ISEL
INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
ÁREA DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM ENGENHARIA QUÍMICA E BIOLÓGICA

CÁLCULO NUMÉRICO

TESTE GLOBAL

ANO LECTIVO 2012/2013 DATA - 8/01/2013

Apresente cuidadosamente todos os cálculos.

---

1. Considere a grandeza T dada por
$$T = \frac{\alpha - \beta}{\ln(\alpha - \beta)}$$
em que $\alpha = 12.3 \pm 0.02$ e $\beta = 1.4 \pm 2\%$.

   (a) Indique quais são os algarismos significativos de α e determine um majorante para o erro absoluto de β (0.5 valor)

   (b) Determine, aplicando a fórmula fundamental do cálculo dos erros, um valor aproximado de T e um majorante para o erro absoluto da aproximação.
   (2.5 valores)

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	0	2	4
$f(x_i)$	0.25	2.68	11.24

   (a) Determine a função da forma
$$g(x) = a_0\, 2^x + a_1\, sen(x)$$
   que melhor se ajusta, segundo o critério dos mínimos quadrados, aos valores apresentados na tabela (conduza os cálculos intermédios com 5 casas decimais). Qual o valor do desvio em $x = 0$? (2.5 valores)

   (b) Suponha que $f'''(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Obtenha o valor exacto do integral $I = \int_0^4 f(x)\, dx$.
   Justifique a sua resposta. (1.5 valores)

3. Considere a seguinte tabela de valores

x	1.0	1.1	1.2	1.9	2.0
$f(x)$	2.3	-4.5	5.7	-8.3	-0.6

em que os valores da função estão arredondados à ordem 10^{-1}, com
$$f''(x) \in [-20, 10]\,, \quad f'''(x) \in [-50, 20]\,, \quad f^{(4)}(x) \in [-80, 60]\,, \forall x \in [1, 2]\,.$$

Determine, por interpolação de Lagrange quadrática, um valor aproximado de $f(1.25)$ e um majorante para o erro de truncatura desta mesma aproximação. (1.5 valores)

4. Considere o integral

$$I = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\, dx.$$

(a) Determine um valor aproximado de I, usando a Regra de Simpson composta com $h = 0.25$ e os valores da função arredondados à ordem 10^{-4}. Qual o erro de arredondamento? (1.5 valores)

(b) Utilizando apenas os pontos $x = 0$, $x = 0.75$ e $x = 1.0$, calcule um valor aproximado de I. Justifique a sua resposta. (1.5 valores)

5. Considere a equação

$$\ln x - (x-2)^2 = 0.$$

(a) Usando métodos gráficos efectue a contagem e separação das raízes reais da equação. (1.0 valores)

(b) Apresente um intervalo H que contenha a raiz mais pequena com um erro absoluto não excedendo 0.05. Escreva convenientemente uma estimativa para a raiz na forma $r_1 = \overline{r_1} \pm \Delta r_1$. (0.5 valores)

(c) Mostre que no referido intervalo H, o método de Newton-Raphson é convergente justificando a escolha do extremo favorável. (1.5 valores)

(d) Aplique o referido método fazendo duas iterações. (1.5 valores)

NÃO FAZER

6. Foi colocado um bloco de 10 kg de material solúvel num recipiente contendo 60 l de água pura. A quantidade de material dissolvido Q, dada em percentagem, em cada instante verifica a equação diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{0.0196(10-4Q)}{60-1.2Q}$$

Usando o método de Euler com $h = 30$ s, determine o valor da quantidade de material dissolvido ao fim de 90 s. (1.5 valores)

7. Considere uma função $y = f(x)$ tal que $y_i = f(x_i) = 1$, para $i = 0, 1, 2, 3, ..., n$. Atendendo a que o polinómio $p_0(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, é também interpolador de $f(x)$ nos $n+1$ pontos, mostre que $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (2.5 valores)

Fim

CÁLCULO NUMÉRICO

Teste Global

Ano Lectivo 2012/2013 Data - 8/01/2012

1 - Considere a grandeza T dada por

$$T = \frac{\alpha + \beta}{\ln(\alpha - \beta)}$$

em que $\alpha = 12.3 \pm 0.02$ e $\beta = 1.4 \pm 2\%$.

(a) Indique o número de algarismos significativos de α e determine um majorante para o erro absoluto de β.

Número de algarismos significativos de α

$$\Delta\alpha = 0.02 \leq 0.05 = 0.5 \times 10^{-1}$$

$\bar{\alpha} = 12.3$ (↑ 10^{-1}) Por conseguinte, a aproximação $\bar{\alpha}$ apresenta $\underline{\underline{3}}$ algarismos significativos, a saber, o $\underline{\underline{1}}$, o $\underline{\underline{2}}$ e o $\underline{\underline{3}}$.

Um majorante para o erro absoluto de β

$$\Delta\beta = \frac{2}{100} \times 1.4 = \frac{2.8}{100} = 0.028.$$

Assim $\Delta\beta = 0.028$.

(b) Determine, aplicando a F.F.C.E, um valor aproximado de T e um majorante para o erro absoluto da aproximação.

⇨ Seja $x = \alpha - \beta$

$$\Delta x = \left|\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right|_M \Delta\alpha + \left|\frac{\partial x}{\partial \beta}\right|_M \Delta\beta$$

$$\Delta x = \Delta\alpha + \Delta\beta$$

$$\Delta x = 0.02 + 0.028$$

$$\Delta x = 0.04800$$

(↑ 10^{-5})

$$\bar{x} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}$$

$$\bar{x} = 12.3 - 1.4 = 10.90000$$

Vamos calcular os majorantes dos erros com 4 algarismos relevantes (arred. por excesso). Os valores aproximados são determinados com arred. simétrico à ordem do 4.º algarismo relevante do majorante do erro.

Seja $y = \ln x$

$$\Delta y = \left|\frac{dy}{dx}\right|_M \Delta x$$

$$\Delta y = \left|\frac{1}{x}\right|_M \Delta x$$

$$\Delta y = \frac{1}{10.9 - 0.048} \times 0.048$$

$$\Delta y = 0.0044232$$

10^{-7}

$$\bar{y} = \ln \bar{x}$$

$$\bar{y} = 2.3887628$$

Finalmente, seja $T = \dfrac{x}{y}$

$$\Delta T = \left|\frac{\partial T}{\partial x}\right|_M \Delta x + \left|\frac{\partial T}{\partial y}\right|_M \Delta y$$

$$\Delta T = \left|\frac{1}{y}\right|_M \Delta x + \left|-\frac{x}{y^2}\right|_M \Delta y$$

$$\Delta T = \frac{1}{2.3887628 - 0.0044232} \times 0.048 + \frac{10.9 + 0.048}{(2.3887628 - 0.0044232)^2} \times 0.0044232$$

$$\Delta T = 0.0201313605 + 0.0085179511$$

$$\Delta T = 0.02865$$

10^{-5}

$$\bar{T} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = 4.56303$$

$$T = \bar{T} \pm \Delta T$$

$$T = 4.56303 \pm 0.02865$$

$\boxed{2}$ Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	0	2	4
$f(x_i)$	0.25	2.68	11.24

(a) Determine a função da forma

$$g(x) = a_0 2^x + a_1 \operatorname{sen}(x)$$

que melhor se ajusta, segundo o critério dos mínimos quadrados, aos valores apresentados na tabela (considera os cálculos intermédios com 5 casas decimais). Qual o valor do desvio em $x=0$?

Seja $g(x) = a_0 \underbrace{2^x}_{g_0} + a_1 \underbrace{\operatorname{sen} x}_{g_1}$

Começamos por construir a tabela

x_i	$f(x_i)$	$g_0(x)$	$g_1(x)$
0	0.25	1	0.0
2	2.68	4	0.909297
4	11.24	16	−0.756802

O correspondente sistema normal é

$y = f(x)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} g_0 & g_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} g_0 \\ g_1 \end{array} & \underbrace{\begin{bmatrix} g_0/g_0 & g_0/g_1 \\ g_1/g_0 & g_1/g_1 \end{bmatrix}}_{A} \end{array} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \overset{y}{\begin{bmatrix} g_0/y \\ g_1/y \end{bmatrix}}$$

$g_0/g_0 = 1+16+256 = 273$

$g_0/g_1 = 0 + 3.637188 - 12.108832 = -8.471644$

$g_0/g_1 = 0 + 0.826821 + 0.572749 = 1.39957$

$g_1/g_1 = 0.25 + 10.72 + 179.84 = 190.81$

$g_0/y = 0 + 2.436916 - 8.506454 = -6.069538$

$g_1/y = $

$$\begin{bmatrix} 273 & -8.471644 \\ -8.471644 & 1.39957 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 190.81 \\ -6.069538 \end{bmatrix}$$

Pela regra de Cramer

$a_0 = 0.694887$

$a_1 = -0.130544$

Assim, $g(x) = 0.69488 \times 2^x - 0.13054 \operatorname{sen} x$. O desvio em $x=0$ é

$d(0) = |0.694887 - 0.25| = 0.444887$

(b) Suponha que $f'''(x) = K$, $K \in \mathbb{R}$. Obtenha o valor exato do integral $I = \int_0^4 f(x)\,dx$. Justifique a sua resposta.

A estratégia é escolher uma regra de integração adequada ao número de pontos e que simultaneamente envolva uma derivada de 4ª ordem na expressão correspondente ao seu erro de truncatura.

$$I = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right) = \frac{2}{3}\left(0.25 + 4 \times 2.68 + 11.24\right)$$

$$= 14.8066\ldots$$

3 Considere a seguinte tabela de valores

x	1.0	1.1	1.2	1.9	2.0
$f(x)$	2.3	-4.5	5.7	-8.3	-0.6

onde os valores da função estão arredondados à ordem 10^{-1} com

$$f''(x) \in [-20, 10],\ f'''(x) \in [-50, 20],\ f^{(4)}(x) \in [-80, 60],\ \forall x \in [1, 2].$$

Determine por interpolação quadrática, na forma de Lagrange um valor aproximado de $f(1.25)$ e um majorante para o erro de truncatura desta mesma aproximação.

Vamos escolher três pontos de acordo com o critério estudado.

x	y
$x_0 = 1.0$	$2.3 = y_0$
$x_1 = 1.1$	$-4.5 = y_1$
$x_2 = 1.2$	$5.7 = y_2$

Neste caso, temos uma extrapolação.

$$p_2(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1 + L_2(x)\, y_2$$

$$p_2(x) = \frac{(x-1.1)(x-1.2)}{(1-1.1)(1-1.2)} \times 2.3 + \frac{(x-1)(x-1.2)}{(1.1-1)(1.1-1.2)} \times (-4.5) +$$

$$+ \frac{(x-1.0)(x-1.1)}{(1.2-1.0)(1.2-1.1)} \times 5.7$$

$$f(1.25) \approx p_2(1.25)$$

Quanto a um majorante para o erro de truncatura, podemos escrever

$$|f(1.25) - p_2(1.25)| \le \frac{M}{3!} \left|(1.25-1.0)(1.25-1.1)(1.25-1.2)\right|,$$

com $M = \text{maj} |f'''(x)|,\ x \in [1.0, 1.3]$. Como $f'''(x) \in [-50, 20]$, $\forall x \in [1, 2]$, temos $|f'''(x)| \in [0, 50]$. Pelo que $M = 50$ e

$$|f(1.25) - p_2(1.25)| \le 0.015625$$

$\boxed{4}$ Considere o integral

$$I = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx.$$

(a) Determine um valor aproximado de I, usando a regra de Simpson composta com $h=0.25$ e os valores da função arredondados à ordem 10^{-4}. Qual o erro de arredondamento?

Construímos a tabela

x	$f(x)$
0.00	$0.0000 = f_0$
0.25	$0.2000 = f_1$
0.50	$0.3333 = f_2$
0.75	$0.4286 = f_3$
1.00	$0.5000 = f_4$

Usando então a regra de Simpson composta

$$I \sim \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right)$$

$$I \sim \frac{0.25}{3} \times 3.681$$

$$I \sim 0.30675$$

O erro de arredondamento é

$$\Delta I = \frac{0.25}{3} \times \left(12 \times 0.00005\right) = 0.5 \times 10^{-4}$$

(b) Utilizando apenas os pontos $x=0$, $x=0.75$ e 1.0, calcule o valor aproximado de I. Justifique a sua resposta.

x	$f(x)$
0	0.0000
0.75	0.4286
1.0	0.5000

Os pontos não estão igualmente espaçados. Podemos aplicar a regra dos trapézios simples duas vezes.

Deste modo,

$$I \sim \frac{0.75}{2} \times (0 + 0.4286) + \frac{0.25}{2} \times (0.4286 + 0.5)$$

$$I \sim 0.160725 + 0.116075$$

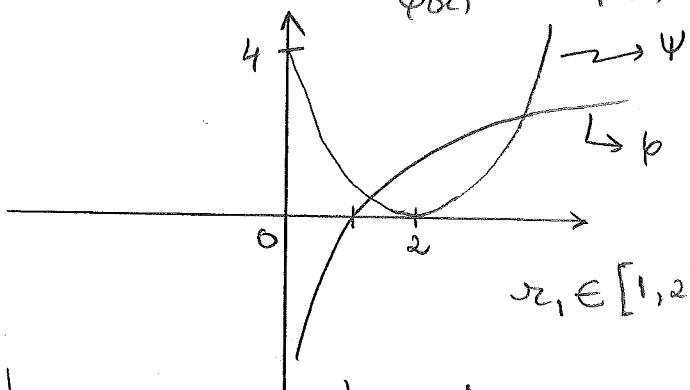
$$I \sim 0.2768$$

5 - Considere a equação

$$\ln x - (x-2)^2 = 0$$

(a) Usando métodos gráficos efectue a contagem e separação das raizes reais da equação.

Podemos considerar $\underbrace{\ln x}_{\varphi(x)} = \underbrace{(x-2)^2}_{\psi(x)}$



$r_1 \in [1,2]$; $r_2 \in [2.5, 3.5]$

Por conseguinte, a equação tem duas raízes pertencentes aos intervalos considerados.

(b) Apresente um intervalo H que contenha a raiz mais pequena com um erro absoluto não excedendo 0.05. Escreva convenientemente uma estimativa para a raiz na forma $r_1 = \bar{r}_1 \pm \Delta r_1$.

Consideramos $r_1 \in [1.4, 1.5]$

$$r_1 = \frac{1.4+1.5}{2} = 1.45$$

$$\Delta r_1 = \frac{1.5-1.4}{2} = 0.05$$

$$r_1 = 1.45 \pm 0.05$$

(c) Mostre que no referido intervalo H, o método de Newton-Raphson é convergente e escolha do extremo favorável.

Estabelecemos as seguintes condições

(i) As funções f, f' e f'' são contínuas.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \ln x - (x-2)^2 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} - 2(x-2) \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} - 2 \end{aligned}\right\}$$ Estas funções são contínuas em $[1.4, 1.5]$.

(ii) As funções f' e f'' não se anulam em $[1.4, 1.5]$ (Imediato!)

(iii) Considerando as funções f' e f'', verificamos que

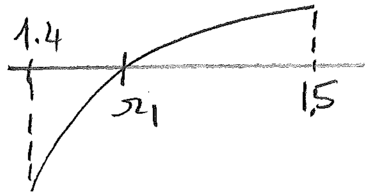
$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in [1.4, 1.5]$$

e

$$f''(x) < 0, \quad \forall x \in [1.4, 1.5]$$ (Verifique!)

$f(1.4) < 0$

$f(1.5) > 0$



(iv) O extremo favorável.

Escolhemos como extremo favorável $x_0 = 1.4$, pois $f(1.4)$ tem o mesmo sinal de $f''(x)$ para $x \in [1.4, 1.5]$ 0.5

(d) Aplique o referido método fazendo duas iterações.

A fórmula iteradora tem a forma

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}$$

$$x_{m+1} = x_m - \frac{\ln(x_m) - (x_m - 2)^2}{\frac{1}{x_m} - 2x_m + 4}$$

Construímos a tabela

x_m	x_{m+1}
$x_0 = 1.4$	$1.412290623 = x_1$
x_1	$1.412391165 = x_2$

Tomamos $x_1 \approx x_2$

6 Foi colocado um bloco de 10kg de material solúvel num recipiente contendo 60l de água pura. A quantidade de material dissolvido Q, dada em percentagem, em cada instante verifica a equação diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{0.0196(10-4Q)}{60-1.2Q}.$$

Usando o método de Euler com $h=30s$, deter o valor da quantidade de material dissolvido ao fim de 90s.

No nosso caso, temos $h = 30s$, $f(t,Q) = \dfrac{0.0196(10-4Q)}{60-1.2Q}$

Precisamos de apresentar 3 iterações usando o Método de Euler

$\underline{n=1}$

$t_1 = t_0 + h$

$t_1 = 0+30$

$t_1 = 30$

$Q_1 = Q_0 + hf(t_0, Q_0)$

$Q_1 = 0 + 30\left(\dfrac{0.0196(10-4Q_0)}{60-1.2Q_0}\right)$

$Q_1 = 0.0980$

$\underline{n=2}$

$t_2 = t_1 + h$

$t_2 = 30+30$

$t_2 = 60$

$Q_2 = Q_1 + hf(t_1, Q_1)$

$Q_2 = 0.098 + 30\left(\dfrac{0.0196\times(10-4\times 0.098)}{60-1.2\times 0.098}\right)$

$Q_2 = 0.1923$

$\underline{n=3}$

$t_3 = t_2 + h$

$t_3 = 60+30$

$t_3 = 90$

$Q_3 = Q_2 + hf(t_2, Q_2)$

$Q_3 = 0.1923 + 30\left(\dfrac{0.0196\times(10-4\times 0.1923)}{60-1.2\times 0.098}\right)$

$Q_3 = 0.2832$

Dissolveu-se aprox. 0.28% de material ao fim de 90 s

Considere uma função $y=f(x)$ tal que $y_i = f(x_i) = 1$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

b)

Determinamos polinómio interpolador de Lagrange de $f(x)$, nos $n+1$ pontos considerados, com grau $\leq n$.

$$p_n(x) = L_0(x)\,y_0 + L_1(x)\,y_1 + L_2(x)\,y_2 + \cdots + L_n(x)\,y_n$$

$$p_n(x) = L_0(x) \times 1 + L_1(x) \times 1 + L_2(x) \times 1 + \cdots + L_n(x) \times 1$$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_0(x)$$

Atendendo a que o polinómio $p_0(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, é também interpolador de $f(x)$ nos $n+1$ pontos, calcule $\sum_{i=0}^{n} L_i(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Sabemos que o polinómio interpolador anterior, $p_n(x)$, verifica

$$p_n(x_0) = f(x_0) = 1$$

$$p_n(x_1) = f(x_1) = 1$$

$$\vdots$$

$$p_n(x_n) = f(x_n) = 1$$

Ou seja, $p_n(x)$ é o polinómio interpolador de $f(x) = 1$ em $n+1$ pontos.

Por outro lado, o polinómio de grau 0, $p_0(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ é também interpolador de $f(x)$, nos pontos x_i considerados.

Ora atendendo à unicidade do polinómio interpolador, vem $p_n(x) \equiv p_0(x)$. Isto é, $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$, ficando a demonstração terminada.