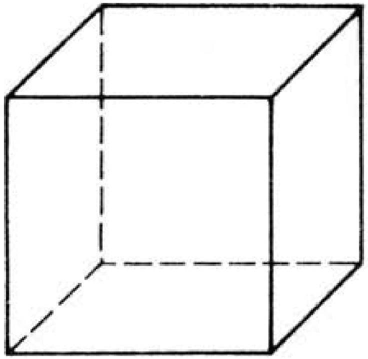
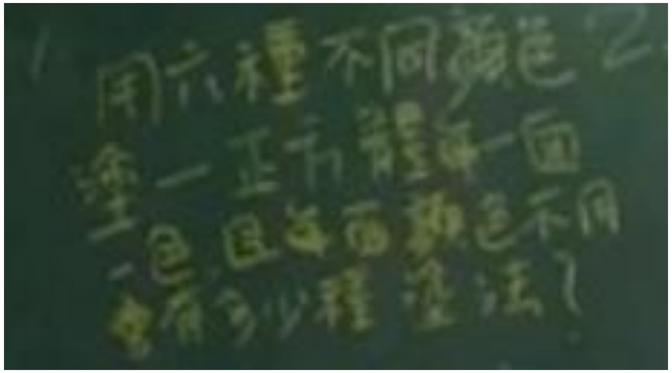
黑板上的排列组合

用六种不同颜色涂一正方体，一面一色，且每面颜色不同，会有多少种涂法？



$6*5*P(4,4)/4\ /\ 6 = 30$

可以转动



举例

红蓝两种颜色给正方形的四个顶点着色, 存在多少种不同的方案?

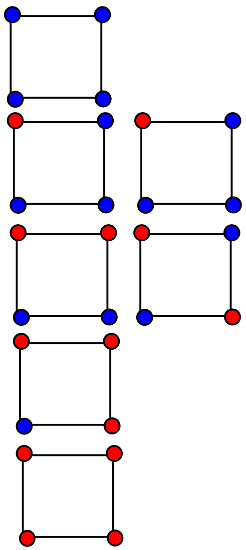
2^4

若允许正方形转动, 有多少种方案?

分类：按红色点分类

0个红点	1种
1个红点	1种
2个红点	2种
3个红点	1种
4个红点	1种

共6种



第七章 Burnside引理和Pólya定理

- 组合计数中遇到的困难
  - 找出问题通解的表达式困难
    - 引入母函数
  - 区分讨论的问题类型困难，区分同类性，避免重复和遗漏
    - 容斥原理避免重复计数
    - 如何区分同类

群(group)

伽罗华（Galois）

- Évariste Galois(1811~1832)
- 引入**群论**新名词并奠定了群论基础
- 非常彻底地把全部代数方程可解性问题，转化或归结为置换群及其子群结构分析的问题，得出五次以上一般代数方程根式不可解，以及用圆规、直尺（无刻度的尺）三等分任意角和作倍立方体不可能等结论。
- 刘维尔在1846才领悟到其手稿中迸发出的天才思想，他花了几个月的时间试图解释它的意义
- **他被公认为数学史上两个最具浪漫主义色彩的人物之一**
- 他的死使数学的发展被推迟了几十年
- 这个人是上帝派来的，在人世间匆匆转了一圈，仅仅21年，却一不小心，开启了数学的一个新时代 ……..
  - 伽罗华在圣佩拉吉监狱中写成的研究报告中写道：“把数学运算归类，学会按照难易程度，而不是按照它们的外部特征加以分类，这就是我所理解的未来数学家的任务，这就是我所要走的道路。”

http://baike.baidu.com/view/251169.htm

1 群的概念

(1)**群(group)**

定义 给定集合G和G上的二元运算·，满足下列条件称为群。

(a)封闭性(Closure):

若a,b∈G,则存在c∈G,使得a·b=c.

(b)结合律(Associativity):

任意a,b,c∈G,有(a·b)·c=a·(b·c).

由于结合律成立，(a·b)·c=a·(b·c)可记做a·b·c.

(c)有单位元(Identity):

存在e∈G,任意a∈G.a·e=e·a=a.

(d)有逆元(Inverse):

任意a∈G,存在b∈G, a·b=b·a=e. 记为$b=a^{-1}$.

1 群的概念

（2） 简单例子

例　$G=\{1,-1\}$在普通乘法下是群。

证：1）封闭性：$1\times 1=1$　$(-1)\times(-1)=1$　$(-1)\times 1=-1$　$1\times(-1)=-1$

2）结合律：成立

3）单位元：1

4）逆元素：1的逆元是1，-1的逆元是-1

例　$G=\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$在mod n的加法下是群.

证：1）封闭性：除以n的余数只能是$\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$，故封闭性成立

2）结合律：成立

3）单位元：0

4）逆元素：对任意元素a有$(a+(n-a)) \bmod n = 0$，a的逆元$a^{-1}=n-a$

1 群的概念

例　二维欧氏空间所有刚体旋转$T=\{T_a\}$构成群。其中$Ta = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$

证：1)封闭性：

$$TbTa = \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos a\cos b - \sin a\sin b & \sin a\cos b + \cos a\sin b \\ -\sin a\cos b - \cos a\sin b & \cos a\cos b - \sin a\sin b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(a+b) & \sin(a+b) \\ -\sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix} = T(b+a)$$

2)结合律：成立$(T\alpha T\beta)T\gamma = T\alpha(T\beta T\gamma) = T\alpha T\beta T\gamma$

3)单位元：$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4)逆元素：Ta的逆元即$T\text{-}a$

1 群的概念

- 前两例群元素的个数是有限的，所以是**有限群**；后一例群元素的个数是无限的，所以是**无限群**。
- 有限群G的元素个数叫做群的阶,记做|G|。
- 设G是群,H是G的子集,若H在G原有的运算之下也是一个群,则称为G的一个子群。
- 若群G的任意二元素a,b恒满足ab=ba。则称G为交换群，或Abel群。

1 群的概念

(a)单位元唯一 $e_1e_2=e_2=e_1$

(b)消去律成立 $ab=ac \rightarrow b=c$,

$ba=ca \rightarrow b=c$

(c)每个元的逆元唯一 $aa^{-1}=a^{-1}a = e$,

$ab^{-1} = ba^{-1} = e$, $aa^{-1} = ab^{-1}$, $a^{-1}=b$

(d)$(ab\ldots.c)^{-1} = c^{-1} \ldots b^{-1}a^{-1}$.

$c^{-1} \ldots b^{-1}a^{-1}\cdot ab\ldots c = e$

1 群的概念

（e）G有限，$a \in$ G，则存在最小正整数r，使得a^r = e.且$a^{-1} = a^{r-1}$.

证 设$|G|=g$,则$a, a^2, \ldots, a^g, a^{g+1} \in$ G,

由鸽巢原理其中必有相同项。

设$a^m = a^l$, $1 \le m < l \le g+1$, $e = a^{l-m}$, $1 \le l-m \le g$,

令$l-m=r$.则有$a^r = a^{r-1}a$=e.即$a^{-1}=a^{r-1}$.

既然有正整数r使得$a^r = e$,其中必有最小者，

不妨仍设为r. r称为a的阶。

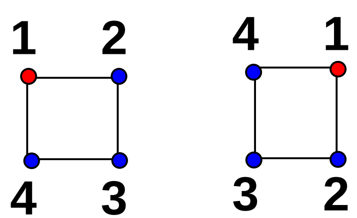
易见 $H=\{a, a^2, \ldots a^{r-1}, a^r = e\}$在原有运算下也是一个群。

着色问题的等价类

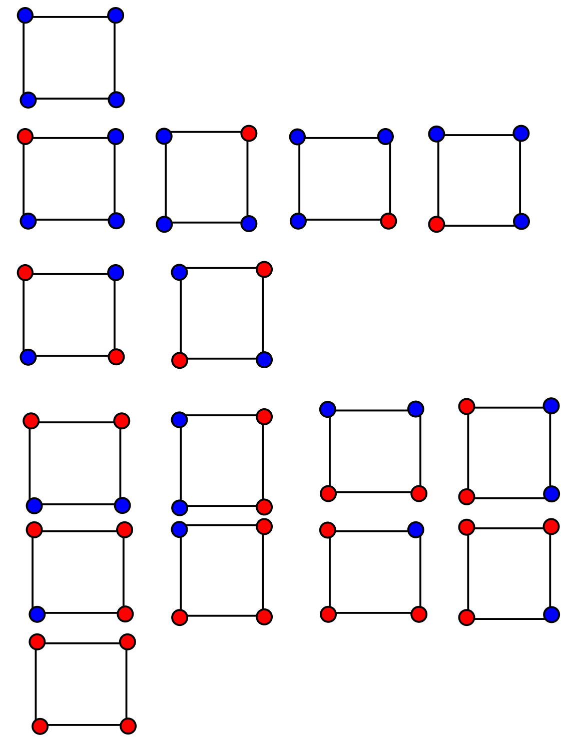
- 红蓝两种颜色给正方形的四个顶点着色，存在多少种不同的方案？

  2^4

- 若允许正方形转动，有多少种方案？
- 转动的表示？



Rotate 90°
(1234) →(4123)



2 置换群

- 置换群是最重要的有限群，所有的有限群都可以用之表示。
- 置换：[1,n]到自身的1-1映射称为n阶置换。[1,n]目标集上的置换表示为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$，$a_1a_2\dots a_n$是[1,n]中元的一个排列。
- n阶置换共有n!个，同一置换用这样的表示可有n!个表示法。例如 $p_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$，n阶置换又可看作[1,n]上的一元运算，一元函数。

2 置换群

- 置换乘法

$$P_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$P_1P_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&2&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

$$P_2P_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&2&1\\4&2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}.$$

- $P_2P_1 \neq P_1P_2$.
- 置换不满足交换律
- 但是满足结合律

2 置换群

- (1)置换群(permutation group)

[1,n]上的由多个置换组成的集合在上面的乘法定义下构成一个群,则称为置换群。

- (a)封闭性 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$
- (b)可结合性
- $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$

  $=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}\right)$
- (c) 有单位元 $e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

  (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

2 置换群

- 例 等边三角形的转动群。
- 不动

  $P1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$,

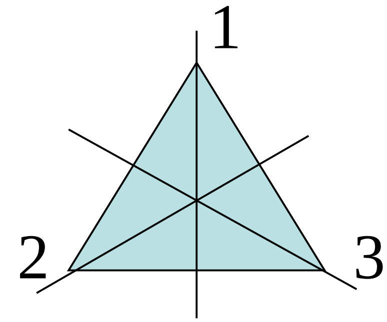
- 绕中心转动$\pm 120^{o}$

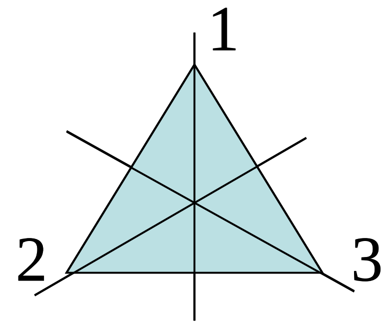
  $P2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $P3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$,

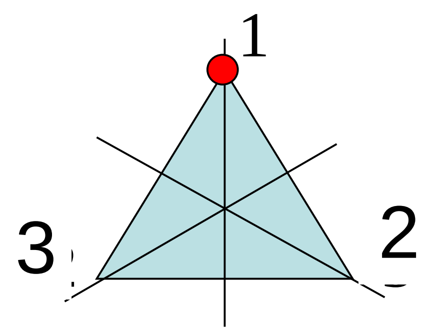
- 绕对称轴翻转。

  $P4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$,

  $P5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $P6=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$,







4.2 置换群

- [1,n]上的所有置换(共n!个)构成一个群，称为n阶对称群(Symmetric group)，记做S_n.
- 集合{1，2，3}的三个元素置换群组成S_3

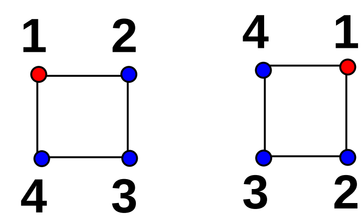
$P1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ $P2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ $P3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$

$P4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ $P5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ $P6=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$

- 注意：一般说[1,n]上的一个置换群，不一定是指S_n.但一定是S_n的某一个子群。

4.3循环、奇循环与偶循环

- $(a_1a_2\ldots a_m) = \begin{pmatrix} a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a_m \\ a_2 a_3 \ldots a_m\ a_1 \end{pmatrix}$ 称为置换的循环表示。
- 于是 $\begin{pmatrix} 12345 \\ 43152 \end{pmatrix} = (14523)$ $\begin{pmatrix} 12345 \\ 31254 \end{pmatrix} = (132)(45)$,
  $\begin{pmatrix} 12345 \\ 52314 \end{pmatrix} = (154)(2)(3)$.
- $(a_1a_2\ldots a_m)$称为m阶循环；
  $(a_1a_2\ldots a_m)=(a_2a_3\ldots a_ma_1)=\ldots=(a_ma_1\ldots a_{m-1})$有m种表示方法。
- 若两个循环无共同文字，称为不相交的，不相交的循环相乘可交换。
- 如(132)(45)= (45)(132).
- 若$p=(a_1a_2\ldots a_n)$,则$p^n =(1)(2)\ldots(n)=e$.
  - 如$p=(123)$ $p^2=(321)$ $p^3=(1)(2)(3)$



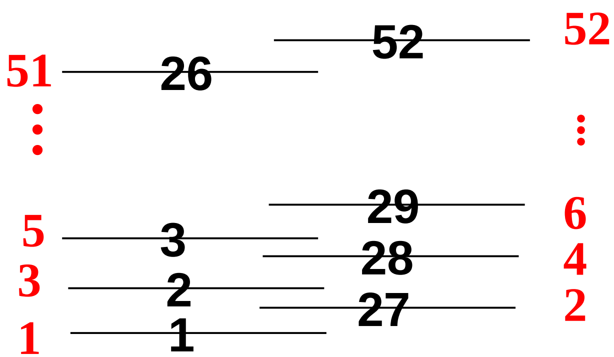
Rotate 90°
(1234) →(4123)
（1->4->3->2->1)

4.3循环、奇循环与偶循环

例 一副扑克牌，一分为二，交错互相插入(洗牌)，这样操作一次相当于一个置换p。

$$i^{p}=\begin{cases}(i+1)/2, i=1,3,5,\ldots,51.\\ i/2+26, i=2,4,6,\ldots,52.\end{cases}$$

$p=\binom{i}{i^{p}}$，第i个位置被i^{p}号牌占据.



先放1,再放27,放2,放28………

$p = (1)\ (2\ 27\ 14\ 33\ 17\ 9\ 5\ 3)$
$(4\ 28\ 40\ 46\ 49\ 25\ 13\ 7)$
$(6\ 29\ 15\ 8\ 30\ 41\ 21\ 11)$
$(10\ 31\ 16\ 34\ 43\ 22\ 37\ 19)$
$(12\ 32\ 42\ 47\ 24\ 38\ 45\ 23)(18\ 35)$
$(20\ 36\ 44\ 48\ 50\ 51\ 26\ 39)\ (52)$

1阶循环2个
2阶循环1个
8阶循环6个

如此操作多少轮，所有的牌又恢复原顺序？

$p^{8} = e$

4.3循环、奇循环与偶循环

- **定理** 任一置换可表成若干不相交循环的乘积。
- **证** 对给定的任一置换$p=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$，从1开始搜索
- $1 \xrightarrow{p} a_{i1} \xrightarrow{p} a_{i2} \xrightarrow{p} \dots \xrightarrow{p} a_{ik} \xrightarrow{p} 1$得一循环$(1\ a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{ik})$，
- 若$(1\ a_{i1}\ \dots\ a_{ik})$包含了$[1, n]$的所有文字，则命题成立。
- 否则在余下的文字中选一个，继续搜索，又得一循环。直到所有文字都属于某一循环为止。

因不相交循环可交换，故除了各个循环的顺序外，任一置换都有唯一的循环表示。

4.3循环、奇循环与偶循环

- 共轭类

一般可以把S_n中任意一个置换p分解为若干不相交的循环乘积。

$$P=(a_1\ a_2\dots a_{k1})(b_1\ b_2\dots b_{k2})\dots.(h_1\ h_2\dots h_{kl})$$

其中$k_1+k_2+\dots+k_l = n$，设k阶循环出现的次数为 c_k，用$(k)^{ck}$表示，则S_n中置换的格式为

$$(1)^{c1}(2)^{c2}\dots(n)^{cn}$$

$$\sum_{k=1}^{n} kC_k = n$$

例：(1)(2 3)(4 5 6 7)的格式是$(1)^1(2)^1(4)^1$

- Sn中有相同格式的置换全体构成一个共轭类。

4.3循环、奇循环与偶循环

- **定理1** Sn中属$(1)^{c1}(2)^{c2}\ldots(n)^{cn}$共轭类的元素的个数为

$$\frac{n!}{C_1!C_2!\ldots C_n!\,1^{C_1}2^{C_2}\ldots n^{C_n}}$$

- 证 **$(1)^{C1}(2)^{C2}\ldots(n)^{Cn}$ 即**

$$\underbrace{\overbrace{(\cdot)}^{1个}\ldots(\cdot)}_{C_1个}\underbrace{\overbrace{(\cdot\cdot)}^{2个}\ldots(\cdot\cdot)}_{C_2个}\ldots\underbrace{\overbrace{(\cdot\ldots\cdot)}^{n个}\ldots(\cdot\ldots\cdot)}_{C_n个}$$

(1)一个长度为k的循环有k种表示, $(a_1a_2\ldots a_k)=(a_2a_3\ldots a_ka_1)=\ldots=(a_ka_1\ldots a_{k-1})$

C_k个长度为k的循环重复了k^{Ck}次;

(2)互不相交的C_k个循环进行全排列有$C_k!$种表示.

1,2,…,n的全排列共有n!个，给定一个排列，装入格式得一置换，除以前面的重复度得 $n!/(C1!C2!\ldots Cn!1^{C1}2^{C2}\ldots n^{Cn})$个不同的置换.

4.3循环、奇循环与偶循环

- S4={(1)(2)(3)(4),(12),(13),(14),(23),(24),(34),(123),(124),(132),(134),(142),(143),(234),(243),(1234), (1243), (1324), (1342), (1423),(1432),(12)(34),(13)(24),(14)(23)}.
- **例4 S4中 $(2)^2$ 共轭类有$4!/(2!2^2)=3$**

  (12)(34),(13)(24),(14)(23).

  $(1)^1$ $(3)^1$ 共轭类有$4!/(C1!C3!1^1 3^1)=8$

  (123),(124),(132),(134),(142),(143),(234),(243),

  $(1)^2$ $(2)^1$ 共轭类有$4!/(2!1!1^2\ 2^1)=6$

  (12),(13),(14),(23),(24),(34)

$$\frac{n!}{C_1!C_2!\ldots C_n!1^{C_1}2^{C_2}\ldots n^{C_n}}$$

4.3循环、奇循环与偶循环

- 2阶循环叫做对换
- **定理** 任一循环都可以表示为对换的积。
- $(1\ 2\ \ldots n)=(1\ 2)(1\ 3)\ldots(1\ n)$
- 证明：设 $(1\ 2\ \ldots\ n-1) = (1\ 2)\ (1\ 3)\ \ldots(1\ n-1)$
- $(1\ 2\ 3\ldots n-1)(1\ n)$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n-1\\ 2 & 3 & 4 & \ldots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n\\ n & 2 & 3 & \ldots & n-1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & \ldots & n-1 & 1 & n\\ 2 & 3 & \ldots & n-1 & n & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3\ldots n)$$

- 每个置换的分解形式不是唯一的
- $(1\ 2\ \ldots n)=(2\ 3)(2\ 4)\ldots(2\ n)(2\ 1)$
- $(1\ 2\ 3) = (12)(13) = (12)(13)(31)(13)$

4.3循环、奇循环与偶循环

- 任一置换表示成对换的个数的奇偶性是唯一
- 证明：设f的表达式为 $f=\prod_{i<j}(x_i-x_j)$

设$l,k(l<k)$为正整数常数，则有

$$f=(x_l-x_k)A\prod_{i\neq l,k}(x_i-x_l)(x_i-x_k)$$

其中A为不含有x_k和x_l项的部分

若将l和k换位，$(l\ \ k)f=-f$

每次对换都改变f的符号，则对应的分解的奇偶性是唯一的。

4.3循环、奇循环与偶循环

置换分成两大类：奇置换与偶置换。

若一个置换能分解为奇数个换位之积，则为奇置换，若可以分解为偶数个换位之积，则为偶置换。

S = (1)(25)(37)(46) 3个换位，奇置换

S = (1) (2) (3) (4) (5) 0个换位，偶置换

投票 最多可选1项

设置

数字华容道

- 例 0表示空格
- 如果限制任一变动都是与0做相邻的对换，是否能够由左图生成右图？

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	0

?

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	0

A 能

B 不能

C 不知道

提交

4.3循环、奇循环与偶循环

- 例 0表示空格
  - 有些布局通过左图偶数次换位得到，有些是奇数次换位得到，但奇数次换位得到的不能通过偶数次换位来得到。
  - p=(0)(1 15)(2 14)(3 13)(4 12)(5 11)(6 10)(7 9)(8) 奇置换。
- 如果限制任一变动都是与0做相邻的对换，是否能够由左图生成右图？
  - 0从右下角出发回到右下角，水平方向上，垂直方向上都做了偶数次对换。一个奇置换不会等于一个偶置换。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	0

?

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	0

4.3循环、奇循环与偶循环

- [1,n]上的所有置换(共n!个)构成一个群，称为n阶对称群(Symmetric group)，记做S_n.
- 定理 Sn中所有偶置换构成一阶为(n!)/2的子群称为交错群，记做An.

(1)封闭性:偶置换相乘还是偶置换

(2)结合律：置换群的结合律

(3)单位元：置换群的单位元素本身就是偶置换

(4)逆元 $(i\ k)^{-1} = (i\ k)$

设 $p = (i_1\ j_1)(i_2\ j_2)\ldots(i_i\ j_i)$,则$p^{-1} = (i_i\ j_i)\ldots(i_1\ j_1)$

故An为群

令Bn=Sn-An, |Bn|+|An|=n!,

则(i j) Bn $\subseteq$An，所以 |Bn|≤|An|,

(i j) An $\subseteq$ Bn，所以|An|≤|Bn| ∴|An|=|Bn|=(n!)/2

4.4 Burnside引理

- Burnside引理(Burnside lemma(1897)
  - **Cauchy(1845)-Frobenius(1887) lemma**
  - Orbit-counting theorem
  - The result is not due to Burnside himself, who merely quotes it in his book 'On the Theory of Groups of Finite Order', attributing it instead to Frobenius(1887).

设$G=\{a_1,a_2,\ldots a_g\}$是目标集$[1,n]$上的置换群。每个置换都写成不相交循环的乘积。$c_1(a_k)$是在置换a_k的作用下不动点的个数，也就是长度为1的循环的个数。G将$[1,n]$划分成l个等价类。等价类个数为：$l=\frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{g}c_1(a_j)$

4.4 Burnside引理

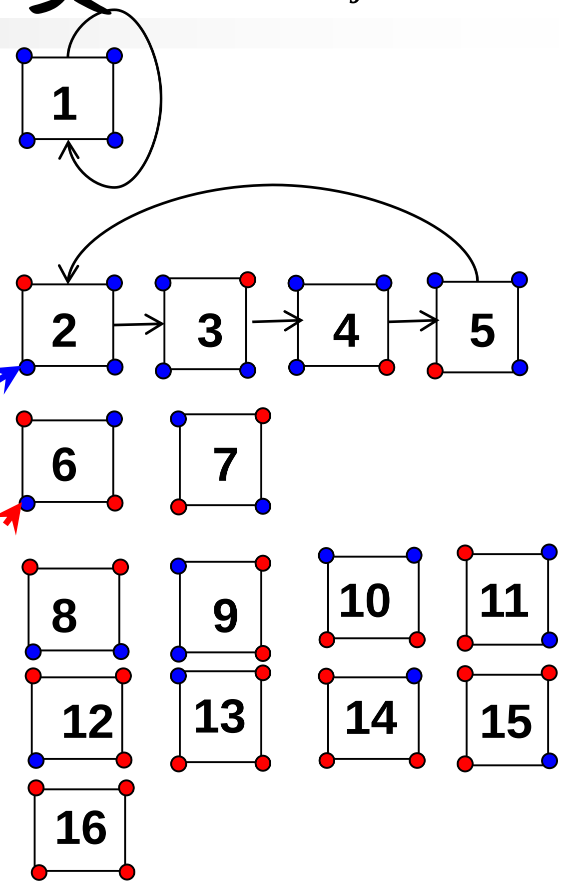
- Burnside引理(Burnside lemma(1897)
  - 设G={a1,a2,…ag}是目标集[1,n]上的置换群。每个置换都写成不相交循环的乘积。c1(ak)是在置换ak的作用下不动点的个数，也就是长度为1的循环的个数。 G将[1,n]划分成*l*个等价类。等价类个数为：

$$l=\frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{g}c_1(a_j)$$

$$l=\frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{g}c_1(a_j)$$

着色问题的等价类

- 正方形顶点二着色只考虑旋转的等价类个数: 6
- |G|:置换个数
  - 只考虑旋转: 4
- 置换群 置换pi使图像*k*变为*l*，则称*k*和*l*属于同一个等价类
  - *Rotate 0 degree:*
    p_0=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)
  - *rotate 90 degree:*
    p_1=(1)(2 3 4 5)(6 7)(8 9 10 11)(12 13 14 15)(16)
  - *rotate 180 degree:* 置换pi使图像*k*不变
    p_2=(1)(2 4)(3 5)(6)(7)(8 10)(9 11)(12 14)(13 15)(16)
  - *rotate 270 degree:*
    p_3=((1)(2 5 4 3)(6 7)(8 11 10 9)(12 15 14 13)(16)



4.4 Burnside引理

- k不动置换类(Stabilizer)
- 设G是[1,n]上的一个置换群。G是Sn的一个子群. k∈[1,n]， G中使k元素保持不变的置换全体，称为k不动置换类，记做Zk.
- 如G={e,(1 2),(3 4), (1 2)(3 4)}
- Z1={e,(3 4)}
- Z2={e,(3 4)}
- Z3=Z4={e,(1 2)}
- 如A4={ e,(123),(124),(132),(134),(142), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)}.
  - Z1= { e, (234), (243) }
  - Z2= { e, (134),(143)}
  - Z3= { e, (124), (142) }
  - Z4= { e, (123), (132) }

4.4 Burnside引理

- 定理 置换群G的k不动置换类Z_k是G的一个子群。

  封闭性：$k \xrightarrow{P_1} k \xrightarrow{P_2} k, k \xrightarrow{P_1P_2} k.$

  结合性：自然。

  有单位元：G的单位元属于Z_k.

  有逆元：$P \in Z_k, k \xrightarrow{P} k$，则$k \xrightarrow{P^{-1}} k, P^{-1} \in Z_k.$

$\therefore Z_k$是G的子群.

4.4 Burnside引理

- 等价类(Orbit)

  $G=\{(1)(2)(3)(4),(12),(34),(12)(34)\}$.

E1=E2={1,2}　E3=E4={3 4}

- 在G下，1变2，3变4，但1不变3。
  $Z_1=Z_2=\{e,(34)\}$, $Z_3=Z_4=\{e,(12)\}$.
- {1,2….n}中的数k，若存在置换pi使k变为l，则称k和l属于同一个等价类,数k所属的等价类记为E_k
- 一般$[1,n]$上G将$[1,n]$分成若干等价类，满足等价类的3个条件.(a)自反性;(b)对称性;(c)传递性。
- 对于A_4, $=\{e,(123),(124),(132),(134),(142),(143),(234),(243),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$.

E1=E2=E3=E4={1,2,3,4}

在每行中|Ek|*|Zk|表示是什么？

着色问题的等价类

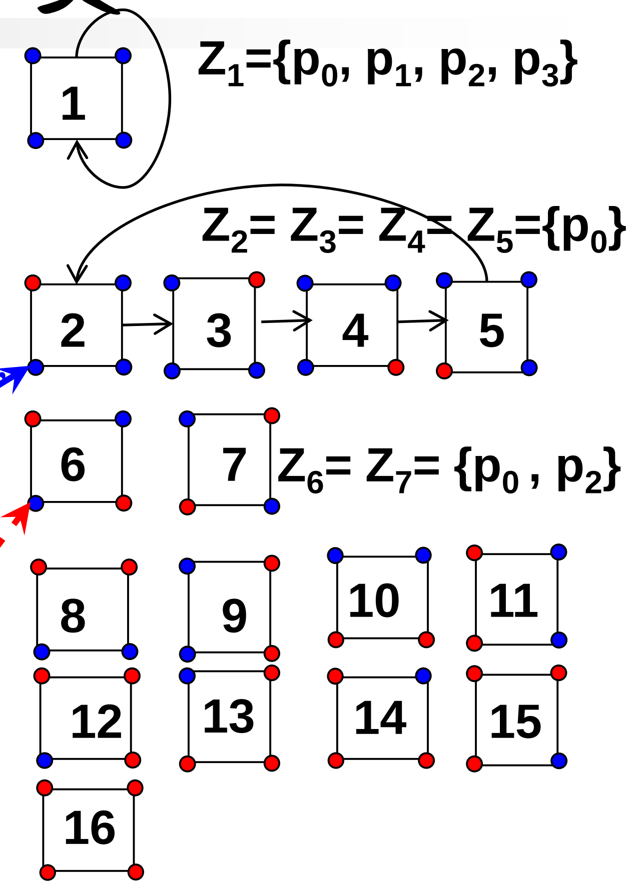
- 正方形顶点二着色只考虑旋转的等价类个数: 6
- |G|:置换个数
  - 只考虑旋转: 4
- 置换群 置换pi使图像*k*变为*l*，则称*k*和*l*属于同一个等价类
  - *Rotate 0 degree:*

    p_0=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)
  - *rotate 90 degree:*

    p_1=(1)(2 3 4 5)(6 7)(8 9 10 11)(12 13 14 15)(16)
  - *rotate 180 degree:* 置换pi使图像*k*不变

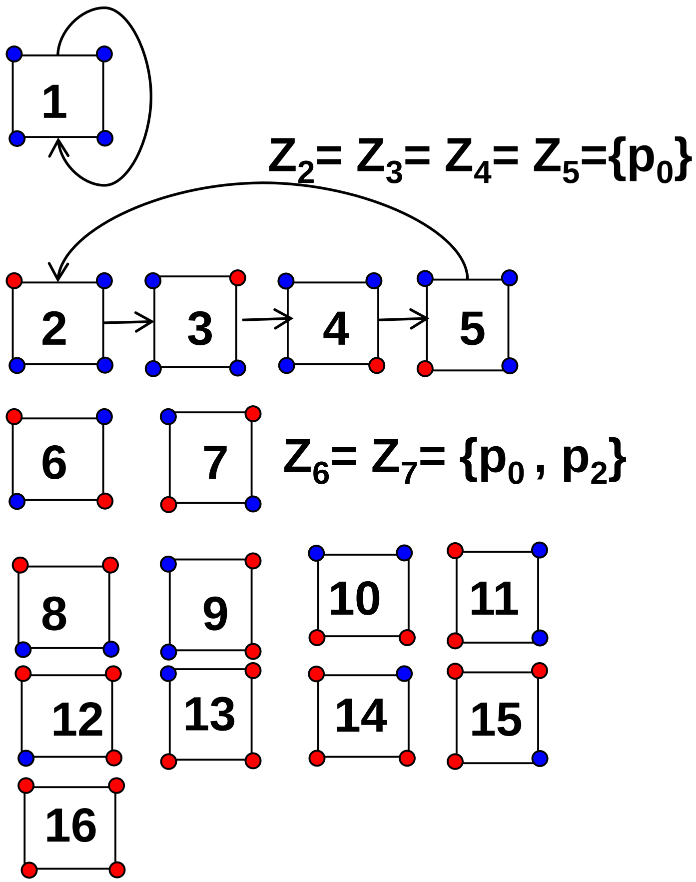
    p_2=(1)(2 4)(3 5)(6)(7)(8 10)(9 11)(12 14)(13 15)(16)
  - *rotate 270 degree:*

    p_3=((1)(2 5 4 3)(6 7)(8 11 10 9)(12 15 14 13)(16)



$|E_k|*|Z_k|=|G|$?

在每行中|Ek|*|Zk|表示是什么？



按照置换的效果分类：

每行第一个元素在所有置换下产生了**|Ek|**个结果

产生每个元素的置换有**|Zk|**个

4.4 Burnside引理

- **定理(Orbit-stabilizer theorem)** 设G是[1,n]上的一个置换群，E_k是[1,n]在G的作用下包含k的等价类，Z_k是k不动置换类。有$|E_k||Z_k|=|G|$.
- 证 设$|E_k|=m$,$E_k=\{a_1(=k),a_2,\ldots,a_m\}$ $k=a_1 \xrightarrow{Pi} a_i$,

$i=1,2,\ldots,m$. $P=\{p1,p2,\ldots,pm\}$

令$Gi=Z_kp_i$,$i=1,2,\ldots,m$.则k在Z_kp_i的作用下变为a_i

$Gi\subseteq G$(G关于Z_k的陪集分解)$i\neq j$,$Gi\cap Gj=\Phi$.

$G1+G2+\ldots+Gm \subseteq G$.

另一方面，任意$p\in G$. $k \xrightarrow{pj} aj \xrightarrow{Pj^{-1}} k$

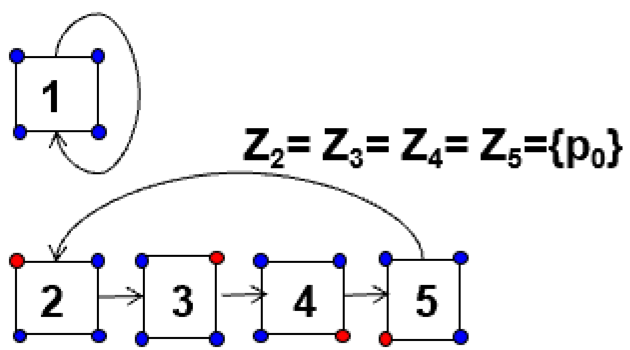
$PjPj^{-1}\in Zk$, $Pj\in ZkPj=Gj$.

$\therefore$ **$G \subseteq G1+\ldots+G_m$**.

从而，$G=G_1+G_2+\ldots+G_m$.

$|G|=|G_1|+|G_2|+\ldots+|G_m|=|Z_kp_1|+|Z_kp_2|+\ldots+|Z_kp_m|$

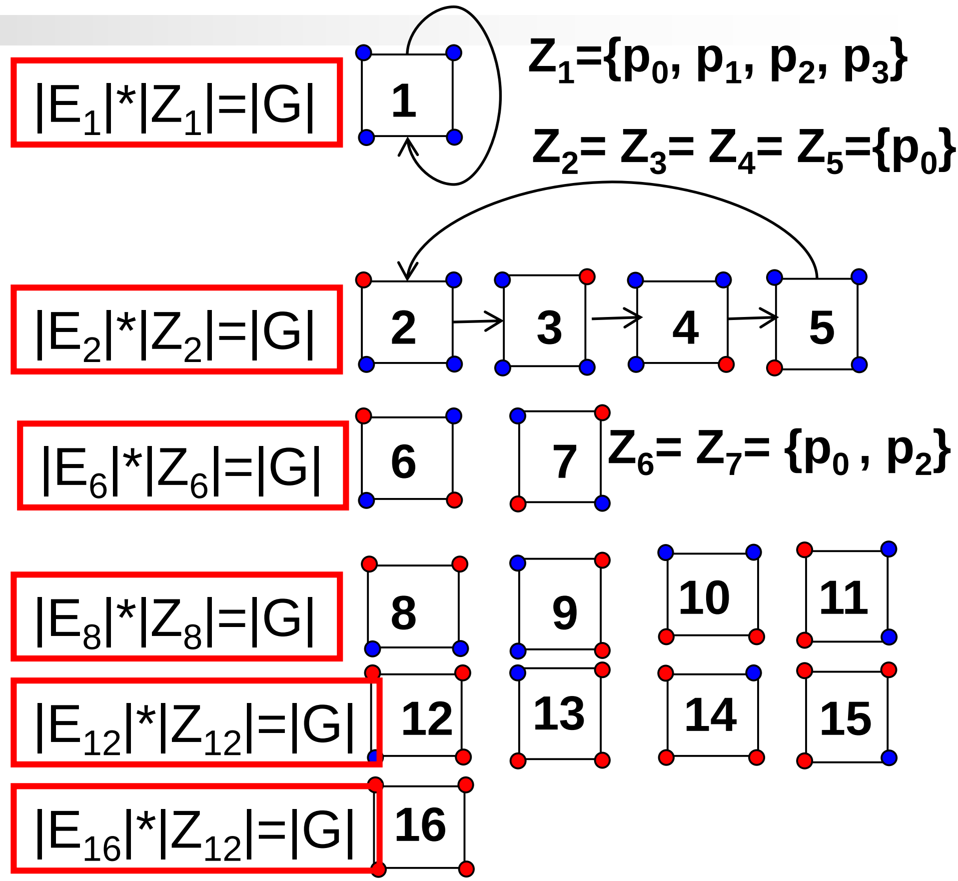
$=|Zk|\cdot m=|Zk|\cdot|Ek|$



$|E_k|*|Z_k|=|G|$

- $|E_k|*|Z_k|=|G|$?
  - 每个Orbit有|Ek|个对象
  - 每个对象的Zk都是一样的
  - 所以每个Orbit的Zk的累加和都有|Ek|*|Zk|=|G|
- 按Orbit遍历所有对象的Zk，假设Orbit即等价类的个数为*l*.
- *等价类的个数*(Orbit)*即为*
  - 每个Orbit有|Ek|个对象
  - 每个对象的Zk都是一样的
  - 每个Orbit都有|Ek|*|Zk|=|G|
  - 所以Oribt的个数等于

$$l=\sum_{k=1}^{n}|Z_k|/|G|$$



Zk是不是可以直接数出来呢？

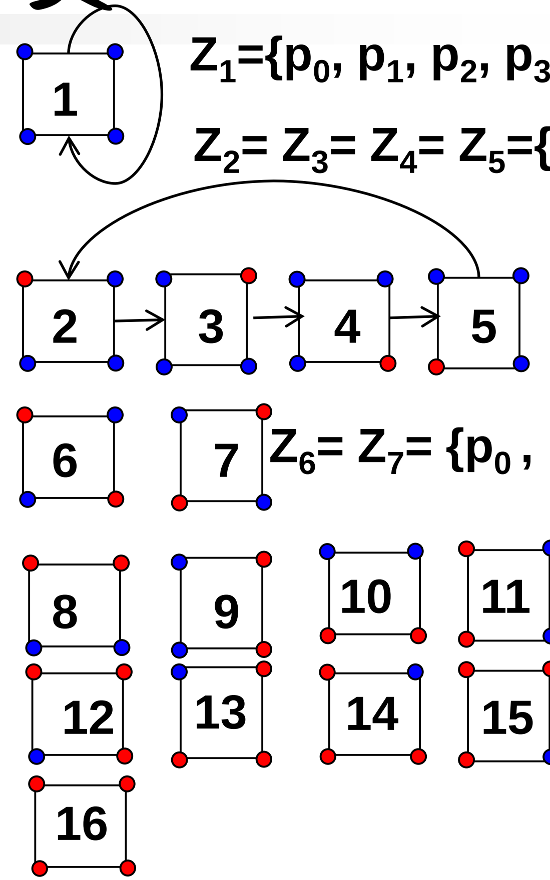
着色问题的等价类

- 正方形顶点二着色只考虑旋转的等价类个数: 6
- |G|:置换个数
  - 只考虑旋转: 4
- 置换群 置换pi使图像k变为l，则称k和l属于同一个等价类，
  - *Rotate 0 degree:* p_0=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)
  - *rotate 90 degree:*

    p_1=(1)(2 3 4 5)(6 7)(8 9 10 11)(12 13 14 15)(16)
  - *rotate 180 degree:*

    p_2=(1)(2 4)(3 5)(6)(7)(8 10)(9 11)(12 14)(13 15)(16)
  - *rotate 270 degree:*

    p_3=((1)(2 5 4 3)(6 7)(8 11 10 9)(12 15 14 13)(16)



Z_1={p_0, p_1, p_2, p_3}

Z_2= Z_3= Z_4= Z_5={p_0}

Z_6= Z_7= {p_0 , p_2}

$$\boxed{|E_k|*|Z_k|=|G|}$$

$$l = \sum_{k=1}^{n} |Z_k| / |G|$$

简单例子

$|E_k|*|Z_k|=|G|$

- 例如，
  G={e,(12),(34),(12)(34)}.
- $c_1(a_1)=4, c_1(a_2)=2,$
- $c_1(a_3)=2, c_1(a_4)=0.$
- E1=E2={1, 2} E3=E4={3, 4}
- $l=[4+2+2+0]/4=2.$
- $S_{jk}=\begin{cases}1, & k^{a_j}=k,\\ 0, & k^{a_j}\neq k.\end{cases}$

S_{jk} (a_j \ k)	1 2 3 4	$c_1(a_j)$	
(1)(2)(3)(4)	1 1 1 1	4	$(1)^4$
(12)(3)(4)	0 0 1 1	2	$(1)^2(2)^1$
(1)(2)(34)	1 1 0 0	2	$(1)^2(2)^1$
(12)(34)	0 0 0 0	0	$(2)^2$
$\|Z_k\| \rightarrow$	2 2 2 2	8	

对第j行求和得$c_1(a_j)$,对第k列求和得$|Z_k|$

$$\text{表中元素的总和}=\sum_{j=1}^{g}\sum_{k=1}^{n}S_{jk}=\sum_{k=1}^{n}|Z_k|=\sum_{j=1}^{g}c_1(a_j)$$

4.4 Burnside引理

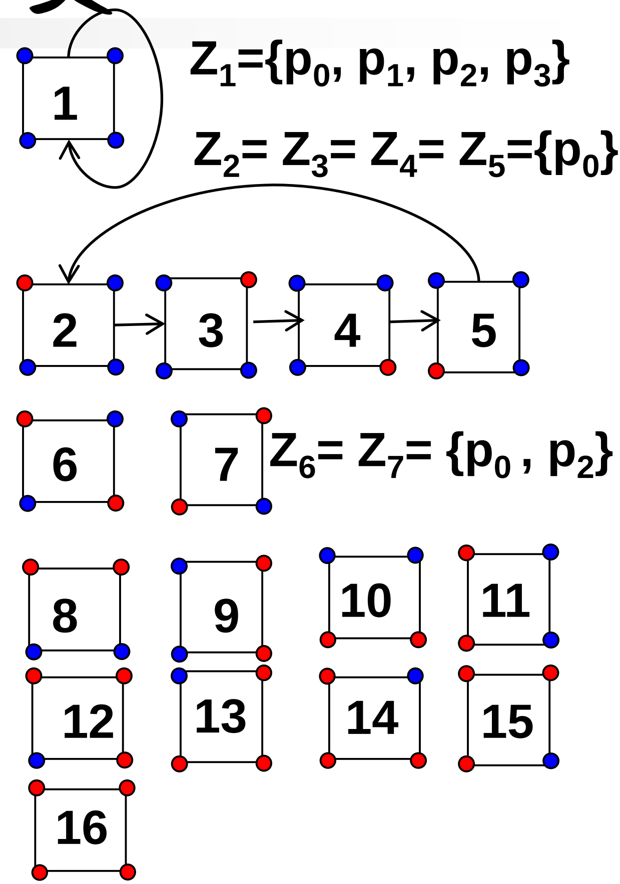
- 一般而言，与上表相仿，有下面表格，

其中 $S_{jk}=\begin{cases}1, & k^{a_j}=k,\\ 0, & k^{a_j}\neq k.\end{cases}$

Sjk \ k, aj	1	2	…	n	c1(aj)
a1	S11	S12	…	S1n	c1(a1)
a2	S21	S22	…	S2n	c1(a2)
…	…	…			…
ag	Sg1	Sg2	…	Sgn	c1(ag)
|Zk|	|Z1|	|Z2|	…	|Zn|	$\sum_{k=1}^{n}\|Z_k\|=\sum_{j=1}^{g}c_1(a_j)$

着色问题的等价类

- 正方形顶点二着色只考虑旋转的等价类个数: 6
- |G|:置换个数
  - 只考虑旋转: 4
- 置换群 置换pi使图像*k*变为*l*，则称*k*和*l*属于同一个等价类,
  - *Rotate 0 degree:*
    p_0=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)
  - *rotate 90 degree:*
    p_1=(1)(2 3 4 5)(6 7)(8 9 10 11)(12 13 14 15)(16)
  - *rotate 180 degree:*
    p_2=(1)(2 4)(3 5)(6)(7)(8 10)(9 11)(12 14)(13 15)(16)
  - *rotate 270 degree:*
    p_3=((1)(2 5 4 3)(6 7)(8 11 10 9)(12 15 14 13)(16)



$$l=\sum_{k=1}^{n}|Z_k|/|G|=\frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{g}c_1(a_j)$$

$|E_k||Z_k|=|G|$. $$\sum_{j=1}^{g}\sum_{k=1}^{n}S_{jk}=\sum_{k=1}^{n}|Z_k|=\sum_{j=1}^{g}c_1(a_j)$$

$[1,n]$分成l个等价类。

按Orbit来数$[1,n]=E_{a1}+E_{a2}+\ldots+E_{al}$.

- 若j, i同属一个等价类，则$E_i=E_j,|E_i|=|E_j|$

因$|E_i||Z_i|=|G|$,故$|Z_i|=|Z_j|$.

每个等价类中 $\sum_{i\in E_{aj}}|Z_i|=|E_{aj}||Z_{aj}|$

一共l个等价类中 $$\sum_{k=1}^{n}|Z_k|=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i\in E_{aj}}|Z_i|=\sum_{j=1}^{l}|E_{aj}||Z_{aj}|$$

$$=\sum_{j=1}^{l}|G|=l|G|$$

$$\boxed{l=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{n}|Z_k|=\frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{g}c_1(a_j)}$$

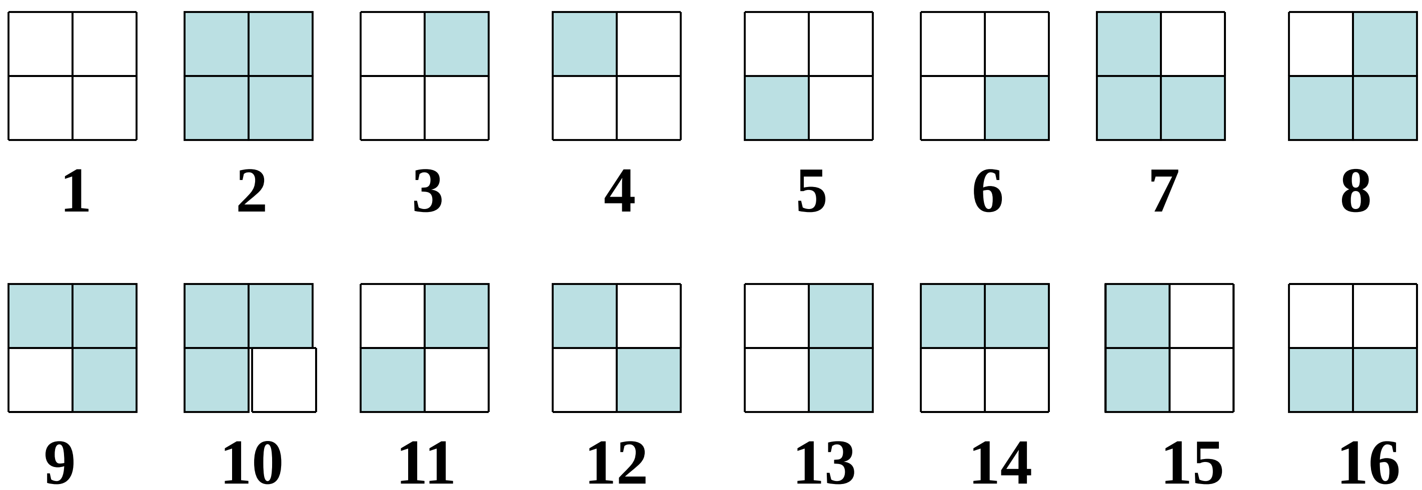
4.4 Burnside引理

- Burnside引理(Burnside lemma(1897)
  - **Cauchy(1845)-Frobenius(1887) lemma**
  - Orbit-counting theorem
  - 设G={a1,a2,…ag}是目标集[1,n]上的置换群。每个置换都写成不相交循环的乘积。c1(ak)是在置换ak的作用下不动点的个数，也就是长度为1的循环的个数。 G将[1,n]划分成*l*个等价类。等价类个数为：

$$l=\frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{g}c_1(a_j)$$

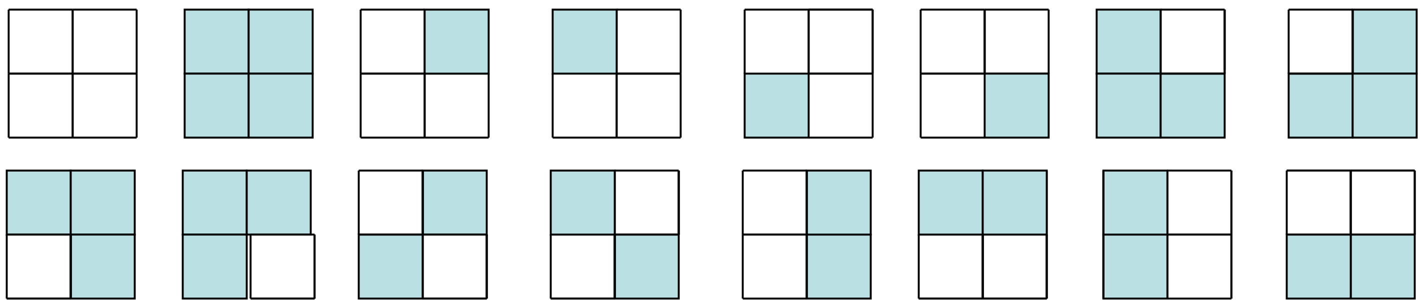
4.4 Burnside引理

- 例 一正方形分成4格，2着色，有多少种方案？
- 图象：看上去不同的图形。
- 方案：经过转动相同的图象算同一方案。图象数总是大于方案数。

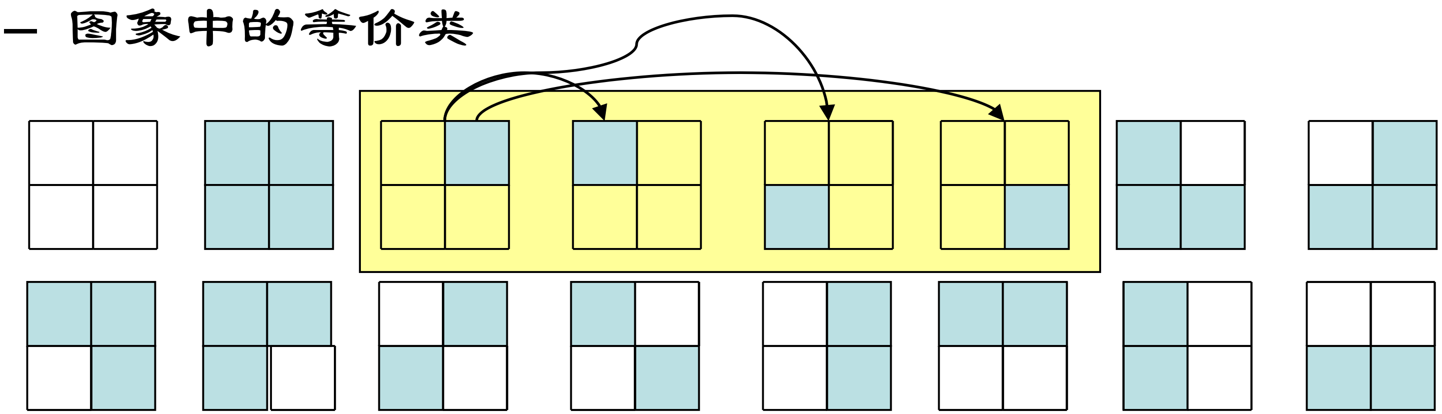


图象与方案

- 图象:固定不动,物理位置上具有不同染色的即为不同的图象

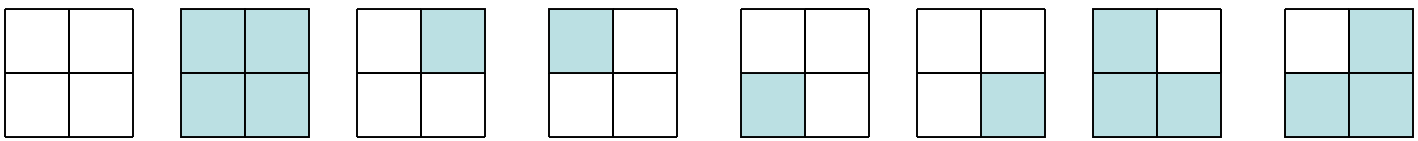


- 方案:经过外力变换,可以完全重合的不同图象为同一个方案
  - 内部结构不变
  - 置换:外力产生的变换,如转动,翻转
  - 图象中的等价类

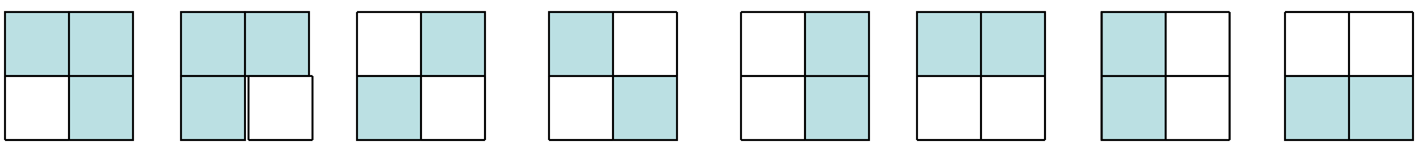


$$l=[c_1(a_1)+c_1(a_2)+\ldots+c_1(a_g)]/|G|$$

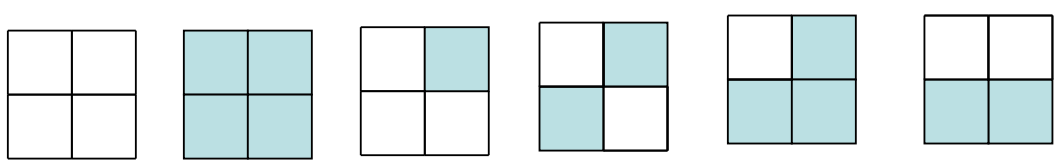
- 不动：a1=(1)(2)…(16)
- 逆时针转90度：a2=(1)(2)(3 4 5 6)(7 8 9 10) (11 12)(13 14 15 16)
- 顺时针转90度：a3=(1)(2)(6 5 4 3)(10 9 8 7)(11 12)(16 15 14 13)
- 转180度：a4=(1)(2)(3 5)(4 6)(7 9)(8 10)(11)(12) (13 15)(14 16)
- (16+2+2+4)/4=6(种方案)



1 2 3 4 5 6 7 8

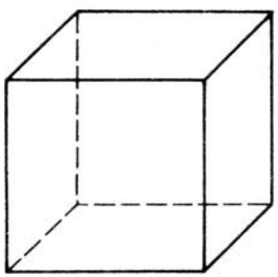


9 10 11 12 13 14 15 16



黑板上的排列组合

用六种不同颜色涂一正方体，一面一色，且每面颜色不同，会有多少种涂法？

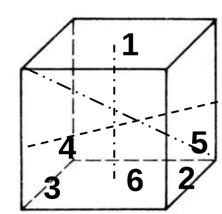


$6*5*P(4,4)/4\ /\ 6 = 30$

Burnside引理？

$$l=\frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{g}c_1(a_j)$$

- 用六种不同颜色涂一正方体，一面一色，且每面颜色不同，会有多少种涂法？
- 正六面体转动群:面的置换表示
  - 不动: $e=(1)(2)(3)\ldots(6!)$ 1个置换 6!个不动点
  - 面面中心转±90度 2*3个置换 无不动点
  - 面面中心转180度 3个置换 无不动点
  - 棱中对棱中转180度 6个置换 无不动点
  - 对角线为轴转±120度 2*4个置换 无不动点
  - 正六面体转动群的阶数 $|G|=24$
- $l=[c_1(e)]/24=6!/24=30$个方案。



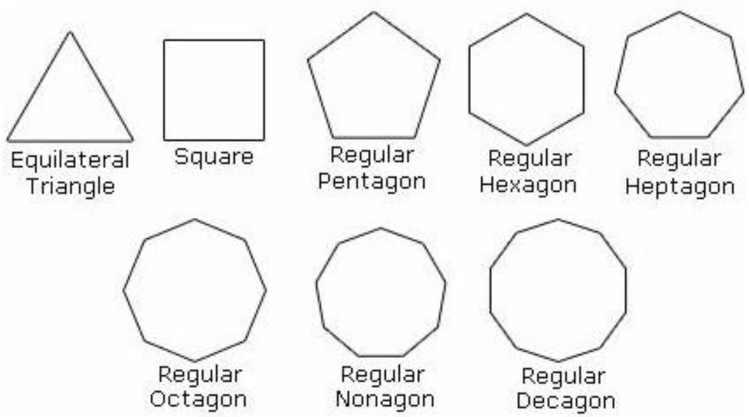
正六面体

4.3循环、奇循环与偶循环

如果两凸多边形的角对应地相等，对应边也相等，这两个多边形就叫做全等多边形。

凸多边形中，如果各边相等且各角也相等，这样的多边形叫做正多边形。

所谓正多面体，是指多面体的各个面都是全等的正多边形，并且各个多面角都是全等的多面角。

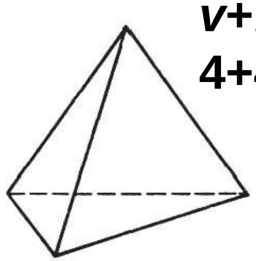


任何凸多面体的顶点数v与面数f的和都较棱数e多2，即$v+f-e=2$。这就是欧拉定理。

4.3循环、奇循环与偶循环

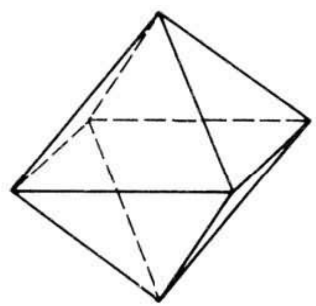
由欧拉定理推出：**凸正多面体只有五种**，即：正四面体、正八面体、正二十面体、正六面体（正方体）、正十二面体，

其中正四面体、正八面体和正二十面体的各面都是正三角形，正六面体的各面是正方形，正十二面体的各面是正五边形。

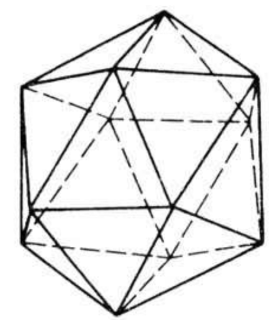


正四面体

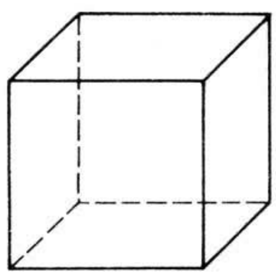
$v+f-e =$
$4+4-6=2$



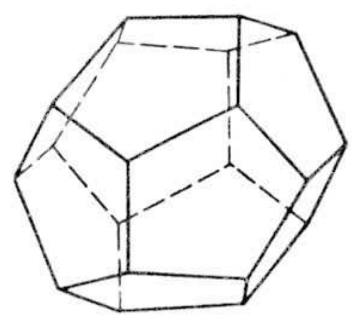
正八面体



正二十面体



正六面体

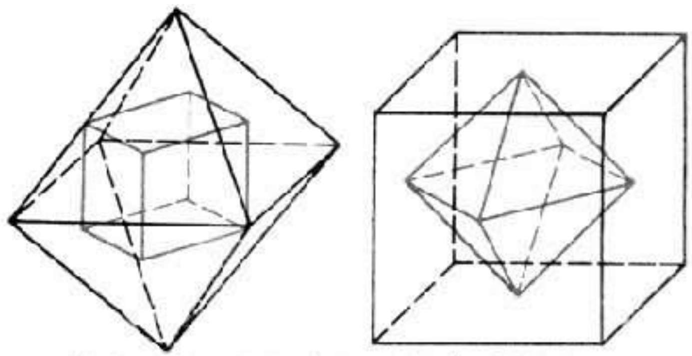


正十二面体

4.3循环、奇循环与偶循环

一个正多面体和以它的各面中心为顶的正多面体，叫做**互为对偶的正多面体**。

正六面体和正八面体是互为对偶的正多面体；正十二面体和正二十面体是互为对偶的正多面体；正四面体的对偶多面体是正四面体。



正六面体对正八面体的对偶图

一多面体在空间运动，其运动前后占有同一个空间位置，一切这样的运动的集合，对于以两个这样的运动相继施行作为乘法构成群，称为**多面体群**。

由几何学可知，正多面体只有5种，即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体。于是有正四面体群、正六（八）面体群、正十二（二十）面体群等三种群．

4.3循环、奇循环与偶循环

正四面体群

不动旋转:（A)(B)(C)(D)

以顶点与对面的中心连线为轴：

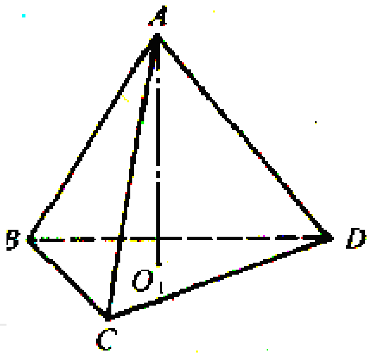
- A 为顶点(AO_1):±120º (A)(*BCD*) and (A)(*BDC*)
- B为顶点:±120º (B) (*ACD*) and (B)(*ADC*)
- C为顶点:±120º (C) (*ABD*) and (C)(*ADB*)
- D为顶点:±120º (D) (*ABC*) and (D)(*ACB*)

共有8个三项循环。

以正四面体*A-BCD*的3对对边之中点联线为旋转轴：作角度为π的3个旋转，分别对应于置换(*AB*)(*CD*)，(*AC*)(*BD*)，(*AD*)(*BC*),这样的12个运动构成群,称为**正四面体群**。

e, (*BCD*),(*BDC*),(*ACD*),(*ADC*)，(*ABD*)，(*ADB*)，(*ABC*)，(*ACB*) ,(*AB*)(*CD*)，(*AC*)(*BD*)，(*AD*)(*BC*),

它与4个文字*A*、*B*、*C*、*D*上的四次交错群A_4同构，因此，四次交错群A_4又称为正四面体群。



4.3循环、奇循环与偶循环

正八面体群或**正六面体群**由24个运动构成群，它与四次对称群S_4同构，所以正八面体群与正六面体群是一致的，都是4次对称群S_4。有时把四次对称群称为正八面体群或正六面体群。

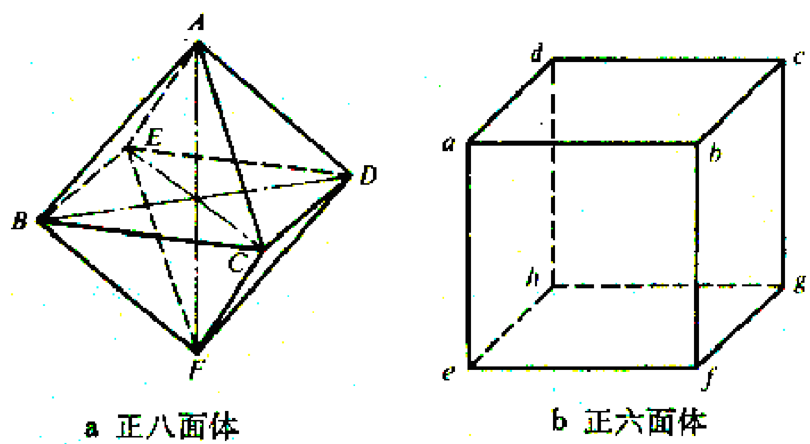
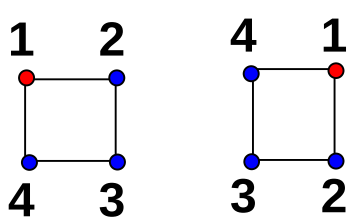


图 2

4.4 Burnside引理

$$l = \frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{g} c_1(a_j)$$

- 针对图像集的转动群来求解
- 求解2着色的不同方案，可以用Burnside引理
- 但是当多种颜色着色，理论上可以用Burnside来求解，但是极其复杂



Rotate 90°
(1234) →(4123)

7.6 举例

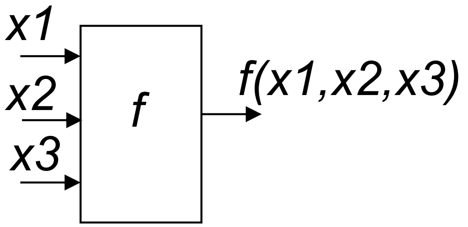
- **例** 3个输入端一个输出端的布尔电路有多少种实质上不同的结构？
- **解** 3个变量的布尔函数形式上有2^8=256个,但有的只是输入端的顺序不同.
- 输入端的变换群是S3。
- 输入端的电平取值共有000~111计8种,定义在输入端的置换集合设为H.
- S3与H之间存在一一对应,S3≅ H f: $S_3 \to H$

$$P_j \to h_j \quad \begin{pmatrix} a_1^{(i)} & a_2^{(i)} & a_3^{(i)} \\ a_{1p_j}^{(i)} & a_{2p_j}^{(i)} & a_{3p_j}^{(i)} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S3}: \overset{x1}{(1)}\overset{x2}{(2)}\overset{x3}{(3)} \qquad (1)^3$$

$$\mathrm{H}: \begin{pmatrix} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \end{pmatrix}$$

$$(1)^8$$



7.6 举例

- 同构与共轭

同构:

一一对应

结构不同

共轭:

结构相同

将G分割为等价类

S3 :{1 2 3}

$P1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $P2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $P3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$P4=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $P5=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $P6=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

H : (000 001 010 011 100 101 110 111)

(? ? ? ? ? ? ? ?)

7.6 举例

S3 : {1 2 3}

$(1)^3$ 1个

$(3)^1$ 2个

$(1)^1(2)^1$ 3个

H:{000 001 010 011 100 101 110 111}

$(1)^8$ 1个

{000 001 010 011 100 101 110 111}

$(1)^2\,(3)^2$ 2个

{000 001 010 011 100 101 110 111}

$(1)^4\,(2)^2$ 3个

{000 001 010 011 100 101 110 111}

输出有0, 1两个取值, 则等同于对{000 001 010 011 100 101 110 111}二着色:

结构总数为$[2^8+2\cdot 2^4+3\cdot 2^6]/6=80$

$$l=[m^{C(\overline{P_1})}+m^{C(\overline{P_2})}+\ldots+m^{C(\overline{P_g})}]/|\overline{G}|.$$

7.6 举例

- 求完全由3个布尔变量决定的且变量顺序无关的布尔电路类型数.
  - 还需要去掉不足3个入端决定的种数,

S2 : {1 2}

$(1)^2$ 1个

$(2)^1$ 1个

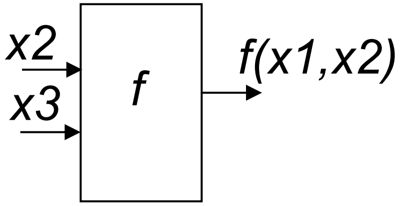
H:{00 01 10 11}

$(1)^4$ 1个

{00 01 10 11}

$(1)^2\,(2)^1$ 1个

{00 01 10 11}

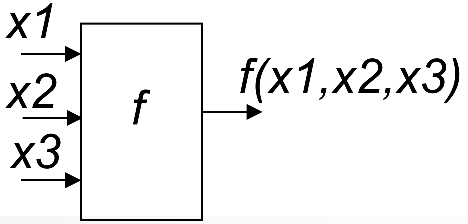


2个输入端的实质不同的结构有

$(2^4+2^3)/2=12$

故完全由3个布尔变量决定的实质不同的结构有

$80-12=68$



等价类

- 置换中的元素k和l，若存在群中的置换pi使k变为l，则称k和l属于同一个等价类,数k所属的等价类记为E_k
  - 染色问题中求图象的等价：Burnside引理
  - 等价图象可以直接排除：
  - 染色问题中根据对象的结构计算等价方案：**Pólya定理**
  - **对象的结构本身在某种变换下是等价的,能否利用这些等价类来计算方案数呢?**
- 求3输入1输出的且变量顺序无关的布尔电路类型数.
  - 输入端的元素集合:{000,001,010,011,100,101,110, 111}
  - 顺序变换可产生4个等价类:
  - {000} {001,010,100} {011,101,110} {111}
  - 由这4个等价类对应不同的输出是否就构成了所求的电路类型数?
  - 2^4 = 16 而非所求出的80?

等价类

- 问题:求2输入1输出的且变量顺序无关的布尔电路类型数
- 输入{00, 01, 10, 11}
- 输入的等价类: {00} {11} {01, 10}
  - 若用该等价类进行计算, 则限制了01和10不能取不同输出, 忽略了输出对应的不同
- 输入对应的输出在输入的顺序发生变化时, 输出相应变化, 则视为等价

0 0 1 1		0 1 0 1
{00,01,10,11}	⟺	{00,01,10,11}
f(x1,x2)=x1		f(x1,x2)=x2

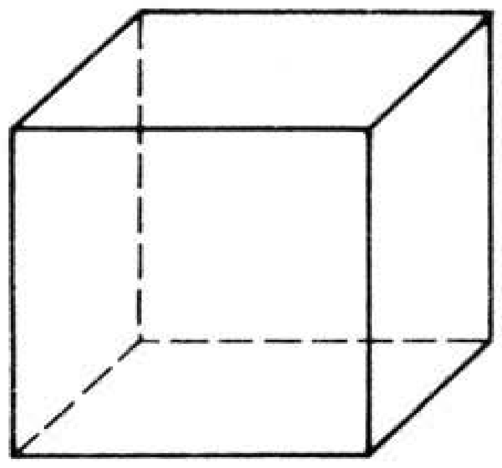
	0 0	0 1	1 0	1 1	f(x1,x2)
f1	0	0	0	0	0
f2	0	0	0	1	$x1 \wedge x2$
f3	0	0	1	0	$x1 \wedge \overline{x2}$
f4	0	0	1	1	$x1$
f5	0	1	0	0	$\overline{x1} \wedge x2$
f6	0	1	0	1	$x2$
f7	0	1	1	0	$(\overline{x1} \vee \overline{x2}) \wedge (x1 \vee x2)$
f8	0	1	1	1	$x1 \vee x2$
f9	1	0	0	0	$\overline{x1} \wedge \overline{x2}$
f10	1	0	0	1	$(\overline{x1} \vee x2) \wedge (x1 \vee \overline{x2})$
f11	1	0	1	0	$\overline{x2}$
f12	1	0	1	1	$x1 \vee \overline{x2}$
f13	1	1	0	0	$\overline{x1}$
f14	1	1	0	1	$\overline{x1} \vee x2$
f15	1	1	1	0	$\overline{x1} \vee \overline{x2}$
f16	1	1	1	1	1

2个输入端的实质不同的结构有

$(2^4+2^3)/2=12$

7.6 举例

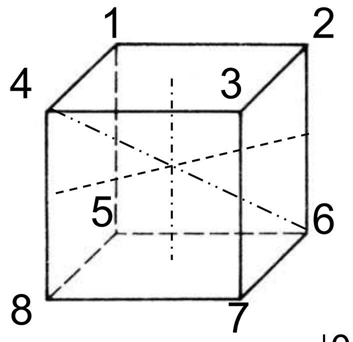
- 正六面体转动群
  - 面的置换　6个面
  - 顶点的置换 8个顶点
  - 棱的置换　 12条棱



正六面体

7.6 举例

- 正六面体转动群：顶点的置换表示
  - 不动： $(1)^8$ 1个
  - 面面中心转±90度 $(4)^2$ 2*3个
  - 面面中心转180度 $(2)^4$ 3个
  - 棱中对棱中转180度 $(2)^4$ 6个
  - 对角线为轴转±120度 $(1)^2(3)^2$ 2*4个
  - 正六面体转动群的阶数为24

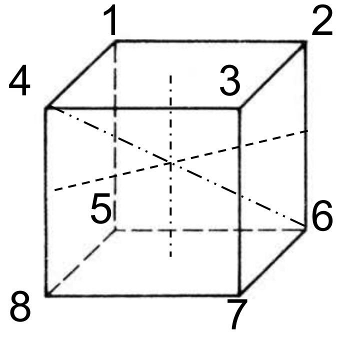


正六面体

7.6 举例

- **例5 用2种颜色给正6面体的8个顶点着色，有多少方案？**
- **正六面体转动群：顶点的置换表示**
  - –不动：　$(1)^8$　1个
  - –面面中心转±90度　$(4)^2$　2*3个
  - –面面中心转180度　$(2)^4$　3个
  - –棱中对棱中转180度　$(2)^4$　6个
  - –对角线为轴转±120度　$(1)^2(3)^2$　2*4个
  - –正六面体转动群的阶数为24

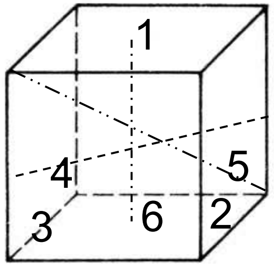
- $[17\cdot 2^4 + 6\cdot 2^2 + 2^8]/24=[34+3+32]/3=23$



正六面体

7.6 举例

- 正六面体转动群：面的置换表示
  - 不动：(1) (2) (3) (4) (5) (6)　　$(1)^6$　　1个
  - 面面中心转±90度　　$(1)^2(4)^1$　　2*3个
  - 面面中心转180度　　$(1)^2(2)^2$　　3个
  - 棱中对棱中转180度　　$(2)^3$　　6个
  - 对角线为轴转±120度　　$(3)^2$　　2*4个
  - 正六面体转动群的阶数为24



正六面体

7.6 举例

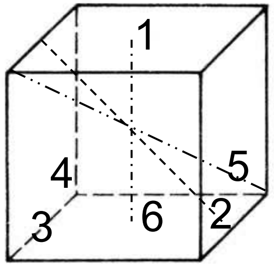
- **例4 正6面体的6个面分别用红，蓝两种颜色着色，有多少方案？**
- **解：正6面体的转动群用面的置换表示：**

正六面体转动群:面的置换表示

不动： (1) (2) (3) (4) (5) (6)	$(1)^6$	1个
面面中心转±90度	$(1)^2(4)^1$	2*3个
面面中心转180度	$(1)^2(2)^2$	3个
棱中对棱中转180度	$(2)^3$	6个
对角线为轴转±120度	$(3)^2$	2*4个

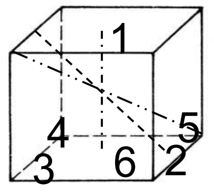
正六面体转动群的阶数为24

$$(2^6+6*2^3+3*2^4+6*2^3+8*2^2)/24 = 10$$



正六面体

7.6 举例



正六面体

- **例6** 在正6面体的每个面上任意做一条对角线，有多少方案？
- **解** 在每个面上做一条对角线的方式有2种，可参考面的2着色问题。
- 但面心-面心的转动轴转±90 时，无不动图象。除此之外，都可比照面的2着色。所求方案数：

正六面体转动群:面的置换表示			不动图像数
不动: (1)(2)(3)(4)(5)(6)	$(1)^6$	1个	2^6
面面中心转±90度	$(1)^2(4)^1$	2*3个	0
面面中心转180度	$(1)^2(2)^2$	3个	$3*2^4$
棱中对棱中转180度	$(2)^3$	6个	$6*2^3$
对角线为轴转±120度	$(3)^2$	2*4个	$8*2^2$

正六面体转动群的阶数为24

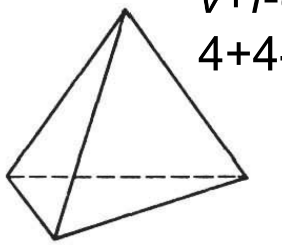
- $[2^6+0+\ 3\cdot 2^4+8\cdot 2^2+6\cdot 2^3]/24=[8+6+4+6]/3=8$

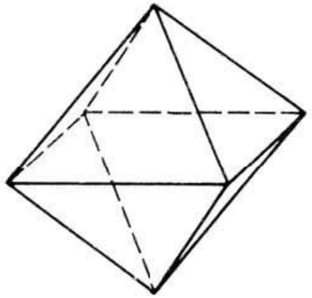
凸正多面体

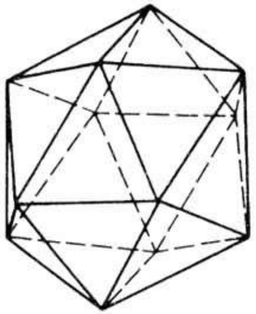
由欧拉定理推出：凸正多面体只有五种，即：正四面体、正八面体、正二十面体、正六面体（正方体）、正十二面体，

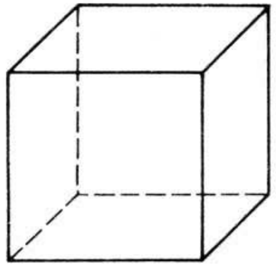
其中正四面体、正八面体和正二十面体的各面都是正三角形，正六面体的各面是正方形，正十二面体的各面是正五边形。

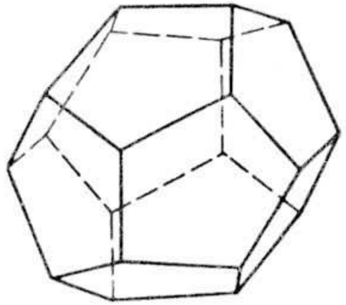
$v+f-e=$
$4+4-6=2$


正四面体


正八面体


正二十面体


正六面体


正十二面体

正多面体群

正四面体群

不动旋转：（A)(B)(C)(D)

以顶点与对面的中心连线为轴：

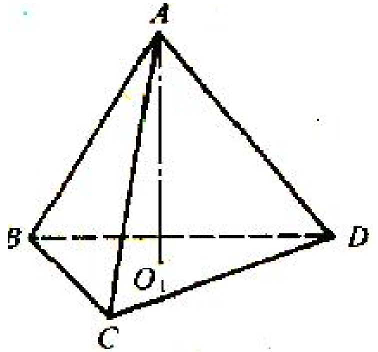
- A 为顶点(AO_1):±120º (A)(*BCD*) and (A)(*BDC*)
- B为顶点:±120º (B) (*ACD*) and (B)(*ADC*)
- C为顶点:±120º (C) (*ABD*) and (C)(*ADB*)
- D为顶点:±120º (D) (*ABC*) and (D)(*ACB*)

共有8个三项循环。

以正四面体*A-BCD*的3对对边之中点联线为旋转轴：作角度为π的3个旋转，分别对应于置换(*AB*)(*CD*)，(*AC*)(*BD*)，(*AD*)(*BC*)，这样的12个运动构成群,称为正四面体群。

e, (*BCD*),(*BDC*),(*ACD*),(*ADC*)，(*ABD*)，(*ADB*)，(*ABC*)，(*ACB*) ,(*AB*)(*CD*)，(*AC*)(*BD*)，(*AD*)(*BC*),

它与4个文字A、B、C、D上的四次交错群A_4同构，因此，四次交错群A_4又称为正四面体群。



正多面体群

正八面体群或正六面体群由24个运动构成群，它与四次对称群S_4同构，所以正八面体群与正六面体群是一致的，都是4次对称群S_4。有时把四次对称群称为正八面体群或正六面体群。

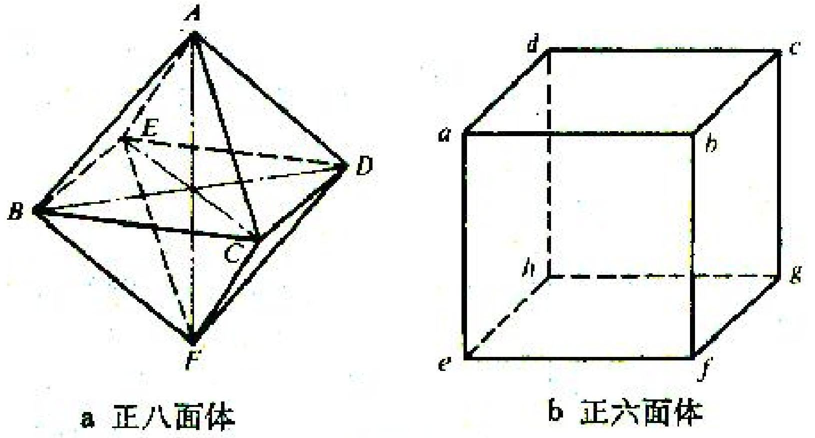


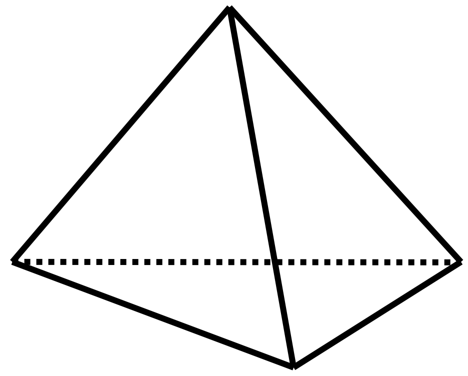
图 2

7.6 举例

- 为了解决正多面体及一些对称多面体的计算问题介绍下面的定理。
- **欧拉定理**：任何凸多面体的顶点数 v 与面数 f 的和都较棱数 e 多2，即 $v+f-e=2$
- 平面多边形内角和等于 $(v-2)\times 180^{o}$
- **定义** 凸多面体与一个顶点相关的面角之和与360度的差称为该顶点的欠角。
- **定理** 凸多面体各顶点欠角的和为720度（用欧拉定理证）

定义 凸多面体与一个顶点相关的面角之和与360度的差称为该顶点的欠角。

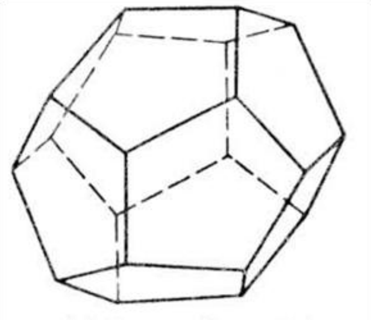
- 正四面体
- 每个面是正三角形
- 每个面内角为60^o,每个顶点有3个面内角
- 每个顶点的欠角$=360^o-180^o=180^o$
- 4个顶点的欠角和为$180^o*4=720^o$



平面多边形内角和等于$(v-2)\times 180^o$

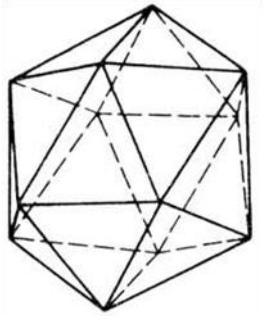
凸多面体与一个顶点相关的面角之和与360度的差称为该顶点的欠角。各顶点欠角的和为720度。

- 用正5边形搭成的正多面体:
  内角$(5-2)\cdot 180^o/5=108^o$,
  欠角$360^o-3\cdot 108^o=36^o$。
  $720^o/36^o=20$(个顶点)
  一个顶点3条棱，重复度为2：$20\cdot 3/2=30$条棱
  一个顶点相关3个面,重复度为5：$20\cdot 3/5=12$个面



正十二面体

- 用正3角形搭成的面最多的正多面体:
  内角60^o
  欠角$360^o-5\cdot 60^o=60^o$。
  $720^o/60^o=12$(个顶点)
  一个顶点关联5条棱,重复度为2：$12\cdot 5/2=30$条棱。
  一个顶点关联5个面,重复度为3：$12\cdot 5/3=20$个面



正二十面体

设置

请问足球有多少条棱?

A 90

B 88

C 60

D 没带足球，需要回家数一下。

正5边形内角108o，正六边形内角120o

提交

7.6 举例

- 足球：
- 正5边形内角108^o，正六边形内角120^o

欠角$=360^o - (108^o + 2 \cdot 120^o) = 12^o$

720 /12 =60(个顶点)

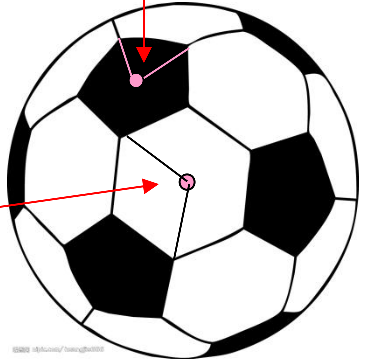
60·3/2=90(条棱)

60/5=12(个5边形)

60·2/6=20(个6边形)

7.6 举例

- 用火柴搭一个足球，有多少种方案？
- 参照棱的二着色，
- 足球有60个顶点，90条棱，12个五边形，20个六边形，
- 不动 $(1)^{90}$ 1个
- 5边形面心对面心转n*72度 n=1,2,3,4,共6对面心 $(5)^{(90/5)}$,24个
- 6边形面心对面心转n*120度 n=1,2,共10对面心 $(3)^{(90/3)}$, 20个
- 6边形与6边形边界的中点为轴转180度,共 20*3/2/2=15对
  （20个六边形，每个六边形里有3条这样的棱，两条棱有一个轴，两个六边形共用一条棱）
  $(1)^2(2)^{44}$, 15个 无不动图像
- （$2^{90}+24*2^{18}+20*2^{30}$）/60

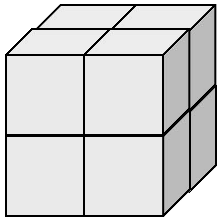


7.6 举例

- 用相同的骰子垛成一个正6面体
- 每个正六面体有24种转动，每个骰子占据一个顶点，相当于顶点的24着色
  - 不动： $(1)^8$ 1个
  - 面面中心转±90度 $(4)^2$ 6个
  - 面面中心转180度 $(2)^4$ 3个
  - 棱中对棱中转180度 $(2)^4$ 6个
  - 对角线为轴转±120度 $(1)^2(3)^2$ 8个

  - $(24^8+6*24^2+3*24^4+6*24^4)/24$

无不动图像



7.7 母函数型式的Pólya定理

- Pólya定理主要用于计数
- 母函数对状态进行列举

母函数型Pólya定理

- 比如对3个相同的球用四种颜色(红r, 黄y, 蓝b, 绿g)涂染, 所有可能的颜色组合是
- $(r+y+b+g)^3=r^3+y^3+b^3+g^3+3r^2y+3r^2g+3ry^2+3y^2b+3y^2g+3rb^2+3b^2g+3rg^2+3yg^2+3bg^2+6ryb+6rbg+6ryg+6ybg$
- 各项系数即对应着色方案的数目.

7.7 母函数型式的Pólya定理

$$l=\frac{1}{|G|}[m^{C(P_1)}+m^{C(P_2)}+\ldots+m^{C(P_g)}].$$

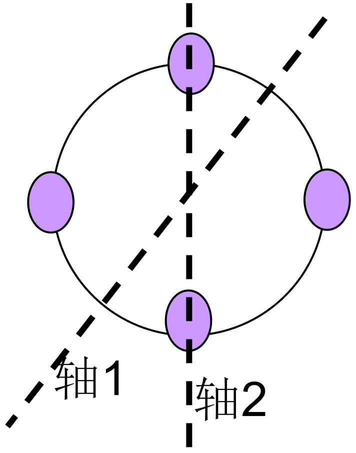
- 设对n个对象用m种颜色：b1, b2, …, bm着色
- $m^{c(p_i)}$用$(b_1+b_2+\ldots+b_m)^{c_1(p_i)}(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_m^2)^{c_2(p_i)}\ldots(b_1^n+b_2^n+\ldots+b_m^n)^{c_n(p_i)}$代替
- $S_k=(b_1^k+b_2^k+\ldots+b_m^k)$, $k=1,2\ldots n$ 则
- 母函数型Pólya定理得出的方案数为

$$P(G)=\frac{1}{|\overline{G}|}\sum_{j=1}^{g}\prod_{k=1}^{n}S_k^{C_k(\overline{P_j})}$$

7.7 母函数型式的Pólya定理

- **例1** 有3种不同颜色的珠子，串成4颗珠子的项链，有哪些方案？

- **解** 正4边形的运动群
- 绕中心转±90　$(4)^1$　2个　$2(r^4+b^4+g^4)$
- 绕中心转180　$(2)^2$　1个　$(r^2+b^2+g^2)^2$
- 绕轴1翻转　$(2)^2$　2个　$2(r^2+b^2+g^2)^2$
- 绕轴2翻转　$(1)^2(2)^1$　2个　$2(r+b+g)^2(r^2+b^2+g^2)$
- 不动　$(1)^4$　1个　$(r+b+g)^4$
- 一共 8 个置换
- 方案数$m=(2*3^1+1*3^2+2*3^2+2*3^3+1*3^4)/8=21$
- $P(G)=b^4+r^4+g^4+b^3r+br^3+r^3g+bg^3+rg^3+r^3b+2b^2r^2$
- $+2b^2g^2+2r^2g^2+2b^2rg+2br^2g+2brg^2$
- 两个蓝色的，一个红，一个绿的方案正好为 2



7.6 举例

- **例1** 等边三角形的3个顶点用红，兰，绿3着色，有多少种方案？
- **解** 在3维空间考虑，3顶点的置换群S_3.

$(3)^1$ ： 2个； $2(r^3+b^3+g^3)$

$(1)^1(2)^1$ ：3个； $3(r+b+g)(r^2+b^2+g^2)$

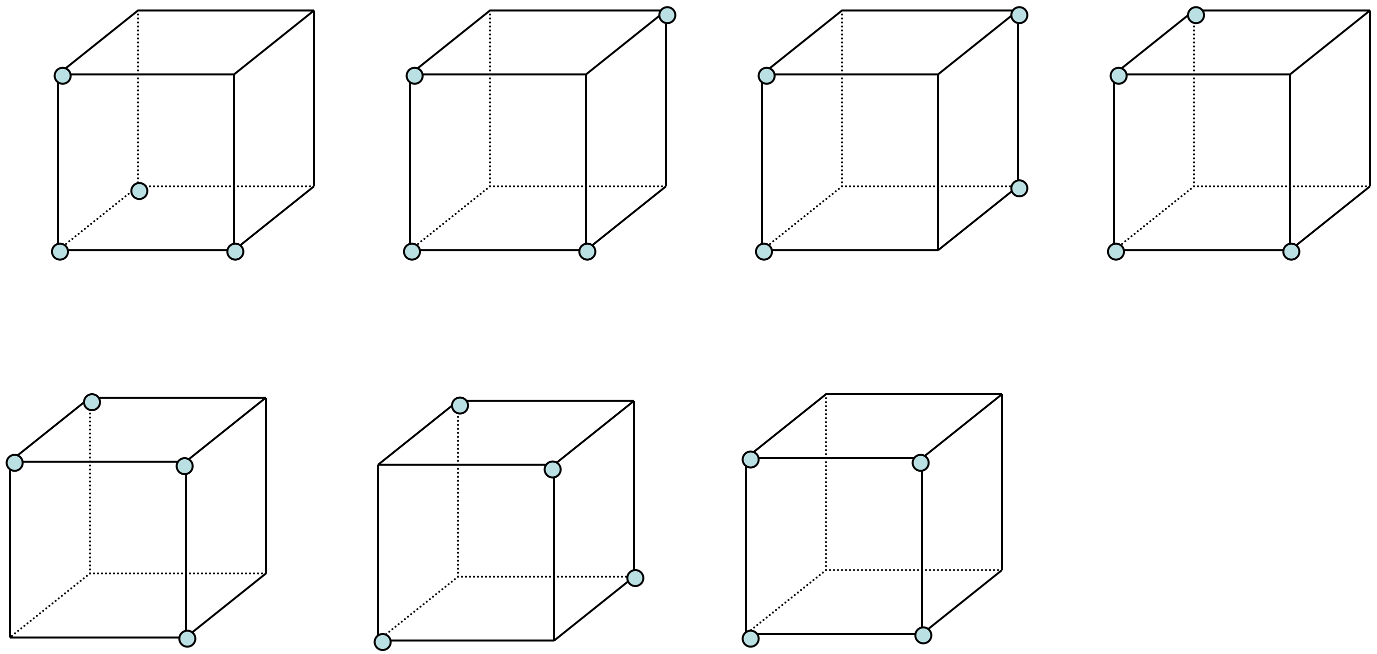
$(1)^3$ ： 1个； $(r+b+g)^3$

- $l = (2\cdot 3^1 + 3\cdot 3^2 + 3^3)/6=10$
- r^3的系数 $(2+3+1)/6=1$
- rgb的系数 $(3!/(1!1!1!))/6=1$
- r^2b的系数 $(3+3!/(2!1!))/6=1$

7.7 母函数型式的Pólya定理

- **例** 4颗红色珠子嵌在正6面体的4个顶点上，有多少方案？
- **解** 相当于对顶点2着色。无珠设b.
- 正六面体转动群：顶点的置换表示
  - 不动： $(1)^8$ 1个
  - 面面中心转±90度 $(4)^2$ 2*3个
  - 面面中心转180度 $(2)^4$ 3个
  - 棱中对棱中转180度 $(2)^4$ 6个
  - 对角线为轴转±120度 $(1)^2(3)^2$ 2*4个
  - 正六面体转动群的阶数为24
  - $p=[(b+r)^8+6(b^4+r^4)^2+9(b^2+r^2)^4+8(b+r)^2(b^3+r^3)^2]/24$
  - 求b^4r^4的系数 (C(8,4)+12+9*C(4,2)+8*C(2,1)*C(2,1))/24=7

7.7 母函数型式的Pólya定理



第七章

- Burnside引理:设G={$a_1,a_2,\ldots a_g$}是目标集[1,n]上的置换群。每个置换都写成不相交循环的乘积。G将[1,n]划分成l个等价类.$c_1(a_k)$是在置换a_k的作用下不动点的个数。

$$l=[c_1(a_1)+c_1(a_2)+\ldots+c_1(a_g)]/|G|$$

- **Pólya定理** 设G={$P1,P2,\ldots,Pg$}是n个对象的一个置换群，$C(Pk)$是置换Pk的循环的个数，用m种颜色对n个对象着色, 着色方案数为

$$l=\frac{1}{|G|}[m^{C(\overline{P1})}+m^{C(\overline{P2})}+\ldots+m^{C(\overline{Pg})}].$$

- 母函数型Pólya定理：$S_k=(b_1{}^k+b_2{}^k+\cdots+b_m{}^k)$, $k=1, 2\cdots n$

$$P(G)=\frac{1}{|\overline{G}|}\sum_{j=1}^{g}\prod_{k=1}^{n}S_k{}^{C_k(\overline{Pj})}$$

7.7 母函数型式的Pólya定理

- 例7 骰子的6个面分别有1, …, 6点，不考虑点的方向有多少种不同的方案？
- 解　正6面体转动群有24个置换
  - 不动：(1) (2) (3) (4) (5) (6)　　$(1)^6$　　1个
  - 面面中心转±90度　　$(1)^2(4)^1$　　2*3个
  - 面面中心转180度　　$(1)^2(2)^2$　　3个
  - 棱中对棱中转180度　　$(2)^3$　　6个
  - 对角线为轴转±120度　　$(3)^2$　　2*4个
- 写成母函数型如下
- $P=[(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^6+6(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4+x_5^4+x_6^4)$
  $+3(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2)^2$
  $+6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2)^3+8(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+x_5^3+x_6^3)^2]/24$

求$x_1x_2x_3x_4x_5x_6$的系数

由多项式展开得$x_1x_2x_3x_4x_5x_6$的系数为6!

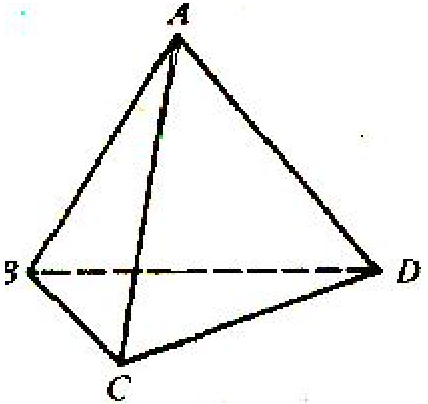
则方案数为6!/24 =30

7.7 母函数型式的Pólya定理

- 例 正四面体点4着色,面3着色,棱2着色,求方案数

	点	面	棱	综合
顶点-面心 ±120度:	$(1)^1(3)^1$	$(1)^1(3)^1$	$(3)^2$	$(1D)^1(3D)^1(1F)^1(3F)^1(3E)^2$ 8个
棱中-棱中:	$(2)^2$	$(2)^2$	$(1)^2(2)^2$	$(x2)^2(y2)^2(z1)^2(z2)^2$ 3个
不动:	$(1)^4$	$(1)^4$	$(1)^6$	$(x1)^4\ (y1)^4\ (z1)^6$ 1个

故转动群的群元有12个。



方案数:

$(8*4^2 3^2 2^2+3*4^2 3^2 2^4+4^4 3^4 2^6)/12$

7.7 母函数型式的Pólya定理

- 例 把4个球a,a,b,b放入3个不同的盒子里,求方案数,若不允许有空盒,有多少分配方案?
- a,a和b,b放置相互独立
- 求2个相同的球放入3个不同的盒子的方案数
- C(2+3-1,2)=6
- 所以方案数为6*6=36
- 如果不允许有空盒,利用容斥定理求解
- $C(4,2)^2 - 3*C(3,2)^2+3*C(2,2)^2=36-27+3=12$

7.7 母函数型式的Pólya定理

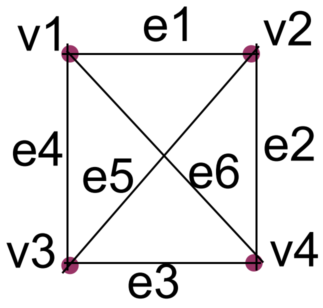
- 把4个球a,a,b,b放入3个不同的盒子里,求方案数,若不允许有空盒,有多少分配方案?
- 解:设这4个球分别为a1,a2,b1,b2,将4个球放入3个盒子,可抽象为对4个球的三着色
- G={e,(a1a2),(b1b2),(a1a2)(b1b2)}
- $l=(3^4+2*3^3+3^2)/4=36$
- $P(G)=((r+b+g)^4+2*(r^2+b^2+g^2)(r+b+g)^2+(r^2+b^2+g^2)^2)/4$
- 展开后取$r^ib^jg^k$项,i,j,k>0
- $r^1b^1g^2$的系数= $r^1b^2g^1$的系数= $r^2b^1g^1$的系数= (C(4,1)*C(3,1)*C(2,2)+2*C(2,1))/4=4
- 故若不允许有空盒, 分配方案有4*3=12种

7.8 图的计数

- n个顶点的简单图有多少不同的图形?
  - 简单图:过两个顶点没有多于一条的边,且不存在自环的图形
  - n个无标志顶点的完全图中的边进行二着色,求不同方案数
  - 完全图中的边数n(n-1)/2

图的计数

- n个无标志顶点的完全图中的边进行二着色,求不同方案数
- 完全图的置换
  - 边随点动
  - 不仅仅是旋转和翻转
  - 点的全置换,对应对称群

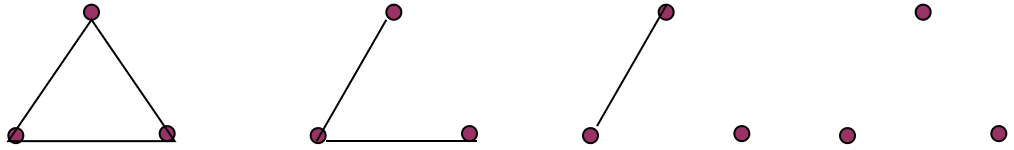


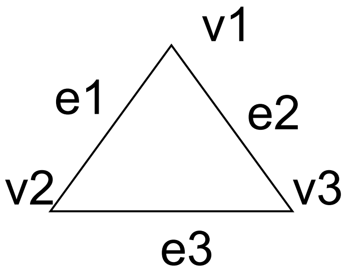
•S4={(1)(2)(3)(4),(12),(13),(14),(23),(24),(34),(123),(124),(132),(134),(142),(143),(234),(243),(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432),(12)(34), (13)(24), (14)(23)}.

7.8 图的计数

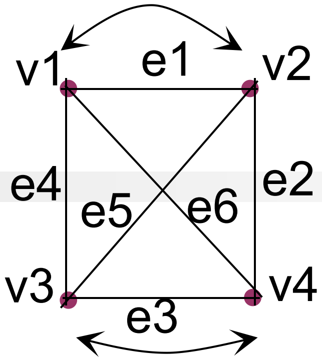
- 以3个顶点为例
- 顶点的置换: S3={e,(v1v2v3), (v3v2v1), (v2v3), (v1v3), (v1v2)}
- 对应边的置换G={e,(e1e2e3), (e3e2e1),(e1e2), (e1e3),(e2e3)}
- $P(G)=((x+y)^3+2*(x^3+y^3)+3*(x+y)(x^2+y^2))/6$

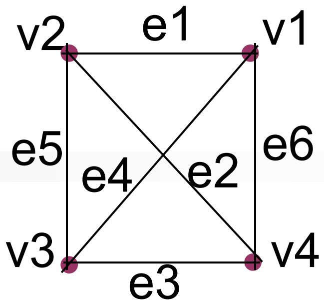
  $= x^3+y^3+xy^2+x^2y$





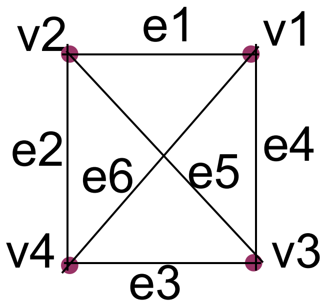
7.8 图的计数





- **例** 4个顶点的图
- 对完全图的边的2着色
- S4的每个置换对应6条边的集上的一个置换

顶点	边	个数
$(1)^4$	$(1)^6$	1个
$(1)^2(2)$	$(1)^2(2)^2$	6个
$(4)^1$	$(2)^1(4)^1$	6个
$(2)^2$	$(1)^2(2)^2$	3个
$(1)\ (3)$	$(3)^2$	2*4个

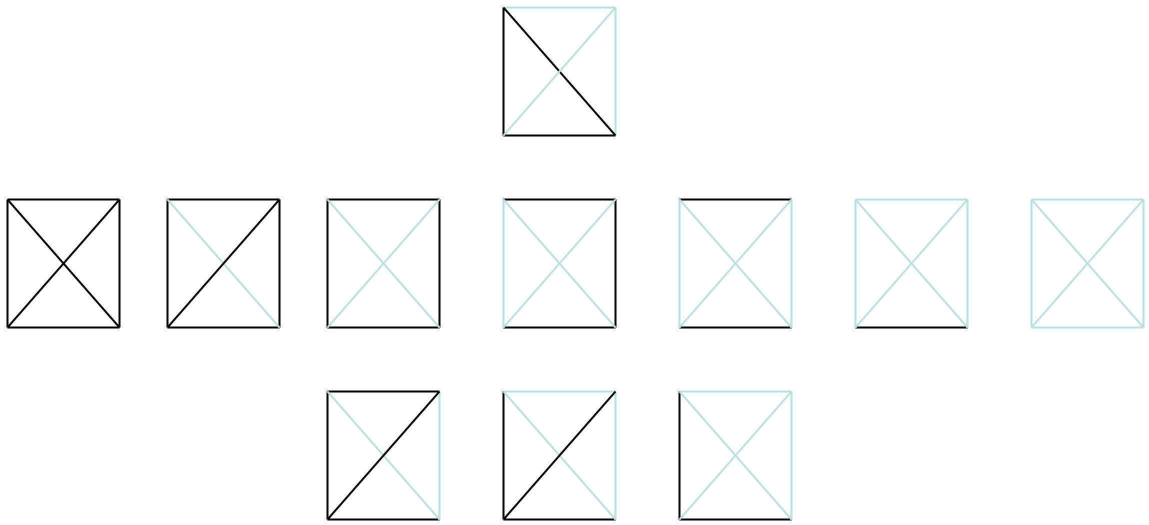


$$P(x,y) = [(x+y)^6 + 9(x+y)^2(x^2+y^2)^2 + 8(x^3+y^3)^2 + 6(x^2+y^2)(x^4+y^4)]/24$$

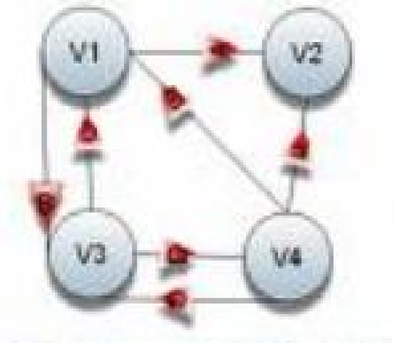
•S4={(1)(2)(3)(4),(12),(13),(14),(23),(24),(34),(123),(124),(132),(134),(142),(143),(234),(243), (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432), (12)(34), (13)(24), (14)(23)}.

7.8 图的计数

$$=x^6+x^5y+2x^4y^2+3x^3y^3+2x^2y^4+xy^5+y^6$$



7.8 图的计数

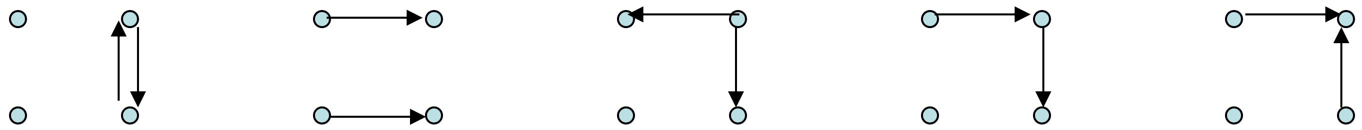


- **例2** 求4个顶点的不同构的有向图的个数
- 边数12条,每个点出边3条,入边3条
- **解** 顶点置换　有向边置换

$(1)^4$	$(1)^{12}$	1个
$(1)^2(2)$	$(1)^2(2)^5$	6个
$(4)^1$	$(4)^3$	6个
$(2)^2$	$(2)^6$	3个
$(1)\ (3)$	$(3)^4$	2*4个

$$P(x,y) = [(x+y)^{12} + 6(x+y)^2(x^2+y^2)^5 + 3(x^2+y^2)^6 + 8(x^3+y^3)^4 + 6(x^4+y^4)^3\ ]/24$$

x^2y^{10} 的系数：$\frac{1}{24}[\frac{12!}{2!10!}+6(1+\frac{5!}{4!})+3\frac{6!}{5!}+0+0]=5$



心路历程

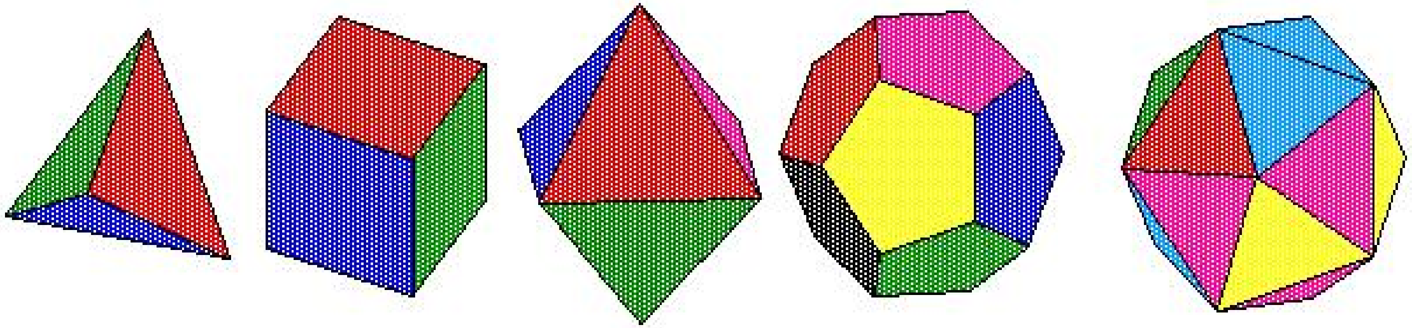
红蓝两种颜色给正方形的四个顶点着色，若允许正方形转动，有多少种方案?

群

置换群

转动群

1 2 4 1



The Tetrahedron The Cube The Octahedron The Dodecahedron The Icosahedron

$$P(G)=\frac{1}{|\overline{G}|}\sum_{j=1}^{g}\prod_{k=1}^{n}S_k^{\,C_k(\overline{Pj})}$$

转动群

转动群

- 转动？
- 圆排列？
- 可重圆排列？

$$\boxed{|E_k|*|Z_k|=|G|}$$

$$l=\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{n}|Z_k|=\frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{g}c_1(a_j)$$

4.1 群的概念

(1) 群(group)

定义　给定集合G和G上的二元运算 · ，满足下列条件称为群。

(a) 封闭性(Closure)：

若a, b∈G, 则存在c∈G, 使得a·b=c.

(b) 结合律(Associativity)：

任意a, b, c∈G, 有(a·b)·c=a·(b·c).

由于结合律成立，(a·b)·c=a·(b·c)可记做a·b·c.

(c) 有单位元(Identity)：

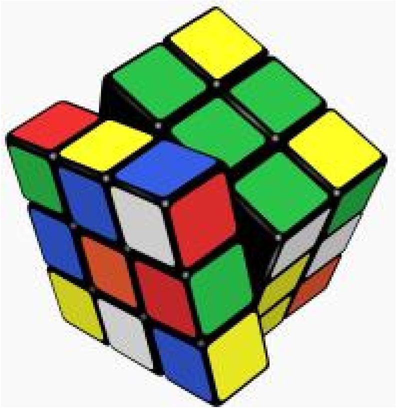
存在e∈G, 任意a∈G. a·e=e·a=a.

(d) 有逆元(Inverse)：

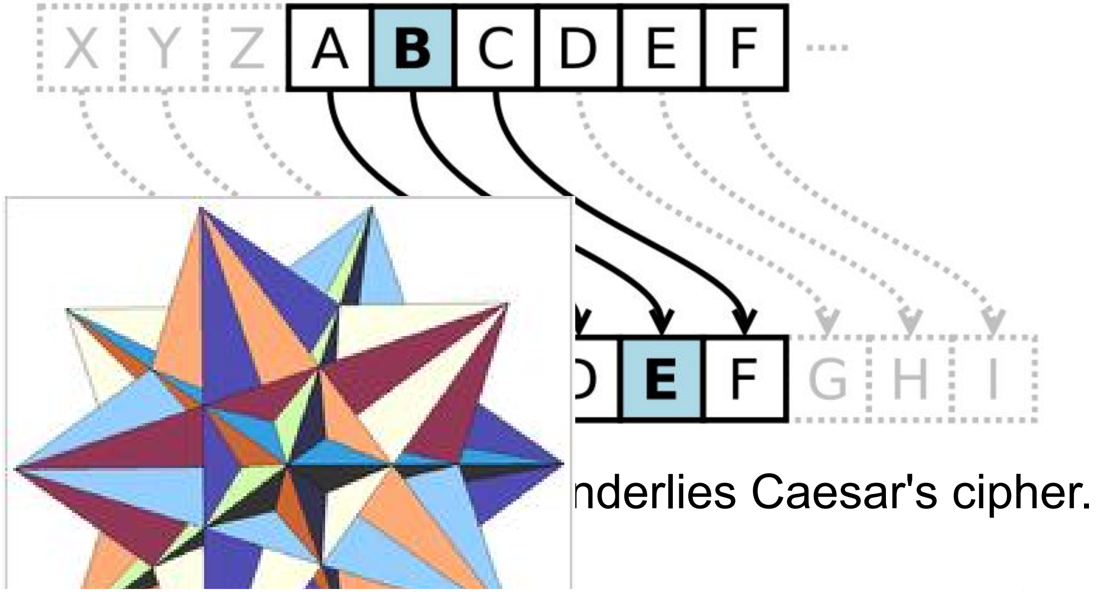
任意a∈G, 存在b∈G, a·b=b·a=e. 记为b=a^{-1}.

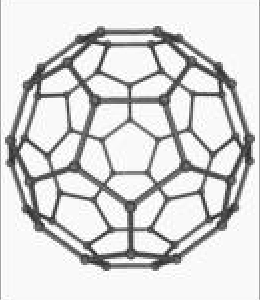
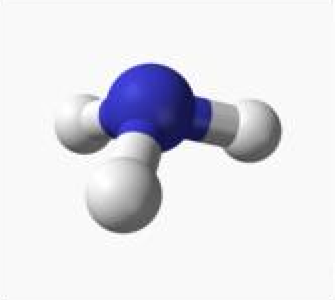
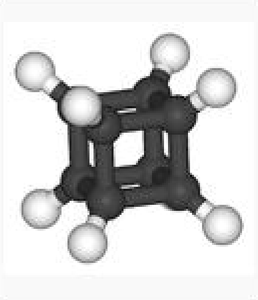
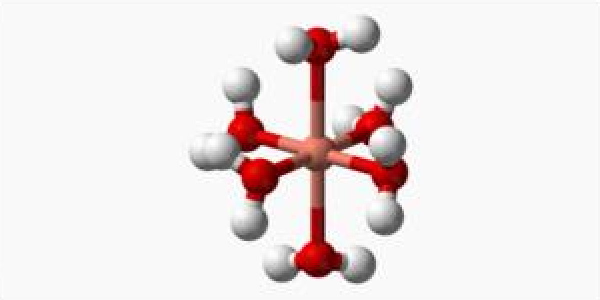
8

群



魔方群：魔方的所有可能重新排列形成一个群。



			
富勒烯展现了二十面体对称。	氨NH_3。它的对称群是6阶的，用120°旋转和反射生成的。	立方烷C_8H_8刻画了八面体对称。	六水合铜（II）配合物$[Cu(OH_2)_6]^{2+}$。相较于完美的对称形状，分子垂直膨胀大约22%（姜-泰勒效应）。

http://www.cse.psu.edu/~yanxi/CourseFall2007.htm

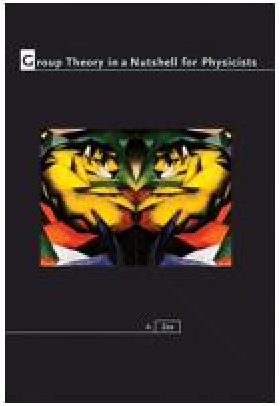
群论与量子力学

作者: B.L. 范·德·瓦尔登
出版社: 上海科学技术出版社
译者: 赵展岳 / 吴兆颜 / 王锡绂
出版年: 1980年8月
页数: 216
定价: 0.67
统一书号: 1311

物理学中的群论基础

作者: [印度]约什(A.W.Joshi)
出版社: 科学出版社
原作名: elements of group theory for physics
译者: 王锡绂 / 刘秉正 / 赵展岳 / 吴兆颜
出版年: 1982-12
页数: 349
定价: 1.75
装帧: 平装

Group Theory in a Nutshell for Physicists



作者: [美] 徐一鸿
出版社: Princeton University Press
出版年: 2016-5-29
页数: 584
定价: USD 90.00
装帧: Hardcover
丛书: In a Nutshell
ISBN: 9780691162690

群论 | 群论在物理上的三大应用

三金姐姐drydry

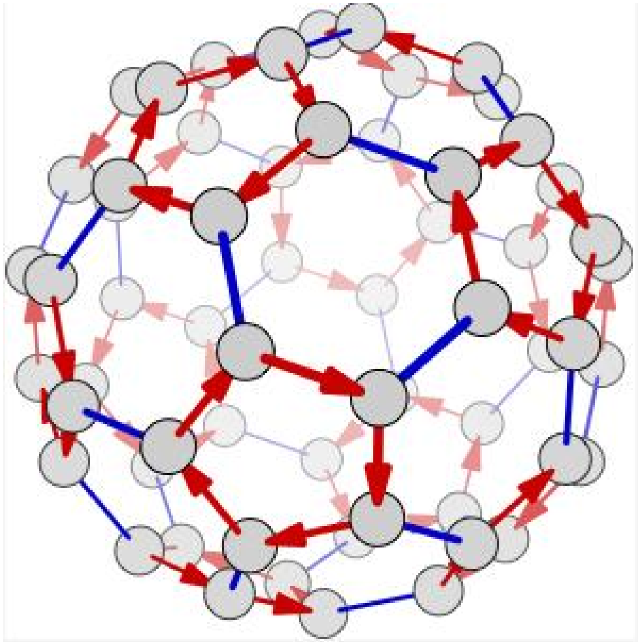
群的概念引发自多项式方程的研究，由埃瓦里斯特·伽罗瓦在18世纪30年代开创。在数学中，群表示一个拥有满足封闭性、结合律、有单位元、有逆元的二元运算的代数结构，包括阿贝尔群、同态和共轭类。

就科学内容而言，群论属于数学范畴，在许多数学分支中都有它的应用。它还被广泛用于物理、化学及工程科学等许多领域，尤其是物理学成为受惠最多的学科。从经典物理中对称性和守恒律的研究到量子力学中角动量理论及动力学对称性的探索再到同位旋、超荷和SU（3）对称性在现代基本粒子物理中的应用等无不闪耀着群论思想的光辉。 群论是用来研究系统对称性的数学工具，这些对称性能够反映出在某种变化下的某些变化量的性质。它也跟物理方程联系在一起。基础物理中常被提到的李群，就类似与伽罗瓦群被用来解代数方程，与微分方程的解密切相关。

在物理上，置换群是很重要的一类群。置换群包括S3群，二维旋转群，三维旋转群以及和四维时空相对应的洛仑兹群。洛仑兹群加上四维变换就构成了Poincare群。

群的发展

- 群就是对称，研究群，就是研究各种对称性



交错群A_5的一个Cayley图（一种群的图示）

正规子群

不仅自己是一个群，如果“除”原来的群，得到的也是一个群。

对原来的群作“除法”得到的群叫商群

单群

不能被继续分解的群。

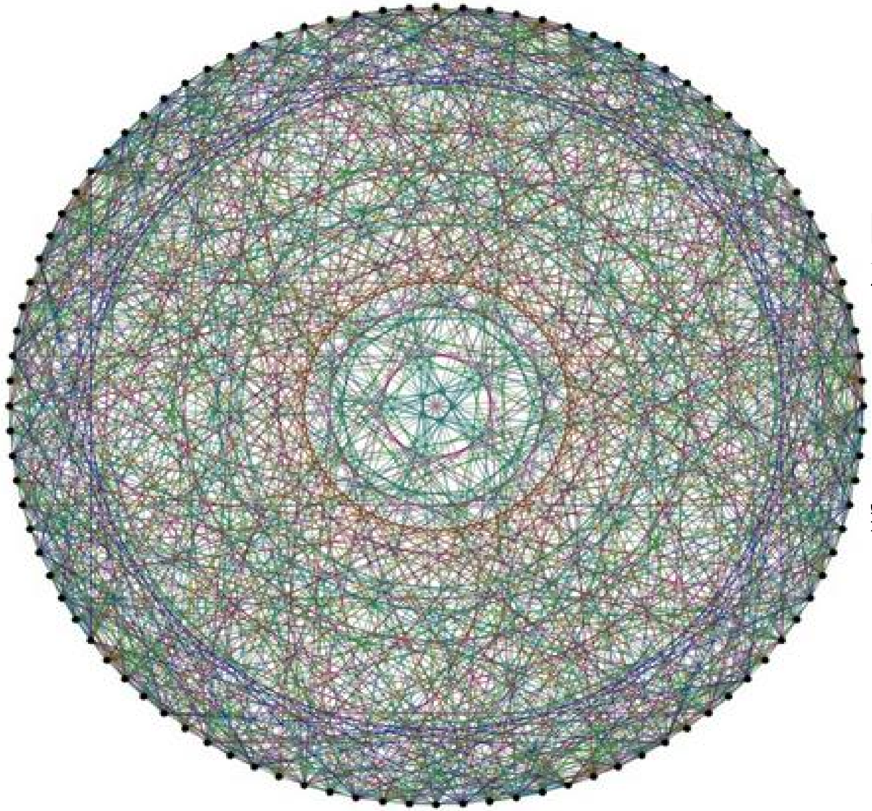
素数？？

能找到所有的单群吗？

http://songshuhui.net/archives/57697

1823年

群，从而不是可解群。



群的联系

菲利克斯·克莱因
德国数学家

1884年

Sophus Lie
挪威数学家

Higman-Sims图，可导出散在单群Higman-Sims群

18个有限单群家族+26个单独存在的有限单群

所有的有限单群？

分类结构分析：

1872年的Sylow定理。使数学家开始明白有限群更深层的结构

1892年的Hölder：真正明确提出对有限单群的分类

100年过去了……

百年的征程

- 当1983年Gorenstein宣称有限单群分类定理被证明之时，群论学界可是欢呼雀跃。
- 整个证明散落在各期刊的500多篇论文之中，合计过万页，每篇论文都对某种特殊情况进行了处理。
- 问题是，他弄错了。
- 他以为一类名为“拟薄群”（quasi-thin group）的类别已经被处理好了，但事实上没有。
- 直到2004年，由Aschbacher和Smith撰写的一篇一千多页的论文才将这个情况完全处理妥当，从而填补了这个漏洞。此时，有限单群分类定理，这个有限群理论的圣杯，才正式被圆满证明。
- <u>18个有限单群家族，再加上26个散在单群，这就是所有的有限单群。</u>

魔群

- 最大的散在单群——魔群（Monster Group）
- 魔群是在1973年被Fischer和Griess分别独立发现的。
- 最大的散在单群，“魔群”这个名字就源于它庞大的体积。
- 魔群的准确元素个数是808017424794512875886459904961710757005754368000000000，也就是大概$8*10^{53}$个。
- 太阳系的原子个数也就是大约10^{57}个，仅仅高了两个数量级。如果我们用线性空间和矩阵变换来表示魔群的话，我们至少需要一个196883维的线性空间，
- Griess提出了一个名为Griess代数的代数结构，而魔群恰好就是这个代数结构的自同构群。换句话说，魔群恰好刻画了Griess代数的所有对称性。
- Griess代数的维度是196884，比196883多1。

冥冥中的联系

- Griess代数的维度是196884，比196883多1
- 模形式理论中，有一个特殊的函数占据着相当重要的地位，它叫j不变量
- 傅立叶级数，其中每个系数都是整数

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots, q = e^{2\pi i \tau}$$

巧合？联系？

$$j(\tau)=\frac{1}{q}+744+196884q+21493760q^2+864299970q^3+\cdots,q=e^{2\pi i\tau}$$

- 1979年，Conway和Norton提出了“魔群月光猜想”（monsterous moonshine）。
- 存在一个基于魔群的无限维代数结构，通过魔群的不可约线性表示，它恰好给出了j不变量的所有傅立叶系数，而魔群每一个元素在这个代数结构上的作用，都自然地给出了与某个群相关的模形式。

$$1=1$$
$$196884=196883+1$$
$$21493760=21296876+196883+1$$
$$864299970=842609326+21296876+2\cdot196883+2\cdot1$$

- 1992年由Brocherds完成证明
- 证明同时包含了数学和物理，其中用到了弦论中的No-ghost定理来构造证明中必不可少的一个代数结构；
- 1998年Brocherds由于这个证明获得了菲尔兹奖。
- 通过这个定理架起的桥梁，数学家们也发现了魔群、模函数和弦理论之间更多的千丝万缕的联系。
- 甚至有人过于疯狂地设想，魔群也许就代表着我们这个宇宙终极的对称性。

Professor Borcherds was quoted as saying, “I was over the moon when I proved the moonshine conjecture”,

伽罗华（Galois）

- Évariste Galois(1811~1832)
- 对伽罗华来说，他所提出并为之坚持的理论是一场对权威、对时代的挑战，他的“群”完全超越了当时数学界能理解的观念。
- 他的数学考官曾说“这个孩子在表达他的想法时有些困难，但是他十分聪明，并体现出了非凡的学术精神”
- 过分地追求简洁是导致这一缺憾的原因。
- 当你试图引寻读者远离习以为常的思路进入较为困惑的领域时，清晰性是绝对必需的。