题解 & 分析

总评：在搞的时候本来 T2 是个构造题，但这样这场比赛就太简单了，于是换了个稍微有一点思维难度的题。但整场的难度还是比较简单的，因此 Lyre 提议把他的一个 DP 题扔到我的 T3，但是我感觉现在这个 T3 的难度对不起我这么喜欢的一首歌，因此又给它换了个新的题（虽然也不是很难）。

整体来说，Day1 的难度较易，难度低于联合省选 2023 Day1（代码量小了很多，思维重度与深度也不够，创造性思维要求较高）。如果将 T1 换成一个思维重度较大的题（类似于联合省选 2023 D1T2），T2 加大数据范围要求必须使用全局平衡二叉树实现，那么难度会基本持平于一场正常的省选。

感觉讲课和出题都非常能锻炼一个人的水平！

难度评价：T1 << T3 < T2。

来自冥王星的外星旅人 (alien)

Tags：深入分析问题，博弈论

一道比较简单的题目，简单分析分析应该都能做出来，难度为 NOIP 2023 T1.5。

测试点 $1 \sim 2$

留给爆搜，实现好的爆搜应该是可以过 $n = 5$ 的。

测试点 3

判断先手能不能放棋子即可。

测试点 4

判断那个唯一的矩形是否存在即可。

- ### 测试点 5

来诈骗的。

- ### 测试点 6

只需要能让先手落下一个棋子，先手就赢了。

- ### 测试点 $7\sim 9$

留给大力分讨选手。

- ### 测试点 10

我们从零开始分析这个问题。

如果没有 $k\times k$ 的正方形，那么后手胜。

如果只有一个 $k\times k$ 的正方形，那么先手胜。

如果只有两个 $k\times k$ 的正方形，那么要看它们是否相交。相交的话跟一个没有区别，不相交的话呢？

先手敢填死一个吗？不敢，因为这样后手再填死一个它就败了，这样他就会选择在外置位填上一个；那么这样决定权又到了后手手里，但是他同样不敢填死一个。

可以发现，只要有两个以上不交的合法正方形，那么两人都需要在外置位填东西。最后都会选择留下两个不交的 $k\times k$ 的正方形，判断外置位数量的奇偶性即可。

雷城 (thunder)

Tags：模拟费用流

来自：[ICPC2018 WF] Conquer The World。

正如其题目名称一样，“征服世界”和“雷城”都可以看出这不是一道简单题。虽然比较清新，但是实际难度非常恐怖。在赛时中根本无人通过，即使现在在 Gym 上也只有一支队伍在 VP 时通过了此题。也许原因是在当时模拟费用流还不是很普及，但是很显然现在不是了，难度大约为 NOI2021 D1T2。

- ## 子任务 $1 \sim 4$

留给各种奇怪的做法。

- ## 子任务 5

这是一个经典的费用流问题。将雷电能量多余的点看作正点，少的点看作负点，源点向正点连边，负点向汇点连边。然后树上路径随便连连就行了。

数据很水，所以费用流是可以过去的。

- ## 子任务 6

首先由一个基本事实：最优方案的路径之间一定是不交的。

考虑利用反悔贪心实现这个过程。设当前子树的根为 x，每次我们考虑一个点。

将 u 的点权转到 v 的代价是 $dep_u+dep_v-2dep_{lca}$，DFS 整棵树时的 x 作为 LCA，将点权扔到可并小根堆里，然后找最小值即可。

反悔策略也很简单，将做差的贡献再扔回去即可。

问题是，如何让每个点的要求都满足？给每个乞求雷电能量的城市都安排一个 $-\infty$ 的权值，这样堆中的元素一定会被弹出。由于 $\sum x$ 的保证，这样做的复杂度是 $\sum x$ 的线性对数。

用全局平衡二叉树实现模拟费用流可以做到 $O(n\log n)$。

花に亡霊 (undead)

- Link.

Tags：增量法，二维扫描线

一道比较奇怪的推式子题，我们知道组合数的性质非常的差，面对这种问题只能考虑增量法计算。推导的过程相对来讲也比较轻量，难度大概是 NOI2021 D1T3。

n,m 相同的部分分提示很强。记：

$$\begin{cases}F(n,m)=\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^m[(i+j)\bmod 2=0]\binom{i}{j}\\G(n,m)=\sum_{j=0}^m\binom{n}{j}\\H(n,m)=\sum_{i=0}^n[i\bmod 2=0]\binom{i}{m}\end{cases}$$

考察 $(n,m)\to(n+1,m),(n,m+1)$ 时 F,G,H 的变化情况。可以得到：

$(n,m)\to(n+1,m)$ 时，H 容易推出，G 可以利用 $\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}$ 得到 $G(n+1,m)=2G(n,m)-\binom{n}{m}$，$F$ 类似于 G。到这里可以通过子任务 3。

$(n,m) \to (n,m+1)$ 时，G 容易推出，F 可以利用 H 得到，只需要解决 H 如何变化的问题。

注意到 $H(n,m+1) = \sum_{i=0}^{n}[i \bmod 2 = 0]\binom{i}{m+1} = (\sum_{i=0}^{n}[i \bmod 2 = 1]\binom{i}{m+1} + \binom{i}{m}) + C$，其中 C 是可以用 $O(1)$ 个组合数简单表示的内容。又 $2H(n,m+1) + H(n,m) = (\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m+1} + \binom{i}{m}) + C$ 亦可以用 $O(1)$ 个组合数简单表示，所以在 $O(1)$ 时间内能完成 $H(n,m) \to H(n,m+1)$ 的计算。

这样直接二维扫描线（莫队）扫 n 和 m，然后相邻询问之间直接暴力递推 n,m 即可。时间复杂度 $O(q\sqrt{V})$，空间复杂度 $O(q+V)$。