NOI 2024 联合省选模拟赛　题解

Wu_Ren

2024 年 2 月 23 日

目录

A puzzle（puzzle）

1. subtask 1

直接爆搜，复杂度 $O(6^{nm}\text{poly}(nm))$。

2. subtask 2,3

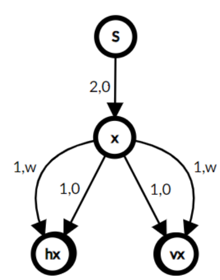
发现由于我们允许形成多个闭合回路，所以我们只需要轮廓线 dp，维护轮廓线上还没有闭合的管道在哪就行，复杂度 $O(nm2^m)$。如果精细实现可能可以通过 subtask 4,5。

3. subtask 4

相当于判定是否有解，考虑放管道相当于每个点需要找邻居连边，使得每个点度数恰好为 2。黑白染色，源点向黑点连边权为 2 的边，黑点向邻居白点连边权为 1 的边，白点向汇点连边权为 2 的边，看是否满流即可，复杂度 $O(nm\sqrt{nm})$。

4. subtask 6

考虑费用流，给每个点开三个虚点 x, hx, vx，对于黑点，如下连边（w 为该点权值）：



白点同理，只不过边朝向反过来，源点改成汇点。

这样，我们令每个黑点的 hx 向其竖直方向上相邻的白点的 hx 连一条容量为 1，费用为 0 的边；每个黑点的 vx 向其水平方向上相邻的白点的 vx 连一条容量为 1，费用为 0 的边。

这样，假如某个点上的管道只连向竖直方向的邻居或只连向水平方向的邻居，则费用会加上其权值。

那么我们跑一个最小费用最大流，用总点权减最小费用即为答案 $O((nm)^2\log(nm))$。

B witch（witch）

1. subtask 1

按题面要求暴力维护即可，复杂度 $O(nm)$。

2. subtask 2

考虑可以预处理出来每个士兵第一次被传染瘟疫的时间，那么相较于区间加区间查询相当于多了一个删点操作,线段树多维护每个区间被删掉的点数即可,复杂度 $O(m\log n)$。

3. subtask 4

考虑用 set 维护每个没被传染的士兵的连续段（可以记录每个段上次处理的时间来延迟更新长度），每次查询的时候暴力枚举与查询区间有交的端分别查询贡献即可。用线段树维护区间推平，区间加和区间查询。由于数据纯随机，由珂朵莉树的分析过程，可以知道枚举的段数和的期望是 $O(m\log\log n)$，总复杂度 $O(m\log n\log\log n)$。

4. subtask 3

发现直接使用 subtask 4 的做法可以通过本数据点，接下来我们将证明，在一般数据下，暴力扫的段数和是 $O(m\sqrt{n})$ 级别的。

设置阈值 B，对于长度小于等于 B 的段，它会在至多 B 次操作后消失，即其至多被扫 B 次。对于长度大于 B 的段，同一时刻至多存在 $O(n/B)$ 个。

对于操作 $3,4$，它们每次删掉若干个段，然后至多增加 $O(1)$ 个段，于是暴力扫的段数至多为 $O(m\max(B,n/B))=O(m\sqrt{n})$。

直接沿用 subtask 4 的做法复杂度为 $O(m\sqrt{n}\log n)$。

5. subtask 5

注意到瓶颈在查询，我们需要一个数据结构，支持区间推平，区间加和区间查询，其中区间推平和区间加有 $O(m)$ 次，区间查询有 $O(m\sqrt{n})$ 次。故我们只需要把线段树改为一个 $O(\sqrt{n})$ 修改，$O(1)$ 查询的分块即可，复杂度 $O(m\sqrt{n})$。

C couple（couple）

1. $n \le 300$

注意到假如我们选定了两个叶子不参与配对，那么剩下的叶子配对方案是唯一的，可以 $O(n)$ 贪心匹配求到，复杂度 $O(n^3)$。

2. $n \le 5000$

假如我们选定了删掉的叶子 i，那么考虑上个情况中我们维护的是：子树中配对贡献之和，如果子树中叶子有奇数个，那么还要维护多的叶子是哪个。这些信息显然换根也是好维护的，复杂度 $O(n^2)$。

3. $n \le 3 \times 10^5$

考虑另一种 dp 做法，如果 i 子树里有奇数个叶子，则记 f_i 为删去一个叶子后，i 子树里所有叶子恰好匹配的最大贡献；如果 i 子树有偶数个叶子，则 f_i 无意义，记为 $-\infty$。同时，记 i 子树内不删叶子，尽量匹配的贡献为 g_i，如果 i 子树有奇数个叶子，多维护 s_i 表示多出来那个叶子的奇异值。

考虑不删叶子时那个唯一的匹配 $m/2$ 对的方案，把每个匹配所连路径上的边染黑，其他边都是白的，则 f_i 有意义当且仅当 i 与父亲的边是黑边。

考虑转移，i 与两个儿子 l, r 的连边一定是一黑一白，不妨 i 与 l 连边是黑的：如果删掉的叶子在 l 子树内，那 $f_i \leftarrow f_l + g_r$，否则，考虑白边的导出子图中 i 所在连通块的叶子 $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$（不包括 i），那么 v_j 与两个儿子的连边一定都是黑的，枚举删掉的叶子在哪个子树，有 $f_i \leftarrow g_l + g_r - g_{v_j} + \max(f_{vl_j} + g_{vr_j} + s_l \oplus s_{vr_j}, f_{vr_j} + g_{vl_j} + s_l \oplus s_{vl_j})$，其中 vl_j, vr_j 分别为 v_j 的左右儿子。

显然这东西也是可以换根维护的，但是上面这个转移每次都是 $O(k)$ 的，换根后总复杂度变成 $O(\sum k^2)$，可能会退化为 $O(n^2)$。

考虑快速转移，考虑对于白边导出子图里的一个连通块，以这个连通块里任意两个点为根求出来的 f_i 是完全一致的（有意义的在两边都有意义且值一致，无意义的两边都无意义）。那么我们可以同时考虑从 i 换根到所有 vl_j, vr_j，发现转移都形如 $f_x \leftarrow c_x + \max_{y \ne vl_j, y \ne vr_j}\{b_y + a_x \oplus a_y\}$，其中 $x = vl_j/vr_j$。那么我们考虑 meet in middle，插入时枚举上一半位的值，查询是枚举下一半位的值，维护最大值/次大值/第三大值即可，复杂度 $O(k\sqrt{V})$，其中 $V = 2^{12}$。

那么总复杂度就是 $O(n\sqrt{V})$。