Esame di Calcolo Numerico

01/02/2019

Portare alla propria postazione solo la penna.

Per accedere correttamente ai pc eseguire le istruzioni riportare nel foglio allegato.

Con l'avverbio "analiticamente" si richiede di effettuare i calcoli solo con carta e penna, senza comandi Matlab.
Per ogni esercizio che richiede esecuzione di comandi Matlab creare file script con tutte le istruzioni programmate per risolverlo (non utilizzare la Command Window).
Salvare i file contenenti le figure, corredate da tutti i dati necessari per la loro interpretazione (legende e/o axis label e/o titolo...).
Riportare e salvare eventuali tabelle in file di testo.

Tempo a disposizione per lo svolgimento: ***2 ore****.*

1. Calcolare "analiticamente" le radici dell'equazione di secondo grado

$$x^2 - 0.5001\,x + 5 \cdot 10^{-5} = 0\,.$$

Confrontare con il risultato ottenuto attraverso comandi Matlab. Commentare.

2. Integrazione numerica.
2a) Descrivere le formule di quadratura interpolatorie per integrali monodimensionali su intervalli limitati.
2b) Definire il grado di esattezza di una formula di quadratura.
2c) Descrivere la formula del punto medio.
2d) Approssimare "analiticamente", con la formula del punto medio, l'integrale

$$\int_{3.1}^{5.2} \exp(6 \cdot t)dt$$

3. In Matlab assegnare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

e il termine noto b in modo tale che la soluzione sia $x = [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]'$.

3a) Dire perché si sa, a priori, che i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono.
3b) Ricavare "analiticamente" l'algoritmo di Jacobi.
3c) Implementare l'algoritmo di Jacobi in Matlab con vettore iniziale nullo.
3d) Calcolare la norma infinito della matrice di Jacobi.
3e) Calcolare numericamente la soluzione del sistema Ax = b con il metodo di Jacobi e 40 iterazioni.

Implementare il metodo di Gauss-Seidel trascrivendo il codice sottostante:

```
=============================================================
function [x,B_Gauss]=GaussS(a,b,x0,nmax)
%Input
% a = matrice
% b = termine noto
% x0 = vettore iniziale
% nmax = numero massimo di iterazioni

%Output
% x = matrice contenente nella i-esima colonna il vettore
%     soluzione all'i-esima iterazione
% B_Gauss = matrice di iterazione del metodo

%Metodo di Gauss-Seidel
[n,n]=size(a);
iter=0;
x=[];
x_old=x0;
while iter<nmax
    iter=iter+1;
    D=diag(diag(a));
    E=tril(a,-1);
    F=triu(a,1);
    B_Gauss=-inv(D+E)*F;
    x(:,iter)=-inv(D+E)*F*x_old+inv(D+E)*b;
    x_old=x(:,iter);
end
=============================================================
```

3f) Calcolare la norma infinito della matrice di Gauss-Seidel.
3g) Calcolare numericamente la soluzione del sistema Ax = b mediante il metodo di Gauss-Seidel con vettore iniziale nullo e 40 iterazioni.
3h) Rappresentare l'andamento dell'errore assoluto sulla soluzione ottenuto con i due metodi in funzione del numero di iterazioni (sino a 40 iterazioni).
3i) Entrambi i metodi sono convergenti? Quale metodo risulta più accurato? Commentare.