积分

积分

原函数

在区间I上给定函数$f(x)$，若存在定义在I上的函数$F(x)$，使得$F'(x)=f(x),\forall x\in I$，则称$F(x)$是$f(x)$的一个原函数。

从上述定义可以看出，如果$f(x)$有原函数，则它就有无穷多个原函数。因为若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则对任意常数C，函数$F(x)+C$也是$f(x)$的一个原函数。

不定积分

若函数$f(x)$在区间I上存在原函数，则称$f(x)$的全体原函数为$f(x)$的不定积分，记为$\int f(x)dx$。这里符号$\int$称为积分号，$f(x)$称为被积函数，x称为积分变量。

下面是一些常见函数的不定积分：

(1) $\int x^\alpha dx=\frac{1}{x+1}x^{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1)$

(2) $\int\frac{dx}{x}=ln|x|+C$

(3) $\int e^xdx=e^x+C$

(4) $\int cos\ xdx=sin\ x+C$

(5) $\int sin\ xdx=-cos\ x+C$

(6) $\int\frac{dx}{cos^2x}=tan\ x+C$

(7) $\int\frac{dx}{1+x^2}=arctan\ x+C$

(8) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arcsin\ x+C$

不定积分运算法则

(1) $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

(2)第一换元法：如果$\int f(u)du=F(u)+C$，而$u=u(x)$是关于x的可微函数，则有$\int f(u(x))u'(x)dx=F(u(x))+C$

例：求不定积分$\int\frac{1}{x-1}dx$

> $\int\frac{1}{x-1}dx=\int\frac{d(x-1)}{x-1}=ln|x-1|+C$

例：求不定积分$\int\frac{xdx}{x^2+1}$

> $\int\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}ln(x^2+1)+C$

(3)第二换元法：设函数$x=x(t)$在某一开区间上可导，且$x'(t)\neq0$。如果

$$\int f(x(t))x'(t)=G(t)+C$$

则有

$$\int f(x)dx=G(t(x))+C$$

其中$t=t(x)$为$x=x(t)$的反函数

第二换元法主要用来求含有根式的不定积分。

例：求不定积分$I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx$

> 令$x=asin\ t,|t|<\pi/2$，则
>
> $I=\int a^2cos^2tdt=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}sin\ 2t+C=\frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$
>
> 其中，我们根据$x=asin\ t$作直角三角形可以知道$cos\ t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

(4)分部积分法：设$u(x), v(x)$可导，若$\int u'(x)v(x)dx$存在，则

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

可以简写为$\int udv = uv - \int vdu$

例：求不定积分$I = \int x^3 ln\ xdx$

> 令$u = ln\ x, dv = x^3dx = d\frac{x^4}{4}$，则
>
> $I = \frac{1}{4}x^4 ln\ x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 ln\ x - \frac{1}{16}x^4 + C$

例：求不定积分$I = \int x^2 sin\ xdx$

> $I = -\int x^2 d(cos\ x) = -x^2 cos\ x + \int cos\ xdx^2$
>
> $= -x^2 cos\ x + 2\int xd(sin\ x) = -x^2 cos\ x + 2xsin\ x - 2\int sin\ xdx$
>
> $= -x^2 cos\ x + 2xsin\ x + 2cos\ x + C$

定积分

设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上有定义，对于区间$[a, b]$的一个分割

$\triangle : a = x_0 < x_1 <\ldots< x_n = b$

记$\triangle x_i = x_i - x_{i-1}(i = 1, 2, \ldots, n), \lambda(\triangle) = max_{1\le i\le n}\{\triangle x_i\}$。在每个小区间$[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \ldots, n)$上任取$\xi_i$，作和式$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$。如果当$\lambda(\triangle) \to 0$时，上述和式存在极限$I$，且$I$不依赖分割$\triangle$的选取及$\xi_i(i = 1, 2, \ldots, n)$在$[x_{i-1}, x_i]$上的选取，则称$f(x)$在区间$[a, b]$上是黎曼可积（简称可积）的，同时称$I$为$f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分，记为

$I = \int_a^b f(x)dx$

定积分的值I为曲线$f(x)$与$x = a, x = b, y = 0$所围成的曲边梯形的面积。

微积分基本定理

设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上有定义，并且满足以下两个条件：

(1)在区间$[a, b]$上可积；

(2)在区间$[a, b]$上存在原函数$F(x)$，

则有：

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$

数值积分

辛普森公式

对于一个二次函数$f(x) = ax^2 + bx + c$，有：

$\int_l^r f(x)dx = \frac{(r-l)(f(l)+f(r)+4f(\frac{l+r}{2}))}{6}$

> 对于$f(x)$求不定积分可得$F(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + C$
>
> 所以
>
> $$\begin{aligned}\int_l^r f(x)dx = F(r) - F(l) &= \frac{a}{3}(r^3 - l^3) + \frac{b}{2}(r^2 - l^2) + c(r - l)\\ &= \frac{r-l}{6}(2al^2 + 2ar^2 + 2alr + 3bl + 3br + 6c)\\ &= \frac{r-l}{6}((al^2 + bl + c) + (ar^2 + br + c) + 4(a(\frac{l+r}{2})^2 + b(\frac{l+r}{2}) + c))\\ &= \frac{r-l}{6}(f(l) + f(r) + 4f(\frac{l+r}{2}))\end{aligned}$$

普通辛普森法

给定一个自然数n，将区间$[l,r]$分成$2n$个等长的区间$x_i = l + ih, i = 0, 1, \ldots, 2n, h = \frac{r-l}{2n}$。我们就可以计算每个小区间$[x_{2i-2}, x_{2i}]$的积分值，将所有区间的积分值相加。

对于$[x_{2i-2}, x_{2i}]$这个区间，选其中三个点$(x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i})$就可以构成一条抛物线从而得到一个函数$P(x)$，我们利用$P(x)$来近似计算，有：

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P(x)dx = (f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}))\frac{h}{3}$$

所以得到：

$$\int_l^r f(x)dx \approx (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))\frac{h}{3}$$

普通辛普森法的误差为：

$\frac{(r-l)^5}{180n^4}M_4$，其中$M_4$是$|f^{(4)}(x)|$在$[l,r]$上的最大值。

```cpp
const int N = 1000 * 1000;

double simpson_integration(double a, double b) {
  double h = (b - a) / N;
  double s = f(a) + f(b);
  for (int i = 1; i <= N - 1; ++i) {
    double x = a + h * i;
    s += f(x) * ((i & 1) ? 4 : 2);
  }
  s *= h / 3;
  return s;
}
```

自适应辛普森法

普通的方法为保证精度在时间方面无疑会受到n的限制，我们应该找一种更加合适的方法。

现在唯一的问题就是如何进行分段。如果段数少了计算误差就大，段数多了时间效率又会低。我们需要找到一个准确度和效率的平衡点。

我们这样考虑：假如有一段图像已经很接近二次函数的话，直接带入公式求积分，得到的值精度就很高了，不需要再继续分割这一段了。

于是我们有了这样一种分割方法：每次判断当前段和二次函数的相似程度，如果足够相似的话就直接代入公式计算，否则将当前段分割成左右两段递归求解。

现在就剩下一个问题了：如果判断每一段和二次函数是否相似？

我们把当前段直接代入公式求积分，再将当前段从中点分割成两段，把这两段再直接代入公式求积分。如果当前段的积分和分割成两段后的积分之和相差很小的话，就可以认为当前段和二次函数很相似了，不用再递归分割了。

```cpp
double simpson(double l, double r) {
  double mid = (l + r) / 2;
  return (r - l) * (f(l) + 4 * f(mid) + f(r)) / 6;  // 辛普森公式
}
double asr(double l, double r, double eqs, double ans) {
  double mid = (l + r) / 2;
  double fl = simpson(l, mid), fr = simpson(mid, r);
  if (abs(fl + fr - ans) <= 15 * eqs)
    return fl + fr + (fl + fr - ans) / 15;  // 足够相似的话就直接返回
  return asr(l, mid, eqs / 2, fl) +
         asr(mid, r, eqs / 2, fr);  // 否则分割成两段递归求解
}
```

牛顿迭代法求方程近似解

牛顿迭代法用于方程$f(x)=0$求值，基本的思想是利用泰勒展式，我们先取一个x_0为方程的近似解。然后把$f(x)$在x_0的某个邻域内展开$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(\alpha)(x-x_0)^2/2$（其中$\alpha$介于$x$与$x_0$之间，这个余项称为拉格朗日余项），我们取线性部分（即泰勒展开的前两项）作为方程$f(x)$的近似去求解。也就是求解$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$，解为$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$。从而得到迭代式：

$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

牛顿迭代法的几何意义：相当于做x_n处曲线的切线，切线与x轴的交点即为x_{n+1}。

牛顿迭代法收敛速度

牛顿迭代法在根附近区域可以做到平方收敛，下面是证明。

假设方程的根为x_t，我们有：

$f(x_i)+f'(x_i)(x_t-x_i)+f''(\alpha)(x_t-x_i)^2/2=0$

又由于：

$f(x_i)+f'(x_i)(x_{i+1}-x_i)=0$

带入上式得到：

$f'(x_i)(x_t-x_{i+1})+f''(\alpha)(x_t-x_i)^2/2=0$

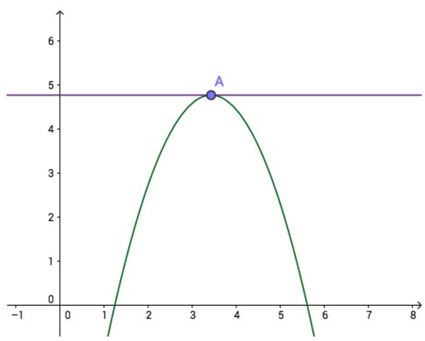
我们令$e_i=x_t-x_i$，在上式中，当x_i趋向于x_t的时候，α也趋向于x_t，有：

$e_{i+1}=-\frac{f''(x_t)}{2f'(x_t)}e_i^2$

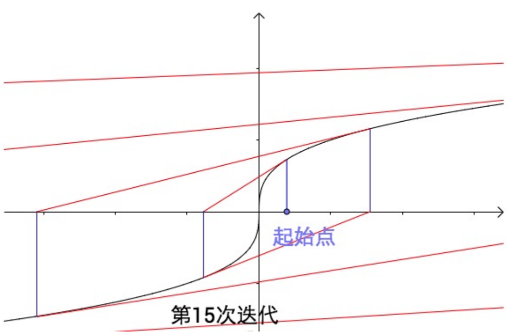
牛顿迭代法的缺陷

牛顿迭代法的速度比较依赖初始值的选择，而且如果初始值选择的不好，可能会出现以下情况：

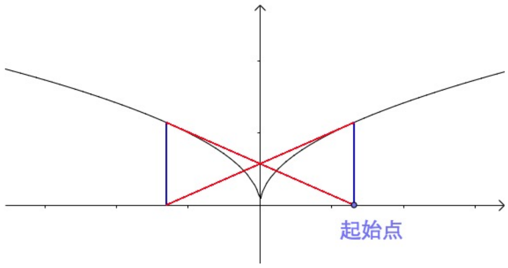
切线与x轴没有交点



越迭代越远



迭代点不断震荡



还有其他情况。

应用

求平方根：给你一个数x，求$\sqrt{x}$

```
double sqrt(double x){
    double x0=x*0.5;
    while(abs(x0*x0-x)>1e-7) x0-=(x0*x0-x)/(2*x0);
    return x0;
}
```

求exp：给你一个数x，求e^x

```
double exp(double x){
    double x0=e*x;
    while(abs(log(x0)-x)>1e-7) x0-=(log(x0)-x)*x0;
    return x0;
}
```