生成树（rgb）

定理 1. 设 r, g, b 为非负整数。设 Γ 为 $r+g+b+1$ 个点的连通图。Γ 的边被染色为红色、绿色或蓝色。若 Γ 有：

- 一棵包含恰好 r 条红边的生成树，
- 一棵包含恰好 g 条绿边的生成树，和
- 一棵包含恰好 b 条蓝边的生成树。

则 Γ 有一棵包含恰好 r 条红边、g 条绿边和 b 条蓝边的生成树。

证明. 留作练习。 □

Bonus：

- 这个问题有一些深刻的背景，可以参考 AOPS。
- 边有四种或更多颜色，上述结论还成立吗？

素数（prime）

称一个素数是**极小的**，当且仅当它在十进制表示下的所有子序列都不是素数。

根据 Higman-Haines 定理，任意语言 L 对应的极小元素集合 $M(L)$ 总是有穷的，尽管这看起来不可思议。

定理 2. 十进制下极小的素数为 *2, 3, 5, 7, 11, 19, 41, 61, 89, 409, 449, 499, 881, 991, 6469, 6949, 9001, 9049, 9649, 9949, 60649, 666649, 946669, 60000049, 66000049, 66600049*。

证明. 做一些平凡的分类讨论即可，留作练习。 □

考虑依次 DP 每一位的值，暴力记录每个素数匹配到了哪一位。可以发现，可达的状态数不超过 1.5×10^5，预处理状态及转移即可通过 $r \le 10^{18}$。

既然 r 可以做到 10^{10^5}，我们大胆猜想本质不同的状态很少。事实上，做 DFA 最小化后只剩下了不到 20 个状态。

时间复杂度为 $O(\log r \cdot \#\mathrm{DFA})$。

杨表（young）

建立一张无向图，每个点表示一个杨表，每条边连接相差一个格子的杨表。问题转化为计数 $A \to B$ 长度为 k 的路径数。

给每条边定向为 U 当它减少了杨表的格子数，否则为 D。考察包含 U, D 的操作序列 S 对应的方案数 $F(S)$。

定理 3. 对于 $S = S_1DUS_2$，有 $F(S) = F(S_1UDS_2) + F(S_1S_2)$。

因此，所有 $F(S)$ 都可以表示为 $F(\mathrm{UU}\cdots\mathrm{UDD}\cdots\mathrm{D})$ 的线性组合。

对 A, B 分别 DP 求出到每个子杨表的路径数。然后，Meet in the middle 求出所有 $F(\mathrm{UU}\cdots\mathrm{UDD}\cdots\mathrm{D})$。

最后，找到 $\sum F(S)$ 中每个 $F(\mathrm{UU}\cdots\mathrm{UDD}\cdots\mathrm{D})$ 的系数即可求出答案，具体系数留作练习。预处理阶乘等信息，单次询问复杂度为 $O\left(\sum a_i\right)$。

时间复杂度为 $O\left(\#\text{Young subdiagrams} + q\sum a_i + k\right)$。