

组合计数问题的常用技巧

彭博

广州大学附属中学

2021 年 3 月 19 日

- ① 前言
- ② 寻找唯一性
- ③ 判定合法
- ④ 其他技巧
- ⑤ 综合应用

- ① 前言
- ② 寻找唯一性
- ③ 判定合法
- ④ 其他技巧
- ⑤ 综合应用

何为组合计数

这其实是个比较难定义的东西。有些人可能觉得只要是数数题就是组合计数，但数数题中有一部分用到的仅仅是代数工具，和组合可能并没有太大关系。

何为组合计数

这其实是个比较难定义的东西。有些人可能觉得只要是数数题就是组合计数，但数数题中有一部分用到的仅仅是代数工具，和组合可能并没有太大关系。

比如生成函数在计数题中的应用比较广泛，但它就是一个比较偏代数的工具。

何为组合计数

这其实是个比较难定义的东西。有些人可能觉得只要是数数题就是组合计数，但数数题中有一部分用到的仅仅是代数工具，和组合可能并没有太大关系。

比如生成函数在计数题中的应用比较广泛，但它就是一个比较偏代数的工具。

本次讲课特别强调“组合计数”，很大原因是生成函数的前置知识太多，技巧太多，所以把它排除在本次讲课之外。对生成函数有兴趣的同学可以自行搜索相关资料学习，有了一定基础之后可以去阅读李白天（Entropy Increaser）的 2021 年集训队论文。

何为组合计数

这其实是个比较难定义的东西。有些人可能觉得只要是数数题就是组合计数，但数数题中有一部分用到的仅仅是代数工具，和组合可能并没有太大关系。

比如生成函数在计数题中的应用比较广泛，但它就是一个比较偏代数的工具。

本次讲课特别强调“组合计数”，很大原因是生成函数的前置知识太多，技巧太多，所以把它排除在本次讲课之外。对生成函数有兴趣的同学可以自行搜索相关资料学习，有了一定基础之后可以去阅读李白天（Entropy Increaser）的 2021 年集训队论文。

另外，因为容斥的变体太多且常常需要前置知识，而网上的资料也很详尽，所以同样在本次课中略过。

讲课要讲什么

在对我的学弟的观察中，我发现很多刚刚开始接触计数题的同学会对计数题怀有“本能的恐惧”（包括我也曾经是这样）。

讲课要讲什么

在对我的学弟的观察中，我发现很多刚刚开始接触计数题的同学会对计数题怀有“本能的恐惧”（包括我也曾经是这样）。所以这次讲课以总结组合计数问题的常用技巧为主，希望同学们听完之后能在面对计数问题时不再手足无措。

讲课要讲什么

在对我的学弟的观察中，我发现很多刚刚开始接触计数题的同学会对计数题怀有“本能的恐惧”（包括我也曾经是这样）。

所以这次讲课以总结组合计数问题的常用技巧为主，希望同学们听完之后能在面对计数问题时不再手足无措。

下面将会介绍若干种常用技巧，并配有对应的例题。

① 前言

② 寻找唯一性

何为唯一

最优方案唯一

不合法元素唯一

表示方法唯一

③ 判定合法

④ 其他技巧

⑤ 综合应用

① 前言

② 寻找唯一性

何为唯一

最优方案唯一

不合法元素唯一

表示方法唯一

③ 判定合法

④ 其他技巧

⑤ 综合应用

计数中，最常出现的问题便是数重或数漏。比如要求数合法的元素个数，但一个元素可能有多种合法的方式，那么对合法方案计数就会数重。

一种解决方法是，把合法元素唯一对应到一种合法方案上，相当于添加了限制条件。这样就不会出问题了。

① 前言

② 寻找唯一性

何为唯一

最优方案唯一

不合法元素唯一

表示方法唯一

③ 判定合法

④ 其他技巧

⑤ 综合应用

例题：AGC021E Ball Eat Chameleons

有 n 只变色龙，初始颜色全部为蓝色。

给它们按某种顺序喂 K 个球，每个球的颜色都是红色或蓝色，一个球可以选择喂给任意一只变色龙。

一只变色龙吃掉一个球之后，如果它吃的红球数不等于蓝球数，那么它会变成较多的那种颜色，否则不变色。

问有多少种球的颜色序列，使得存在一种喂球的方案，把球全部喂完之后所有变色龙都是红色。

$n, K \leq 5 \times 10^5$

① 前言

② 寻找唯一性

何为唯一

最优方案唯一

不合法元素唯一

表示方法唯一

③ 判定合法

④ 其他技巧

⑤ 综合应用

入门：LOJ#3211. 「CSP-S 2019」Emiya 家今天的饭

给定一个 $n \times m$ 的表格，每个位置写有非负整数 $a_{i,j}$ 。

你需要在表格中选若干个位置，满足

- 至少选取一个位置；
- 每行最多选一个位置；
- 设总共选了 c 个位置，那么不存在一列选的个数超过 $\lfloor \frac{c}{2} \rfloor$ 。

对于一种合法方案，它的权值是所有选的位置的 $a_{i,j}$ 的乘积。

求所有合法方案的权值之和。

$n \leq 100, m \leq 2000$

进阶：AGC052C Nondivisible Prefix Sums

给定质数 P 和长度 n 。

对于 $(P-1)^n$ 个值域在 $[1, P-1]$ 的数列，称它是好的，当且仅当存在一种方法把它重排，使得每个前缀和都不是 P 的倍数。

$$1 \leq n \leq 5000, 3 \leq P \leq 10^8$$

① 前言

② 寻找唯一性

何为唯一

最优方案唯一

不合法元素唯一

表示方法唯一

③ 判定合法

④ 其他技巧

⑤ 综合应用

例题：AGC008F Black Radius

给定一棵 n 个节点的树，每个节点上标有 0/1。边的长度均为 1。

你可以选择一个标有 1 的点 x ，并选择一个非负整数 d ，把距离 x 不超过 d 的点保留，其他点丢弃。你只能选择一次。

问有多少种不同的连通块能恰好被保留下来。

$$n \leq 2 \times 10^5$$

① 前言

② 寻找唯一性

③ 判定合法

例一

例二

④ 其他技巧

⑤ 综合应用

① 前言

② 寻找唯一性

③ 判定合法

例一

例二

④ 其他技巧

⑤ 综合应用

例题：AGC012F Prefix Median

给定长度为 $2n - 1$ 的数列 a （可能有相同元素），可以将它任意打乱顺序，然后定义 b_i 为前 $2i - 1$ 个数的中位数。求能生成多少种数列 b 。

$$n \leq 50$$

① 前言

② 寻找唯一性

③ 判定合法

例一

例二

④ 其他技巧

⑤ 综合应用

例题：AGC043D Merge Triplets

给定 n ，求长度为 $3n$ 的能被以下方法生成的排列个数。

- 生成 n 个长度为 3 的数列，使得每个 1 到 $3n$ 中的数恰好被用一次。
- 生成一个初始为空的数列 P ，重复以下操作 $3n$ 次：
 - 在所有非空数列的开头中选取最小的元素 x 。
 - 把 x 加入到 P 的末尾，并从原数列删去。

$$n \leq 2000$$

例题：AGC048F 01 Record

给定长度为 n 的 01 串 s 。

称一个 01 串是好串，当且仅当它 01 交替，且最后一个字符是 1。

问有多少个好串的可重集能够拼出 s ，其中“拼出”表示可以把 s 划分成若干个子序列，第 i 个子序列与可重集的第 i 个元素相等。

$$n \leq 300$$

- ① 前言
- ② 寻找唯一性
- ③ 判定合法
- ④ 其他技巧
 - 差分
 - 贡献的分配
- ⑤ 综合应用

- ① 前言
- ② 寻找唯一性
- ③ 判定合法
- ④ 其他技巧
 - 差分
 - 贡献的分配
- ⑤ 综合应用

为什么要差分

差分大家都很熟悉，但是计数的时候为什么要差分呢？
所谓差分，其实只是这样一个式子：

$$x = \sum_{i \leq x} 1$$

这样就可以在外面枚举 i ，然后只关心结果与 i 的大小关系。有时可以极大地简化问题。

入门：LOJ#3463. 「WC2021」表达式求值

相信大家都很熟悉这题。

定义 \mathbb{Z} 上的二元运算符 ' $<$ ', ' $>$ '，返回两者取 \min 或 \max 。给出一个只包含 ' $<$ ', ' $>$ ', ' $?$ ', ' $(,)$ ', ' 0 ' 到 ' 9 ' 的表达式 E ，其中 ' 0 ' 到 ' 9 ' 表示变量 x_i ，'?' 表示暂未确定这个位置填 ' $<$ ' 还是 ' $>$ '。

有 n 次询问，每次给出这些变量的值，求对于所有把 '?' 替换为 ' $<$ ' 或 ' $>$ ' 的方案中，表达式的返回值的和。

$|E|, n \leq 5 \times 10^4$

进阶：UOJ#449. 【集训队作业 2018】喂鸽子

有 n 只鸽子，现在要喂它们玉米粒，每次随机选择一只鸽子喂一粒。一只鸽子吃了至少 k 粒才能吃饱，问期望多久才能喂饱所有鸽子。

$$n \leq 50, k \leq 1000$$

- ① 前言
- ② 寻找唯一性
- ③ 判定合法
- ④ 其他技巧
 - 差分
 - 贡献的分配
- ⑤ 综合应用

这本应该会比较有趣的一节，但是我已经把有哪些题用到这个技巧给忘光了……

例题：ARC082E ConvexScore

给定平面上 n 个两两不相同的点，对于一个点集 S ，如果它不在一条直线上（即凸包存在），那么设它的凸包大小为 k ，它的权值就是 $2^{|S| - k}$ 。

求所有凸包存在的点集的权值之和。

$n \leq 200$

LOJ#3053. 「十二省联考 2019」希望

给定一棵 n 个点的树，问有多少个长度为 k 的连通块有序列 $\{s_i\}_{i=1}^k$ （即任意选出 k 个树上连通块），使得存在一个点 x ，使得 $\forall y \in s_i, \text{dis}(x, y) \leq L$ ，其中 L 给定。
 $n \leq 10^6, k \leq 10$

- ① 前言
- ② 寻找唯一性
- ③ 判定合法
- ④ 其他技巧
- ⑤ 综合应用
 - 例一
 - 例二
 - 例三
 - 例四

你已经具有基本的数数能力了，一起来做几道题吧！

- ① 前言
- ② 寻找唯一性
- ③ 判定合法
- ④ 其他技巧
- ⑤ 综合应用
 - 例一
 - 例二
 - 例三
 - 例四

CF848E Days of Floral Colours

有 $2n$ 个点围成一个环，要给它们染色。称一个染色方案是合法的，当且仅当

- 恰好染了 n 种颜色，每种颜色两个点。颜色无序。
- 如果点 x, y 同色，那么 x, y 对面的两个点也要同色。
- 两个同色点的距离只能是 $1, 2, n$ ，其中距离定义为劣弧的长度，比如相邻两个点的距离是 1 。

对于一个染色方案，定义它的权值为从距离为 n 的同色点处切开后每一段的长度的乘积。求所有合法的染色方案的权值之和。如果不存在距离为 n 的同色点那么权值为 0 ；如果两对距离为 n 的同色点相邻那么权值也为 0 。

$$n \leq 50000$$

- ① 前言
- ② 寻找唯一性
- ③ 判定合法
- ④ 其他技巧
- ⑤ 综合应用
 - 例一
 - 例二
 - 例三
 - 例四

LOJ#2719. 「NOI2018」冒泡排序（简化）

给定一个长度为 n 的排列 q 。

定义一个排列是好的，当且仅当它的最长下降子序列长度不超过 2。

求字典序严格大于 q 的好的排列有多少个。

$$n \leq 6 \times 10^5, \sum n \leq 2 \times 10^6$$

- ① 前言
- ② 寻找唯一性
- ③ 判定合法
- ④ 其他技巧
- ⑤ 综合应用
 - 例一
 - 例二
 - 例三
 - 例四

AGC041F Histogram Rooks

给定一个 n 列的棋盘，第 i 列只有下面 h_i 行的格子有效。要在上面放棋子（车），一个棋子可以覆盖同行同列的所有格子（但不能穿过无效格子）。问有多少种放棋子的方法使得每个有效格子都被覆盖。

$$n \leq 400$$

- ① 前言
- ② 寻找唯一性
- ③ 判定合法
- ④ 其他技巧
- ⑤ 综合应用
 - 例一
 - 例二
 - 例三
 - 例四

AGC049E Increment Decrement

对于一个长度为 n 的序列 A ，定义它的代价为用下列两种操作把 A 变为全 0 的最小代价：

- 给一个位置加一或减一，代价为 1。
- 给一个区间加一或减一，代价为 C 。

给定 n 个长度为 K 的序列 B_i ， A_i 可以在 $B_{i,j}$ 中任意选择，所以共有 K^n 种 A 。求它们的代价之和。

$n, K \leq 50$

Thanks!