NOI 2024 省选模拟赛题解

1　海纳百川（gcd）

考虑上值域的限制，就会稍微难处理一点，需要用合理的方法枚举这个位置选哪几个质数。

除了前后缀不变的贡献，经过这个点 i 的子串有三种：$l < i, r = i$；$l = i, r > i$；$l < i < r$。忽略 $l = r = i$。

对于前两种，只要有一个质数即可确定贡献；而第三种只和 $\gcd(a_{i-1}, a_{i+1})$ 有关。

所以可以枚举 gcd 内选了哪几个，有 2^6 种情况；然后再枚举两边扩展到哪里，统计贡献。

如果卡常，可以注意到 gcd 有六个质数时，a_{i-1}, a_{i+1} 的质因子集合一定相等，所以此时可以直接取 $a_i = a_{i-1}$。这样可以让常数除以 2。

2 美食家（xor）

将矩阵的每个元素看成集合幂级数，乘法看作异或卷积。那么只需要求出积和式，对每一项判断是否为 0 即可。

给每一个元素赋一个随机权值，然后计算行列式的每一项是否为 0，这样做的错误概率 $\leq \frac{n}{p}$，其中 p 为你选取的模数（必须为质数）。

总体过程即为将每个元素跑 FWT，每一项分别计算行列式，再 IFWT 回去。时间复杂度 $\mathcal{O}(n^3V + V\log V)$。

3 另一位面（count）

3.1 算法 0

我会暴力。

暴力枚举序列 a。

如果聪明一点剪剪枝可以通过 $k=2$ 的点，但 $n\le 5$ 貌似不行。

3.2 算法 1

事实上这是一个跟 k 有关的 $\frac{n(n+1)}{2}$ 次多项式，所以不妨直接手撕出来。

期望得分：8 分。

3.3 算法 2

对于 $k=2$ 的情况，直接输出 2 即可。

对于 k 比较小的情况，可以列出跟 k 有关的 dp。

结合算法 1 期望得分：32 分。

3.4 算法 3

设 c_i 表示 a 序列中 i 的出现次数，那么有限制 $c_i\ge 1$ 和 $\sum\limits_{i=0}^{n-1} c_ik^i\le k^n$。

然后从大到小考虑，设 d_i 表示目前已经确定了 $c_{i\sim n}$ 的值，还差 d_i 个 k^i 才能使得它们的和 $=k^n$。显然只需要满足 $0\le d_i<kd_{i+1}$，初值为 $d_n=1$。

于是问题转化为求有多少个自然数序列 $d_{0\sim n}$，满足 $d_n=1,0\le d_i<kd_{i+1}$。

设 $F_{i,x}$ 表示确定了 $d_{0\sim i}$，且 $d_i=x$ 的方案数，转移为 $F_{i,x}=F_{i-1,0}+\cdots+F_{i-1,kx-1}$。设函数 $F_i(x)=F_{i,x}$，则其为关于 x 的 i 次多项式，初值为 $F_0(x)=1$，答案即为 $F_n(1)$（要求 $d_n=1$）。

设 $F_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} f_{n,i}x^i$，于是有转移：

$$f_{n,m}=\sum_{i=m-1}^{n} f_{n-1,i}\frac{1}{i+1}\binom{i+1}{i+1-m}B_{i+1-m}k^m$$

。

预处理伯努利数就可以做到 $\mathcal{O}(n^3)$。

结合算法 2 期望得分：56 分。

3.5 算法 4

考虑到这是一个卷积的形式，使用 NTT 优化可以做到 $\mathcal{O}(n^2\log n)$。

期望得分：72 分。

应该没有人 $\mathcal{O}(n^2\log n)$ 冲过去了吧。

3.6 算法 5

考虑计算转移的贡献，设转移的过程为 $(0,0)\to(1,a_1)\to(2,a_2)\to\cdots\to(n,a_n)$。

不难写出其贡献：$\frac{1}{a_n!}\times\prod\limits_{i=1}^{n}k^{a_i}\frac{B_{a_{i-1}-a_i+1}}{(a_{i-1}-a_i+1)!}$。

设 $d_i=a_{i-1}-a_i+1$，于是有 $a_i=i-\sum\limits_{j\le i}d_j$。记 $s=\sum\limits_{i=1}^{n}d_i$，那么贡献可以改写为 $\frac{k^{\frac{n(n+1)}{2}}}{k^{(n+1)s}(n-s)!}\times\prod\limits_{i=1}^{n}k^{id_i}\frac{B_{d_i}}{d_i!}$。

设 $G(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{B_i}{i!}x^i,H_i(x)=G(k^ix)$，那么所求即为 $\prod\limits_{i=1}^{n}H_i(x)$。如果没有额外限制可以用倍增求。

不过有限制 $a_i\ge 1$，即 $\sum\limits_{j\le i}d_j<i$。考虑分块，每 B 个分一块，然后每块处理出进来的和出去的情况，在块中暴力减去不合法的情况。具体而言，枚举最后一个不合法的位置，根据前缀和的单调性，它一定满足 $\sum\limits_{j\le i}d_j=i$，让前面无限制后面强制合法即可。

取 $B=\sqrt{n}$ 可以做到总复杂度 $\mathcal{O}(n^2+n\sqrt{n}\log n)$，期望得分：100 分。

3.7 算法 6

考虑容斥，钦定若干个位置不合法。

不难发现相邻两个之间的转移大部分时候是等价的,事实上,主要难点在于计算 $[x^n]\prod_{i=0}^{n-1}F(q^ix)$。

考虑 $\ln-\exp$ 大法，令 $h=\ln f$，推推式子有：

$$\sum_{i\ge 0}h_ix^i\frac{q^{ni}-1}{q-1}$$

设 $G(x)=\sum_{i\ge 0}h_ix^i\frac{1}{q-1}$，那么有：

$$\exp(\sum_{i\ge 0}h_ix^i\frac{q^{ni}-1}{q-1})=\frac{\exp(G(q^nx))}{\exp(G(x))}$$

令 $H1=\exp(G(x)),H2=\frac{1}{\exp(G(x))}$，那么考虑如何计算前面的式子，有：

$$w1_n = \sum_{j=0}^{n} H1_j H2_{n-j} q^{n(n-j)}$$

考虑如何处理 $q^{n(n-j)}$，有 $n(n-j) = j(n-j) + (n-j)^2 = \binom{n}{2} - \binom{j}{2} - \binom{n-j}{2} + (n-j)^2$，于是求成功均摊到了 $n, j, n-j$ 三者上。

于是就可以在求出 $H1, H2$ 的基础上一遍 FFT 解决。

然后是处理初始值，其实是计算

$$[x^n]G(q^n x)\prod_{i=0}^{n-1} F(q^i x)$$

这里的 G 不是之前的 G，而是我们暴力 dp 初始化的数组。

仍然是换汤不换药，其实就是令 $H3 = H2 \times G$，然后就跟之前一样做了。

考虑转移过程，有：

$$dp_i = -(c_i + \sum_{j<i} dp_j h_{i-j} q^{j\times(i-j)})$$

看起来是一个半在线卷积，但其实可以用多项式求逆解决，有：

$$dp_n q^{-\binom{n}{2}} = -(c_i + \sum_{j<i} dp_j q^{-\binom{j}{2}} h_{i-j} q^{-\binom{i-j}{2}})$$

这也启发我们，遇到复杂但不显然的东西最好展开，于是就能写成比较显然的东西了。

于是总复杂度 $O(n \log n)$。