lecture 6

part1

我们定义state-action和state函数

$Q^\pi\left(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t\right)=\sum_{t'=t}^T E_{\pi_\theta}\left[r\left(\mathbf{s}_{t'}, \mathbf{a}_{t'}\right) \mid \mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t\right]$: total reward from taking $\mathbf{a}_t$ in $\mathbf{s}_t$
$V^\pi\left(\mathbf{s}_t\right)=E_{\mathbf{a}_t \sim \pi_\theta\left(\mathbf{a}_t \mid \mathbf{s}_t\right)}\left[Q^\pi\left(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t\right)\right]$: total reward from $\mathbf{s}_t$

在此基础上，我们在定义一个advantage function

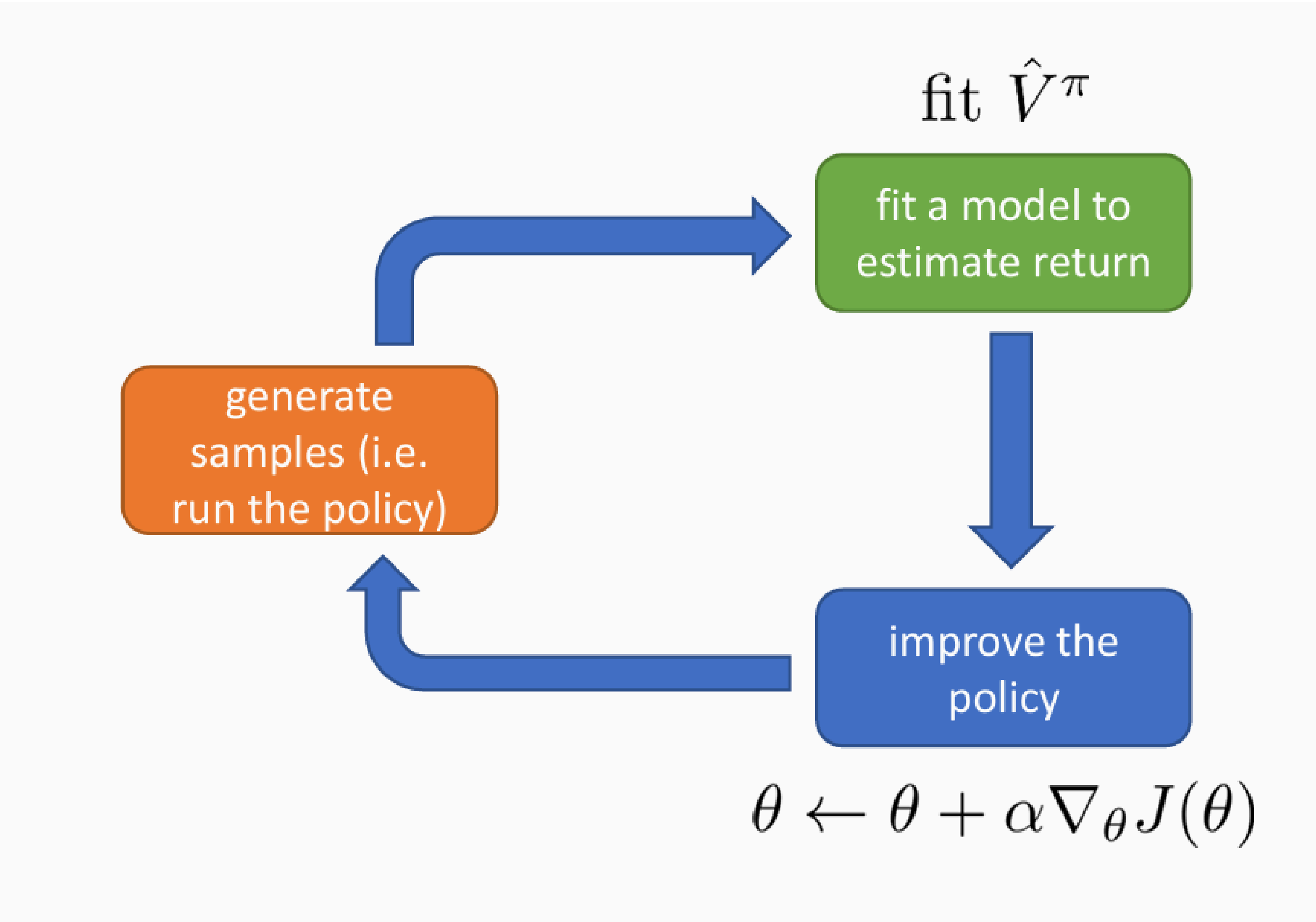
$$A^\pi\left(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t\right)=Q^\pi\left(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t\right)-V^\pi\left(\mathbf{s}_t\right): \text{how much better } \mathbf{a}_t \text{ is}$$

于是我们可以得到

$$Q^\pi(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t)=r(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t)+E_{\mathbf{s}_{t+1} \sim p(\mathbf{s}_{t+1} \mid \mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t)}[V^\pi(\mathbf{s}_{t+1})] \approx r(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t)+V^\pi(\mathbf{s}_{t+1})$$

$$A^\pi(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \approx r(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t)+V^\pi(\mathbf{s}_{t+1})-V^\pi(\mathbf{s}_t)$$

advantage function和state-action function都与action和state都有关系，而value function只与状态有关系



Monte Carlo policy function

对于单条轨迹来说

$$V^{\pi}(\mathbf{s}_t) \approx \sum_{t'=t}^{T} r(\mathbf{s}_{t'}, \mathbf{a}_{t'})$$

多轨迹采样

$$V^{\pi}(\mathbf{s}_t) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t'=t}^{T} r(\mathbf{s}_{t'}, \mathbf{a}_{t'})$$

虽然单轨迹时候效果不如多轨迹，但仍然pretty good，在数据有限的时候仍然可以使用

bootstrapped

$$y_{i,t} = \sum_{t'=t}^{T} E_{\pi_\theta}\left[r(\mathbf{s}_{t'}, \mathbf{a}_{t'}) | \mathbf{s}_{i,t}\right] \approx r(\mathbf{s}_{i,t}, \mathbf{a}_{i,t}) + V^{\pi}(\mathbf{s}_{i,t+1}) \approx r(\mathbf{s}_{i,t}, \mathbf{a}_{i,t}) + \hat{V}_{\phi}^{\pi}(\mathbf{s}_{i,t+1})$$

这时候的训练数据就变成了

$$\left\{\left(\mathbf{s}_{i,t}, r(\mathbf{s}_{i,t}, \mathbf{a}_{i,t}) + \hat{V}_{\phi}^{\pi}(\mathbf{s}_{i,t+1})\right)\right\}$$

相比蒙特卡洛方法，这种方法通常方差更小但可能更有偏差

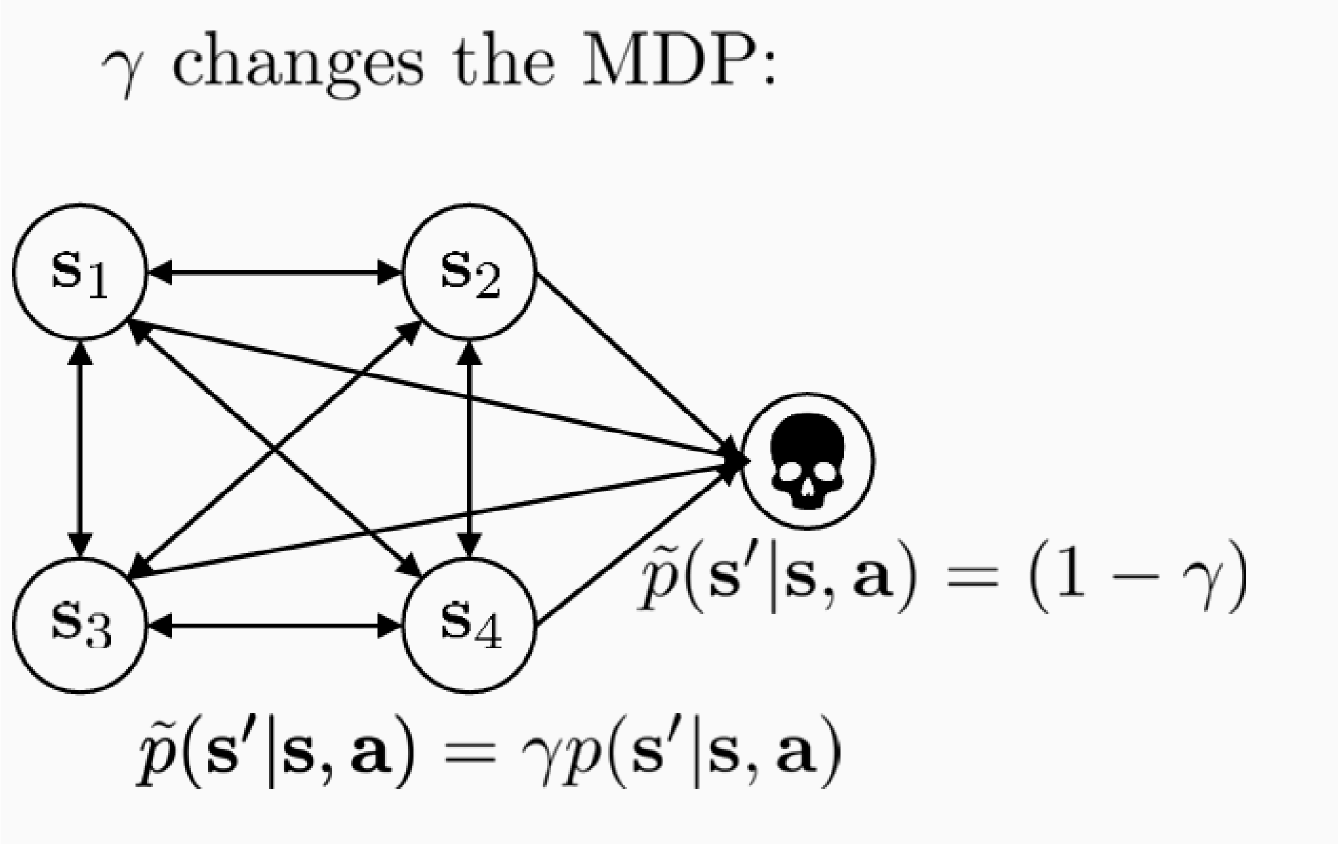
part2

discount factors

对于episode length为无穷的，$\hat{V}_{\phi}^{\pi}$会变得非常大，所以我们这里引入一个simple trick——discount factor

$$y_{i,t} \approx r(\mathbf{s}_{i,t}, \mathbf{a}_{i,t}) + \gamma \hat{V}_{\phi}^{\pi}(\mathbf{s}_{i,t+1})$$

其中$\gamma \in [0,1]$，0.99works well，γ会改变MDP的结构，对于每个时间步来说有$1-\gamma$的概率终止episode



对于actor-critic来说，我们可以引入discount factor写成

$$\nabla_\theta J(\theta) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\nabla_\theta \log \pi_\theta\left(\mathbf{a}_{i,t} \mid \mathbf{s}_{i,t}\right)\overbrace{\left(r\left(\mathbf{s}_{i,t},\mathbf{a}_{i,t}\right)+\gamma\hat{V}_\phi^\pi\left(\mathbf{s}_{i,t+1}\right)-\hat{V}_\phi^\pi\left(\mathbf{s}_{i,t}\right)\right)}$$

那么，对于Monte Carlo来说，有以下option，只用其中两个是正确的

what about (Monte Carlo) policy gradients?

option 1: $$\nabla_\theta J(\theta) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\nabla_\theta \log \pi_\theta(\mathbf{a}_{i,t}|\mathbf{s}_{i,t})\left(\sum_{t'=t}^{T}\gamma^{t'-t} r(\mathbf{s}_{i,t'},\mathbf{a}_{i,t'})\right)$$

not the same!

option 2: $$\nabla_\theta J(\theta) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{t=1}^{T}\nabla_\theta \log \pi_\theta(\mathbf{a}_{i,t}|\mathbf{s}_{i,t})\right)\left(\sum_{t=1}^{T}\gamma^{t-1} r(\mathbf{s}_{i,t'},\mathbf{a}_{i,t'})\right)$$

$$\nabla_\theta J(\theta) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\nabla_\theta \log \pi_\theta(\mathbf{a}_{i,t}|\mathbf{s}_{i,t})\left(\sum_{t'=t}^{T}\gamma^{t'-1} r(\mathbf{s}_{i,t'},\mathbf{a}_{i,t'})\right)$$

$$\nabla_\theta J(\theta) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\gamma^{t-1}\nabla_\theta \log \pi_\theta(\mathbf{a}_{i,t}|\mathbf{s}_{i,t})\left(\sum_{t'=t}^{T}\gamma^{t'-t} r(\mathbf{s}_{i,t'},\mathbf{a}_{i,t'})\right)$$

(later steps matter less)

其中option2中的第一个它不是逐步计算，而是整体地计算策略对所有动作的 log-prob，再乘一个全局回报加权，这样的梯度是**错误的估计**

option2中的第二个，把 reward-to-go 部分的权重换成 γ^{t-1}，就错了！因为折扣应该是相对当前 t 的未来奖励，而不是绝对时间

但是，在实际使用中我们会使用**option1**，因为我们需要的一个一直好下去的动作，而不是只关注早期的行为

$$\nabla_\theta J(\theta) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\nabla_\theta \log \pi_\theta(\mathbf{a}_{i,t}|\mathbf{s}_{i,t})\left(\sum_{t'=t}^{T}\gamma^{t'-t} r(\mathbf{s}_{i,t'},\mathbf{a}_{i,t'})\right)$$

actor-critic algorithm

Actor-critic algorithms (with discount)

batch actor-critic algorithm:

1. sample $\{\mathbf{s}_i, \mathbf{a}_i\}$ from $\pi_\theta(\mathbf{a}|\mathbf{s})$ (run it on the robot)
2. fit $\hat{V}^\pi_\phi(\mathbf{s})$ to sampled reward sums
3. evaluate $\hat{A}^\pi(\mathbf{s}_i, \mathbf{a}_i) = r(\mathbf{s}_i, \mathbf{a}_i) + \gamma \hat{V}^\pi_\phi(\mathbf{s}'_i) - \hat{V}^\pi_\phi(\mathbf{s}_i)$
4. $\nabla_\theta J(\theta) \approx \sum_i \nabla_\theta \log \pi_\theta(\mathbf{a}_i|\mathbf{s}_i) \hat{A}^\pi(\mathbf{s}_i, \mathbf{a}_i)$
5. $\theta \leftarrow \theta + \alpha \nabla_\theta J(\theta)$

online actor-critic algorithm:

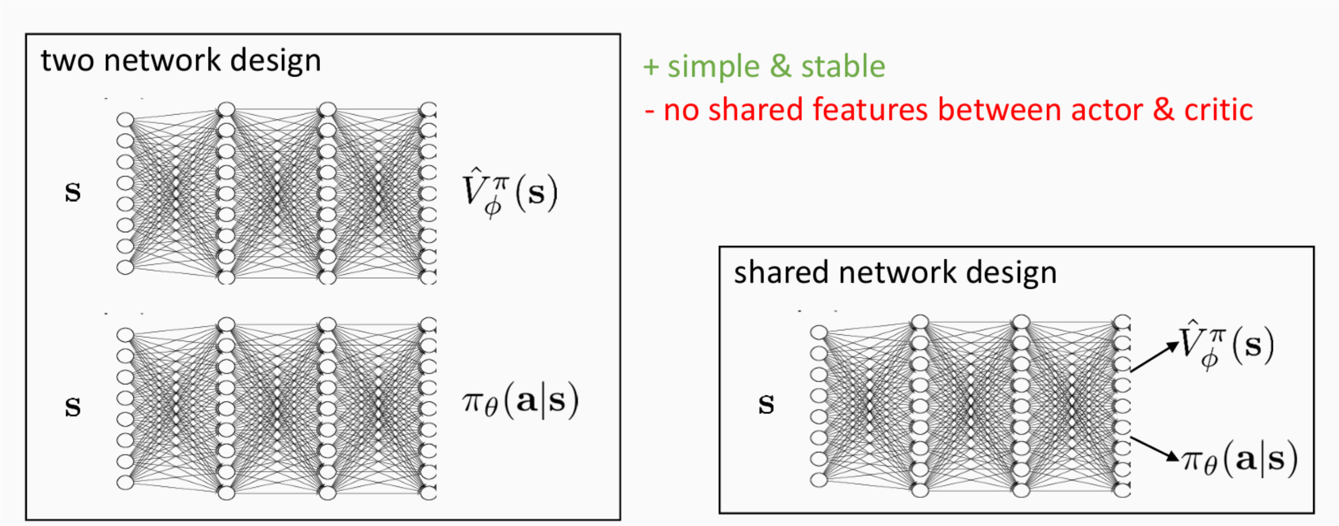
1. take action $\mathbf{a} \sim \pi_\theta(\mathbf{a}|\mathbf{s})$, get $(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{s}', r)$
2. update $\hat{V}^\pi_\phi$ using target $r + \gamma \hat{V}^\pi_\phi(\mathbf{s}')$
3. evaluate $\hat{A}^\pi(\mathbf{s}, \mathbf{a}) = r(\mathbf{s}, \mathbf{a}) + \gamma \hat{V}^\pi_\phi(\mathbf{s}') - \hat{V}^\pi_\phi(\mathbf{s})$
4. $\nabla_\theta J(\theta) \approx \nabla_\theta \log \pi_\theta(\mathbf{a}|\mathbf{s}) \hat{A}^\pi(\mathbf{s}, \mathbf{a})$
5. $\theta \leftarrow \theta + \alpha \nabla_\theta J(\theta)$

actor负责策略π_θ，选择动作。critic负责评估状态价值，引入advantage function计算策略梯度

对比维度	Batch Actor-Critic	Online Actor-Critic
数据收集方式	先收集一批数据（batch），再更新策略	单步交互后立即更新
计算效率	计算开销较大（需存储整个batch）	计算开销较小（单步更新）
样本相关性	数据相关性高（同一批数据多次使用）	数据相关性低（单步数据）
训练稳定性	更稳定（梯度基于大量数据计算）	波动较大（单步数据噪声大）
适用场景	适用于离线学习、仿真环境	适用于实时学习、机器人控制
探索能力	依赖batch数据，探索可能不足	可实时调整策略，探索性更强
实现复杂度	需要存储和管理batch数据	实现更简单，无需存储历史数据

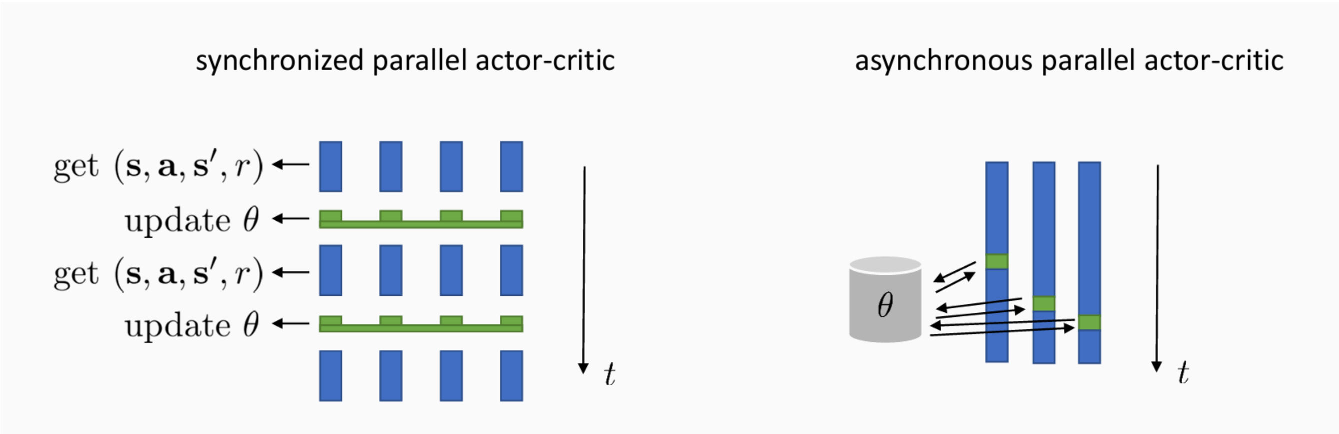
part3

architecture design



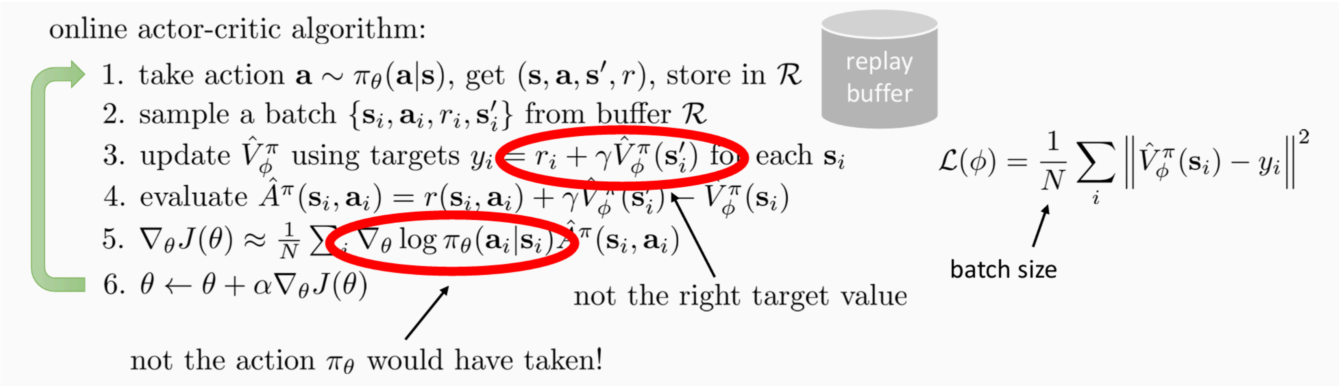
使用两个网络的优势是容易训练且稳定，缺点是没有共享feature，导致参数量增大，计算量也增大。而使用一个网络解决了两个网络的优势，但是有可能会出现两个部分冲突的问题。

并行化（Parallel Workers）



1. **同步并行 Actor-Critic（Synchronized Parallel）**
   - 多个 Worker 同时与环境交互，收集数据。
   - **同步更新**：所有 Worker 完成一批数据后，统一计算梯度并更新策略。
   - **优点**：训练稳定，适用于分布式计算（如 A3C 的同步版本）。
   - **缺点**：速度受最慢 Worker 限制。
2. **异步并行 Actor-Critic（Asynchronous Parallel, A3C）**
   - 每个 Worker 独立与环境交互，并 **异步更新** 全局策略。
   - **优点**：更快（无需等待所有 Worker），适用于多 CPU/GPU。
   - **缺点**：可能因异步更新导致策略震荡（需调整学习率）。

online actor-critic



上述算法流程图中存在两个问题：

1. 这是 **on-policy 算法**（如 A2C、PPO），要求数据必须来自当前策略 πθ，所以针对当前动作，我们应该采取 state-action function，即修改

   $$y_i = r_i + \gamma \hat{Q}^\pi_\phi\left(s'_i, a'_i\right), \quad a'_i \sim \pi_\theta\left(a'_i \mid s'_i\right)$$

   然后最小化均方误差（也是用Q function）

   $$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} \sum_i \left\| \hat{Q}^\pi_\phi\left(s_i, a_i\right) - y_i \right\|^2$$

2. 回放缓冲区 RR 中的动作 a_i来自历史策略，但梯度计算假设它们来自当前策略 π_θ（即 **未修正策略差异**）。

   当然，我么可以考虑从当前策略π_θ重新采样，但需额外采样，计算成本高。

   所以在实际操作中，可以考虑直接用Q function近似处理，依赖Q函数的准确性（具体到动作）

   $$\nabla_\theta J(\theta) \approx \frac{1}{N} \sum_i \nabla_\theta \log \pi_\theta\left(\mathbf{a}_i^\pi \mid \mathbf{s}_i\right) \hat{Q}^\pi\left(\mathbf{s}_i, \mathbf{a}_i^\pi\right)$$

   虽然这么操作会导致high variance，但是可以通过通常依赖大量采样平均。

当然除了上面两个明显的问题以外，仍然存在一定问题。

理想情况下，这个 s_i 应该来自于当前策略 π_θ 所诱导的状态分布 $p_\theta(s)$。

也就是说，$p_\theta(s)$ 是“我们当前策略运行时会遇到的状态分布”。

但实际中，这些 s_i 是从经验池 $\mathcal{R}$ 中采样的，可能来自：

- 旧版本策略 $\pi_{\theta_{old}}$；
- 各种 exploration noise；
- 甚至是 warm-up 初始策略。

这导致了一个重要的问题：

> **我们训练出来的策略 π_θ 不是在 $p_\theta(s)$ 上最优的，而是在一个更宽泛（broader）的状态分布上最优。**

强化学习的目标是：

$$\max_\theta \mathbb{E}_{s \sim p_\theta(s), a \sim \pi_\theta(a|s)}[r(s, a)]$$

但我们实际优化的是：

$$\mathbb{E}_{s\sim\mathcal{R},a\sim\pi_\theta(a|s)}[r(s,a)]$$

但，我们并无法解决，因为状态是不可控的 —— 我们不能直接从 $p_\theta(s)$ 中采样；实际上我们甚至都不知道 $p_\theta(s)$ 是什么；

在接下来的课程我们会讨论一些:

> 可以把随机采样 $a\sim\pi_\theta(a|s)$ 变成“可导”的形式：
>
> $$a=f_\theta(\epsilon;s),\quad \epsilon\sim\mathcal{N}(0,1)$$
>
> - 这样可以直接对 a 求导数，而不是用 log-derivative trick。
> - 例如在 **Soft Actor-Critic (SAC)** 中使用了这个技巧。
>
> 也会学习用 **确定性策略**（如 DDPG、TD3）来替代当前的**随机策略** $\pi_\theta(a|s)$，它们不需要从策略中采样动作，而是直接输出一个 deterministic action：$a=\mu_\theta(s)$。

part4

critics as baseline

state dependent baseline

截至目前，我们学习了actor-critic

$$\nabla_\theta J(\theta)\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\nabla_\theta\log\pi_\theta(\mathbf{a}_{i,t}|\mathbf{s}_{i,t})\left(r(\mathbf{s}_{i,t},\mathbf{a}_{i,t})+\gamma\hat{V}_\phi^\pi(\mathbf{s}_{i,t+1})-\hat{V}_\phi^\pi(\mathbf{s}_{i,t})\right)$$

以及policy gradient

$$\nabla_\theta J(\theta)\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\nabla_\theta\log\pi_\theta(\mathbf{a}_{i,t}|\mathbf{s}_{i,t})\left(\left(\sum_{t'=t}^{T}\gamma^{t'-t}r(\mathbf{s}_{i,t'},\mathbf{a}_{i,t'})\right)-b\right)$$

其中actor-critic具有lower variance但可能有偏（如果critic is not perfect），policy gradient具有no bias，但是higher variance（single-sample estimate）

于是我们提出两者结合的无偏状态基线

$$\nabla_\theta J(\theta)\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\nabla_\theta\log\pi_\theta(\mathbf{a}_{i,t}|\mathbf{s}_{i,t})\left(\underbrace{\left(\sum_{t'=t}^{T}\gamma^{t'-t}r_{t'}\right)}_{\text{蒙特卡洛回报}}-\underbrace{\hat{V}_\phi^\pi(\mathbf{s}_{i,t})}_{\text{状态相关基线}}\right)$$

这样子不仅无偏，且lower variance

action dependent baseline

> 首先引入一个**控制变量**的核心思想：
>
> - 设 X 是我们想要估计的随机变量（高方差）
> - 设 Y 是与 X 相关的另一个随机变量（已知期望 $\mathbb{E}[Y]$ ）
> - 构造新估计量：

> $$Z = X - c(Y - \mathbb{E}[Y])$$
>
> 其中 c 是待优化的系数
>
> 关键性质：
>
> 1. 无偏性：$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X]$（因为 $\mathbb{E}[Y - \mathbb{E}[Y]] = 0$）
> 2. 方差缩减：当 X 和 Y 高度相关时，$\mathrm{Var}(Z) < \mathrm{Var}(X)$
> 3. 最优系数：$c^* = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)}$ 时方差最小

$\hat{A}^\pi(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) = \sum_{t'=t}^{\infty} \gamma^{t'-t} r(\mathbf{s}_{t'}, \mathbf{a}_{t'}) - V_\phi^\pi(\mathbf{s}_t)$

+ no bias
- higher variance (because single-sample estimate)

$\hat{A}^\pi(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) = \sum_{t'=t}^{\infty} \gamma^{t'-t} r(\mathbf{s}_{t'}, \mathbf{a}_{t'}) - Q_\phi^\pi(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t)$

+ goes to zero in expectation if critic is correct!
- not correct

Q-Prop 提出了一种**无偏的梯度估计器**：

$$\nabla_\theta J(\theta) \approx \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \nabla_\theta \log \pi_\theta \left(a_{i,t} \mid s_{i,t}\right) \left(\hat{Q}_{i,t} - Q_\phi^\pi \left(s_{i,t}, a_{i,t}\right)\right)}_{\text{带控制变量的蒙特卡洛估计}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \nabla_\theta \mathbb{E}_{a_t \sim \pi_\theta} \left[Q_\phi^\pi \left(s_{i,t}, a_t\right)\right]}_{\text{基于 Critic 的策略梯度}}$$

其中：
$-\hat{Q}_{i,t}$ 是蒙特卡洛估计的动作价值（即从时刻 t 到轨迹结束的累积奖励）。
$-Q_\phi^\pi \left(s_{i,t}, a_{i,t}\right)$ 是Critic对动作价值的估计。

根据控制变量的核心思想，Q−Prop 的梯度估计器可重写为：

$$\nabla_\theta J = \underbrace{\mathbb{E}\left[\nabla_\theta \log \pi_\theta \cdot \left(\hat{Q} - Q_\phi^\pi\right)\right]}_{\text{控制变量项}} + \underbrace{\mathbb{E}\left[\nabla_\theta \mathbb{E}_a \left[Q_\phi^\pi\right]\right]}_{\text{Critic 主导项}}$$

- 当 Critic 完美时 $\left(Q_\phi^\pi = Q^\pi\right)$，第一项方差为零
- 当 Critic 较差时，第一项仍提供无偏的蒙特卡洛估计

eligibility traces&n-step returns

$\hat{A}_{\mathrm{C}}^\pi(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) = r(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) + \gamma \hat{V}_\phi^\pi(\mathbf{s}_{t+1}) - \hat{V}_\phi^\pi(\mathbf{s}_t)$

+ lower variance
- higher bias if value is wrong (it always is)

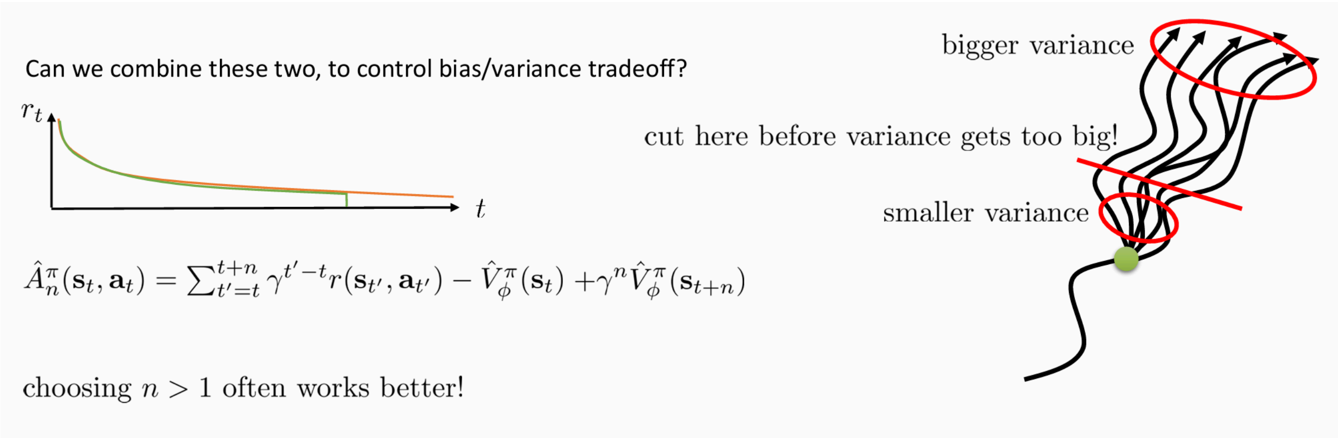
$\hat{A}_{\mathrm{MC}}^\pi(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) = \sum_{t'=t}^{\infty} \gamma^{t'-t} r(\mathbf{s}_{t'}, \mathbf{a}_{t'}) - \hat{V}_\phi^\pi(\mathbf{s}_t)$

+ no bias
- higher variance (because single-sample estimate)

n 步优势函数估计是强化学习中平衡**偏差-方差权衡**的核心技术

$$\hat{A}_n^\pi(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) = \sum_{t'=t}^{t+n} \gamma^{t'-t} r(\mathbf{s}_{t'}, \mathbf{a}_{t'}) - \hat{V}_\phi^\pi(\mathbf{s}_t) + \gamma^n \hat{V}_\phi^\pi(\mathbf{s}_{t+n})$$

项	数学表达式	物理意义	特性
实际奖励项	$\sum_{k=0}^{n-1} \gamma^k r_{t+k}$	前 n 步的真实环境奖励	无偏但高方差
价值预测项	$\gamma^n \hat{V}_\phi^\pi\left(s_{t+n}\right)$	Critic 对 n 步后状态的估值	低方差但可能有偏
基线项	$-\hat{V}_\phi^\pi\left(s_t\right)$	当前状态价值基准	降低方差，保持中心化



广义优势估计 (GAE) 是强化学习中用于平衡**偏差-方差权衡**的革命性技术它通过**指数加权（可以视作discount factor）融合不同时间尺度的优势估计**，解决了传统 n 步方法需要手动选择步长的痛点。

首先，我们给出state-action，state，advantage function的parameterγ形式

$$V^{\pi,\gamma}\left(s_t\right) := \mathbb{E}_{s_{t+1:\infty}, a_{t:\infty}}\left[\sum_{l=0}^{\infty} \gamma^l r_{t+l}\right] \quad Q^{\pi,\gamma}\left(s_t, a_t\right) := \mathbb{E}_{s_{t+1:\infty}, a_{t+1:\infty}}\left[\sum_{l=0}^{\infty} \gamma^l r_{t+l}\right]$$
$$A^{\pi,\gamma}\left(s_t, a_t\right) := Q^{\pi,\gamma}\left(s_t, a_t\right) - V^{\pi,\gamma}\left(s_t\right).$$

引用原论文中的一个定义

> Definition 1. The estimator $\hat{A}_t$ is γ-just if
>
> $$\mathbb{E}_{\substack{s_{0:\infty} \\ a_{0:\infty}}}\left[\hat{A}_t\left(s_{0:\infty}, a_{0:\infty}\right) \nabla_\theta \log \pi_\theta\left(a_t \mid s_t\right)\right] = \mathbb{E}_{\substack{s_{0:\infty} \\ a_{0:\infty}}}\left[A^{\pi,\gamma}\left(s_t, a_t\right) \nabla_\theta \log \pi_\theta\left(a_t \mid s_t\right)\right]$$

核心任务是对折扣优势函数 $A^{\pi,\gamma}\left(s_t, a_t\right)$ 进行准确估计，得到 $\hat{A}_t$ ，并将其用于构建策略梯度估计器，具体内容如下：

$$\hat{g} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{t=0}^{\infty} \hat{A}_t^n \nabla_\theta \log \pi_\theta\left(a_t^n \mid s_t^n\right)$$

定义 带折扣因子的TD时序差分残差（Temporal Difference Error）：

$$\delta_t^V = r_t + \gamma \hat{V}_{t+1} - \hat{V}_t$$

TD 残差 δ_t^V 可被视为动作 a_t 的优势估计。实际上，当价值函数 V 完全准确（即 $V = V^{\pi,\gamma}$ ，与策略 π 和折扣 γ 对应的真实状态值函数一致）时，δ_t^V 是一个 γ—just 优势估计器，并且是 $A^{\pi,\gamma}$ 的无偏估计器，证明如下：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{s_{t+1}}\left[\delta_t^{V^{\pi,\gamma}}\right] &= \mathbb{E}_{s_{t+1}}\left[r_t + \gamma V^{\pi,\gamma}\left(s_{t+1}\right) - V^{\pi,\gamma}\left(s_t\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{s_{t+1}}\left[Q^{\pi,\gamma}\left(s_t, a_t\right) - V^{\pi,\gamma}\left(s_t\right)\right] = A^{\pi,\gamma}\left(s_t, a_t\right).
\end{aligned}$$

接下来，我们考率将δ全部相加，以此估计$\hat{A}_t^{(k)}$

$$
\begin{aligned}
\hat{A}_t^{(1)} &:= \delta_t^V && = -V(s_t) + r_t + \gamma V(s_{t+1}) \\
\hat{A}_t^{(2)} &:= \delta_t^V + \gamma \delta_{t+1}^V && = -V(s_t) + r_t + \gamma r_{t+1} + \gamma^2 V(s_{t+2}) \\
\hat{A}_t^{(3)} &:= \delta_t^V + \gamma \delta_{t+1}^V + \gamma^2 \delta_{t+2}^V && = -V(s_t) + r_t + \gamma r_{t+1} + \gamma^2 r_{t+2} + \gamma^3 V(s_{t+3}) \\
\hat{A}_t^{(k)} &:= \sum_{l=0}^{k-1} \gamma^l \delta_{t+l}^V && = -V(s_t) + r_t + \gamma r_{t+1} + \cdots + \gamma^{k-1} r_{t+k-1} + \gamma^k V(s_{t+k})
\end{aligned}
$$

根据上述式子，我们很容易想到当k趋近于无穷时，有

$$
\hat{A}_t^{(\infty)} = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma^l \delta_{t+l}^V = -V(s_t) + \sum_{l=0}^{\infty} \gamma^l r_{t+l}
$$

于是我们接下来定义generalized advantage estimator（GAE），如下

$$
\begin{aligned}
\hat{A}_t^{\mathrm{GAE}(\gamma,\lambda)} &:= (1-\lambda)\left(\hat{A}_t^{(1)} + \lambda \hat{A}_t^{(2)} + \lambda^2 \hat{A}_t^{(3)} + \ldots\right) \\
&= (1-\lambda)\left(\delta_t^V + \lambda\left(\delta_t^V + \gamma \delta_{t+1}^V\right) + \lambda^2\left(\delta_t^V + \gamma \delta_{t+1}^V + \gamma^2 \delta_{t+2}^V\right) + \ldots\right) \\
&= (1-\lambda)\left(\delta_t^V\left(1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots\right) + \gamma \delta_{t+1}^V\left(\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \ldots\right)\right. \\
&\qquad \left. + \gamma^2 \delta_{t+2}^V\left(\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \ldots\right) + \ldots\right) \\
&= (1-\lambda)\left(\delta_t^V\left(\frac{1}{1-\lambda}\right) + \gamma \delta_{t+1}^V\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) + \gamma^2 \delta_{t+2}^V\left(\frac{\lambda^2}{1-\lambda}\right) + \ldots\right) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} (\gamma\lambda)^l \delta_{t+l}^V
\end{aligned}
$$

于是，我们定义the discounted policy gradient为

$$
g^\gamma \approx \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \nabla_\theta \log \pi_\theta\left(a_t \mid s_t\right) \hat{A}_t^{\mathrm{GAE}(\gamma,\lambda)}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \nabla_\theta \log \pi_\theta\left(a_t \mid s_t\right) \sum_{l=0}^{\infty} (\gamma\lambda)^l \delta_{t+l}^V\right]
$$