega_1 t \leftrightarrow j \pi [\delta(\omega + \omega_1) - \delta(\omega - \omega_1)]$

一般
$$f(t) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_0(\omega) \delta(\omega - n\omega_1)$$

2.4 讨论

光滑: $|F(\omega)|$ 与 ω^n 成反比, 则 n-1 阶导不连续。

矩形; 三角, 余弦全波整流; 升余弦

频谱长度:多项式-指数-有限长,逐渐增加。

希尔伯特: 相移器, 虚实满足, 则因果。

信号面积: F(0)

结构信息: 相位谱

3 应用

3.1 调制

正弦 $\cos \omega_c t$, $Y(\omega) = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_c) + F(\omega - \omega_c)]$ 判断重叠: $\omega_c > \omega_m$

复指数
$$e^{j\omega_c t}$$
, $Y(\omega) = F(\omega - \omega_c)$

解调 再乘 $\cos \omega_c t$,低通滤波,逆变换。 $\omega_m < B < 2\omega_c - \omega_m$

3.2 采样

周期延拓。

理想
$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} f(t) * \mathcal{F}[\delta_T(t)] = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

矩形
$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{E\tau}{T_S} \operatorname{Sa}\left(\frac{n\omega_S \tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_S)$$

$$F_s(\omega) = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s)$$

不混叠, $f_s > 2f_m$, f_m 为奈奎斯特频率

4 LT和ZT

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)e^{st} ds$$

4.1 LT 常用变换对

$$e^{-\alpha t} \sin \omega t \longleftrightarrow \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

4.2 收敛域

- 1. 有始有终,能量有限(单脉冲):整个 s 平面
- 2. 周期/直流: $\sigma_0 = 0$, 稍微衰减一下就行
- 3. $f(t) = t^n$: $\sigma_0 = 0$, 指数增长速度
- 4. e^{at} : $\sigma_0 = a$
- 5. e^{t^2} 等: 无限时间范围不存在 LT

4.3 LT 性质

该部分讨论单边 0_ 系统拉普拉斯变换

线性
$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(s) + bY(s)$$

比例变换
$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

时移
$$f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}F(s)$$

频移
$$f(t)e^{-at} \leftrightarrow F(s+a)$$

徽分
$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0), -tf(t) \leftrightarrow F'(s)$$

其中 $f(0) = f(0_-),$ 不连续时会出现 $\delta(t)$
 $f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^nF(s) - s^{n-1}f(0_-) - \cdots - f^{(n-1)}(0_-)$
 $-tf(t) \leftrightarrow F'(s)$

积分
$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$$

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_{s}^{\infty} F(s) ds$$
其中
$$f^{(-1)}(0) = \int_{-\infty}^{0} f(\tau) d\tau$$

卷积 $x(t)*y(t) \leftrightarrow X(s)Y(s)$ 因果信号 $x(t)y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}[X(s)*Y(s)]$ $= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(p)Y(s - p) dp$

4.4 周期信号 LT

$$x(t) = x_1(t) * \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow \frac{X_1(s)}{1 - e^{-sT}}$$

4.5 LT 初值终值

要求: f(t) 因果信号, t=0 无跳变

初值
$$\lim_{t\to 0_+} f(t) = f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

要求 F(s) 为真分式, 含 e^{-s} 的用时移搞掉。

终值 $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

要求极点全在左半平面,或仅有一阶 p=0

$$X(z) = \mathcal{Z}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$x[z] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

4.6 ZT 常用变换对

$$\begin{array}{ccccc} u[n] & \longleftrightarrow & \frac{z}{z-1} \\ a^n & \longleftrightarrow & \frac{z}{z-a} \\ n & \longleftrightarrow & \frac{z}{(z-1)^2} \\ (n+1)a^n & \longleftrightarrow & \frac{z^2}{z-a} \\ (n)a^{n-1} & \longleftrightarrow & \frac{z}{(z-a)^2} \\ \delta[n] & \longleftrightarrow & 1 \\ \cos(\omega_0 n) & \longleftrightarrow & \frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1} \\ \sin(\omega_0 n) & \longleftrightarrow & \frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1} \end{array}$$

4.7 ZT 性质

线性

$$ax[n] + by[n] \leftrightarrow aX(z) + bY(z)$$

收敛域取交集;可能出现收敛边界处零点极点 对消,扩大收敛域

移位

$$x[n-m] \leftrightarrow z^{-m}X(z)$$

收敛域不变。单边:
$$\mathcal{Z}[x[n-m]u[n]]$$

 $x[n-1] = z^{-1}X(z) + x[-1],$
 $x[n-2] = z^{-2}X(z) + z^{-1}x[-1] + z^{-2}x[-2]$

指数加权/z 域比例

$$a^n x[n] \leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$$

收敛域比例扩大 $R_{x_{-}} < \left\| \frac{z}{a} \right\| < R_{x_{+}}$ $a^{-n}x[n] \leftrightarrow , (-1)^{n}x[n] \leftrightarrow X(-z)$

反褶

$$x[-n] \leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$$

收敛域取倒数

补零扩展

$$x_{(k)}[n] \leftrightarrow X(z^k)$$
 $x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

收敛域开方,会整出 k 个极点 $\sqrt[k]{R_{x_-}} < ||z|| < \sqrt[k]{R_{x_+}}$

微分

$$nx[n] \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} X(z)$$

收敛域不变

共轭

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(z^*)$$

收敛域不变

时域卷积

$$x[n*y[n]] \leftrightarrow X(z)Y(z)$$

收敛域取交集 $\max(R_{x_-}, R_{v_-}) < ||z|| < \min(R_{x_+}, R_{v_+})$

z 域卷积

$$x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1} dv$$

收敛域相乘 $R_{x_-}R_{y_-} < ||z|| < R_{x_+}R_{y_+}$ 差分

$$x[n] - x[n-1] \longleftrightarrow (1-z^{-1})X(z)$$

收敛域不变

累加
$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \longleftrightarrow \frac{1}{1-s^{-1}} X(z)$$

4.8 ZT 初值终值

x[n] 因果序列

初值 $x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$ 广义: x[m] =

终值 $\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1} [(z-1)X(z)]$

 $n\to\infty$ $z\to 1$ 要求极点都在单位圆内(可以有 z=1)

4.9 部分分式

4.9.1 留数

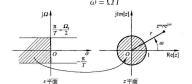
 $x[n] = X(z)z^{n-1}$ 在围线 C 内所有极点的留数和 $\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} = [(z-z_m)X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}$ s 阶 $= \frac{1}{(s-1)!} \left\{ \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} [(z-z_m)^s X(z)z^{n-1}] \right\}_{z=z_m}$ X(s) 围线是 $\sigma \pm j \infty$ 及左边无限大圆弧

4.9.2 长除法

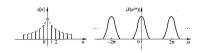
右边序列 - z 降幂

5 系统变换域分析

5 系统变换现分



DTFT 单位圆上的 Z 变换 $\mathcal{F}[x[n]] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jn\omega}$ $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega} d\omega$ {1,2,3,4,5,6,7},N=5,{7,9,3,4,5}



5.2 系统函数

 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ $h[n] \leftrightarrow H(z)$

h(t) h[n]	H(s) 极点	H(z) 极点
衰减	左半平面	单位圆内
阶跃	原点	单位圆实轴交点
等幅震荡	虚轴, 共轭	单位圆上, 共轭
增长	右半平面	单位圆外
直流	实轴	正实轴

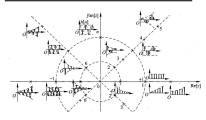
稳定系统:收敛域包含单位圆/虚轴

离散因果: z = ∞ 收敛 (分子阶 \leq 分母阶)

连续因果: -∞ 收敛, 因果因果稳定: 极点全在

单位圆内/左半平面

h(t)	H(s) 极点	H(z) 极点	稳定性
衰减	左半平面	单位圆内	稳定
增长	右半平面	单位圆外	不稳定
增长	虚轴上多重极点	单位圆上多重	不稳定
等幅震荡	虚轴, 共轭	单位圆上共轭	临界
阶跃	零点	单位圆实轴交点	临界



靠近原点振幅下降; 向 π 运动频率上升。

5.3 频率响应

 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, $y[n] = x[n]H(e^{j\omega_0})$, H 的 DTFT $H(e^{j\omega_0}) = ||H(e^{j\omega_0})||e^{j\varphi(\omega_0)}$, 增益 + 相移

离散 矢量终点 $A: e^{j\omega}$,因此绕单位圆一周即可给出频响。(周期函数, $T = 2\pi$)

连续 $H(j\Omega)$, 矢量终点 A 从零点开始沿虚轴运动。 $0 < \Omega < \infty$

5.4 相频特性

单位圆内的零点,每转一圈, $\Delta \varphi(\omega) = 2\pi$ 单位圆外的零点,每转一圈, $\Delta \varphi(\omega) = 0$ 最小相位:唯一。M 零点, 2^M 个同幅频特性。

全通
$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - z_0^*}{1 - z_0 z^{-1}}$$

连续:零极点分别位于虚轴左右,关于虚轴对称 最小相位,单位圆外/右半平面无零点

每个周期内相频特性变化为零;可以和全通系统级联表示非最小相位系统;可逆;无负调现象。

因果最小相位 加上极点全在单位圆/左半平面



6 FFT

6.1 DFT

$$\begin{split} & \operatorname{DFS}[\widetilde{x}[n]] = \widetilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \widetilde{x}[n] W^{nk} \\ & \operatorname{IDFS}[\widetilde{X}[k]] = \widetilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{X}[k] W^{-nk} \\ & \operatorname{DFT}[x[n]] = X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W^{nk}, 0 \leq k \leq N-1 \end{split}$$

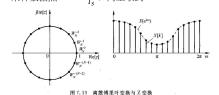
IDFT[X[k]] =
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W^{-nk}$$

$$W_N = W = e^{-j\,\frac{2\pi}{N}}$$

矩阵序列: $R_N[n] = 1, n \in [0, N-1]$

数据采样参数

采样时间间隔: $T_s = \frac{1}{f_s} < \frac{1}{2f_{\max}}$ 采样总时间: 频率分辨率 f_1 , $T_1 \geq \frac{1}{f_1}$ 采样数据点: $N = \frac{T_1}{T_r}$, 向上取到 2^n



6.2 圆卷积

 $x[n](N)y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y((n-m))_N R_N[n]$ 取反,取主值,相乘,叠加。 需要序列长度相等,补零。

1	2	3	4	5	0	0	
5	0	0	4	3	2	1	=36
4	5	0	0	3	2	1	=29

圆卷积 = 线卷积: 都补零到 L = N + M - 1

6.3 DFT 性质

线性 $ax[n] + by[n] \leftrightarrow aX[k] + bY[k]$

圆移位 $x((n-m))_N R_N[n] \longleftrightarrow W^{mk} X[k]$ $x[n] \longrightarrow x((n-m))_N R_N[n]$ 右移 m

频域圆移位 $W^{nl}x[n] \longleftrightarrow X((k+l))_N R_N[k]$

频域圆卷积 $Y[k] = \frac{1}{N}X[k](N)H[k]$

x(n)	X(k)	x(n)	X(k)
实函数	实部为偶、虚部为奇	虚函数	实部为奇、虚部为侧
实偶函数	实偶函数	虚偶函数	虚偶函数
定在函数	療許函數	使表函數	空奔函數

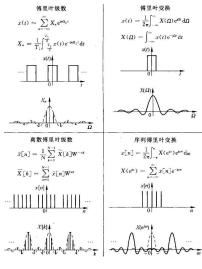
6.4 FFT

DFT: 每计算一个 X[k], 需要 N 次复数乘法和 N-1 次复数加法; 需要算 N 个。

FFT: 复数乘法: $\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$ 复数加法: $N \cdot \log_2 N$

6.5 快速卷积

线: $M \times N$; (M-1)(N-1)FFT: $L \ge M + N - 1$, 取 2^n $3 \times \frac{L}{2} \log_2 L + L$; $3 \times L \log_2 L$



7 滤波器

离散 $\|H(e^{j\omega})\|$ 偶函数 $T=2\pi$,类型看 $[0,\pi]$ 可实现性: $\int_{-\infty}^{+\infty}|H(j\Omega)|^2<\infty$

7.1 IIR 设计

框图: H(z) 上面是输入,下面是输出脉冲响应不变: 拉普拉斯反变化后采样,随后 z变换 $H(s) \rightarrow h(t) \rightarrow h[n] \rightarrow H(z)$ 适用部分分式,由于混叠,不适用高通。

$$\frac{1}{s-p_k} \to \frac{1}{1-e^{p_k T} z^{-1}}$$

双线性: 令 $s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

7.2 FIR 设计

通带频率 ω_p ,截止频率 ω_s 阻带衰减比率 AdB 归一化频率: $\Omega = \frac{2\pi\omega}{\omega_s}$,其中 ω_s 为采样频率

- (1) 选择理想低通滤波器的带宽: $\Omega_1 = \frac{\Omega_s + \Omega_p}{2}$
- (2) 根据衰减比率选择合适的加窗窗口;
- (3) 根据过渡带 $\Omega_2 = \Omega_p \Omega_s$ 确定滤波器的长度: $N = \frac{2\pi}{\Omega_2} \times R_w$, 其中 R_w 是加窗对应的过渡带宽度系数;

 $(4) \ h_d(n) = \frac{\sin[\Omega_1(n-a)]}{\pi(n-a)} \cdot W[n]$ 其中 $a = N/2, \ W[n]$ 是窗口函数

8 总结

这一学期的课程让我收获良多。但由于参与了 2022 北京冬奥会及冬残奥会, 我在 4 月 6 日才 解除隔离返回学校。赛事服务期间的课程由于时 间可能会产生冲突, 我都是利用学堂在线的 MOOC 课程进行学习的。在学习过程中, 我感 觉 MOOC 的内容编排上提前介绍的内容太多, 不是很"循序渐进"。比如第一章的系统分类, 下子摆出了所有的分类类型,一时间信息量有些 过于庞大。我认为郑教授的书的处理方法会比较 适合自学,第一章先介绍一小部分系统分类,剩 下的留到第二章线性时不变系统的时候统一介绍。 或许 MOOC 因为回放方便的特性,会被认为比 较适合在短时间内讲述结构性强, 知识密度高的 内容, 但我认为 MOOC 另一个重要的方面是方 便同学们进行自学, 也有必要考虑知识点引入的 循序渐进。以上是我关于 MOOC 课程的一些小 想法。

另外由于 4 月 6 日前未能参与课堂教学环节 (有学校的假条),还得麻烦卓大大留意一下我的 课堂参与分数。我也会在考试后单独联系您,看 看怎么处理这一部分分数~

Copyright © 2022 陈辰

自 04 班 2020011633

chen-che20@mails.tsinghua.edu.cn CalaW/SignalsAndSystem-CheetSheet

