



# Notebook - Maratona de Programação

[UnB] HatsuneMiku não manda WA

## Contents

<b>1 Misc</b>	<b>2</b>	<b>5 Geometria</b>	<b>6</b>
1.1 Submask . . . . .	2	5.1 Mindistpair . . . . .	6
1.2 Safe Map . . . . .	2	5.2 Inside Polygon . . . . .	6
1.3 Ordered Set . . . . .	2	5.3 3d . . . . .	7
1.4 Bitwise . . . . .	2	5.4 Convex Hull . . . . .	8
<b>2 DP</b>	<b>2</b>	5.5 Linear Transformation . . . . .	8
2.1 Knapsack . . . . .	2	5.6 Voronoi . . . . .	8
2.2 Lis . . . . .	2	5.7 Polygon Area . . . . .	8
2.3 Dp Digitos . . . . .	3	5.8 Intersect Polygon . . . . .	9
<b>3 ED</b>	<b>3</b>	5.9 Sort By Angle . . . . .	9
3.1 Prefixsum2d . . . . .	3	5.10 2d . . . . .	9
3.2 Sparse Table . . . . .	3	<b>6 Grafos</b>	<b>11</b>
3.3 Dsu . . . . .	4	6.1 Dfs Tree . . . . .	11
3.4 Minqueue . . . . .	4	6.2 Kosaraju . . . . .	11
3.5 Segtree Implicita Lazy . . . . .	4	6.3 Topological Sort . . . . .	11
3.6 Delta Encoding . . . . .	5	6.4 Dijkstra . . . . .	12
<b>4 Strings</b>	<b>5</b>	6.5 Dinic . . . . .	12
4.1 Z Func . . . . .	5	6.6 Hungarian . . . . .	12
4.2 Edit Distance . . . . .	5	6.7 Floyd Warshall . . . . .	13
4.3 Lcsubseq . . . . .	5	6.8 Lca . . . . .	13
4.4 Kmp . . . . .	5	6.9 Kruskal . . . . .	14
4.5 Hash . . . . .	5	6.10 Ford . . . . .	14
4.6 Aho Corasick . . . . .	6	<b>7 Algoritmos</b>	<b>14</b>
4.7 Lcs . . . . .	6	7.1 Ternary Search . . . . .	14
		<b>8 Math</b>	<b>15</b>
		8.1 Totient . . . . .	15
		8.2 Pollard Rho . . . . .	15

8.3	Inverso Mult . . . . .	15
8.4	Miller Habin . . . . .	15
8.5	Matrix Exponentiation . . . . .	16
8.6	Division Trick . . . . .	16
8.7	Crivo . . . . .	16
8.8	Bignod . . . . .	16
8.9	Linear Diophantine Equation . . . . .	16
<b>9</b>	<b>Teoria</b>	<b>17</b>
9.1	Geometria . . . . .	17
9.1.1	Geometria Básica . . . . .	17
9.1.2	Geometria Analítica . . . . .	17
9.1.3	Geometria Plana . . . . .	18
9.1.4	Trigonometria . . . . .	19
9.2	Análise Combinatória . . . . .	20
9.2.1	Permutação e Arranjo . . . . .	20
9.2.2	Combinação . . . . .	20
9.2.3	Números de Catalan . . . . .	21
9.2.4	Princípio da Inclusão-Exclusão . . . . .	21
9.3	Matrizes . . . . .	22
9.4	Teoria da Probabilidade . . . . .	23
9.4.1	Introdução à Probabilidade . . . . .	23
9.4.2	Variáveis Aleatórias . . . . .	23
9.4.3	Distribuições Discretas . . . . .	24
9.4.4	Distribuições Contínuas . . . . .	24
9.5	Progressões . . . . .	24

# 1 Misc

## 1.1 Submask

```
1 // 0(3^n)
2 for (int m = 0; m < (1<<n); m++) {
3     for (int s = m; s; s = (s-1) & m) {
4         // s is every submask of m
5     }
6 }
7
8 // 0(2^n * n) SOS dp like
9 for (int b = n-1; b >= 0; b--) {
10     for (int m = 0; m < (1 << n); m++) {
11         if (j & (1 << b)) {
12             // propagate info through submasks
13             amount[j ^ (1 << b)] += amount[j];
14         }
15     }
16 }
```

## 1.2 Safe Map

```
1 struct custom_hash {
2     static uint64_t splitmix64(uint64_t x) {
3         // http://xorshift.di.unimi.it/splitmix64.c
4         x += 0x9e3779b97ff4a7c15;
5         x = (x ^ (x >> 30)) * 0xbf58476d1ce4e5b9;
6         x = (x ^ (x >> 27)) * 0x94d049bb133111eb;
7         return x ^ (x >> 31);
8     }
9
10     size_t operator()(uint64_t x) const {
11         static const uint64_t FIXED_RANDOM = chrono::
12         steady_clock::now().time_since_epoch().count();
13         return splitmix64(x + FIXED_RANDOM);
14     };
15
16     unordered_map<long long, int, custom_hash> safe_map;
17
18     // when using pairs
19     struct custom_hash {
20         inline size_t operator()(const pii & a) const {
21             return (a.first << 6) ^ (a.first >> 2) ^
22             2038074743 ^ a.second;
23         };
24     };
25 }
```

## 1.3 Ordered Set

```
1 #include <bits/extc++.h>
2 // or
3 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
4 #include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
5
6 using namespace __gnu_pbds; // or pb_ds;
7 template<typename T, typename B = null_type>
8 using ordered_set = tree<T, B, less<T>, rb_tree_tag,
9     tree_order_statistics_node_update>;
10
11 // order_of_key(k) : Number of items strictly
12 // smaller than k
13 // find_by_order(k) : K-th element in a set (counting
14 // from zero)
15
16 // to swap two sets, use a.swap(b);
```

## 1.4 Bitwise

```
1 // Least significant bit (lsb)
```

```
2 int lsb(int x) { return x&-x; }
3 int lsb(int x) { return __builtin_ctz(x); } //
4 // bit position
5 int msb(int x) { return 32-1-__builtin_clz(x); }
6 // bit position
7
8 // Power of two
9 bool isPowerOfTwo(int x){ return x && (!(x&(x-1))
10 ); }
11
12 // floor(log2(x))
13 int flog2(int x) { return 32-1-__builtin_clz(x); }
14 int flog2ll(ll x) { return 64-1-__builtin_clzll(x); }
15
16 // Built-in functions
17 // Number of bits 1
18 __builtin_popcount()
19 __builtin_popcountll()
20
21 // Number of leading zeros
22 __builtin_clz()
23 __builtin_clzll()
24
25 // Number of trailing zeros
26 __builtin_ctz()
27 __builtin_ctzll()
```

# 2 DP

## 2.1 Knapsack

```
1 // Caso base, como i == n
2 dp[0][0] = 0;
3
4 // Itera por todos os estados
5 for(int i = 1; i <= n; ++i)
6     for(int P = 0; P <= w; ++P){
7         int &temp = dp[i][P];
8         // Primeira possibilidade, não pega i
9         temp = dp[i - 1][P];
10
11         // Segunda possibilidade, se puder, pega o
12         // item
13         if(P - p[i] >= 0)
14             temp = max(temp, dp[i - 1][P - p[i]] + v[i]);
15
16         ans = max(ans, temp);
17     }
18 }
```

## 2.2 Lis

```
1 multiset<int> S;
2 for(int i=0;i<n;i++){
3     auto it = S.upper_bound(vet[i]); // low for inc
4     if(it != S.end())
5         S.erase(it);
6     S.insert(vet[i]);
7 }
8
9 // size of the lis
10 int ans = S.size();
11
12 vi LIS(const vi &elements){
13     auto compare = [&](int x, int y) {
14         return elements[x] < elements[y];
15     };
16     set< int, decltype(compare) > S(compare);
17
18     vi previous( elements.size(), -1 );
19     for(int i=0; i<int( elements.size() ); ++i){
```

```

19     auto it = S.insert(i).first;
20     if(it != S.begin())
21         previous[i] = *prev(it);
22     if(*it == i and next(it) != S.end())
23         S.erase(next(it));
24 }
25
26 vi answer;
27 answer.push_back( *S.rbegin() );
28 while ( previous[answer.back()] != -1 )
29     answer.push_back( previous[answer.back()] );
30 reverse( answer.begin(), answer.end() );
31 return answer;
32 }

```

## 2.3 Dp Digitos

```

1 // dp de quantidade de numeros <= r com ate qt
  // digitos diferentes de 0
2 ll dp(int idx, string& r, bool menor, int qt, vector<
  vector<vi>>& tab) {
3     if(qt > 3) return 0;
4     if(idx >= r.size()) {
5         return 1;
6     }
7     if(tab[idx][menor][qt] != -1)
8         return tab[idx][menor][qt];
9
10    ll res = 0;
11    for(int i = 0; i <= 9; i++) {
12        if(menor or i <= r[idx] - '0') {
13            res += dp(idx+1, r, menor or i < (r[idx] -
14                '0'), qt+(i>0), tab);
15        }
16    }
17    return tab[idx][menor][qt] = res;
18 }

```

## 3 ED

### 3.1 Prefixsum2d

```

1 ll find_sum(vector<vi> &mat, int x1, int y1, int x2,
  int y2){
2     // superior-esq(x1,y1) (x2,y2)inferior-dir
3     return mat[x2][y2]-mat[x2][y1-1]-mat[x1-1][y2]+
4     mat[x1-1][y1-1];
5 }
6 int main(){
7
8     for(int i=1;i<=n;i++)
9         for(int j=1;j<=n;j++)
10            mat[i][j]+=mat[i-1][j]+mat[i][j-1]-mat[i
11            -1][j-1];
12 }

```

### 3.2 Sparse Table

```

1 int logv[N+1];
2 void make_log() {
3     logv[1] = 0; // pre-comutar tabela de log
4     for (int i = 2; i <= N; i++)
5         logv[i] = logv[i/2] + 1;
6 }
7 struct Sparse {
8     int n;
9     vector<vector<int>> st;
10

```

```

11     Sparse(vector<int>& v) {
12         n = v.size();
13         int k = logv[n];
14         st.assign(n+1, vector<int>(k+1, 0));
15
16         for (int i=0;i<n;i++) {
17             st[i][0] = v[i];
18         }
19
20         for(int j = 1; j <= k; j++) {
21             for(int i = 0; i + (1 << j) <= n; i++) {
22                 st[i][j] = f(st[i][j-1], st[i + (1 <<
23                     (j-1))][j-1]);
24             }
25         }
26     }
27
28     int f(int a, int b) {
29         return min(a, b);
30     }
31
32     int query(int l, int r) {
33         int k = logv[r-l+1];
34         return f(st[l][k], st[r - (1 << k) + 1][k]);
35     };
36
37 struct Sparse2d {
38     int n, m;
39     vector<vector<vector<int>>> st;
40
41     Sparse2d(vector<vector<int>>> mat) {
42         n = mat.size();
43         m = mat[0].size();
44         int k = logv[min(n, m)];
45
46         st.assign(n+1, vector<vector<int>>>(m+1,
47             vector<int>(k+1)));
48         for(int i = 0; i < n; i++)
49             for(int j = 0; j < m; j++)
50                 st[i][j][0] = mat[i][j];
51
52         for(int j = 1; j <= k; j++) {
53             for(int x1 = 0; x1 < n; x1++) {
54                 for(int y1 = 0; y1 < m; y1++) {
55                     int delta = (1 << (j-1));
56                     if(x1+delta >= n or y1+delta >= m
57 ) continue;
58
59                     st[x1][y1][j] = st[x1][y1][j-1];
60                     st[x1][y1][j] = f(st[x1][y1][j],
61                         st[x1+delta][y1][j-1]);
62                     st[x1][y1][j] = f(st[x1][y1][j],
63                         st[x1][y1+delta][j-1]);
64                     st[x1][y1][j] = f(st[x1][y1][j],
65                         st[x1+delta][y1+delta][j-1]);
66                 }
67             }
68         }
69
70         // so funciona para quadrados
71         int query(int x1, int y1, int x2, int y2) {
72             assert(x2-x1+1 == y2-y1+1);
73             int k = logv[x2-x1+1];
74             int delta = (1 << k);
75
76             int res = st[x1][y1][k];
77             res = f(res, st[x2 - delta+1][y1][k]);
78             res = f(res, st[x1][y2 - delta+1][k]);
79             res = f(res, st[x2 - delta+1][y2 - delta+1][k
80             ]);
81         }
82     }
83 }

```

```

77     return res;
78 }
79
80 int f(int a, int b) {
81     return a | b;
82 }
83
84 };

```

### 3.3 Dsu

```

1 struct DSU {
2     int n;
3     vector<int> parent, size;
4
5     DSU(int n): n(n) {
6         parent.resize(n, 0);
7         size.assign(n, 1);
8
9         for(int i=0; i<n; i++)
10             parent[i] = i;
11     }
12
13     int find(int a) {
14         if(a == parent[a]) return a;
15         return parent[a] = find(parent[a]);
16     }
17
18     void join(int a, int b) {
19         a = find(a); b = find(b);
20         if(a != b) {
21             if(size[a] < size[b]) swap(a, b);
22             parent[b] = a;
23             size[a] += size[b];
24         }
25     }
26 };

```

### 3.4 Minqueue

```

1 struct MinQ {
2     stack<pair<ll, ll>> in;
3     stack<pair<ll, ll>> out;
4
5     void add(ll val) {
6         ll minimum = in.empty() ? val : min(val, in.
7         top().ss);
8         in.push({val, minimum});
9     }
10
11     ll pop() {
12         if(out.empty()) {
13             while(!in.empty()) {
14                 ll val = in.top().ff;
15                 in.pop();
16                 ll minimum = out.empty() ? val : min(
17                 val, out.top().ss);
18                 out.push({val, minimum});
19             }
20             ll res = out.top().ff;
21             out.pop();
22             return res;
23         }
24
25         ll minn() {
26             ll minimum = LLINF;
27             if(in.empty() || out.empty())
28                 minimum = in.empty() ? (ll)out.top().ss :
29                 (ll)in.top().ss;
30             else
31                 minimum = min((ll)in.top().ss, (ll)out.
32                 top().ss);
33         }
34     }
35 };

```

```

30
31     return minimum;
32 }
33
34 ll size() {
35     return in.size() + out.size();
36 }
37 };

```

### 3.5 Segtree Implicita Lazy

```

1 struct node{
2     pll val;
3     ll lazy;
4     ll l, r;
5     node(){
6         l=-1; r=-1; val={0,0}; lazy=0;
7     }
8 };
9
10 node tree[40*MAX];
11 int id = 2;
12 ll N=1e9+10;
13
14 pll merge(pll A, pll B){
15     if(A.ff==B.ff) return {A.ff, A.ss+B.ss};
16     return (A.ff<B.ff ? A:B);
17 }
18
19 void prop(ll l, ll r, int no){
20     ll mid = (l+r)/2;
21     if(l!=r){
22         if(tree[no].l==-1){
23             tree[no].l = id++;
24             tree[tree[no].l].val = {0, mid-l+1};
25         }
26         if(tree[no].r==-1){
27             tree[no].r = id++;
28             tree[tree[no].r].val = {0, r-(mid+1)+1};
29         }
30         tree[tree[no].l].lazy += tree[no].lazy;
31         tree[tree[no].r].lazy += tree[no].lazy;
32     }
33     tree[no].val.ff += tree[no].lazy;
34     tree[no].lazy=0;
35 }
36
37 void update(int a, int b, int x, ll l=0, ll r=2*N, ll
38 no=1){
39     prop(l, r, no);
40     if(a<=l and r<=b){
41         tree[no].lazy += x;
42         prop(l, r, no);
43         return;
44     }
45     if(r<a or b<l) return;
46     int m = (l+r)/2;
47     update(a, b, x, l, m, tree[no].l);
48     update(a, b, x, m+1, r, tree[no].r);
49
50     tree[no].val = merge(tree[tree[no].l].val, tree[
51     tree[no].r].val);
52 }
53
54 pll query(int a, int b, int l=0, int r=2*N, int no=1)
55 {
56     prop(l, r, no);
57     if(a<=l and r<=b) return tree[no].val;
58     if(r<a or b<l) return {INF, 0};
59     int m = (l+r)/2;
60     int left = tree[no].l, right = tree[no].r;
61 }

```

```

59     return tree[no].val = merge(query(a, b, l, m,
60                                query(a, b, m+1, r,
61                                right));

```

## 3.6 Delta Encoding

```

1 // Delta encoding
2
3 for(int i=0;i<q;i++){
4     int l,r,x;
5     cin >> l >> r >> x;
6     delta[l] += x;
7     delta[r+1] -= x;
8 }
9
10 int atual = 0;
11
12 for(int i=0;i<n;i++){
13     atual += delta[i];
14     v[i] += atual;
15 }

```

## 4 Strings

### 4.1 Z Func

```

1 vector<int> Z(string s) {
2     int n = s.size();
3     vector<int> z(n);
4     int l = 0, r = 0;
5     for (int i = 1; i < n; i++) {
6         z[i] = max(0, min(z[i - l], r - i + 1));
7         while (i + z[i] < n and s[z[i]] == s[i + z[i]
8     ]) {
9         l = i; r = i + z[i]; z[i]++;
10    }
11    return z;
12 }

```

### 4.2 Edit Distance

```

1 int edit_distance(int a, int b, string& s, string& t)
2 {
3     // indexado em 0, transforma s em t
4     if(a == -1) return b+1;
5     if(b == -1) return a+1;
6     if(tab[a][b] != -1) return tab[a][b];
7
8     int ins = INF, del = INF, mod = INF;
9     ins = edit_distance(a-1, b, s, t) + 1;
10    del = edit_distance(a, b-1, s, t) + 1;
11    mod = edit_distance(a-1, b-1, s, t) + (s[a] != t[
12    b]);
13
14    return tab[a][b] = min(ins, min(del, mod));
15 }

```

### 4.3 Lcs subseq

```

1 // Longest Common Subsequence
2 string lcs(string x, string y){
3     int n = x.size(), m = y.size();
4     vector<vi> dp(n+1, vi(m+1, 0));
5
6     for(int i=0;i<=n;i++){
7         for(int j=0;j<=m;j++){
8             if(!i or !j)

```

```

9             dp[i][j]=0;
10            else if(x[i-1] == y[j-1])
11                dp[i][j]=dp[i-1][j-1]+1;
12            else
13                dp[i][j]=max(dp[i-1][j], dp[i][j-1]);
14        }
15    }
16
17    // int len = dp[n][m];
18    string ans="";
19
20    // recover string
21    int i = n-1, j = m-1;
22    while(i>=0 and j>=0){
23        if(x[i] == y[j]){
24            ans.pb(x[i]);
25            i--; j--;
26        }else if(dp[i][j+1]>dp[i+1][j])
27            i--;
28        else
29            j--;
30    }
31
32    reverse(ans.begin(), ans.end());
33
34    return ans;
35 }

```

### 4.4 Kmp

```

1 string p;
2 int neighbor[N];
3 int walk(int u, char c) { // leader after inputting '
4     while (u != -1 && (u+1 >= (int)p.size() || p[u +
5     1] != c)) // leader doesn't match
6         u = neighbor[u];
7     return p[u + 1] == c ? u+1 : u;
8 }
9 void build() {
10    neighbor[0] = -1; // -1 is the leftmost state
11    for (int i = 1; i < (int)p.size(); i++)
12        neighbor[i] = walk(neighbor[i-1], p[i]);
13 }

```

### 4.5 Hash

```

1 // String Hash template
2 // constructor(s) - O(|s|)
3 // query(l, r) - returns the hash of the range [l,r]
4 // from left to right - O(1)
5 // query_inv(l, r) from right to left - O(1)
6 struct Hash {
7     const ll P = 31;
8     int n; string s;
9     vector<ll> h, hi, p;
10    Hash() {}
11    Hash(string s): s(s), n(s.size()), h(n), hi(n), p
12    (n) {
13        for (int i=0;i<n;i++) p[i] = (i ? P*p[i-1]:1)
14        % MOD;
15        for (int i=0;i<n;i++)
16            h[i] = (s[i] + (i ? h[i-1]:0) * P) % MOD;
17        for (int i=n-1;i>=0;i--)
18            hi[i] = (s[i] + (i+1<n ? hi[i+1]:0) * P)
19            % MOD;
20    }
21    int query(int l, int r) {
22        ll hash = (h[r] - (l ? h[l-1]*p[r-l+1]:0) % MOD :
23        0));
24        return hash < 0 ? hash + MOD : hash;
25    }

```

```

21     }
22     int query_inv(int l, int r) {
23         ll hash = (hi[l] - (r+1 < n ? hi[r+1]*p[r-1
24         +1] % MOD : 0));
25         return hash < 0 ? hash + MOD : hash;
26     };

```

## 4.6 Aho Corasick

```

1 // https://github.com/joseleite19/icpc-notebook/blob/
  master/code/string/aho_corasick.cpp
2 const int A = 26;
3 int to[N][A];
4 int ne = 2, fail[N], term[N];
5 void add_string(string str, int id){
6     int p = 1;
7     for(auto c: str){
8         int ch = c - 'a'; // !
9         if(!to[p][ch]) to[p][ch] = ne++;
10        p = to[p][ch];
11    }
12    term[p]++;
13 }
14 void init(){
15     for(int i = 0; i < ne; i++) fail[i] = 1;
16     queue<int> q; q.push(1);
17     int u, v;
18     while(!q.empty()){
19         u = q.front(); q.pop();
20         for(int i = 0; i < A; i++){
21             if(to[u][i]){
22                 v = to[u][i]; q.push(v);
23                 if(u != 1){
24                     fail[v] = to[ fail[u] ][i];
25                     term[v] += term[ fail[v] ];
26                 }
27             }
28             else if(u != 1) to[u][i] = to[ fail[u] ][i];
29         }
30         else to[u][i] = 1;
31     }
32 }

```

## 4.7 Lcs

```

1 string LCSUBSTR(string X, string Y)
2 {
3     int m = X.size();
4     int n = Y.size();
5
6     int result = 0, end;
7     int len[2][n];
8     int currRow = 0;
9
10    for(int i=0;i<=m;i++){
11        for(int j=0;j<=n;j++){
12            if(i==0 || j==0)
13                len[currRow][j] = 0;
14            else if(X[i-1] == Y[j-1]){
15                len[currRow][j] = len[1-currRow][j-1]
16                + 1;
17                if(len[currRow][j] > result){
18                    result = len[currRow][j];
19                    end = i - 1;
20                }
21            }
22            else
23                len[currRow][j] = 0;
24        }
25    }
26 }

```

```

25         currRow = 1 - currRow;
26     }
27
28     if(result==0)
29         return string();
30
31     return X.substr(end - result + 1, result);
32 }

```

## 5 Geometria

### 5.1 Mindistpair

```

1 ll MinDistPair(vp &vet){
2     int n = vet.size();
3     sort(vet.begin(), vet.end());
4     set<point> s;
5
6     ll best_dist = LLINF;
7     int j=0;
8     for(int i=0;i<n;i++){
9         ll d = ceil(sqrt(best_dist));
10        while(j<n and vet[i].x-vet[j].x >= d){
11            s.erase(point(vet[j].y, vet[j].x));
12            j++;
13        }
14
15        auto it1 = s.lower_bound({vet[i].y - d, vet[i]
16        ].x});
17        auto it2 = s.upper_bound({vet[i].y + d, vet[i]
18        ].x});
19
20        for(auto it=it1; it!=it2; it++){
21            ll dx = vet[i].x - it->y;
22            ll dy = vet[i].y - it->x;
23            if(best_dist > dx*dx + dy*dy){
24                best_dist = dx*dx + dy*dy;
25                // vet[i] e inv(it)
26            }
27        }
28
29        s.insert(point(vet[i].y, vet[i].x));
30    }
31    return best_dist;
32 }

```

### 5.2 Inside Polygon

```

1 // Convex O(logn)
2
3 bool insideT(point a, point b, point c, point e){
4     int x = ccw(a, b, e);
5     int y = ccw(b, c, e);
6     int z = ccw(c, a, e);
7     return !((x==1 or y==1 or z==1) and (x==-1 or y
8     ==-1 or z==-1));
9 }
10 bool inside(vp &p, point e){ // ccw
11     int l=2, r=(int)p.size()-1;
12     while(l<r){
13         int mid = (l+r)/2;
14         if(ccw(p[0], p[mid], e) == 1)
15             l=mid+1;
16         else{
17             r=mid;
18         }
19     }
20     // bordo
21     // if(r==(int)p.size()-1 and ccw(p[0], p[r], e)
22     ==0) return false;

```

```

22 // if(r==2 and ccw(p[0], p[1], e)==0) return
false;
23 // if(ccw(p[r], p[r-1], e)==0) return false;
24 return insideT(p[0], p[r-1], p[r], e);
25 }
26
27 // Any O(n)
28
29 int inside(vp &p, point pp){
30 // 1 - inside / 0 - boundary / -1 - outside
31 int n = p.size();
32 for(int i=0; i<n; i++){
33     int j = (i+1)%n;
34     if(line({p[i], p[j]}).inside_seg(pp))
35         return 0;
36 }
37 int inter = 0;
38 for(int i=0; i<n; i++){
39     int j = (i+1)%n;
40     if(p[i].x <= pp.x and pp.x < p[j].x and ccw(p
[i], p[j], pp)==1)
41         inter++; // up
42     else if(p[j].x <= pp.x and pp.x < p[i].x and
ccw(p[i], p[j], pp)==-1)
43         inter++; // down
44 }
45 if(inter%2==0) return -1; // outside
46 else return 1; // inside
47 }
48
49 }

```

### 5.3 3d

```

1 // typedef ll cod;
2 // bool eq(cod a, cod b){ return (a==b); }
3
4 const ld EPS = 1e-6;
5 #define vp vector<point>
6 typedef ld cod;
7 bool eq(cod a, cod b){ return fabs(a - b) <= EPS; }
8
9 struct point
10 {
11     cod x, y, z;
12     point(cod x=0, cod y=0, cod z=0): x(x), y(y), z(z
) {}
13
14     point operator+(const point &o) const {
15         return {x+o.x, y+o.y, z+o.z};
16     }
17     point operator-(const point &o) const {
18         return {x-o.x, y-o.y, z-o.z};
19     }
20     point operator*(cod t) const {
21         return {x*t, y*t, z*t};
22     }
23     point operator/(cod t) const {
24         return {x/t, y/t, z/t};
25     }
26     bool operator==(const point &o) const {
27         return eq(x, o.x) and eq(y, o.y) and eq(z, o
.z);
28     }
29     cod operator*(const point &o) const { // dot
30         return x*o.x + y*o.y + z*o.z;
31     }
32     point operator^(const point &o) const { // cross
33         return point(y*o.z - z*o.y,
34             z*o.x - x*o.z,
35             x*o.y - y*o.x);
36     }
37 };

```

```

38 ld norm(point a) { // Modulo
39     return sqrt(a * a);
40 }
41
42 cod norm2(point a) {
43     return a * a;
44 }
45 bool nulo(point a) {
46     return (eq(a.x, 0) and eq(a.y, 0) and eq(a.z, 0))
;
47 }
48 ld proj(point a, point b) { // a sobre b
49     return (a*b)/norm(b);
50 }
51 ld angle(point a, point b) { // em radianos
52     return acos((a*b) / norm(a) / norm(b));
53 }
54
55 cod triple(point a, point b, point c) {
56     return (a * (b^c)); // Area do paralelepipedo
57 }
58
59 point normilize(point a) {
60     return a/norm(a);
61 }
62
63 struct plane {
64     cod a, b, c, d;
65     point p1, p2, p3;
66     plane(point p1=0, point p2=0, point p3=0): p1(p1
, p2(p2), p3(p3) {
67         point aux = (p1-p3)^(p2-p3);
68         a = aux.x; b = aux.y; c = aux.z;
69         d = -a*p1.x - b*p1.y - c*p1.z;
70     }
71     plane(point p, point normal) {
72         normal = normilize(normal);
73         a = normal.x; b = normal.y; c = normal.z;
74         d = -(p*normal);
75     }
76
77     // ax+by+cz+d = 0;
78     cod eval(point &p) {
79         return a*p.x + b*p.y + c*p.z + d;
80     }
81
82     cod dist(plane pl, point p) {
83         return fabs(pl.a*p.x + pl.b*p.y + pl.c*p.z + pl.d
) / sqrt(pl.a*pl.a + pl.b*pl.b + pl.c*pl.c);
84     }
85 }
86
87 point rotate(point v, point k, ld theta) {
88     // Rotaciona o vetor v theta graus em torno do
eixo k
89     // theta *= PI/180; // graus
90     return (
91         v*cos(theta)) +
92         ((k^v)*sin(theta)) +
93         (k*(k^v))*(1-cos(theta)
94     );
95 }
96
97 // 3d line inter / mindistance
98 cod d(point p1, point p2, point p3, point p4) {
99     return (p2-p1) * (p4-p3);
100 }
101 vector<point> inter3d(point p1, point p2, point p3,
point p4) {
102     cod mua = ( d(p1, p3, p4, p3) * d(p4, p3, p2, p1)
- d(p1, p3, p2, p1) * d(p4, p3, p4, p3) )
103     / ( d(p2, p1, p2, p1) * d(p4, p3, p4, p3)
- d(p4, p3, p2, p1) * d(p4, p3, p2, p1) );

```



```

104     cod mub = ( d(p1, p3, p4, p3) + mua * d(p4, p3,
105     p2, p1) ) / d(p4, p3, p4, p3);
106     point pa = p1 + (p2-p1) * mua;
107     point pb = p3 + (p4-p3) * mub;
108     if (pa == pb) return {pa};
109     return {};

```

## 5.4 Convex Hull

```

1  vp convex_hull(vp P)
2  {
3      sort(P.begin(), P.end());
4      vp L, U;
5      for(auto p: P){
6          while(L.size()>=2 and ccw(L.end()[-2], L.back
7          (), p)!=1)
8              L.pop_back();
9          L.push_back(p);
10     }
11     reverse(P.begin(), P.end());
12     for(auto p: P){
13         while(U.size()>=2 and ccw(U.end()[-2], U.back
14         (), p)!=1)
15             U.pop_back();
16         U.push_back(p);
17     }
18     L.pop_back();
19     L.insert(L.end(), U.begin(), U.end()-1);
20     return L;

```

## 5.5 Linear Transformation

```

1  // Apply linear transformation (p -> q) to r.
2  point linear_transformation(point p0, point p1, point
3  q0, point q1, point r) {
4      point dp = p1-p0, dq = q1-q0, num((dp^dq), (dp^dq
5      ));
6      return q0 + point((r-p0)^(num), (r-p0)*(num))/(dp
7      *dp);
8  }

```

## 5.6 Voronoi

```

1  bool polygonIntersection(line &seg, vp &p) {
2      long double l = -1e18, r = 1e18;
3      for(auto ps : p) {
4          long double z = seg.eval(ps);
5          l = max(l, z);
6          r = min(r, z);
7      }
8      return l - r > EPS;
9  }
10
11  int w, h;
12
13  line getBisector(point a, point b) {
14      line ans(a, b);
15      swap(ans.a, ans.b);
16      ans.b *= -1;
17      ans.c = ans.a * (a.x + b.x) * 0.5 + ans.b * (a.y
18      + b.y) * 0.5;
19      return ans;
20  }
21
22  vp cutPolygon(vp poly, line seg) {
23      int n = (int) poly.size();
24      vp ans;
25      for(int i = 0; i < n; i++) {
26          double z = seg.eval(poly[i]);
27          if(z > -EPS) {

```

```

28              ans.push_back(poly[i]);
29          }
30          double z2 = seg.eval(poly[(i + 1) % n]);
31          if((z > EPS && z2 < -EPS) || (z < -EPS && z2
32          > EPS)) {
33              ans.push_back(inter_line(seg, line(poly[i
34              ], poly[(i + 1) % n]))[0]);
35          }
36      }
37      return ans;
38  }
39
40  // BE CAREFUL!
41  // the first point may be any point
42  // O(N^3)
43  vp getCell(vp pts, int i) {
44      vp ans;
45      ans.emplace_back(0, 0);
46      ans.emplace_back(1e6, 0);
47      ans.emplace_back(1e6, 1e6);
48      ans.emplace_back(0, 1e6);
49      for(int j = 0; j < (int) pts.size(); j++) {
50          if(j != i) {
51              ans = cutPolygon(ans, getBisector(pts[i],
52              pts[j]));
53          }
54      }
55      return ans;
56  }
57
58  // O(N^2) expected time
59  vector<vp> getVoronoi(vp pts) {
60      // assert(pts.size() > 0);
61      int n = (int) pts.size();
62      vector<int> p(n, 0);
63      for(int i = 0; i < n; i++) {
64          p[i] = i;
65      }
66      shuffle(p.begin(), p.end(), rng);
67      vector<vp> ans(n);
68      ans[0].emplace_back(0, 0);
69      ans[0].emplace_back(w, 0);
70      ans[0].emplace_back(w, h);
71      ans[0].emplace_back(0, h);
72      for(int i = 1; i < n; i++) {
73          ans[i] = ans[0];
74      }
75      for(auto i : p) {
76          for(auto j : p) {
77              if(j == i) break;
78              auto bi = getBisector(pts[j], pts[i]);
79              if(!polygonIntersection(bi, ans[j]))
80                  continue;
81              ans[j] = cutPolygon(ans[j], getBisector(
82              pts[j], pts[i]));
83              ans[i] = cutPolygon(ans[i], getBisector(
84              pts[i], pts[j]));
85          }
86      }
87      return ans;
88  }

```

## 5.7 Polygon Area

```

1  ll area = 0;
2
3  for(int i = 0; i < n - 1; ++i){
4      area += pontos[i].x*pontos[i+1].y - pontos[i+1].x
5      *pontos[i].y;
6  }
7  area += pontos[n-1].x*pontos[0].y - pontos[0].x*
8  pontos[n-1].y;

```

```
8 area = abs(area);
```

## 5.8 Intersect Polygon

```
1 bool intersect(vector<point> A, vector<point> B) //
   Ordered ccw
2 {
3     for(auto a: A)
4         if(inside(B, a))
5             return true;
6     for(auto b: B)
7         if(inside(A, b))
8             return true;
9
10    if(inside(B, center(A)))
11        return true;
12
13    return false;
14 }
```

## 5.9 Sort By Angle

```
1 // Comparator function for sorting points by angle
2
3 int ret[2][2] = {{3, 2},{4, 1}};
4 inline int quad(point p) {
5     return ret[p.x >= 0][p.y >= 0];
6 }
7
8 bool comp(point a, point b) { // ccw
9     int qa = quad(a), qb = quad(b);
10    return (qa == qb ? (a ^ b) > 0 : qa < qb);
11 }
12
13 // only vectors in range [x+0, x+180)
14 bool comp(point a, point b){
15     return (a ^ b) > 0; // ccw
16     // return (a ^ b) < 0; // cw
17 }
```

## 5.10 2d

```
1 #define vp vector<point>
2 #define ld long double
3 const ld EPS = 1e-6;
4 const ld PI = acos(-1);
5
6 typedef ld T;
7 bool eq(T a, T b){ return abs(a - b) <= EPS; }
8
9 struct point{
10     T x, y;
11     int id;
12     point(T x=0, T y=0): x(x), y(y){}
13
14     point operator+(const point &o) const{ return {x
+ o.x, y + o.y}; }
15     point operator-(const point &o) const{ return {x
- o.x, y - o.y}; }
16     point operator*(T t) const{ return {x * t, y * t
}; }
17     point operator/(T t) const{ return {x / t, y / t
}; }
18     operator*(const point &o) const{ return x * o.x
+ y * o.y; }
19     operator^(const point &o) const{ return x * o.y
- y * o.x; }
20     bool operator<(const point &o) const{
21         return (eq(x, o.x) ? y < o.y : x < o.x);
22     }
23     bool operator==(const point &o) const{
24         return eq(x, o.x) and eq(y, o.y);
```

```
25     }
26     friend ostream& operator<<(ostream& os, point p)
27     {
28         return os << "(" << p.x << "," << p.y << ")";
29     }
30 };
31
32 int ccw(point a, point b, point e){ // -1=dir; 0=
33     collinear; 1=esq;
34     T tmp = (b-a) ^ (e-a); // vector from a to b
35     return (tmp > EPS) - (tmp < -EPS);
36 }
37
38 ld norm(point a){ // Modulo
39     return sqrt(a * a);
40 }
41
42 T norm2(point a){
43     return a * a;
44 }
45
46 bool nulo(point a){
47     return (eq(a.x, 0) and eq(a.y, 0));
48 }
49
50 point rotccw(point p, ld a){
51     // a = PI*a/180; // graus
52     return point((p.x*cos(a)-p.y*sin(a)), (p.y*cos(a)
+ p.x*sin(a)));
53 }
54
55 point rot90cw(point a) { return point(a.y, -a.x); };
56 point rot90ccw(point a) { return point(-a.y, a.x); };
57
58 ld proj(point a, point b){ // a sobre b
59     return a*b/norm(b);
60 }
61
62 ld angle(point a, point b){ // em radianos
63     ld ang = a*b / norm(a) / norm(b);
64     return acos(max(min(ang, (ld)1), (ld)-1));
65 }
66
67 ld angle_vec(point v){
68     // return 180/PI*atan2(v.x, v.y); // graus
69     return atan2(v.x, v.y);
70 }
71
72 ld order_angle(point a, point b){ // from a to b ccw
73     (a in front of b)
74     ld aux = angle(a,b)*180/PI;
75     return ((a^b)<=0 ? aux:360-aux);
76 }
77
78 bool angle_less(point a1, point b1, point a2, point
79     b2){ // ang(a1,b1) <= ang(a2,b2)
80     point p1((a1*b1), abs((a1^b1)));
81     point p2((a2*b2), abs((a2^b2)));
82     return (p1^p2) <= 0;
83 }
84
85 ld area(vp &p){ // (points sorted)
86     ld ret = 0;
87     for(int i=2;i<(int)p.size();i++)
88         ret += (p[i]-p[0])^(p[i-1]-p[0]);
89     return abs(ret/2);
90 }
91
92 ld areaT(point &a, point &b, point &c){
93     return abs((b-a)^(c-a))/2.0;
94 }
95
96 point center(vp &A){
97     point c = point();
98     int len = A.size();
99     for(int i=0;i<len;i++)
100         c=c+A[i];
101     return c/len;
102 }
103
104 point forca_mod(point p, ld m){
105     ld cm = norm(p);
```

```

92     if(cm<EPS) return point();
93     return point(p.x*m/cm,p.y*m/cm);
94 }
95
96 ld param(point a, point b, point v){
97     // v = t*(b-a) + a // return t;
98     // assert(line(a, b).inside_seg(v));
99     return ((v-a) * (b-a)) / ((b-a) * (b-a));
100 }
101
102 bool simetric(vp &a){ //ordered
103     int n = a.size();
104     point c = center(a);
105     if(n&1) return false;
106     for(int i=0;i<n/2;i++)
107         if(ccw(a[i], a[i+n/2], c) != 0)
108             return false;
109     return true;
110 }
111
112 point mirror(point m1, point m2, point p){
113     // mirror point p around segment m1m2
114     point seg = m2-m1;
115     ld t0 = ((p-m1)*seg) / (seg*seg);
116     point ort = m1 + seg*t0;
117     point pm = ort-(p-ort);
118     return pm;
119 }
120
121
122 ///////////////
123 // Line //
124 ///////////////
125
126 struct line{
127     point p1, p2;
128     T a, b, c; // ax+by+c = 0;
129     // y-y1 = ((y2-y1)/(x2-x1))(x-x1)
130     line(point p1=0, point p2=0): p1(p1), p2(p2){
131         a = p1.y - p2.y;
132         b = p2.x - p1.x;
133         c = p1 ^ p2;
134     }
135     line(T a=0, T b=0, T c=0): a(a), b(b), c(c){
136         // Gera os pontos p1 p2 dados os coeficientes
137         // isso aqui eh um lixo mas quebra um galho
138         kkkkkk
139         if(b==0){
140             p1 = point(1, -c/a);
141             p2 = point(0, -c/a);
142         }else{
143             p1 = point(1, (-c-a*1)/b);
144             p2 = point(0, -c/b);
145         }
146     }
147     T eval(point p){
148         return a*p.x+b*p.y+c;
149     }
150     bool inside(point p){
151         return eq(eval(p), 0);
152     }
153     point normal(){
154         return point(a, b);
155     }
156
157     bool inside_seg(point p){
158         return (
159             ((p1-p) ^ (p2-p)) == 0 and
160             ((p1-p) * (p2-p)) <= 0
161         );
162     }
163
164 };
165
166 // be careful with precision error
167 vp inter_line(line l1, line l2){
168     ld det = l1.a*l2.b - l1.b*l2.a;
169     if(det==0) return {};
170     ld x = (l1.b*l2.c - l1.c*l2.b)/det;
171     ld y = (l1.c*l2.a - l1.a*l2.c)/det;
172     return {point(x, y)};
173 }
174
175 // segments not collinear
176 vp inter_seg(line l1, line l2){
177     vp ans = inter_line(l1, l2);
178     if(ans.empty() or !l1.inside_seg(ans[0]) or !l2.
179         inside_seg(ans[0]))
180         return {};
181     return ans;
182 }
183
184 bool seg_has_inter(line l1, line l2){
185     return ccw(l1.p1, l1.p2, l2.p1) * ccw(l1.p1, l1.
186         p2, l2.p2) < 0 and
187         ccw(l2.p1, l2.p2, l1.p1) * ccw(l2.p1, l2.
188         p2, l1.p2) < 0;
189 }
190
191 ld dist_seg(point p, point a, point b){ // point -
192     seg
193     if((p-a)*(b-a) < EPS) return norm(p-a);
194     if((p-b)*(a-b) < EPS) return norm(p-b);
195     return abs((p-a)^(b-a)) / norm(b-a);
196 }
197
198 ld dist_line(point p, line l){ // point - line
199     return abs(l.eval(p))/sqrt(1.a*1.a + 1.b*1.b);
200 }
201
202 line bisector(point a, point b){
203     point d = (b-a)*2;
204     return line(d.x, d.y, a*a - b*b);
205 }
206
207 line perpendicular(line l, point p){ // passes
208     through p
209     return line(l.b, -l.a, -l.b*p.x + l.a*p.y);
210 }
211
212 struct circle{
213     point c; T r;
214     circle(): c(0, 0), r(0){}
215     circle(const point o): c(o), r(0){}
216     circle(const point a, const point b){
217         c = (a+b)/2;
218         r = norm(a-c);
219     }
220     circle(const point a, const point b, const point
221         cc){
222         assert(ccw(a, b, cc) != 0);
223         c = inter_line(bisector(a, b), bisector(b, cc
224         ))[0];
225         r = norm(a-c);
226     }
227     bool inside(const point &a) const{
228         return norm(a - c) <= r + EPS;
229     }
230 };
231
232 pair<point, point> tangent_points(circle cr, point p)

```

```

    {
230     ld d1 = norm(p-cr.c), theta = asin(cr.r/d1);
231     point p1 = rotccw(cr.c-p, -theta);
232     point p2 = rotccw(cr.c-p, theta);
233     assert(d1 >= cr.r);
234     p1 = p1 * (sqrt(d1*d1-cr.r*cr.r) / d1) + p;
235     p2 = p2 * (sqrt(d1*d1-cr.r*cr.r) / d1) + p;
236     return {p1, p2};
237 }
238
239
240 circle incircle(point p1, point p2, point p3){
241     ld m1 = norm(p2-p3);
242     ld m2 = norm(p1-p3);
243     ld m3 = norm(p1-p2);
244     point c = (p1*m1 + p2*m2 + p3*m3)*(1/(m1+m2+m3));
245     ld s = 0.5*(m1+m2+m3);
246     ld r = sqrt(s*(s-m1)*(s-m2)*(s-m3)) / s;
247     return circle(c, r);
248 }
249
250 circle circumcircle(point a, point b, point c) {
251     circle ans;
252     point u = point((b-a).y, -(b-a).x);
253     point v = point((c-a).y, -(c-a).x);
254     point n = (c-b)*0.5;
255     ld t = (u^n)/(v^u);
256     ans.c = ((a+c)*0.5) + (v*t);
257     ans.r = norm(ans.c-a);
258     return ans;
259 }
260
261 vp inter_circle_line(circle C, line L){
262     point ab = L.p2 - L.p1, p = L.p1 + ab * ((C.c-L.
263     p1)*(ab) / (ab*ab));
264     ld s = (L.p2-L.p1)^(C.c-L.p1), h2 = C.r*C.r - s*s
265     / (ab*ab);
266     if (h2 < -EPS) return {};
267     if (eq(h2, 0)) return {p};
268     point h = (ab/norm(ab)) * sqrt(h2);
269     return {p - h, p + h};
270 }
271
272 vp inter_circle(circle c1, circle c2){
273     if (c1.c == c2.c) { assert(c1.r != c2.r); return
274     {}; }
275     point vec = c2.c - c1.c;
276     ld d2 = vec * vec, sum = c1.r + c2.r, dif = c1.r
277     - c2.r;
278     ld p = (d2 + c1.r * c1.r - c2.r * c2.r) / (2 * d2
279     );
280     ld h2 = c1.r * c1.r - p * p * d2;
281     if (sum * sum < d2 or dif * dif > d2) return {};
282     point mid = c1.c + vec * p, per = point(-vec.y,
283     vec.x) * sqrt(fmax(0, h2) / d2);
284     if (eq(per.x, 0) and eq(per.y, 0)) return {mid};
285     return {mid + per, mid - per};
286 }
287
288 // minimum circle cover O(n) amortizado
289 circle min_circle_cover(vp v){
290     random_shuffle(v.begin(), v.end());
291     circle ans;
292     int n = v.size();
293     for(int i=0;i<n;i++) if(!ans.inside(v[i])){
294         ans = circle(v[i]);
295         for(int j=0;j<i;j++){
296             if(!ans.inside(v[j])){
297                 ans = circle(v[i], v[j]);
298                 for(int k=0;k<j;k++){
299                     if(!ans.inside(v[k]))
300                         ans = circle(v[i], v[j], v[k]);
301                 }
302             }
303         }
304     }
305 }

```

```

295     }
296     return ans;
297 }

```

## 6 Grafos

### 6.1 Dfs Tree

```

1 int desce[N], sobe[N], vis[N], h[N];
2 int backedges[N], pai[N];
3
4 // backedges[u] = backedges que comecam embaixo de (
5 // ou =) u e sobem pra cima de u; backedges[u] == 0
6 // => u eh ponte
7 void dfs(int u, int p) {
8     if(vis[u]) return;
9     pai[u] = p;
10    h[u] = h[p]+1;
11    vis[u] = 1;
12
13    for(auto v : g[u]) {
14        if(p == v or vis[v]) continue;
15        dfs(v, u);
16        backedges[u] += backedges[v];
17    }
18    for(auto v : g[u]) {
19        if(h[v] > h[u]+1)
20            desce[u]++;
21        else if(h[v] < h[u]-1)
22            sobe[u]++;
23    }
24    backedges[u] += sobe[u] - desce[u];
25 }

```

### 6.2 Kosaraju

```

1 vector<int> g[N], gi[N]; // grafo invertido
2 int vis[N], comp[N]; // componente conexo de cada
3 // vertice
4 stack<int> S;
5
6 void dfs(int u){
7     vis[u] = 1;
8     for(auto v: g[u]) if(!vis[v]) dfs(v);
9     S.push(u);
10 }
11
12 void scc(int u, int c){
13     vis[u] = 1; comp[u] = c;
14     for(auto v: gi[u]) if(!vis[v]) scc(v, c);
15 }
16
17 void kosaraju(int n){
18     for(int i=0;i<n;i++) vis[i] = 0;
19     for(int i=0;i<n;i++) if(!vis[i]) dfs(i);
20     for(int i=0;i<n;i++) vis[i] = 0;
21     while(S.size()){
22         int u = S.top();
23         S.pop();
24         if(!vis[u]) scc(u, u);
25     }
26 }

```

### 6.3 Topological Sort

```

1 int n; // number of vertices
2 vector<vector<int>> adj; // adjacency list of graph
3 vector<bool> visited;
4 vector<int> ans;
5
6 void dfs(int v) {

```

```

7     visited[v] = true;
8     for (int u : adj[v]) {
9         if (!visited[u])
10            dfs(u);
11    }
12    ans.push_back(v);
13 }
14
15 void topological_sort() {
16     visited.assign(n, false);
17     ans.clear();
18     for (int i = 0; i < n; ++i) {
19         if (!visited[i]) {
20             dfs(i);
21         }
22     }
23     reverse(ans.begin(), ans.end());
24 }

```

## 6.4 Dijkstra

```

1 #define pii pair<int, int>
2 vector<vector<pii>> g(N);
3 vector<bool> used(N);
4 vector<ll> d(N, LLINF);
5 priority_queue< pii, vector<pii>, greater<pii> > fila
6 ;
7 void dijkstra(int k) {
8     d[k] = 0;
9     fila.push({0, k});
10
11     while (!fila.empty()) {
12         auto [w, u] = fila.top();
13         fila.pop();
14         if (used[u]) continue;
15         used[u] = true;
16
17         for (auto [v, w]: g[u]) {
18             if (d[v] > d[u] + w) {
19                 d[v] = d[u] + w;
20                 fila.push({d[v], v});
21             }
22         }
23     }
24 }

```

## 6.5 Dinic

```

1 const int N = 300;
2
3 struct Dinic {
4     struct Edge{
5         int from, to; ll flow, cap;
6     };
7     vector<Edge> edge;
8
9     vector<int> g[N];
10    int ne = 0;
11    int lvl[N], vis[N], pass;
12    int qu[N], px[N], qt;
13
14    ll run(int s, int sink, ll minE) {
15        if(s == sink) return minE;
16
17        ll ans = 0;
18
19        for(; px[s] < (int)g[s].size(); px[s]++) {
20            int e = g[s][px[s]];
21            auto &v = edge[e], &rev = edge[e^1];
22            if(lvl[v.to] != lvl[s]+1 || v.flow >= v.
cap)

```

```

23                continue; // v.cap - v.flow
24            < lim
25                ll tmp = run(v.to, sink, min(minE, v.cap-v
26                .flow));
27                v.flow += tmp, rev.flow -= tmp;
28                ans += tmp, minE -= tmp;
29                if(minE == 0) break;
30            }
31            return ans;
32        }
33    }
34    bool bfs(int source, int sink) {
35        qt = 0;
36        qu[qt++] = source;
37        lvl[source] = 1;
38        vis[source] = ++pass;
39        for(int i = 0; i < qt; i++) {
40            int u = qu[i];
41            px[u] = 0;
42            if(u == sink) return true;
43            for(auto& ed : g[u]) {
44                auto v = edge[ed];
45                if(v.flow >= v.cap || vis[v.to] ==
pass)
46                    continue; // v.cap - v.flow < lim
47                vis[v.to] = pass;
48                lvl[v.to] = lvl[u]+1;
49                qu[qt++] = v.to;
50            }
51            return false;
52        }
53    }
54    ll flow(int source, int sink) {
55        reset_flow();
56        ll ans = 0;
57        //for(lim = (1LL << 62); lim >= 1; lim /= 2)
58        while(bfs(source, sink))
59            ans += run(source, sink, LLINF);
60        return ans;
61    }
62    void addEdge(int u, int v, ll c, ll rc) {
63        Edge e = {u, v, 0, c};
64        edge.pb(e);
65        g[u].push_back(ne++);
66
67        e = {v, u, 0, rc};
68        edge.pb(e);
69        g[v].push_back(ne++);
70    }
71    void reset_flow() {
72        for(int i = 0; i < ne; i++)
73            edge[i].flow = 0;
74        memset(lvl, 0, sizeof(lvl));
75        memset(vis, 0, sizeof(vis));
76        memset(qu, 0, sizeof(qu));
77        memset(px, 0, sizeof(px));
78        qt = 0; pass = 0;
79    }
80    vector<pair<int, int>> cut() {
81        vector<pair<int, int>> cuts;
82        for (auto [from, to, flow, cap]: edge) {
83            if (flow == cap and vis[from] == pass and
84            vis[to] < pass and cap>0) {
85                cuts.pb({from, to});
86            }
87        }
88        return cuts;
89    }
90 }
91
92 // Hungarian Algorithm
93 //

```

## 6.6 Hungarian

```

1 // Hungarian Algorithm
2 //

```

```

3 // Assignment problem
4 // Put the edges in the 'a' matrix (negative or
   positive)
5 // assignment() returns a pair with the min
   assignment,
6 // and the column chosen by each row
7 // assignment() - O(n^3)
8
9 template<typename T>
10 struct hungarian {
11     int n, m;
12     vector<vector<T>> a;
13     vector<T> u, v;
14     vector<int> p, way;
15     T inf;
16
17     hungarian(int n_, int m_) : n(n_), m(m_), u(m+1),
   v(m+1), p(m+1), way(m+1) {
18         a = vector<vector<T>>(n, vector<T>(m));
19         inf = numeric_limits<T>::max();
20     }
21     pair<T, vector<int>> assignment() {
22         for (int i = 1; i <= n; i++) {
23             p[0] = i;
24             int j0 = 0;
25             vector<T> minv(m+1, inf);
26             vector<int> used(m+1, 0);
27             do {
28                 used[j0] = true;
29                 int i0 = p[j0], j1 = -1;
30                 T delta = inf;
31                 for (int j = 1; j <= m; j++) if (!
   used[j]) {
32                     T cur = a[i0-1][j-1] - u[i0] - v[
   j];
33                     if (cur < minv[j]) minv[j] = cur;
34                     way[j] = j0;
35                     if (minv[j] < delta) delta = minv
   [j], j1 = j;
36                 }
37                 for (int j = 0; j <= m; j++)
   if (used[j]) u[p[j]] += delta, v[
   j] -= delta;
38                 else minv[j] -= delta;
39                 j0 = j1;
40             } while (p[j0] != 0);
41             do {
42                 int j1 = way[j0];
43                 p[j0] = p[j1];
44                 j0 = j1;
45             } while (j0);
46         }
47         vector<int> ans(m);
48         for (int j = 1; j <= n; j++) ans[p[j]-1] = j
   -1;
49         return make_pair(-v[0], ans);
50     }
51 };

```

## 6.7 Floyd Warshall

```

1 // Floyd Warshall
2
3 int dist[N][N];
4
5 for(int k = 1; k <= n; k++)
6     for(int i = 1; i <= n; i++)
7         for(int j = 1; j <= n; j++)
8             dist[i][j] = min(dist[i][j], dist[i][k] +
   dist[k][j]);

```

## 6.8 Lca

```

1 const int LOG = 22;
2 vector<vector<int>> g(N);
3 int t, n;
4 vector<int> in(N), height(N);
5 vector<vector<int>> up(LOG, vector<int>(N));
6 void dfs(int u, int h=0, int p=-1) {
7     up[0][u] = p;
8     in[u] = t++;
9     height[u] = h;
10    for (auto v: g[u]) if (v != p) dfs(v, h+1, u);
11 }
12
13 void blift() {
14     up[0][0] = 0;
15     for (int j=1; j<LOG; j++) {
16         for (int i=0; i<n; i++) {
17             up[j][i] = up[j-1][up[j-1][i]];
18         }
19     }
20 }
21
22 int lca(int u, int v) {
23     if (u == v) return u;
24     if (in[u] < in[v]) swap(u, v);
25     for (int i=LOG-1; i>=0; i--) {
26         int u2 = up[i][u];
27         if (in[u2] > in[v])
28             u = u2;
29     }
30     return up[0][u];
31 }
32
33 t = 0;
34 dfs(0);
35 blift();
36 // lca O(1)
37
38 template<typename T> struct rmq {
39     vector<T> v;
40     int n; static const int b = 30;
41     vector<int> mask, t;
42
43     int op(int x, int y) { return v[x] < v[y] ? x : y
   ; }
44     int msb(int x) { return __builtin_clz(1)-
   __builtin_clz(x); }
45     rmq() {}
46     rmq(const vector<T>& v_) : v(v_), n(v.size()),
   mask(n), t(n) {
47         for (int i = 0, at = 0; i < n; mask[i++] = at
   |= 1) {
48             at = (at<<1)&((1<<b)-1);
49             while (at and op(i, i-msb(at&-at)) == i)
50                 at ^= at&-at;
51         }
52         for (int i = 0; i < n/b; i++) t[i] = b*i+b-1-
   msb(mask[b*i+b-1]);
53         for (int j = 1; (1<<j) <= n/b; j++) for (int
   i = 0; i+(1<<j) <= n/b; i++)
54             t[n/b*j+i] = op(t[n/b*(j-1)+i], t[n/b*(j
   -1)+i+(1<<(j-1))]);
55     }
56     int small(int r, int sz = b) { return r-msb(mask[
   r]&((1<<sz)-1)); }
57     T query(int l, int r) {
58         if (r-l+1 <= b) return small(r, r-l+1);
59         int ans = op(small(l+b-1), small(r));
60         int x = l/b+1, y = r/b-1;
61         if (x <= y) {
62             int j = msb(y-x+1);
63             ans = op(ans, op(t[n/b*j+x], t[n/b*j+y
   -(1<<j)+1]));

```

```

64     }
65     return ans;
66 }
67 };
68
69 namespace lca {
70     vector<int> g[N];
71     int v[2*N], pos[N], dep[2*N];
72     int t;
73     rmq<int> RMQ;
74
75     void dfs(int i, int d = 0, int p = -1) {
76         v[t] = i, pos[i] = t, dep[t++] = d;
77         for (int j : g[i]) if (j != p) {
78             dfs(j, d+1, i);
79             v[t] = i, dep[t++] = d;
80         }
81     }
82     void build(int n, int root) {
83         t = 0;
84         dfs(root);
85         RMQ = rmq<int>(vector<int>(dep, dep+2*n-1));
86     }
87     int lca(int a, int b) {
88         a = pos[a], b = pos[b];
89         return v[RMQ.query(min(a, b), max(a, b))];
90     }
91     int dist(int a, int b) {
92         return dep[pos[a]] + dep[pos[b]] - 2*dep[pos[lca(a, b)]];
93     }
94 }

```

## 6.9 Kruskal

```

1 struct DSU {
2     int n;
3     vector<int> parent, size;
4
5     DSU(int n): n(n) {
6         parent.resize(n, 0);
7         size.assign(n, 1);
8
9         for(int i=0; i<n; i++)
10             parent[i] = i;
11     }
12
13     int find(int a) {
14         if(a == parent[a]) return a;
15         return parent[a] = find(parent[a]);
16     }
17
18     void join(int a, int b) {
19         a = find(a); b = find(b);
20         if(a != b) {
21             if(size[a] < size[b]) swap(a, b);
22             parent[b] = a;
23             size[a] += size[b];
24         }
25     }
26 };
27
28 struct Edge {
29     int u, v, weight;
30     bool operator<(Edge const& other) {
31         return weight < other.weight;
32     }
33 };
34
35 vector<Edge> kruskal(int n, vector<Edge> edges) {
36     vector<Edge> mst;
37     DSU dsu = DSU(n+1);
38

```

```

39     sort(edges.begin(), edges.end());
40
41     for(Edge e : edges) {
42         if(dsu.find(e.u) != dsu.find(e.v)) {
43             mst.push_back(e);
44             dsu.join(e.u, e.v);
45         }
46     }
47
48     return mst;
49 }

```

## 6.10 Ford

```

1 const int N = 2000010;
2
3 struct Ford {
4     struct Edge {
5         int to, f, c;
6     };
7
8     int vis[N];
9     vector<int> adj[N];
10    vector<Edge> edges;
11    int cur = 0;
12
13    void addEdge(int a, int b, int cap, int rcap) {
14        Edge e;
15        e.to = b; e.c = cap; e.f = 0;
16        edges.pb(e);
17        adj[a].pb(cur++);
18
19        e = Edge();
20        e.to = a; e.c = rcap; e.f = 0;
21        edges.pb(e);
22        adj[b].pb(cur++);
23    }
24
25    int dfs(int s, int t, int f, int tempo) {
26        if(s == t)
27            return f;
28        vis[s] = tempo;
29
30        for(int e : adj[s]) {
31            if(vis[edges[e].to] < tempo and (edges[e].c - edges[e].f) > 0) {
32                if(int a = dfs(edges[e].to, t, min(f, edges[e].c - edges[e].f), tempo)) {
33                    edges[e].f += a;
34                    edges[e^1].f -= a;
35                    return a;
36                }
37            }
38        }
39        return 0;
40    }
41
42    int flow(int s, int t) {
43        int mflow = 0, tempo = 1;
44        while(int a = dfs(s, t, INF, tempo)) {
45            mflow += a;
46            tempo++;
47        }
48        return mflow;
49    }
50 };

```

## 7 Algoritmos

### 7.1 Ternary Search



```

1 // Ternary
2 ld l = -1e4, r = 1e4;
3 int iter = 100;
4 while(iter--){
5     ld m1 = (2*l + r) / 3;
6     ld m2 = (l + 2*r) / 3;
7     if(check(m1) > check(m2))
8         l = m1;
9     else
10        r = m2;
11 }

```

## 8 Math

### 8.1 Totient

```

1 // phi(p^k) = (p^(k-1))*(p-1) com p primo
2 // O(sqrt(m))
3 ll phi(ll m){
4     ll res = m;
5     for(ll d=2;d*d<=m;d++){
6         if(m % d == 0){
7             res = (res/d)*(d-1);
8             while(m%d == 0)
9                 m /= d;
10        }
11    }
12    if(m > 1) {
13        res /= m;
14        res *= (m-1);
15    }
16    return res;
17 }
18
19 // modificacao do crivo, O(n*log(log(n)))
20 vector<ll> phi_to_n(ll n){
21     vector<bool> isprime(n+1, true);
22     vector<ll> tot(n+1);
23     tot[0] = 0; tot[1] = 1;
24     for(ll i=1;i<=n; i++){
25         tot[i] = i;
26     }
27
28     for(ll p=2;p<=n;p++){
29         if(isprime[p]){
30             tot[p] = p-1;
31             for(ll i=p+p;i<=n;i+=p){
32                 isprime[i] = false;
33                 tot[i] = (tot[i]/p)*(p-1);
34             }
35         }
36     }
37     return tot;
38 }

```

### 8.2 Pollard Rho

```

1 ll mul(ll a, ll b, ll m) {
2     ll ret = a*b - (ll)((ld)1/m*a*b+0.5)*m;
3     return ret < 0 ? ret+m : ret;
4 }
5
6 ll pow(ll a, ll b, ll m) {
7     ll ans = 1;
8     for (; b > 0; b /= 211, a = mul(a, a, m)) {
9         if (b % 211 == 1)
10            ans = mul(ans, a, m);
11    }
12    return ans;
13 }
14

```

```

15 bool prime(ll n) {
16     if (n < 2) return 0;
17     if (n <= 3) return 1;
18     if (n % 2 == 0) return 0;
19
20     ll r = __builtin_ctzll(n - 1), d = n >> r;
21     for (int a : {2, 325, 9375, 28178, 450775,
22                9780504, 795265022}) {
23         ll x = pow(a, d, n);
24         if (x == 1 or x == n - 1 or a % n == 0)
25             continue;
26
27         for (int j = 0; j < r - 1; j++) {
28             x = mul(x, x, n);
29             if (x == n - 1) break;
30         }
31         if (x != n - 1) return 0;
32     }
33     return 1;
34 }
35 ll rho(ll n) {
36     if (n == 1 or prime(n)) return n;
37     auto f = [n](ll x) {return mul(x, x, n) + 1;};
38
39     ll x = 0, y = 0, t = 30, prd = 2, x0 = 1, q;
40     while (t % 40 != 0 or gcd(prd, n) == 1) {
41         if (x==y) x = ++x0, y = f(x);
42         q = mul(prd, abs(x-y), n);
43         if (q != 0) prd = q;
44         x = f(x), y = f(f(y)), t++;
45     }
46     return gcd(prd, n);
47 }
48 vector<ll> fact(ll n) { // retorna fatoracao em
49     primos
50     if (n == 1) return {};
51     if (prime(n)) return {n};
52     ll d = rho(n);
53     vector<ll> l = fact(d), r = fact(n / d);
54     l.insert(l.end(), r.begin(), r.end());
55     return l;
56 }

```

### 8.3 Inverso Mult

```

1 // gcd(a, m) = 1 para existir solucao
2 // ax + my = 1, ou a*x = 1 (mod m)
3 ll inv(ll a, ll m) { // com gcd
4     ll x, y;
5     gcd(a, m, x, y);
6     return ((x % m) + m) % m;
7 }
8
9 ll inv(ll a, ll phim) { // com phi(m), se m for primo
10     entao phi(m) = p-1
11     ll e = phim-1;
12     return fexp(a, e);
13 }

```

### 8.4 Miller Habin

```

1 ll mul(ll a, ll b, ll m) {
2     return (a*b-ll(a*(long double)b/m+0.5)*m+m)%m;
3 }
4
5 ll expo(ll a, ll b, ll m) {
6     if (!b) return 1;
7     ll ans = expo(mul(a, a, m), b/2, m);
8     return b%2 ? mul(a, ans, m) : ans;
9 }

```



```

10
11 bool prime(ll n) {
12     if (n < 2) return 0;
13     if (n <= 3) return 1;
14     if (n % 2 == 0) return 0;
15
16     ll d = n - 1;
17     int r = 0;
18     while (d % 2 == 0) {
19         r++;
20         d /= 2;
21     }
22
23     // com esses primos, o teste funciona garantido
24     // para n <= 2^64
25     // funciona para n <= 3*10^24 com os primos ate
26     // 41
27     for (int i : {2, 325, 9375, 28178, 450775,
28         9780504, 795265022}) {
29         if (i >= n) break;
30         ll x = expo(i, d, n);
31         if (x == 1 or x == n - 1) continue;
32
33         bool composto = 1;
34         for (int j = 0; j < r - 1; j++) {
35             x = mul(x, x, n);
36             if (x == n - 1) {
37                 composto = 0;
38                 break;
39             }
40         }
41         if (composto) return 0;
42     }
43     return 1;
44 }

```

## 8.5 Matrix Exponentiation

```

1 struct Matrix {
2     vector<vl> m;
3     int r, c;
4
5     Matrix(vector<vl> mat) {
6         m = mat;
7         r = mat.size();
8         c = mat[0].size();
9     }
10
11     Matrix(int row, int col, bool ident=false) {
12         r = row; c = col;
13         m = vector<vl>(r, vl(c, 0));
14         if(ident) {
15             for(int i = 0; i < min(r, c); i++) {
16                 m[i][i] = 1;
17             }
18         }
19     }
20
21     Matrix operator*(const Matrix &o) const {
22         assert(c == o.r); // garantir que da pra
23         // multiplicar
24         vector<vl> res(r, vl(o.c, 0));
25
26         for(int i = 0; i < r; i++) {
27             for(int k = 0; k < c; k++) {
28                 for(int j = 0; j < o.c; j++) {
29                     res[i][j] = (res[i][j] + m[i][k]*
30                     o.m[k][j]) % MOD;
31                 }
32             }
33         }
34     }
35 }

```

```

32
33         return Matrix(res);
34     }
35 };
36
37 Matrix fexp(Matrix b, int e, int n) {
38     if(e == 0) return Matrix(n, n, true); //
39     // identidade
40     Matrix res = fexp(b, e/2, n);
41     res = (res * res);
42     if(e%2) res = (res * b);
43
44     return res;
45 }

```

## 8.6 Division Trick

```

1 for(int l = 1, r; l <= n; l = r + 1) {
2     r = n / (n / l);
3     // n / i has the same value for l <= i <= r
4 }

```

## 8.7 Crivo

```

1 vi p(N, 0);
2 p[0] = p[1] = 1;
3 for(ll i=4; i<N; i+=2) p[i] = 2;
4 for(ll i=3; i<N; i+=2)
5     if(!p[i])
6         for(ll j=i*i; j<N; j+=2*i)
7             p[j] = i;

```

## 8.8 Bigmod

```

1 ll mod(string a, ll p) {
2     ll res = 0, b = 1;
3     reverse(all(a));
4
5     for(auto c : a) {
6         ll tmp = (((ll)c-'0')*b) % p;
7         res = (res + tmp) % p;
8
9         b = (b * 10) % p;
10    }
11
12    return res;
13 }

```

## 8.9 Linear Diophantine Equation

```

1 // Linear Diophantine Equation
2 array<ll, 3> exgcd(int a, int b) {
3     if (a == 0) return {0, 1, b};
4     auto [x, y, g] = exgcd(b % a, a);
5     return {y - b / a * x, x, g};
6 }
7
8 array<ll, 4> find_any_solution(ll a, ll b, ll c) {
9     auto [x, y, g] = exgcd(a, b);
10    if (c % g) return {false, 0, 0, 0};
11    x *= c / g;
12    y *= c / g;
13    return {true, x, y, g};
14 }
15
16 // All solutions
17 // x' = x + k*b/g
18 // y' = y - k*a/g

```

## 9 Teoria

### 9.1 Geometria

#### 9.1.1 Geometria Básica

**Produto Escalar.** Geometricamente é o produto do comprimento do vetor  $a$  pelo comprimento da projeção do vetor  $b$  sobre  $a$ .

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \theta.$$

**Propriedades.**

1.  $a \cdot b = b \cdot a$ .
2.  $(\alpha \cdot a) \cdot b = \alpha \cdot (a \cdot b)$ .
3.  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ .
4. Norma de  $a$  (comprimento ao quadrado):  $\|a\|^2 = a \cdot a$ .
5. Projeção de  $a$  sobre o vetor  $b$ :  $\frac{a \cdot b}{\|b\|}$ .
6. Ângulo entre os vetores:  $\cos^{-1} \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|}$

**Produto Vetorial.** Dados dois vetores independentes linearmente  $a$  e  $b$ , o produto vetorial  $a \times b$  é um vetor perpendicular ao vetor  $a$  e ao vetor  $b$  e é a normal do plano contendo os dois vetores.

$$a \times b = \det \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

O sinal do coeficiente  $e_z$  do produto vetorial indica a orientação relativa dos vetores. Se positivo, o ângulo de  $a$  e  $b$  é anti-horário. Se negativo, o ângulo é horário e se for zero, os vetores são colineares.

**Propriedades.**

1.  $a \times b = -b \times a$ .
2.  $(\alpha \cdot a) \times b = \alpha \cdot (a \times b)$ .
3.  $a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = -a \cdot (c \times b)$ .
4.  $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ .
5.  $\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \theta$ .

#### 9.1.2 Geometria Analítica

**Distância entre dois pontos.** Dados dois pontos  $a = (x_1, y_2)$  e  $b = (x_2, y_2)$ , a distância entre  $a$  e  $b$  é dada por:

$$d_{a,b} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

**Condição de alinhamento de três pontos.** Dados três pontos  $a = (x_1, y_2)$ ,  $b = (x_2, y_2)$  e  $c = (x_3, y_3)$ , os pontos  $a$ ,  $b$  e  $c$  estão alinhados se:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**Equação da Reta (forma geral).** Os pontos  $(x, y)$  que pertencem a uma reta  $r$  devem satisfazer:

$$ax + by + c = 0$$

**Equação da Reta (forma reduzida).** A equação reduzida da reta, em que  $m = \tan(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  é o coef. angular, e  $n$  é o coef. linear, isto é, o valor de  $y$  em que a reta intercepta o eixo  $y$ , é dada por:

$$y = mx + n = m(x - x_0) + y_0$$

**Distância entre ponto e reta.** Dados um pontos  $p = (x_1, y_1)$  e uma reta  $r$  de equação  $ax + by + c = 0$ , a distância entre  $p$  e  $r$  é dada por:

$$d_{p,r} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Interseção de retas.** Para determinar os pontos de interseção é necessário resolver um sistema de equações. Há três possibilidades para interseção de retas:

1. Retas concorrentes: solução única. Apenas 1 ponto em comum.
2. Retas paralelas coincidentes: infinitas soluções. As retas possuem todos os pontos em comum.
3. Retas paralelas distintas: nenhuma solução. As retas não possuem nenhum ponto em comum.

**Equação da Circunferência (forma reduzida).** Os pontos  $(x, y)$  que pertencem a uma circunferência  $c$  devem satisfazer:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

onde  $(a, b)$  é o centro da circunferência e  $r$  o seu raio.

**Equação da Circunferência (forma geral).** A partir da equação reduzida da circunferência, encontramos a equação geral:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

**Interseção entre reta e circunferência.** Para determinar o tipo de interseção é necessário resolver um sistema não-linear. Há três possibilidades como solução do sistema:

1. Reta exterior à circunferência: nenhuma solução. A reta não possui nenhum ponto de comum com a circunferência.
2. Reta tangente à circunferência: solução única. A reta possui apenas 1 ponto em comum com a circunferência.
3. Reta secante à circunferência: duas soluções. A reta cruza a circunferência em 2 pontos distintos.

### 9.1.3 Geometria Plana

#### Triângulos.

- Comprimento dos lados:  $a, b, c$
- Semiperímetro:  $p = \frac{a+b+c}{2}$
- Altura:
  - Equilátero:  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$
  - Isósceles:  $h = \sqrt{l^2 - \frac{b^2}{4}}$
- Área:
  - Equilátero:  $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$
  - Isósceles:  $A = \frac{1}{2}bh$
  - Escaleno:  $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- Raio circunscrito:  $R = \frac{1}{4A}abc$
- Raio inscrito:  $r = \frac{1}{p}A$
- Tamanho da mediana:  $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

#### Quadriláteros.

Figura	Área ( $A$ )	Perímetro ( $P$ )	Diagonal ( $d$ )
Quadrado	$l^2$	$4l$	$l\sqrt{2}$
Retângulo	$bh$	$2(b + h)$	$\sqrt{b^2 + h^2}$
Losango	$\frac{1}{2}Dd$	$4l$	$l\sqrt{2}$
Trapézio	$\frac{1}{2}h(B + b)$	$B + b + l_1 + l_2$	$\sqrt{h^2 + \frac{(B-b)^2}{4h}}$

#### Círculos.

- Área:  $A = \pi r^2$
- Perímetro:  $C = 2\pi r$
- Diâmetro:  $d = 2r$
- Área do setor circular:  $A = \frac{1}{2}r^2\theta$
- Comprimento do arco:  $L = r\theta$
- Perímetro do setor circular:  $P = r(\theta + 2)$

**Teorema de Pick.** Suponha que um polígono tenha coordenadas inteiras para todos os seus vértices. Seja  $i$  o número de pontos inteiros no interior do polígono e  $b$  o número de pontos inteiros na sua fronteira (incluindo vértices e pontos ao longo dos lados). Então, a área  $A$  deste polígono é:

$$A = i + \frac{b}{2} - 1.$$

$$b = \gcd(x_2 - x_1, y_2 - y_1) + 1.$$

#### 9.1.4 Trigonometria

**Funções Trigonométricas.**

$$\sin \theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta}$$

**Ângulos notáveis.**

$\theta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$

**Propriedades.**

$$1. \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$2. \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$3. \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$4. \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$5. \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$6. \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$7. \cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$8. a \sin x + b \cos x = r \sin(x + \phi), \text{ onde } r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \phi = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

$$9. a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \phi), \text{ onde } r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \phi = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

**10. Lei dos Senos:**

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2r.$$

**11. Lei dos Cossenos:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

**12. Teorema de Tales:** A interseção de um feixe de retas paralelas por duas retas transversais forma segmentos proporcionais:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

**13. Casos de semelhança:** dois triângulos são semelhantes se

- dois ângulos de um são congruentes a dois do outro. Critério AA (Ângulo, Ângulo).
- os três lados são proporcionais aos três lados do outro. Critério LLL (Lado, Lado, Lado).
- possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais. Critério LAL (Lado, Ângulo, Lado).

## 9.2 Análise Combinatória

### 9.2.1 Permutação e Arranjo

Uma  $r$ -permutação de  $n$  objetos é uma seleção **ordenada** (ou arranjos) de  $r$  deles.

1. **Objetos distintos.**

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

2. **Objetos com repetição.** Se temos  $n$  objetos com  $k_1$  do tipo 1,  $k_2$  do tipo 2, ...,  $k_m$  do tipo  $m$ , e  $\sum k_i = n$ :

$$P(n; k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

3. **Repetição ilimitada.** Se temos  $n$  objetos e uma quantidade ilimitada deles:

$$P(n, r) = n^r$$

Tabela de fatoriais.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

### 9.2.2 Combinação

Uma  $r$ -combinação de  $n$  objetos é uma seleção de  $r$  deles, sem diferenciação de ordem.

1. **Objetos distintos.**

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

Definimos também:

$$C(n, r) = C(n, n-r)$$

$$C(n, 0) = C(n, n) = 1$$

$$C(n, r) = 0, \quad \text{para } r < 0 \text{ ou } r > n.$$

2. **Objetos com repetição (Stars and Bars).** Número de maneiras de dividir  $n$  objetos idênticos em  $k$  grupos:

$$C(n, k) = \binom{n+k-1}{n}$$

3. **Teorema Binomial.** Sendo  $a$  e  $b$  números reais quaisquer e  $n$  um número inteiro positivo, temos que:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

4. **Triângulo de Pascal.** Triângulo com o elemento na  $n$ -ésima linha e  $k$ -ésima coluna denotado por  $\binom{n}{k}$ , satisfazendo:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{para } n > k \geq 1.$$

Propriedades.

1. **Hockey-stick (soma sobre  $n$ ).**

2. **Soma sobre  $k$ .**

$$\sum_{m=0}^n \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$$

3. Soma sobre  $n$  e  $k$ .

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$$

4. Soma com peso.

$$\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

5.  $(n+1)$ -ésimo termo da sequência de Fibonacci.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$$

6. Soma dos quadrados.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

### 9.2.3 Números de Catalan

O  $n$ -ésimo número de Catalan,  $C_n$ , pode ser calculado de duas formas:

1. **Fórmula recursiva:**

$$C_0 = C_1 = 1$$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{para } n \geq 2.$$

2. **Fórmula analítica:**

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \prod_{k=2}^n \frac{n+k}{k}, \quad \text{para } n \geq 0$$

Tabela dos 10 primeiros números de Catalan.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C_n$	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

### Aplicações

O número de Catalan  $C_n$  é a solução para os seguintes problemas:

- Número de sequências de parênteses balanceados consistindo de  $n$  pares de parênteses.
- Números de árvores binárias enraizadas cheias com  $n+1$  folhas (vértices não são numerados), ou, equivalentemente, com um total de  $n$  nós internos. Uma árvore binária enraizada é cheia se cada vértice tem dois filhos ou nenhum.
- Número de maneiras de colocar parênteses completamente em  $n+1$  fatores.
- Número de triangularizações de um polígono convexo com  $n+2$  lados.
- Número de maneiras de conectar  $2n$  pontos em um círculo para formar  $n$  cordas disjuntas.
- Número de árvores binárias completas não isomórficas com  $n+1$  nós.
- Número de caminhos monotônicos na grade de pontos do ponto  $(0,0)$  ao ponto  $(n,n)$  em uma grade quadrada de tamanho  $n \times n$ , que não passam acima da diagonal principal.
- Número de partições não cruzadas de um conjunto de  $n$  elementos.
- Números de maneiras de se cobrir uma escada  $1 \dots n$  usando  $n$  retângulos (a escada possui  $n$  colunas e a  $i$ -ésima coluna possui altura  $i$ ).
- Número de permutações de tamanho  $n$  que podem ser *stack sorted*.

### 9.2.4 Princípio da Inclusão-Exclusão

Para calcular o tamanho da união de múltiplos conjuntos, é necessário somar os tamanhos desses conjuntos **separadamente**, e depois subtrair os tamanhos de todas as interseções **em pares** dos conjuntos, em seguida adicionar de volta o tamanho das interseções de **trios** dos conjuntos, subtrair o tamanho das interseções de **quartetos** dos conjuntos, e assim por diante, até a interseção de **todos** os conjuntos.

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$$

### 9.3 Matrizes

Uma matriz é uma estrutura matemática organizada em formato retangular composta por números, símbolos ou expressões dispostas em linhas e colunas.

$$A = [a_{ij}]_{n \times m} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

#### Operações

**Soma.** A soma  $A + B$  de duas matrizes  $n \times m$   $A$  e  $B$  é calculada por:

$$[A + B]_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{e} \quad 1 \leq j \leq m.$$

**Multiplicação Escalar.** O produto  $cA$  de um escalar  $c$  e uma matriz  $A$  é calculado por:

$$[cA]_{i,j} = cA_{i,j}.$$

**Transposta.** A matriz transposta  $A^T$  da matriz  $A$  é obtida quando as linhas e colunas de  $A$  são trocadas:

$$[A^T]_{i,j} = A_{j,i}.$$

**Produto.** O produto  $AB$  das matrizes  $A$  e  $B$  é definido se  $A$  é de tamanho  $a \times n$  e  $B$  é de tamanho  $n \times b$ . O resultado é uma matriz de tamanho  $a \times b$  nos quais os elementos são calculados usando a fórmula:

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j}.$$

Essa operação é associativa, porém não é comutativa.

Uma **matriz identidade** é uma matriz quadrada onde cada elemento na diagonal principal é 1 e os outros elementos são 0. Multiplicar uma matriz por uma matriz identidade não a muda.

**Potência.** A potência  $A^k$  de uma matriz  $A$  é definida se  $A$  é uma matriz quadrada. A definição é baseada na multiplicação de matrizes:

$$A^k = \prod_{i=1}^k A$$

Além disso,  $A^0$  é a matriz identidade.

**Determinante.** A determinante  $\det(A)$  de uma matriz  $A$  é definida se  $A$  é uma matriz quadrada. Se  $A$  é de tamanho  $1 \times 1$ , então  $\det(A) = A_{11}$ . A determinante de matrizes maiores é calculada recursivamente usando a fórmula:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^m A_{1,j} C_{1,j},$$

onde  $C_{i,j}$  é o **cofator** de  $A$  em  $i, j$ . O cofator é calculado usando a fórmula:

$$C_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(M_{i,j}),$$

onde  $M_{i,j}$  é obtido ao remover a linha  $i$  e a coluna  $j$  de  $A$ .

A determinante de  $A$  indica se existe uma **matriz inversa**  $A^{-1}$  tal que  $AA^{-1} = I$ , onde  $I$  é uma matriz identidade.  $A^{-1}$  existe somente quando  $\det(A) \neq 0$ , e pode ser calculada usando a fórmula:

$$A_{i,j}^{-1} = \frac{C_{i,j}}{\det(A)}.$$

## 9.4 Teoria da Probabilidade

### 9.4.1 Introdução à Probabilidade

**Eventos.** Um evento pode ser representado como um conjunto  $A \subset X$  onde  $X$  contém todos os resultados possíveis e  $A$  é um subconjunto de resultados.

Cada resultado  $x$  é designado uma probabilidade  $p(x)$ . Então, a probabilidade  $P(A)$  de um evento  $A$  pode ser calculada como a soma das probabilidades dos resultados:

$$P(A) = \sum_{x \in A} p(x).$$

**Complemento.** A probabilidade do complemento  $\bar{A}$ , *i.e.* o evento  $A$  não ocorrer, é dado por:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

**Eventos não mutualmente exclusivos.** A probabilidade da união  $A \cup B$  é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Se  $A$  e  $B$  forem eventos mutualmente exclusivos, *i.e.*  $A \cap B = \emptyset$ , a probabilidade é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

**Probabilidade condicional.** A probabilidade de  $A$  assumindo que  $B$  ocorreu é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Os eventos  $A$  e  $B$  são ditos **independentes** se, e somente se,

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e} \quad P(B|A) = P(B).$$

**Teorema de Bayes.** A probabilidade de um evento  $A$  ocorrer, antes e depois de condicionar em outro evento  $B$  é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad \text{ou} \quad P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j \in A} P(B|A_j)P(A_j)}$$

### 9.4.2 Variáveis Aleatórias

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com probabilidade  $P(X = x)$  de assumir o valor  $x$ . Ela vai então ter um valor esperado (média)

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

e variância

$$\sigma^2 = V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - E[X])^2 P(X = x_i)$$

onde  $\sigma$  é o desvio-padrão.

Se  $X$  for contínua ela terá uma função de densidade  $f_X(x)$  e as somas acima serão em vez disso integrais com  $P(X = x)$  substituído por  $f_X(x)$ .

**Linearidade do Valor Esperado.**

$$E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c.$$

No caso de  $X$  e  $Y$  serem independentes, temos que:

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

$$V[aX + bY + c] = a^2 E[X] + b^2 E[Y].$$



### 9.4.3 Distribuições Discretas

**Distribuição Binomial.** Número de sucessos  $k$  em  $n$  experimentos independentes de sucesso/fracasso, cada um dos quais produz sucesso com probabilidade  $p$  é  $\text{Bin}(n, p)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq p \leq 1$ .

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$\mu = np, \quad \sigma^2 = np(1-p)$$

$\text{Bin}(n, p)$  é aproximadamente  $\text{Pois}(np)$  para  $p$  pequeno.

**Distribuição Geométrica.** Número de tentativas  $k$  necessárias para conseguir o primeiro sucesso em experimentos independentes de sucesso/fracasso, cada um dos quais produz sucesso com probabilidade  $p$  é  $\text{Geo}(p)$ ,  $0 \leq p \leq 1$ .

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k \in \mathbb{N}$$
$$\mu = \frac{1}{p}, \quad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

**Distribuição de Poisson.** Número de eventos  $k$  ocorrendo em um período de tempo fixo  $t$  se esses eventos ocorrerem com uma taxa média conhecida  $r$  e independente do tempo já que o último evento é  $\text{Pois}(\lambda)$ ,  $\lambda = tr$ .

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$
$$\mu = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda.$$

### 9.4.4 Distribuições Contínuas

**Distribuição Uniforme.** Se a função de densidade é constante entre  $a$  e  $b$  e 0 em outro lugar ela é  $\text{Uni}(a, b)$ ,  $a < b$ .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
$$\mu = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

**Distribuição Exponencial.** Tempo entre eventos em um processo de Poisson é  $\text{Exp}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ .

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$
$$\mu = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

**Distribuição Normal.** Maioria das variáveis aleatórias reais com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  são bem descritas por  $N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma > 0$ .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

## 9.5 Progressões

1. Soma dos  $n$  primeiros termos.
2. Soma dos  $n$  primeiros quadrados.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Soma dos  $n$  primeiros cubos.

$$\sum_{k=1}^n (k^3) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

4. Soma dos  $n$  primeiros pares.

$$\sum_{k=1}^n (2k) = n^2 + n$$

5. Soma dos  $n$  primeiros ímpares.

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

6. Progressão Aritmética (PA)

(a) Termo geral a partir do  $k$ -ésimo termo.

$$a_n = a_k + r(n-k)$$

(b) Soma dos termos.

$$\sum_{i=1}^n (a_i) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

7. Progressão Geométrica (PG)

(a) Termo geral a partir do  $k$ -ésimo termo.

$$a_n = a_k r^{n-k}$$

(b) Soma dos termos.

$$\sum_{k=1}^n (ar^{k-1}) = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}, \quad \text{para } r \neq 1.$$

(c) Soma dos termos de uma progressão infinita.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (ar^{k-1}) = \frac{a_1}{1-r}, \quad \text{para } |r| < 1.$$

(d) Produto dos termos.

$$\prod_{k=0}^n (ar^k) = a^{n+1} r^{\frac{n(n+1)}{2}}$$