Trabajo # 4 Máximos y minimos

Calculo Diferencial

Leocarlos Ospina Causil
Moises Doria Lopez
Caleb Seña Melo

Diciembre 2022

1.A $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, en[-2, 3]$

Note que $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ es continua y por el teorema del valor extremo tiene un maximo y un minimo absoluto
Encontramos los puntos criticos :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$$
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

Veamos cuando $f'(x) = 0$

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(6)(-12)}}{2(6)}$$
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 288}}{12}$$
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{324}}{12}$$
$$x = \frac{6 \pm 18}{12}$$
$$x1 = \frac{24}{12}$$
$$x2 = \frac{-12}{12}$$
$$x1 = 2$$
$$x2 = -1$$

Ahora evaluamos f en x = 2 y f en x = -1

$$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 1$$
$$f(2) = 16 - 12 - 24 + 1 = -19$$

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 1$$
$$f(-1) = -2 - 3 + 12 + 1 = 8$$

Ahora con -2 y 3

$$f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 12(-2) + 1$$
$$f(-2) = -16 - 12 + 24 + 1 = -3$$

$$f(3) = 2(3)^3 - 3(3)^2 - 12(3) + 1$$
$$f(3) = 54 - 27 - 36 + 1 = -8$$

ahora :

$$f(2) = -19$$
$$f(-1) = 8$$
$$f(-2) = -3$$
$$f(3) = -8$$

Minimo absoluto es $f(2) = -19$ y maximo absoluto es $f(-1) = 8$

1.B $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x, en[-4, 5]$

Note que $2x^3 + 3x^2 - 36x$ es continua y por el teorema del valor extremo tiene un maximo y un minimo absoluto
puntos criticos:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$
$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$$

Veamos cuando $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 0$$
$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(6)(-36)}}{2(6)}$$
$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 864}}{12}$$
$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{900}}{12}$$
$$x = \frac{6 \pm 30}{12}$$
$$x1 = \frac{-6 + 30}{12} = 2$$
$$x2 = \frac{-6 - 30}{12} = -3$$
$$x1 = 2$$
$$x2 = -3$$

Evamualos en $x = 2$ y $x = -3$

$$f(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 36(2)$$
$$f(2) = 16 + 12 - 72 = -44$$

$$f(-3) = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 36(-3)$$
$$f(-3) = -54 + 27 + 108 = 81$$

Evamualos en $a = -4$ y $b = 5$

$$f(-4) = 2(-4)^3 + 3(-4)^2 - 36(-4)$$
$$f(-4) = -128 + 48 + 144 = 64$$

$$f(5) = 2(5)^3 + 3(5)^2 - 36(5)$$
$$f(5) = 250 + 75 - 180 = 145$$

Ahora :

$f(-3) = 81$
$f(2) = -44$
$f(-4) = 64$
$f(5) = 145$
Minimo absoluto es $f(2) = -44$ y maximo absoluto es $f(5) = 145$

2. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

Calculamos la derivada :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 + 3x^2 - 6x + 1\right)$$
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(3x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(1\right)$$
$$f'(x) = 12x^2 + 6x - 6$$

Veamos cuando f'(x) = 0

$$12x^2 + 6x - 6 = 0$$
$$\frac{12(12x^2 + 6x - 6)}{12}$$
$$\frac{(12x^2) + 6(12x - 6)}{12}$$
$$(x+1)(12x-6)$$
$$x = -1 \qquad\qquad x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Aplicamos la ley del cementerio

(x+1)	-	+	+
(12x-6)	-	-	+
	+	-	+

$f'(x) < 0$ Cuando X $\in (-\infty, -1)\, U \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

Entonces:

F Decrece en $(-\infty, -1)\, U \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

F Incrementa en $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

3. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

Calculamos la derivada

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^4 - 2x^2 + 3\right)$$
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^4\right) + \frac{d}{dx}\left(-2x^2\right) + \frac{d}{dx}(3)$$
$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

Factorizamos y hallamos los puntos criticos

$$4x^3 - 4x = 0$$
$$4x(x^2 - 1) = 0$$
$$4x(x - 1)(x + 1) = 0$$
$$x = 0, x = 1, x = -1$$

Determinamos f'(x) > 0 y f(x) < 0

(4x)	-	-	+	+
(x - 1)	-	-	-	+
(x + 1)	-	+	+	+
	-	+	-	+

Tenemos que :

$f'(x) < 0$ Cuando X $\in (-1, 0)$ U$(1, +\infty)$
$f'(x) > 0$ Cuando X $\in (-\infty, 1)$ U$(0, +1)$

De esto se obtiene:

$X = -1$ Es minimo
$X = 0$ Es maximo
$X = 1$ Es Minimo

4. $f(x) = 6x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 3$

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 3 \\ f'(x) &= 24x^3 - 24x^2 - 48x \\ f(x) &= 72x^2 - 48x - 48 \end{aligned}$$

Para poder encontrar los intevalos de concavidad y los puntos de inflexion primero necesito los puntos criticos de f"(x) osea que f"(x) = 0

$$\begin{aligned} &f(x) = 72x^2 - 48x48 \\ &24(3x^2 - 2x - 2) = 0 \\ &3x^2 - 2x - 2 = \frac{0}{24} \\ &3x^2 - 2x - 2 = 0 \end{aligned}$$

Usamos la formula general

$$\begin{aligned} &3x^2 - 2x - 2 = 0 \\ &x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)} \\ &x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{6} \\ &x = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6} \\ &x = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6} \\ &x1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \\ &x2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

Usamos la ley del sementerio

$3x^2$ -2x-2	-	-	+
$3x^2$ -2x-2	+	-	+
	-	+	+

En el intervalo de $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$ es concava hacia abajo
En el intervalo de $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$ es concava hacia arriba
En el intervalo de $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, \infty\right)$ es concava hacia arriba

Los puntos de inflexion son $\frac{1-\sqrt{7}}{3}$, $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$

5. $f(x) = x^2(6-x)^3$

Calculamos $f'(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2(6-x)^3 \\
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^2(6-x)^3\right) \\
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(6-x^3\right)x^2 + (6-x)^3\frac{d}{dx}\left(x^2\right) \\
f'(x) &= 3(6-x)^2(0-1)x^2 + (6-x)^3x^2 \\
f'(x) &= 2(6-x)^2x - 3(6-x)^2x^2 \\
f'(x) &= -(6-x)^2x(5x-12)
\end{aligned}$$

Ahora Calculamos la segunda derivada

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -(6-x)^2x(5x-12) \\
f''(x) &= -\left(\frac{d}{dx}(x-6)^2x\,(5x-12) + (x-6)^2\,\frac{d}{dx}\,(x)\,(5x-12) + (x-6)^2\,x\frac{d}{dx}\,(5x-12)\right) \\
f''(x) &= -2(x-6)(1+0)x(5x-12) - (x-6)^2(5x-12) - 5(x-6)^2x \\
f''(x) &= -2(x-6)x(5x-12) - (x-6)^2(5x-12) - 5(x-6)^2x \\
f''(x) &= (x^2+12x)(5x-12)(-x+6)^2(5x-12)(-5x^2+30x)^2 \\
f''(x) &= 5x^3+12x^2+60x-144x(-x+6)(-x+6)(5x-12)(-5x^2+30x)^2 \\
f''(x) &= 5x^3+12x^2-84x-5x^2+12x+30x-72(-x+6)(-5x^2+30x)^2 \\
f''(x) &= -20x^3+216x^2-648x+432
\end{aligned}$$

Buscamos los puntos criticos

$$\begin{aligned}
&f'(x) = -(x-6)^2(x)(5x-12) = 0 \\
&-(x-6)^2x(5x-12) = 0
\end{aligned}$$

$-(x-6)^2 = 0$	$x = 0$	$5x - 12 = 0$
$(x-6) = 0$	$x = 0$	$5x = 12$
$x = 6$	$x = 0$	$x = \dfrac{12}{5}$

X = 6
X = 0
X = $\frac{12}{5}$

Evaluar f”(x) con cada punto critico

$$f''(6) = -20(6)^3 + 216(6)^2 - 648(6) + 432$$
$$f''(6) = -4320 + 7776 - 3888 + 432 = 0$$

No hay informacion de maximos o minimos en $f''(6)$

$$f''(0) = -20(0)^3 + 216(0)^2 - 648(0) + 432$$
$$f''(0) = 0 + 0 + 432 = 432$$

$$f''\left(\frac{12}{5}\right) = -20\left(\frac{12}{5}\right)^3 + 216\left(\frac{12}{5}\right)^2 - 648\left(\frac{12}{5}\right) + 432$$
$$f''\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{6912}{25} + \frac{31104}{25} - \frac{7776}{5} + 432 = -\frac{3888}{25}$$

Obtuvimos que
$f''(0) = 0$ No hay informacion
$f''(6) = 432 > 0$, hay un Minimo
$f''\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{3888}{25} < 0$ hay un maximo

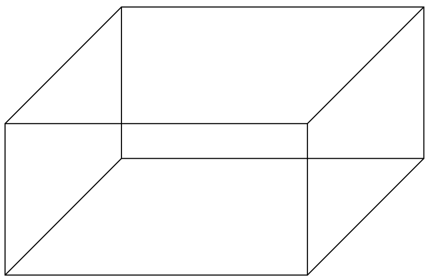
Aplicamos la regla del cementero ala primera derivada debido a que no hay informacion en $f''(6)$
Ley del cementerio

$-(x-6)^2$	-	-	-	-
(x)	-	+	+	+
(5x-12)	-	-	+	+
	-	+	-	-

De esto se deduce que
$x = 6$ No correponde a un maximo o un minimo
$x = 0$ es un Minimo
$x = \frac{12}{5}$ es maximo

6A.

Las dimenciones de la caja corresponden a: ancho = X , altura = Y , largo = X



Usamos la ecuacion del volumen y luego despejamos a Y

$$V = x \cdot x \cdot y$$

$$32000 = x^2 \cdot y \qquad y = \frac{32000}{x^2}$$

Usamos la ecuacion del area y reemplazamos a Y

$$A = 4xy + x^2$$

$$A = 4x\left(\frac{32000}{x^2}\right) + x^2$$

$$A = \frac{128000x}{x^2} + x^2$$

$$A = \frac{128000}{x} + x^2$$

Teniendo la ecuacion del area procedemos a calcular la derivada

$$A = 128000x^{-1} + x^2$$

$$A' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(128000x^{-1} + x^2\right)$$

$$A' = -128000x^{-2} + 2x$$

La igualamos a 0 y despejamos x

$$-128000x^{-2} + 2x = 0$$

$$2x = 128000x^{-2}$$

$$\frac{2x}{x^{-2}} = 128000$$

$$2xx^2 = 128000$$

$$2x^3 = 128000$$

$$x^3 = \frac{128000}{2}$$

$$x^3 = 640000$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{64000}$$

$$x = 40$$

$$y = \frac{32000}{(40)^2}$$

$$y = \frac{32000}{1600} \qquad y = 20$$

Las dimenciones de la cajas son

$$X = 40cm$$

$$Y = 20cm$$

6B. Tenos la presion sanguinea dada por:

$f(x) = \frac{1}{2}x^2(k-x)$ Calculamos la derivada

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2(k-x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left((k-x)x^2\right) \\
&= \frac{\frac{d}{dx}\left(k-x\right)x^2 + (k-x)\frac{d}{dx}(x^2)}{2} \\
&= \frac{\left(\frac{d}{dx}(k) - \frac{d}{dx}(x)\right)x^2 + (k-x)2x}{2} \\
&= \frac{(0-1)x^2 + (k-x)2x}{2} \\
&= (k-x)x - \frac{x^2}{2} \\
&= kx - x^2 - \frac{x^2}{2} \\
&= kx\frac{-2x^2 - x^2}{2} \\
&= kx - \frac{3x^2}{2}
\end{aligned}
$$

Ahora la igualamos a 0

$$
\begin{aligned}
kx - \frac{3x^2}{2} &= 0 \\
x\left(k - \frac{3x}{2}\right) &= 0 \\
k - \frac{3x}{2} &= 0
\end{aligned}
$$

Puntos criticos

$$
\begin{aligned}
x &= 0 \\
x &= \frac{2k}{3}
\end{aligned}
$$

Se evalúa con los puntos encontrados

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = xk - \frac{3}{2}x^2 \\
&f''(x) = k - 3x \\
&f''(0) = k \geq 00 \\
&f''\left(\frac{2}{3}k\right) = k - 3\left(\frac{2}{3}k\right) \\
&= k - 2k = -k < 0
\end{aligned}
$$

$f''(x) < 0$ Por lo que hay un punto maximo local en x $= \frac{2k}{3}$
Evaluamos la funcion inicial con los puntos encontrados

$$f\left(\frac{2k}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4k^2}{9}\right)\left(\frac{1k}{3}\right) = \frac{4k^3}{54} = \frac{2k^3}{27} \geq 0$$