

# NOIP 2023 模拟赛 题解

2023 年 10 月 8 日

## 目录

1	divisor	1
2	bet	2
3	biscuit	3
4	game	4

## A 最大公因数 (divisor)

容易知道我们选一个质数作为所有保留下来的数的因子就行，开个桶统计每个质数的答案即可，复杂度  $O(\sum \sqrt{a_i} + \omega(a_i))$ 。

## B 博弈 (bet)

首先  $a_i$  的 sg 值就是  $a_i \bmod (x+1)$ 。

考虑我们所求  $ans_j = [\oplus_{i=1}^n (a_i \bmod (j+1)) > 0]$ 。考虑怎么求  $\oplus_{i=1}^n (a_i \bmod (j+1))$ 。

考虑分别求每一位，求  $2^k$  次方时，就相当于询问有哪些  $(a_i \bmod (j+1)) \bmod 2^{k+1} \geq 2^k$ ，我们统计  $c_i$  为  $i$  的出现次数，那么枚举  $\lfloor \frac{a_i}{j+1} \rfloor$ ，相当于一段  $c_i$  的区间和，共有  $\frac{n}{j+1}$  段，前缀预处理即可。

复杂度  $O(n \log^2 n)$ 。

## C 饼干 (biscuit)

考虑如果仍然需要补魔，那么先施法再补魔一定比先补魔再施法更劣。

那么我们每次一定是，先施法然后补满，直到某次我们施法完之后，把魔补到剩下消耗的总和，然后依次施完。

那么这个过程就相当于我们每个魔咒变成  $a_i$  个物品，第  $j$  个物品权值是  $j$ ，然后我们有  $m$  次机会把某个魔咒里权值最小的那个物品删去，我们称这个为操作一。

我们要求最后权值和最小。

然后吃饼干就是有  $k$  次机会把某个魔咒里权值最大的那个物品删去，我们称这个为操作二。

仔细分析一下，我们就是每次对最大的  $a_i$ ，使用  $a_i$  次操作一（不足就全用了）。等所有操作一用完后，贪心地使用操作二即可。

复杂度  $O(n \log n + m)$  或  $O(n \log n)$ 。

## D 游戏 (game)

考虑如果最高位有偶数个 1，删掉这一位不会影响答案，所以现在问题变成了在长度为  $n$  的 01 序列上玩。

当  $2 \mid n$ ，把序列黑白染色后，显然先手可以选择白色或黑色全部取走，所以此时先手必胜。

当  $2 \nmid n$ ，如果先手拿了 0，那按上面的分析后手必胜，所以先手必须去取走一个 1。同理，接下来每次后手操作后，先手取的数必须和他一样。此时双方会平分所有的 1，所以赢的必要条件是 1 的个数为  $4k + 1$ 。

那么先手能模仿后手取数的充分条件就是第一步后，序列可以被划分为  $ABA'$ ，其中  $A'$  是序列  $A$  的 'reverse'， $B$  满足  $b_1 = b_2, b_3 = b_4, \dots, b_{m-1} = b_m$ 。

考虑对于长度为  $n < k$  的序列我们都能证明这是必要条件，那么尝试归纳  $n = k$  的情况。假设第一步后序列为  $a_{1,\dots,n}$ 。

-  $a_1 \neq a_2$ ，当  $a_n \neq a_1$ ，那么后手拿  $a_1$  之后先手必败，满足结论。当  $a_n = a_1$ ，后手拿  $a_1$  后先手只能拿  $a_n$ ，递归到  $n - 2$  的问题。

-  $a_1 = a_2$ ，假如  $a_{3,\dots,n}$  不满足条件，若  $a_n \neq a_1$  则根据假设先手必败， $a_{1,\dots,n}$  显然不满足条件，满足结论；若  $a_n = a_1$ ，后手拿  $a_1$  后，如果先手拿  $a_2$ ，则根据假设先手必败，否则递归到  $n - 2$  的问题。假如  $a_{3,\dots,n}$  满足条件，若  $a_n \neq a_1$ ，那么后手拿  $a_n$ ，先手必须拿  $a_{n-1}$ ，假如  $a_{1,\dots,n-2}$  不满足条件，那么根据假设先手必败，否则可以知道先手必胜，此时  $a_{1,\dots,n-2}, a_{3,\dots,n}$  都满足条件所以  $a_{1,\dots,n}$  满足条件；若  $a_n = a_1$ ，假如  $a_{1,\dots,n-2}$  满足条件，则知道  $a_{1,\dots,n}$  满足条件且  $a_n = a_{n-1}$ ，先手必胜满足结论，否则  $a_{1,\dots,n-2}$  不满足条件，后手拿完  $a_n$  后先手只能拿  $a_1$ ，递归到  $n - 2$  的问题。

所以这是充要条件，判一判即可，复杂度  $O(\sum n)$ 。