ISEL
INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
ÁREA DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM ENGENHARIA QUÍMICA E BIOLÓGICA

CÁLCULO NUMÉRICO

EXAME DE 2ª ÉPOCA

ANO LECTIVO 2012/2013 DATA - 15/02/2013

Apresente cuidadosamente todos os cálculos.

---

1. Uma variável V pode ser calculada a partir de valores experimentais $x = 3.14 \pm 0.005$ e $y = 0.84 \pm 0.01$ e $z = 0.95 \pm 2\%$, usando a relação

$$V = \frac{15}{x}\cos(y^2 z).$$

   (a) Indique o número de algarismos significativos de y e apresente um majorante para o erro absoluto de z. (0.5 valores)

   (b) Aplicando a fórmula fundamental do cálculo dos erros, determine um valor aproximado de V e um majorante para o erro absoluto da aproximação. Qual o número de algarismos significativos de V? (2.5 valores)

2. Considere a seguinte função tabelada

x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
$f(x)$	2	30	120	340	760

Determine uma estimativa do valor de $f(x)$, para $x = 3.6$, usando:

   (a) uma relação do tipo

$$y = ax^b,$$

   em que as constantes a e b, são determinadas pelo critério dos mínimos quadrados, após linearização adequada; (2.5 valores)

   (b) um polinómio interpolador do 2º grau, justificando convenientemente a escolha dos pontos de colocação. Sabendo que $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq n^4$, $0 < n < 5$ e $x \in [1, 5]$, determine o majorante para o erro da interpolação. (1.5 valores)

3. Considere a função $f(t) = \frac{e^t}{t}$, $t \in [1, 2]$ e o integral

$$I = \int_1^2 f(t)\, dt.$$

   (a) Sabendo que

$$f''(t) = \left(\frac{e^t}{t} - \frac{2e^t}{t^2} + \frac{2e^t}{t^3}\right)$$

   e, utilizando métodos de análise intervalar, prove que $2e^2$ é um majorante de $|f''(t)|$ no intervalo considerado. (1.0 valor) **v.s.f.f**

(b) Construa uma tabela (*Tabela T*) da função integranda $f(t)$, com passo $h = 0.25$, arredondando os valores da função à ordem 10^{-4}. Determine um valor aproximado de $f(1.60)$ por interpolação de Lagrange linear e calcule um majorante para o erro de interpolação. (1.5 valores)

(c) Usando a *Tabela T*, determine um valor aproximado de I pela regra de Newton-Cotes simples adequada à partição. Calcule I utilizando a regra dos trapézios composta e indique o respectivo erro de truncatura. (1.5 valores)

4. Considere a equação

$$-x^2 + 6x - 8 + e^x = 0, \;\; x \in \,]0, 2[\,.$$

(a) Apresentando argumentos analíticos e geométricos, mostre que a equação tem uma só raiz real quando $x \in \,]0, 2[\,$. (1.0 valor)

(b) Separe a raiz num intervalo J com amplitude máxima de 0.1 e determine uma estimativa para o valor da raiz. (0.5 valores)

(c) Estabeleça a garantia de convergência do método de Newton-Raphson, no intervalo J, definido na alínea anterior, indicando o extremo favorável para iniciar o algoritmo. (1.5 valores)

(d) Indique um valor aproximado da raiz fazendo duas iterações pelo método de Newton. (1.5 valores)

5. Seja r um número real positivo. Mostre que para calcular $\sqrt{r}$ através do método de Newton-Raphson, uma fórmula iteradora pode ser dada por

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{r}{2x_n}.$$

(2.5 valores)

NÃO FAZER

6. Considere a seguinte EDO de 1ª ordem

$$y' + y - x = 0 \quad \text{de} \quad x = 0 \quad \text{a} \quad x = 1.0 \quad \text{com} \quad y(0) = 1.0$$

(a) Determine um valor aproximado de $y(1.0)$ usando o método de Heun com $h = 0.5$. (1.5 valores)

(b) A solução analítica da EDO é $y(x) = -1 + x + 2e^{-x}$. Indique o erro existente entre a solução exacta e a solução numérica obtída. (0.5 valores)

Fim

Cálculo Numérico

Exame de 2ª Época

Data - 15/02/2013

Ano Lectivo 2012/2013

[1] - Uma variável V é definida por

$$V = \frac{15}{x}\cos(y^2 z)$$

com $x = 3.14 \pm 0.005$, $y = 0.84 \pm 0.01$ e $z = 0.95 \pm 2\%$

(a) Indique o número de algarismos significativos de y e apresente um majorante para o erro absoluto de z.

Número de algarismos significativos de y

$$\Delta y = 0.01 \leq 0.05 = 0.5 \times 10^{-1}$$

$\bar{y} = 0.84$ Por conseguinte, a aproximação $\bar{y}$ apresenta 1 algarismo significativo, a saber, o <u>8</u>.

$\uparrow$
10^{-1}

Um majorante para o erro absoluto de ρ

$$\Delta z = \frac{2}{100} \times 0.95$$

$$\Delta z = 0.019$$

(b) Aplicando a formula fundamental do cálculo dos erros, determine um valor aproximado de V e um majorante para o erro absoluto da aproximação. Quantos algarismos significativos tem o seu $\bar{V}$.

Podemos efectuar as seguintes substituições:

$\Rightarrow$ Seja $a = y^2 z$

$$\Delta a = \left|\frac{\partial a}{\partial y}\right|_M \Delta y + \left|\frac{\partial a}{\partial z}\right|_M \Delta z$$

$$\Delta a = |2yz|_M \Delta y + |y^2|_M \Delta z$$

$$\Delta a = 2 \times 0.85 \times 0.969 \times 0.01 + 0.85^2 \times 0.019$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 10^{-5}}}{\Delta a = 0.03021}$$ (arredondamento por excesso com 4 algarismos relevantes)

$$\bar{a} = \bar{y}^2 \bar{z}$$

$$\bar{a} = (0.84)^2 \times 0.95 = 0.67032$$ (arredondamento simétrico à ordem 10^{-5})

⇨ Seja $b = \cos(a)$

$$\Delta b = \left|\frac{db}{da}\right|_M \Delta a$$

$$\Delta b = \left|-\operatorname{sen} a\right|_M \Delta a \Leftrightarrow \Delta b = \operatorname{sen}(0.67032 + 0.03021) \times 0.03021$$

$$\Leftrightarrow \Delta b = 0.01948$$

$$\uparrow$$
$$10^{-5}$$

$$\bar{b} = \cos(\bar{a})$$

$$\bar{b} = \cos(0.67032) \Leftrightarrow \bar{b} = 0.78362$$

⇨ Finalmente, $V = \frac{15b}{x}$

$$\Delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial b}\right|_M \Delta b + \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_M \Delta x$$

$$\Delta V = \left|\frac{15}{x}\right|_M \Delta b + \left|-\frac{15b}{x^2}\right| \Delta x$$

$$\Delta V = \frac{15}{3.135} \times 0.01948 + \frac{15 \times (0.78362 + 0.01948) \times 0.005}{(3.135)^2}$$

$$\Delta V = 0.0932057416 + 0.0602325 = 0.1535$$

$$\uparrow$$
$$10^{-4}$$

$$\bar{V} = \frac{15\bar{b}}{\bar{x}} = 3.7434$$

$$\uparrow$$
$$10^{-4}$$

Assim,

$$V = \bar{V} + \Delta V \Leftrightarrow V = 3.7434 \pm 0.1535$$

$\Delta V = 0.1535 \leq 0.5 \times 10^0$. Logo $\bar{V}$ tem apenas 1 algarismo significativo, a saber, o 3.

2 - Considere a seguinte função tabelada

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	30	120	340	760

Determine uma estimativa do valor de y, para $x = 3,6$, usando:

(a) uma relação do tipo

$$y = a x^b,$$

em que as constantes a e b, são determinadas pelo critério dos mínimos quadrados, após linearização adequada.

Sabemos que $y = a x^b$ (y não varia linearmente com x)

$$\underbrace{\ln y}_{z} = \underbrace{\ln a}_{a_0} + \underbrace{b}_{a_1} \underbrace{\ln x}_{t}$$ (z varia linearmente com t)

Construímos uma nova tabela

$t = \ln x$	$z = \ln y$
0	0.6931
0.6931	3.4012
1.0986	4.7875
1.3863	5.8289
1.6094	6.6333

O sistema normal será

$$\begin{array}{c} \\ (1) \\ (t) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (1) & (t) \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sum 1 & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} (z) \\ \begin{bmatrix} \sum z \\ \sum tz \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4.7874 \\ 4.7874 & 6.1993 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.344 \\ 26.3732 \end{bmatrix}$$

Pela Regra de Crarmer

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 21.344 & 4.7874 \\ 26.3732 & 6.1993 \end{vmatrix}}{8.0773} = \frac{6.0588}{8.0773} = 0.75010$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 21.344 \\ 4.7874 & 26.3732 \end{vmatrix}}{8.0773} = \frac{29.6837}{8.0773} = 3.6750$$

$$a_0 = \ln a \Rightarrow \ln a = 0.75010 \Leftrightarrow a = e^{0.75010}$$
$$\Leftrightarrow a = 2.1172$$

$$a_1 = b \Rightarrow b = a_1 \Leftrightarrow b = 3.6750$$

$$y = a x^b$$
$$y = 2.1172\, x^{3.6750}$$

Para $x = 3.6$

$$y = 234.5166$$

(b) um polinómio interpolador do 2º grau, justificando convenientemente a escolha dos pontos de colocação, sabendo que $|f^{(n)}(x)| \leq n^4,\ 0 < n < 5 \ \wedge \ \forall x \in [1,5]$, determine um majorante para o erro da interpolação.

Como $p_2(x)$ tem grau ≤ 2, vamos escolher 3 pontos x_0, x_1 e x_2 que enquadrem o valor $x = 3.6$ (de modo a minimizar $|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$),

	x	y
$x_0 =$	3	$120 = y_0$
$x_1 =$	4	$340 = y_1$
$x_2 =$	5	$760 = y_2$

O polinómio de Lagrange tem a forma

$$p_2(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1 + L_2(x)\, y_2$$

$$p_2(x) = \frac{(x-4)(x-5)}{(3-4)(3-5)} \times 120 + \frac{(x-3)(x-5)}{(4-3)(4-5)} \times 340 + \frac{(x-3)(x-4)}{(5-3)(5-4)} \times 760$$

$$p_2(x) = (x-4)(x-5) \times 60 - (x-3)(x-5) \times 340 + (x-3)(x-4) \times 380$$

$$p_2(3.6) = 228 .$$

Um majorante do erro de interpolação é dado por

$$\left| f(x) - p_2(x) \right| \leq \frac{M}{3!} \left|(x-3)(x-4)(x-5)\right|$$

com $M = \text{Max}\ f^{(3)}(c)\ ,\ c \in [3,5]$

como $\left|f^{(3)}(c)\right| \leq 3^4$

$$\left| f(3.6) - p_2(3.6) \right| \leq \frac{3^4}{6} \cdot (3.6-3)(3.6-4)(3.6-5)$$

$$\left| f(3.6) - p_2(3.6) \right| \leq 4.536$$

Considere a função $f(t) = \frac{e^t}{t}$, $t \in [1,2]$ e o integral

$$I = \int_1^2 f(t)\, dt.$$

(a) Sabendo que

$$f''(t) = \left(1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}\right) f(t)$$

e, utilizando métodos de análise intervalar, prove que $2e^2$ é um majorante de $|f''(t)|$ no intervalo considerado.

Pela análise intervalar

$$f''(t) \in \left(\frac{e^{[1,2]}}{[1,2]} \times \left([1,1] - \frac{[2,2]}{[1,2]} + \frac{[2,2]}{[1,2]^2}\right)\right)$$

$$f''(t) \in \left(\left[\frac{e}{2}, \frac{e^2}{1}\right] \times \left([1,1] - [1,2] + \left[\frac{1}{2}, 2\right]\right)\right)$$

$$f''(t) \in \left(\left[\frac{e}{2}, e^2\right] \times \left([-1,0] + \left[\frac{1}{2}, 2\right]\right)\right)$$

$$f''(t) \in \left(\left[\frac{e}{2}, e^2\right] \times \left[-\frac{1}{2}, 2\right]\right)$$

$f''(t) \in \left[-\frac{e^2}{2}, 2e^2\right]$. Por conseguinte, $|f''(t)| \leq 2e^2$

(b) Construa uma tabela (Tabela T) da função integranda $f(t)$, com passo $h = 0.25$, arredondando os valores à ordem 10^{-4}. Determine uma aproximação de $f(1.60)$ por interpolação linear, calcule um majorante para o erro de interpolação.

	t	$f(t)$	
$x_0 =$	1.0	2.7183	$= f_0$
$x_1 =$	1.25	2.7923	$= f_1$
$x_2 =$	1.5	2.9878	$= f_2$
$x_3 =$	1.75	3.2883	$= f_3$
$x_4 =$	2.0	3.6945	$= f_4$

$$p_1(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1$$

t	$f(t)$	
$x_0 = 1.5$	2.9878	$= y_0$
$x_1 = 1.75$	3.2883	$= y_1$

$$p_1(x) = \frac{x-1.75}{(1.5-1.75)} \times 2.9878 + \frac{x-1.5}{1.75-1.5} \times 3.2883$$

$$f(1.6) \approx p_1(1.60) = 1.79268 + 1.31532 = 3.108$$

$$\left|f(1.60) - p_1(1.60)\right| \leq \frac{M}{2!}\left|(1.6-1.5)(1.6-1.75)\right|$$

$$M = \max \left|f''(x)\right|_{x\in[1,2]}$$

$$M = 2e^2$$

$$\left|f(1.6) - p_1(1.6)\right| \leq \frac{2e^2}{2} \times \left|(1.60-1.5)(1.60-1.75)\right|$$

$$\leq 0.1108358415$$

(c) Usando a tabela T, determine um valor aproximado de I pela Regra de Newton-Cotes simples adequada à partição. Calcule I utilizando a Regra dos trapézios composta e indique o respetivo erro de truncatura.

A regra simples adequada é a regra de Milne (m=4 subin

$$I \approx \frac{2h}{45} \times (7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$$

$$I \approx \frac{2\times 0.25}{45} \times 275.3224$$

$$I \approx 3.059137778$$

Usando a regra dos trapézios composta. Erro de trunc.

$$I \approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \qquad |E_{trunc}| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} \max_{x\in[1,} |f''(x)|$$

$$I \approx \frac{0.25}{2} \times 24.5496 \qquad \leq \frac{2e^2}{12\times 4^2} = 0.07697$$

(arred. por exce

$$I \approx 3.0687$$

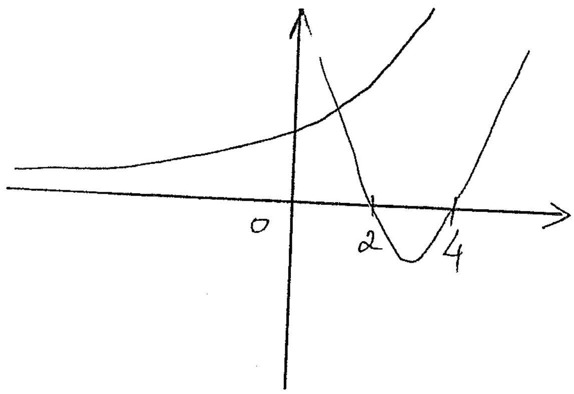
Considere a equação

$$-x^2+6x-8+e^x=0\ ,\quad x\in\,]0,2[\,.$$

(a) Apresentando argumentos analíticos e geométricos, mostre que a equação tem uma só raiz real quando $x\in\,]0,2[$.

Consideremos

$$\underbrace{e^x}_{\varphi(x)} = \underbrace{x^2-6x+8}_{\psi(x)}$$



$x^2-6x+8=0$

$x=2 \vee x=4$

$f(x)=e^x-x^2+6x-8$

$f'(x)=e^x-2x+6 \Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in[0,2]$

f é estritamente crescente em $[0,2]$

$f(0)=1-8=-7<0$

$f(2)=e^2-4+12-8=e^2>0$

Pelo corolário do Teorema de Bolzano, $f(x)$ tem apenas um zero em $]0,2[$.

(b) Separe a raiz num intervalo J com amplitude máxima 0.1 e determine uma estimativa para o valor da raiz.

$r\in[1.0,\ 1.1]$

$f(1)<0 \qquad r\approx\frac{1+1.1}{2} \qquad r=\bar{r}\pm\Delta r$

$f(1.1)>0 \qquad r\approx 1.05 \qquad r=1.05\pm 0.05$

(c) Estabeleça a garantia de convergência do método Newton-Raphson, no intervalo I, definido na alínea anter[ior] indicando o extremo favorável para iniciar o algoritmo.

As condições de convergência do método de Newton-R.

(i) f, f' e f'' são contínuas no intervalo $[1.0, 1.1]$

$$f(x) = e^x - x^2 + 6x - 8$$

$$f'(x) = e^x - 2x + 6$$

$$f''(x) = e^x - 2$$

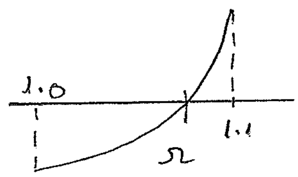
(ii) $f'(x) \neq 0 \;,\; \forall x \in [1.0, 1.1]$

$f''(x) \neq 0 \;,\; \forall x \in [1.0, 1.1]$

(iii) f é estritamente crescente e $[1.0, 1.1]$,

pois $f'(x) = e^x - 2x + 6 > 0 \;,\; \forall x \in [1.0, 1.1]$

$f''(x) = e^x - 2 > 0 \;,\; \forall x \in [1.0, 1.1]$



(iv) Tomamos para extremo favorável

$x_0 = 1.1$, pois $f(1.1)$ tem o mesmo sinal de $f''(x)$ $\forall x \in [1.0, 1.1]$

(d) Indique um valor aproximado da raiz fazendo duas iterações pelo método de Newton-Raphson.

$$x_{m+1} = x_m - \frac{e^{x_m} - x_m^2 + 6x_m - 8}{e^{x_m} - 2x_m + 6} \qquad x_0 = 1.1$$

x_m	x_{m+1}
$x_0 = 1.1$	$1.042069899 = x_1$
$x_1 =$	$1.041834525 = x_2$

$r \sim 1.041834525$

Seja r um nº real positivo. Mostre que para calcular $\sqrt{r}$ através do método de Newton-Raphson, uma fórmula iteradora pode ser dada por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + \left(\frac{r}{x_n}\right)\right].$$

Seja $f(x) = 0$, com $f(x) = x^2 - r$

$x = \sqrt{r}$ é uma das raízes de $f(x) = 0$

$f'(x) = 2x^2$

Aplicando o método de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - r}{2x_n}$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + r}{2x_n}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + r}{2x_n}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{r}{2x_n}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{r}{x_n}\right]$$

Considere a seguinte EDO de 1ª ordem

$$\frac{dy}{dx} = x - y \quad \text{de } x=0 \quad \text{a } x = 1.0 \text{ com } y(0) = 1.0$$

(a) Determine um valor aproximado de $y(1.0)$ usando o método de Heun com $h=0.5$.

No nosso caso $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $f(x,y) = x - y$ e $h = 0.5$

$n=1$

$x_1 = x_0 + h$

$x_1 = 0 + 0.5$

$x_1 = 0.5$

$K_1 = h f(x_0, y_0)$

$K_1 = 0.5 \times (x_0 - y_0)$

$K_1 = 0.5 \times (0 - 1)$

$K_1 = -0.5$

$K_2 = h f(x_0 + h, y_0 + K_1)$

$K_2 = 0.5 \times (x_0 + h - y_0 - K_1)$

$K_2 = 0.5 \times (0 + 0.5 - 1.0 + 0.5)$

$K_2 = 0$

$$y_1 = y_0 + \frac{K_1 + K_2}{2} \Leftrightarrow y_1 = 1.0 + \frac{-0.5 + 0}{2}$$

$$y_1 = 0.75$$

$n = 2$

$x_2 = x_1 + h$

$x_2 = 1.0$

$K_1 = h f(x_1, y_1)$

$K_1 = 0.5 \times (x_1 - y_1)$

$K_1 = 0.5 \times (0.5 - 0.75) = -0.125$

$K_2 = h f(x_1 + h, y_1 + K_1)$

$K_2 = 0.5 \times (x_1 + h - y_1 - K_1)$

$K_2 = 0.5 \times (0.5 + 0.5 - 0.75 + 0.125)$

$K_2 = 0.1875$

$$y_2 = y_1 + \frac{K_1 + K_2}{2} \Leftrightarrow \underline{y_2 = 0.78125}$$

(b) A solução analítica da EDO é $y(x) = x + 2e^{-x} - 1$.
Indique o erro existente entre a solução exacta e a solução numérica obtida

A solução numérica

$$y_2 = 0.78125$$

A solução analítica

$$y(1) = 1 + 2e^{-1} - 1$$

$$y(1) = 0.7357588823$$

$$|y_2 - y(1)| = 0.045491177$$