NOI2024 模拟赛　题解

2024 年 2 月 20 日

目录

A　房间（room）

如果存在 $i < j \le s$ 满足 $b_i \le b_j$，那么 i 是没有用的。同理，存在 $s < j < i$ 满足 $b_i \le b_j$，那么 i 也是没有用的。

那么对于一个 s，我们可以把 $[1:s]$ 的后缀最大值找出来，$[s+1:n+1]$ 的前缀最大值找出来，然后把相邻两个前缀最大值的部分缩成一个段。每个段仍然用一个二元组 (b_i, a_i) 描述，表示进入需要的最小经验值和进入后能获得的经验值。

那么我们开启的顺序一定是按照 b_i 从小到大开启，把前后缀的段放在一起按照 b_i 排序，那么初始经验值 x 合法的充要条件是 $\forall i : x + \sum_{k=1}^{i-1} a_i \ge b_i$。

移项得 $x \ge \max_i \left\{ b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_i \right\}$，在扫描 i 的过程中单调栈维护前后缀最大值，线段树维护信息即可。注意是到达 1 **或** $n+1$ 而不是 1 和 $n+1$。

B 序列（sequence）

为了方便处理，把 $[b_i < b_{i+1}]$ 转化成 $1-[b_i \geq b_{i+1}]$，也就是改成恰好 $n-1-k$ 个不升段的方案数。

考虑容斥，钦定 i 个不升的位置，则序列被划分成 $n-i$ 个不升段。注意到一个不升段只要确定了数集就确定了整个序列，所以我们要数把 a 划分成 $n-i$ 个数集的方案数。可以枚举每一种数，计算该数划分成 $n-i$ 个可以为空的段的方案数，并求乘积。但是这样算会产生空段，而这是不允许的。所以需要再套一层空段的容斥：

$$f_k = \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-1)^j \prod_{p=1}^{n} \binom{c_p + (n-i-j) - 1}{c_p}$$

假设枚举了 i, j，我们希望快速计算最后一个乘积式。由于里面之和 c_p 有关，而合法的 c_p 只有 $O(\sqrt{n})$ 个，所以可以 $O(\sqrt{n})$ 复杂度计算。

前面的两层求和可以拆成两次卷积做。总复杂度 $O(n \log n + n\sqrt{n})$。

1. 附：复杂度的证明

计算乘积的部分，乍一看由于需要快速幂，复杂度是 $O(\sqrt{n} \log n)$，但是我们可以证明这个 log 因子不存在。

复杂度基本等价于下面这个最优化问题的解：

$$\text{s.t.} \quad c_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} i c_i = n$$
$$\text{maximize} \quad \sum_{i=1}^{n} \ln c_i$$

然后笔者用拉格朗日乘子没证出来，所以还请读着努力。

C 图图（graph）

我们尝试观察完全二分图的性质。

给图缩点，那么一个强连通分量只能是：单独的左部点、单独的右部点、左右部点均至少一个。

按照强连通分量拓扑序正序排序为 $A_1, A_2, \ldots, A_m$，那么：

- 若 $|A_1| > 1$：由于 A_1 左右部点均包含，所以 A_1 中的点可以到达图中所有点。然后可以把 A_1 从图中删去。
- 若 $|A_1| = 1$：找到最长的前缀 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 满足 $\forall 1 \le i \le k : |A_i| = 1$ 且 A_i, A_1 同侧，那么 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 可以到达 $i > k$ 的所有 A_i，并且其相互之间不可达。然后可以把 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 从图中删去。

所以难点就在于建图缩点了。

事实上可以扫描线 + 线段树优化建图。过程形如：维护 01 序列 a，需要支持反转一段区间，向 1 的位置连边，从 0 的位置连边。可以在线段树上维护 in_0, in_1, out_0, out_1 表示 $0, 1$ 连入/连出子树的点，然后打标记时交换 in_0, in_1 和 out_0, out_1，pushup 时新建节点。

时间复杂度 $O(n \log n)$。