数论

莫反

积性函数

定义

若数论函数$f(n)$满足$f(1)=1$且$\forall x,y\in\mathbb{N}_+$，$gcd(x,y)=1$都有$f(xy)=f(x)f(y)$，则$f(n)$为积性函数。

性质

若$f(x)$和$g(x)$均为积性函数，则以下函数也为积性函数：

$(1)h(x)=f(x^p)$

$(2)h(x)=f^p(x)$

$(3)h(x)=f(x)g(x)$

$(4)h(x)=\sum_{d|x}f(d)$

$(5)h(x)=\sum_{d|x}f(d)g(\frac{x}{d})$

(6)如果f是任意一个函数，使得$g(m)=\sum_{g|m}f(d)$是积性函数，那么f也是积性函数

> 对m用归纳法，归纳基础很容易：$f(1)=g(1)=1$。
>
> 假设只要$gcd(m_1,m_2)=1$且$m_1m_2<m$，就有$f(m_1m_2)=f(m_1)f(m_2)$。
>
> 如果$m=m_1m_2,gcd(m_1,m_2)=1$，由于m_1的所有因子和m_2的所有因子都互质，因而就有
>
> $g(m_1m_2)=\sum_{d|m_1m_2}f(d)=\sum_{d_1|m_1}\sum_{d_2|m_2}f(d_1d_2)$
>
> 以及$gcd(d_1,d_2)=1$。根据归纳假设，除了当$d_1=m_1$和$d_2=m_2$时可能有例外，都有$f(d_1d_2)=f(d_1)f(d_2)$，从而得到：
>
> $$\begin{aligned}g(m_1m_2)&=(\sum_{d_1|m_1}f(d_1)\sum_{d_2|m_2}f(d_2))-f(m_1)f(m_2)+f(m_1m_2)\\&=g(m_1)g(m_2)-f(m_1)f(m_2)+f(m_1m_2)\end{aligned}$$
>
> 由于$g(m_1m_2)=g(m_1)g(m_2)$
>
> 所以$f(m_1m_2)=f(m_1)f(m_2)$
>
> 由数学归纳法，原命题成立

一些常见的积性函数

(1)单位函数$\varepsilon(n)=[n=1]$

(2)恒等函数$id(n)=n$

(3)常数函数

(4)欧拉函数$\varphi(n)$

狄利克雷卷积

定义

两个数论函数f,g的狄利克雷卷积为：

$(f*g)(n)=\sum_{d|n}f(d)g(\frac{n}{d})$

性质

(1)交换律：$f*g=g*f$

(2)结合律：$(f*g)*h=f*(g*h)$

(3)分配律：$f*(g+h)=f*g+f*h$

(4)$f*\varepsilon=f$, 也就是说ε是狄利克雷卷积的单位元

莫比乌斯函数

定义

莫比乌斯函数$\mu(m)$对所有整数$m\ge1$由等式

$\sum_{d|m}\mu(d)=[m=1]$

定义。

即$\mu*1=\varepsilon$

递归式化简

因为$g(m)=[m=1]$是积性函数，所以根据积性函数性质得知莫比乌斯函数也是积性函数。这样一来，我们只要对于所有质数p能计算出$\mu(p^k)$，就能计算出$\mu(m)$。

当$m=p^k$时，对所有$k\ge1$有：

$\mu(1)+\mu(p)+\mu(p^2)+\ldots+\mu(p^k)=0$

推出：

$\mu(p)=-1;\mu(p^k)=0,k>1$

根据积性函数性质，得出：

$$\mu(m)=\begin{cases}1 & n=1\\0 & n\text{含有平方因子}\\(-1)^k & k\text{为}n\text{的质因子个数}\end{cases}$$

求莫比乌斯函数值

由于μ函数为积性函数，因此可以用线性筛求莫比乌斯函数值，代码如下：

```
void getMu(){
    mu[1]=1;
    for(int i=2;i<=n;i++){
        if(!flg[i]) p[++tot]=i,mu[i]=-1;
        for(int j=1;j<=tot && i*p[j]<=n;j++){
            flg[i*p[j]]=1;
            if(i%p[j]==0){
                mu[i*p[j]]=0;
                break;
            }
            mu[i*p[j]]=-mu[i];
        }
    }
}
```

莫比乌斯函数与容斥

我们可以发现μ的式子中，如果没有平方因子，就是$(-1)^{质因子个数}$，就是个容斥系数的样子。举点例子：

1. 经典容斥问题：求$[1,n]$中与x互质的数的个数。我们设$cnt(i)$表示i的倍数的个数，那么答案就是$cnt(1)-\sum_{d为x的质因子}cnt(d)+\sum_{d_1,d_2为x的不同质因子}cnt(d_1d_2)+...$。发现前面的式子就是$\sum_{d|x}\mu(d)cnt(d)$
2. 以下面例一中的式子为例：$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}[gcd(i,j)=1]$。我们可以设$cnt(d)$表示范围内$d|gcd(i,j)$的对数，那么$cnt(d)=a/d*b/d$。那么原来的式子容斥一下就可以写成$\sum_{d=1}^{min(a,b)}\mu(d)cnt(d)$。预处理$\mu$前缀和整除分块求解。

其实你会发现这个过程和莫比乌斯反演推出来的式子是一样的。

莫比乌斯反演

公式

设$f(n),g(n)$为两个数论函数，则：

$(1)g(m)=\sum_{d|m}f(d) \quad \Leftrightarrow \quad f(m)=\sum_{d|m}\mu(d)g(\frac{m}{d})$

$(2)g(m)=\sum_{m|d}f(d) \quad \Leftrightarrow \quad f(m)=\sum_{m|d}\mu(\frac{d}{m})g(d)$

> 我们来证明一下(1)的顺推情形：
>
> $$\begin{aligned}\sum_{d|m}\mu(d)g(\frac{m}{d})&=\sum_{d|m}\mu(\frac{m}{d})g(d)=\sum_{d|m}\mu(\frac{m}{d})\sum_{k|d}f(k)\\&=\sum_{k|m}\sum_{d|m/k}\mu(\frac{m}{kd})f(k)=\sum_{k|m}\sum_{d|m/k}\mu(d)f(k)\\&=\sum_{k|m}[m/k=1]f(k)=f(m)\end{aligned}$$
>
> 其中对于求和指标的变换是一种值得学习的常见变换手段
>
> 还可以利用卷积来证明：
>
> 原问题为：已知$g=f*1$，证明$f=g*\mu$
>
> 因为$\mu*1=\varepsilon$，所以在原式子两边同时卷μ有：
>
> $g*\mu=f*1*\mu=f$
>
> 其他几个可以类似证明

应用

我们知道有以下式子成立：

$\sum_{d|m}\varphi(d)=m$

也就是$\varphi*1=id$

对其使用莫比乌斯反演，得到：

$\varphi(m)=\sum_{d|m}\mu(d)\frac{m}{d}$

也就是：

$\varphi=\mu*id$

常见问题

1. P2522

   求值（多组数据）

   $\sum_{i=x}^{n}\sum_{j=y}^{m}[gcd(i,j)=k] \quad (1\le T,x,y,n,m,k\le 5\times10^4)$

   【解答】

根据容斥原理，我们只需要处理好下面的式子：

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[gcd(i,j)=k]$

化简为：

$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{k} \rfloor}[gcd(i,j)=1]$

利用莫比乌斯函数的定义展开得到：

$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{k} \rfloor}\sum_{d|gcd(i,j)}\mu(d)$

变换求和顺序，先枚举$d|gcd(i,j)$得到：

$\sum_{d=1}\mu(d)\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}[d|i]\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{k} \rfloor}[d|j]=\sum_{d=1}\mu(d)\lfloor\frac{n}{kd}\rfloor\lfloor\frac{m}{kd}\rfloor$

最后的式子可以用整除分块求解

2. SP5971

求值（多组数据）

$\sum_{i=1}^{n} lcm(i,n) \quad (1\le T\le 3\times 10^5, 1\le n\le 10^6)$

【解答】

原式即：

$\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cdot n}{gcd(i,n)}$

原式赋值一份并颠倒求和顺序，然后将n一项单独提出，可得：

$\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i\cdot n}{gcd(i,n)}+\sum_{i=n-1}^{1}\frac{i\cdot n}{gcd(n-i,n)})+n$

求和式中分母相同的项合并得到：

$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n^2}{gcd(i,n)}+n$

即：

$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{gcd(i,n)}+\frac{n}{2}$

可以将相同的$gcd(i,n)$合并在一起计算，故只需要统计$gcd(i,n)=d$的个数。当$gcd(i,n)=d$时，$gcd(\frac{i}{d},\frac{n}{d})=1$，所以$gcd(i,n)=d$的个数有$\varphi(\frac{n}{d})$个。

故答案为：

$\frac{1}{2}\sum_{d|n}\frac{n^2\varphi(\frac{n}{d})}{d}+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}n(\sum_{d|n}d\varphi(d)+1)$

所以问题转化为求$g(n)=\sum_{d|n}d\varphi(d)$

由积性函数性质知道函数g为积性函数，可以想办法用筛法筛出，下面是筛法的推导过程：

首先考虑$g(p_j^k)$的值，显然它的约数只有$p_j^0,p_j^1,\dots,p_j^k$，因此

$g(p_j^k)=\sum_{w=0}^{k}p_j^w\varphi(p_j^w)$

又有$\varphi(p_j^w)=p_j^{w-1}(p_j-1)$，原式可以化为：

$\sum_{w=0}^{k}p_j^{2w-1}(p_j-1)$

于是有：

$g(p_j^{k+1})=g(p_j^k)+p_j^{2k+1}(p_j-1)$

那么，对于线性筛中的$g(i\cdot p_j)$ $(p_j|i)$，令$i=a\cdot p_j^w \quad (gcd(a,p_j)=1)$，可得：

$g(i\cdot p_j)=g(a)\cdot g(p_j^{w+1})$

$g(i)=g(a)\cdot g(p_j^w)$

即

$g(i\cdot p_j)-g(i)=g(a)\cdot p_j^{2w+1}\cdot(p_j-1)$

同理有：

$g(i)-g(\frac{i}{p_j})=g(a)\cdot p_j^{2w-1}\cdot(p_j-1)$

因此

$g(i\cdot p_j)=g(i)+(g(i)-g(\frac{i}{p_j}))\cdot p_j^2$

筛法部分代码如下：

```
void shai(){
    g[1]=1;
    for(int i=2;i<=N;i++){
        if(!flg[i]) p[++tot]=i,g[i]=i*(i-1)+1;
        for(int j=1;j<=tot&&i*p[j]<=N;j++){
            flg[i*p[j]]=1;
            if(i%p[j]==0){
                g[i*p[j]]=g[i]+(g[i]-g[i/p[j]])*p[j]*p[j];
                break;
            }
            g[i*p[j]]=g[i]*g[p[j]];
        }
    }
}
```

3. P1829

   求值（对20101009取模）

   $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}lcm(i,j)\quad(n,m\le 10^7)$

   【解答】

   原式子等价于

   $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{i\cdot j}{gcd(i,j)}$

   枚举最大公因数d，得到：

   $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|i,d|j,gcd(\frac{i}{d},\frac{j}{d})=1}\frac{i\cdot j}{d}$

   变换求和顺序，先枚举d：

   $\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[gcd(i,j)=1]\frac{d\cdot i\cdot d\cdot j}{d}=\sum_{d=1}^{n}d\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[gcd(i,j)=1]i\cdot j$

   我们先来处理后半部分，记：

   $sum(n,m)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[gcd(i,j)=1]i\cdot j$

   利用莫比乌斯函数的定义展开$[gcd(i,j)=1]$：

   $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|gcd(i,j)}\mu(d)\cdot i\cdot j$

   变换求和顺序，先枚举约数：

   $\sum_{d=1}^{n}\sum_{d|i}^{n}\sum_{d|j}^{m}\mu(d)\cdot i\cdot j=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\cdot d^2\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}i\cdot j$

   上式的后半部分是一个范围内的数对之和，记：

   $g(n,m)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}i\cdot j=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{m(m+1)}{2}$

   至此，

   $sum(n,m)=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\cdot d^2\cdot g(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor,\lfloor\frac{m}{d}\rfloor)$

   预处理$\mu(d)\cdot d^2$的前缀和，利用整除分块可以求解sum函数

   求出sum之和，回到原式为：

   $\sum_{d=1}^{n}d\cdot sum(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor,\lfloor\frac{m}{d}\rfloor)$

   也可以用整除分块求解。

   （上述过程中默认$n\le m$）

4. P3327

多组数据，求

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}d(i\cdot j)$

其中$d(n)$表示n的约数的个数，$n,m,T\le 5\times 10^4$

【解答】

我们首先证明下面等式：

$d(i\cdot j)=\sum_{x|i}\sum_{y|j}[gcd(x,y)=1]$

> 假设$i=p_1^{x_1}p_2^{x_2}\dots p_k^{x_k},j=p_1^{y_1}p_2^{y_2}\dots p_k^{y_k}$
>
> 等式左边$=(x_1+y_1+1)(x_2+y_2+1)\dots(x_k+y_k+1)$
>
> 等式右边中，对于某个质数p_m，可能的分配为$x=p_m^0,p_m^1,\dots,p_m^{x_m};y=1$或者$y=p_m^0,p_m^1,\dots,p_m^{y_m};x=1$。一共有$(x_m+y_m+1)$种分配可能。根据乘法原理：
>
> 等式右边$=(x_1+y_1+1)(x_2+y_2+1)\dots(x_k+y_k+1)$

接着化简这个式子：

$$
\begin{aligned}
d(i\cdot j)&=\sum_{d|i}\sum_{y|j}[gcd(x,y)=1]=\sum_{x|i}\sum_{y|j}\sum_{p|gcd(x,y)}\mu(p)\\
&=\sum_{p=1}^{min(i,j)}\sum_{x|i}\sum_{y|j}[p|gcd(x,y)]\cdot\mu(p)=\sum_{p|i,p|j}\mu(p)\sum_{x|i}\sum_{y|j}[p|gcd(x,y)]\\
&=\sum_{p|i,p|j}\mu(p)\sum_{x|\frac{i}{p}}\sum_{y|\frac{j}{p}}1=\sum_{p|i,p|j}\mu(p)d(\frac{i}{p})d(\frac{j}{p})
\end{aligned}
$$

把这个式子带回原式：

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}d(i\cdot j)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p|i,p|j}\mu(p)d(\frac{i}{p})d(\frac{j}{p})\\
&=\sum_{p=1}^{min(n,m)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[p|i,p|j]\cdot\mu(p)d(\frac{i}{p})d(\frac{j}{p})\\
&=\sum_{p=1}^{min(n,m)}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{p}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{p}\rfloor}\mu(p)d(i)d(j)\\
&=\sum_{p=1}^{min(n,m)}\mu(p)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{p}\rfloor}d(i)\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{p}\rfloor}d(j)\\
&=\sum_{p=1}^{min(n,m)}\mu(p)S(\lfloor\frac{n}{p}\rfloor)S(\lfloor\frac{m}{p}\rfloor)
\end{aligned}
$$

其中$S(n)=\sum_{i=1}^{n}d(i)$

先$O(n)$预处理μ,d的前缀和，再用整除分块处理上面的式子。

杜教筛

杜教筛主要用于求解数论函数的前缀和，可以在低于线性时间的复杂度内求解。

问题

对于数论函数f，我们要计算$S(n)=\sum_{i=1}^{n}f(i)$

引入公式

对于任意一个数论函数g，必定满足：

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}f(d)g(\frac{i}{d})=\sum_{i=1}^{n}g(i)S(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$

也即：$\sum_{i=1}^{n}(f*g)(i)=\sum_{i=1}^{n}g(i)S(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$

> 证明过程主要变换求和顺序就可以
>
> $$
> \begin{aligned}
> &\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}f(d)g(\frac{i}{d})\\
> =&\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}g(d)f(\frac{i}{d})\\
> =&\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[d|i]g(d)f(\frac{i}{d})\\
> =&\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}g(d)f(i)
> \end{aligned}
> $$

> $=\sum_{d=1}^{n} g(d)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor} f(i)$
>
> $=\sum_{d=1}^{n} g(d)S(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)$

递推式

根据上面公式可以得到递推式：

$g(1)S(n)=\sum_{i=1}^{n}(f*g)(i)-\sum_{i=2}^{n} g(i)S(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$

所以我们要选取合适的函数g使得我们能快速的对$\sum_{i=1}^{n}(f*g)(i)$求和，然后用整除分块求解$\sum_{i=2}^{n} g(i)S(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$。

应用

1. P4213

   求$S_1(n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(i)$和$S_2(n)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)$的值，$n\le 2^{31}-1$

   【解答】

   先求S_1：

   我们知道$\mu*1=\varepsilon$

   所以$S_1(n)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon(i)-\sum_{i=2}^{n} S_1(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)=1-\sum_{i=2}^{n} S_1(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$

   用整除分块直接处理的复杂度为$O(n^{\frac{3}{4}})$。如果先用线性筛预处理出前$n^{\frac{2}{3}}$项，剩余部分的时间复杂度为$O(n^{\frac{2}{3}})$。

   对于较大的值，需要用map存下其对应的值做记忆化。

   对于S_2，我们有两种解法，一种是用莫比乌斯反演：

   $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[gcd(i,j)=1]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d|i,d|j}\mu(d)$

   $=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\lfloor\frac{n}{d}\rfloor^2$

   所以只需要求出莫比乌斯函数的前缀和，就能快速求出欧拉函数的前缀和了。

   另一种方法是使用杜教筛：

   由于$\varphi*1=id$

   所以$S_2(n)=\frac{1}{2}n(n+1)-\sum_{i=2}^{n} S_2(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$

   下面是求莫比乌斯函数前缀和的函数：

```
map<ll, ll> mp_mu;
ll S_mu(ll x) {
  if (x < maxn) return sum_mu[x];//已经预处理了前maxn-1个前缀和保存在sum_mu数组中
  if (mp_mu[x]) return mp_mu[x];
  ll ret = 1;
  for (ll i = 2, j; i <= x; i = j + 1) {
    j = x / (x / i);
    ret -= S_mu(x / i) * (j - i + 1);
  }
  return mp_mu[x] = ret;
}
```

2. $\mu\cdot id_k$，$\varphi\cdot id_k$ (点乘)

   【解答】

   剥点乘有一个技巧,当 C 是**完全积性函数**时 $(A\cdot C)*(B\cdot C)=(A*B)\cdot C$ (提公因式)

   证明：$\sum\limits_{d|n}\left(A(d)C(d)\right)\left(B(\frac{n}{d})C(\frac{n}{d})\right)=C(n)\sum\limits_{d|n}A(d)B(\frac{n}{d})$

   这里卷上id_k得到：

   $(\mu\cdot id_k)*id_k=(\mu\cdot id_k)*(I\cdot id_k)=(\mu*I)\cdot id_k=e$

   $(\varphi\cdot id_k)*id_k=(\varphi\cdot id_k)*(I\cdot id_k)=(\varphi*I)\cdot id_k=id_{k+1}$

得到卷积式后杜教筛就是体力活了。

从上述推导中可以看出，从点乘里面剥完全积性函数相对容易。

powerful number

Powerful Number（以下简称 PN）筛类似于杜教筛，或者说是杜教筛的一个扩展，可以拿来求一些积性函数的前缀和。

要求：

- 存在一个函数 g 满足：
  - g 是积性函数。
  - g 易求前缀和。
  - 对于质数 p，$g(p)=f(p)$。

假设现在要求积性函数 f 的前缀和 $F(n)=\sum_{i=1}^{n}f(i)$。

Powerful Number

定义：对于正整数 n，记 n 的质因数分解为 $n=\prod_{i=1}^{m}p_i^{e_i}$。$n$ 是 PN 当且仅当 $\forall 1\le i\le m, e_i>1$。

性质 1：所有 PN 都可以表示成 a^2b^3 的形式。

证明：若 e_i 是偶数，则将 $p_i^{e_i}$ 合并进 a^2 里；若 e_i 为奇数，则先将 p_i^3 合并进 b^3 里，再将 $p_i^{e_i-3}$ 合并进 a^2 里。

性质 2：n 以内的 PN 至多有 $O(\sqrt{n})$ 个。

证明：考虑枚举 a，再考虑满足条件的 b 的个数，有 PN 的个数约等于

$$\int_1^{\sqrt{n}}\sqrt[3]{\frac{n}{x^2}}\mathrm{d}x=O(\sqrt{n})$$

那么如何求出 n 以内所有的 PN 呢？线性筛找出 $\sqrt{n}$ 内的所有素数，再 DFS 搜索各素数的指数即可。由于 n 以内的 PN 至多有 $O(\sqrt{n})$ 个，所以至多搜索 $O(\sqrt{n})$ 次。

PN 筛

首先，构造出一个易求前缀和的积性函数 g，且满足对于素数 p，$g(p)=f(p)$。记 $G(n)=\sum_{i=1}^{n}g(i)$。

然后，构造函数 $h=f/g$，这里的 $/$ 表示狄利克雷卷积除法。根据狄利克雷卷积的性质可以得知 h 也为积性函数，因此 $h(1)=1$。$f=g*h$，这里 $*$ 表示狄利克雷卷积。

对于素数 p，$f(p)=g(1)h(p)+g(p)h(1)=h(p)+g(p)\implies h(p)=0$。根据 $h(p)=0$ 和 h 是积性函数可以推出对于非 PN 的数 n 有 $h(n)=0$，即 h 仅在 PN 处取有效值。

现在，根据 $f=g*h$ 有

$$
\begin{aligned}
F(n) &= \sum_{i=1}^{n} f(i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} h(d) g\left(\frac{i}{d}\right) \\
&= \sum_{d=1}^{n} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} h(d) g(i) \\
&= \sum_{d=1}^{n} h(d) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} g(i) \\
&= \sum_{d=1}^{n} h(d) G\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right) \\
&= \sum_{\substack{d=1 \\ d \text{ is PN}}}^{n} h(d) G\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)
\end{aligned}
$$

$O(\sqrt{n})$ 找出所有 PN，计算出所有 h 的有效值。对于 h 有效值的计算，只需要计算出所有 $h(p^c)$ 处的值，就可以根据 h 为积性函数推出 h 的所有有效值。现在对于每一个有效值 d，计算 $h(d)G\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$ 并累加即可得到 $F(n)$ 。

下面考虑计算 $h(p^c)$，一共有两种方法：一种是直接推出 $h(p^c)$ 仅与 p, c 有关的计算公式，再根据公式计算 $h(p^c)$；另一种是根据 $f = g * h$ 有 $f(p^c) = \sum_{i=0}^{c} g(p^i)h(p^{c-i})$，移项可得 $h(p^c) = f(p^c) - \sum_{i=1}^{c} g(p^i)h(p^{c-i})$，现在就可以枚举素数 p 再枚举指数 c 求解出所有 $h(p^c)$。

过程

1. 构造 g
2. 构造快速计算 G 的方法
3. 计算 $h(p^c)$
4. 搜索 PN，过程中累加答案
5. 得到结果

对于第 3 步，可以直接根据公式计算，可以使用枚举法预处理打表，也可以搜索到了再临时推。

性质

以使用第二种方法计算 $h(p^c)$ 为例进行分析。可以分为计算 $h(p^c)$ 和搜索两部分进行分析。

对于第一部分，根据 $O(\sqrt{n})$ 内的素数个数为 $O\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right)$，每个素数 p 的指数 c 至多为 $\log n$，计算 $h(p^c)$ 需要循环 $(c-1)$ 次，由此有第一部分的时间复杂度为 $O\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n} \cdot \log n \cdot \log n\right) = O(\sqrt{n}\log n)$，且这是一个宽松的上界。根据题目的不同还可以添加不同的优化，从而降低第一部分的时间复杂度。

对于搜索部分，由于 n 以内的 PN 至多有 $O(\sqrt{n})$ 个，所以至多搜索 $O(\sqrt{n})$ 次。对于每一个 PN，根据计算 G 的方法不同，时间复杂度也不同。例如，假设计算 $G\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$ 的时间复杂度为 $O(1)$，则第二部分的复杂度为 $O(\sqrt{n})$。

特别地，若借助杜教筛计算 $G\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$，则第二部分的时间复杂度为杜教筛的时间复杂度，即 $O(n^{\frac{2}{3}})$。因为若事先计算一次 $G(n)$，并且预先使用线性筛优化和用支持快速随机访问的数据结构（如 C++ 中的 `std::map` 和 `std::unordered_map`）记录较大的值，则杜教筛过程中用到的 $G\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$ 都是线性筛中记录的或者 `std::map` 中记录的，这一点可以直接用程序验证。

对于空间复杂度，其瓶颈在于存储 $h(p^c)$。若使用二维数组 a 记录，$a_{i,j}$ 表示 $h(p_i^j)$ 的值，则空间复杂度为 $O\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n} \cdot \log n\right) = O(\sqrt{n})$。

例题

1. P5325

   给定积性函数 $f(p^k)=p^k(p^k-1)$，求 $\sum_{i=1}^n f(i)$。

   【解答】

   易得 $f(p)=p(p-1)=\mathrm{id}(p)\varphi(p)$，构造 $g(n)=\mathrm{id}(n)\varphi(n)$。

   考虑使用杜教筛求 $G(n)$，根据 $(\mathrm{id}\cdot\varphi)*\mathrm{id}=\mathrm{id}_2$ 可得 $G(n)=\sum_{i=1}^n i^2-\sum_{i=2}^n d\cdot G\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\right)$。

   之后 $h(p^k)$ 的取值可以枚举计算，这种方法不再赘述。

   此外，此题还可以直接求出 $h(p^k)$ 仅与 p,k 有关的公式，过程如下：

$$
\begin{aligned}
&f(p^k)=\sum_{i=0}^{k} g(p^{k-i})h(p^i)\\
\iff &p^k(p^k-1)=\sum_{i=0}^{k} p^{k-i}\varphi(p^{k-i})h(p^i)\\
\iff &p^k(p^k-1)=\sum_{i=0}^{k} p^{2k-2i-1}(p-1)h(p^i)\\
\iff &p^k(p^k-1)=h(p^k)+\sum_{i=0}^{k-1} p^{2k-2i-1}(p-1)h(p^i)\\
\iff &h(p^k)=p^k(p^k-1)-\sum_{i=0}^{k-1} p^{2k-2i-1}(p-1)h(p^i)\\
\iff &h(p^k)-p^2h(p^{k-1})=p^k(p^k-1)-p^{k+1}(p^{k-1}-1)-p(p-1)h(p^{k-1})\\
\iff &h(p^k)-ph(p^{k-1})=p^{k+1}-p^k\\
\iff &\frac{h(p^k)}{p^k}-\frac{h(p^{k-1})}{p^{k-1}}=p-1
\end{aligned}
$$

   再根据 $h(p)=0$，通过累加法即可推出 $h(p^k)=(k-1)(p-1)p^k$。

2. LOJ6053

   给定函数$f(x)$：

   1. $f(1)=1$
   2. $f(p^c)=p\oplus c$（p为质数）
   3. $f(ab)=f(a)f(b)$（a,b互质）

   求$\sum_{i=1}^n f(i)$

   $n\le 10^{10}$

   【解答】

   易得：

$$
f(p)=\begin{cases}p+1 & p=2\\ p-1 & \text{otherwise}\end{cases}
$$

   构造 g 为

$$
g(n)=\begin{cases}3\varphi(n) & 2\mid n\\ \varphi(n) & \text{otherwise}\end{cases}
$$

   易证 $g(p)=f(p)$ 且 g 为积性函数。

   下面考虑求 $G(n)$。

$$
\begin{aligned}
G(n) &= \sum_{i=1}^{n}[i \bmod 2 = 1]\varphi(i) + 3\sum_{i=1}^{n}[i \bmod 2 = 0]\varphi(i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\varphi(i) + 2\sum_{i=1}^{n}[i \bmod 2 = 0]\varphi(i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\varphi(i) + 2\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\varphi(2i)
\end{aligned}
$$

记 $S_1(n)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)$，$S_2(n)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(2i)$，则 $G(n)=S_1(n)+2S_2\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$。

当 $2 \mid n$ 时，有

$$
\begin{aligned}
S_2(n) &= \sum_{i=1}^{n}\varphi(2i) \\
&= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(\varphi(2(2i-1))+\varphi(2(2i))) \\
&= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(\varphi(2i-1)+2\varphi(2i)) \\
&= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(\varphi(2i-1)+\varphi(2i)) + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\varphi(2i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\varphi(i) + S_2\left(\frac{n}{2}\right) \\
&= S_1(n) + S_2\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)
\end{aligned}
$$

当 $2 \nmid n$ 时，有

$$
\begin{aligned}
S_2(n) &= S_2(n-1)+\varphi(2n) \\
&= S_2(n-1)+\varphi(n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\varphi(i) + S_2\left(\frac{n-1}{2}\right)+\varphi(n) \\
&= S_1(n) + S_2\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)
\end{aligned}
$$

综上，有 $S_2(n)=S_1(n)+S_2\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$。

S_1 可以用杜教筛求，S_2 直接按照公式推，这样 G 也可以求出来了。

min25筛

质数的 c 次幂前缀和

可以去 P6021 【模板】质数前缀统计 进行阶段性测试
我们考虑**借鉴埃式筛法的思想**,逐渐使用质数将不合法的数筛去。
p_k 特指从小到大第 k 个质数，编号从 1 开始。P_k 指前 k 个素数的集合。
设 $p_{\min}(n)$ 为 n 的最小质因子。特殊地，$p_{\min}(1)=+\infty$。
设 $S_{n,k}$ 为（埃式筛法）筛除 $p_1\sim p_k$ 的倍数之后 n 以内剩余的数。
即 $S_{n,k}=\left\{x\in N^+ \middle| \, x\le n \text{ 且 } p_{\min}(x)>k\right\}$
（注意，$S_{n,k}$ 不包括 $p_1\sim p_k$，但包括 1）

- 定理：合数 q 必有一个 $\lfloor\sqrt{q}\rfloor$ 以内的因子。

因此,实现埃式筛的时候,只需要利用 $\lfloor\sqrt{N}\rfloor$ 以内的质数来筛除,就能正确地得到 N 以内所有的质数。
设 $\lfloor\sqrt{N}\rfloor$ 内共有 m 个质数。
$S_{n,m}$ 就是 $\left(\lfloor\sqrt{N}\rfloor,n\right]$ 以内素数的集合。
令 $h(n,k)=\sum\limits_{x\in S_{n,k}}x^c$,即筛除 k 轮之后 n 以内剩余的数的 c 次方和。
那么，$h(N,m)-1+\sum\limits_{p\in P_m}p^c$ 即为答案。
我们以 k **从小到大**的方式，依次筛去"**最小素因子**为 p_k 的数"，注意只筛到 p_m 即可。
设 $D_{n,k}=\left\{x\in N^+\middle|\ x\le n \text{ 且 } p_{\min}(x)=k\right\}$,即埃式筛法 k 轮中筛除的数。
按照定义有 $S_{n,k}=S_{n,k-1}-D_{n,k}$。
又能发现，对于 $x\in S_{\lfloor n/p_k\rfloor,k-1}$ 则 p_k*x 最小素因子恰为 p_k，即 $p_k*x\in D_{n,k}$。
而且，若 $t\in D_{n,k}$ ，那么 t/p_k 一定 $\in S_{\lfloor n/p_k\rfloor,k-1}$。
这给出一个双射（充要条件），即 $D_{n,k}=p_kS_{\lfloor n/p_k\rfloor,k-1}$
综上可得如下关系式：
$S_{n,k}=S_{n,k-1}-p_kS_{\lfloor n/p_k\rfloor,k-1}$
由此得到 h 的递推式：
$h(n,k)=h(n,k-1)-p_k^ch(\lfloor n/p_k\rfloor,k-1)$
边界： $h(n,0)=\sum\limits_{i=1}^{n}i^c$,可以插值求出。

注意到我们在递推中需要利用 $\lfloor n/p_k\rfloor$ 处的取值。
由整除经典结论，我们只用维护任意的 $\lfloor N/d\rfloor$ 处的答案即可,这一共 $O(\sqrt{N})$ 个。
接下来我们讨论实现方法。

①

采用暴力实现,在每个质数处使用上述递推式,复杂度为:
质数个数 $O(\frac{\sqrt{N}}{logN})$,维护的值 $O(\sqrt{N})$,总复杂度为 $O(\frac{N}{logN})$。

②

当 $p_k>\sqrt{n}$ 时，可推知 $D_{n,k}=\{p_k\}$,于是 $S_{n,k}=S_{n,k-1}-\{p_k\}$。
$\Rightarrow S_{n,k}+P_k=S_{n,k-1}+P_{k-1}$
不妨令 $S'_{n,k}=S_{n,k}+P_k$,**改**设 $h(n,k)=\sum\limits_{i\in S'_{n,k}}i^c$。
这样，当 $p_k>\sqrt{n}$ 时，$S'_{n,k}=S'_{n,k-1}$ ，无变化。
这样，只有筛 $\le\sqrt{n}$ 的质数才会影响到 $h(n,\_)$ 的值。
当 $p_k\le\sqrt{n}$ 时 , 由 $S_{n,k}=S_{n,k-1}-p_kS_{\lfloor n/p_k\rfloor,k-1}$
$\Rightarrow S_{n,k}+P_k=S_{n,k-1}+P_k-p_kS_{\lfloor n/p_k\rfloor,k-1}$ （两边加上 P_k）
$\Rightarrow S'_{n,k}=S'_{n,k-1}-p_k(S'_{\lfloor n/p_k\rfloor,k-1}-P_{k-1})+\{p_k\}$ （全部改写为 S'）
注意到 $S'_{p_{k-1},k-1}=P_{k-1}+1$,可替换为：
$\Rightarrow S'_{n,k}=S'_{n,k-1}-p_k(S'_{\lfloor n/p_k\rfloor,k-1}-S'_{p_{k-1},k-1})$
这对应下面的递推式：
$h(n,k)=h(n,k-1)-p_k^c\Big(h(\lfloor n/p_k\rfloor,k-1)-h(p_{k-1},k-1)\Big)$
最终答案为 $h(n,m)-1$。
有 $O(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$ 个质数会影响到 $h(n,\_)$ 。取最大的 $\sqrt{N}$ 个 $n=\lfloor N/d\rfloor$ 积分：
总复杂度 $O\left(\sum\limits_{d=1}^{\sqrt{N}}\frac{\sqrt{N/d}}{log(N/d)}\right)=O(\frac{N^{3/4}}{logN})$。
该做法实战中最为常用。

积性函数求和

问题概述：
给出一个积性函数 F ,满足如下性质:

- $F(p)$ 为关于 p 的简单多项式。
- $F(p^k)$ 能够较快速求出。
- 给出范围 N ,求出 F 的块筛。

我们以 k **从大到小**的方式,考虑"**最小素因子**为 p_k 的数"。
方便起见，设 $S_{n,k}$ 为最小素因子 $\geq p_k$ 的集合。
仿照前面 h 的求解方法,设 $r(n,k)=\sum\limits_{i\in S_{n,k}}^{n} G(i)$。
则答案为 $r(N,1)$。
枚举 $p_t=p_{\min}(x)$，再枚举 x 中 p_k 的次数 c，对于符合该要求的 x 计算贡献。
可得 $r(n,k)=\sum\limits_{t=k}^{p_t\leq n}\sum\limits_{c=1} F(p_t^c)r\left(\lfloor x/p_t^c\rfloor,t+1\right)$
p_t 若要枚举到 n 显然不优。
只需枚举到 $\sqrt{n}$，对于 $p_k>\sqrt{n}$ 的情况，符合条件的 x 只有 p_k 本身，可以使用前面求出的素数部分和。
直接暴力搜索，不需要记忆化。
在 10^{12} 内，复杂度可以视为 $O\left(\frac{N^{3/4}}{\log N}\right)$，证明见 2018 年候选队论文。
例题①：Loj#6053. 简单的函数
当 p 为奇质数时 $G(p)=p \operatorname{xor} 1=p-1$。特殊地，$G(2)=3$。

例题②：Uoj#188. 【UR #13】Sanrd
次大质因子貌似和上面提到的积性函数求和没什么关系......
设 $f(n)$ 为 n 的非严格次大质因子。
设 $r(n,k)$ 为 $\sum\limits_{i\in S_{n,k}} f(i)$。
设 $h[l,r]$ 为 $[l,r]$ 区间内的质数个数。
仍然考虑枚举 $p_t=p_{\min}(x)$，再枚举 x 中 p_k 的次数 c，对于符合该要求的 x 计算贡献。
分两类讨论：
若 $x=p_t^{c_1}p_l\ (t\leq l)$，则 $f(x)=p_t$。
若 $x=p_t^c y$，且 y 的质因子次数 ≥ 2 那么 $f(x)=f(y)$
可得 $r(n,k)=\sum\limits_{t=k}^{p_t\leq n}\sum\limits_{c=1}\left(r\left(\lfloor x/p_t^c\rfloor,t+1\right)+p_t*h\left[p_t,\lfloor n/p_t^c\rfloor\right]+[c>1]\right)$
由于质数的贡献为 0，可以省去第一部分。

题目选讲

1. CF338D

   有一个 $n\times m$ 的表格，第 i 行第 j 列的值为 $\gcd(i,j)$。给出一个数列 a，判断它是否在表格的某一行出现过。

   $n,m\leq 10^{12}$，$|a|\leq 10^4$。

   【解答】

   先考虑行的可能值

   设 $x=lcm(a)$，行号显然是 x 的倍数。显然直接取 x 最优，否则只会引入多余的因子。

   接下来设 $a[i]$ 位置为 $y+i$，我们就要有 $a[i]|y+i$，我们可以用中国剩余定理扩展（excrt）解出 $y \mod a_i=-i+1$，即 $y \mod x=u$。显然取最小的 y 最好。最后验证即可。
2. 51nod 1190

   求 $\sum_{i=a}^{b} lcm(i,b) \bmod 10^9+7$。

   $T\leq 5000$ 组数据，$1\leq a\leq b\leq 10^9$。

   【解答】

   先给出不怎么需要动脑子但是推起来稍微麻烦一点的莫反做法

   首先

$$ans = b\sum_{d|b}\frac{1}{d}\sum_{i=a}^{b} i[\gcd(i,b)=d]$$

$$= b\sum_{d|b}\sum_{i=\lceil\frac{a}{d}\rceil}^{\frac{b}{d}} i[gcd(i,\frac{b}{d})=1]$$

强行反演一波，把$[n=1]$化成$\sum_{i|n}\mu(i)$

$$\begin{aligned}ans &= b\sum_{d|b}\sum_{i=\lceil\frac{a}{d}\rceil}^{\frac{b}{d}} i\sum_{j|\gcd(i,\frac{b}{d})}\mu(j)\\ &= b\sum_{d|b}\sum_{j|\frac{b}{d}}\mu(j)\sum_{i=\lceil\frac{a}{d}\rceil}^{\frac{b}{d}} i[i \mod j=0]\\ &= b\sum_{d|b}\sum_{j|\frac{b}{d}}\mu(j)\sum_{i=\lceil\frac{a}{d}\rceil}^{\frac{b}{d}} i[i \mod j=0]\\ &= \frac{b}{2}\sum_{d|b}\sum_{j|\frac{b}{d}}\mu(j)j(\lfloor\frac{b}{dj}\rfloor+\lceil\frac{a}{dj}\rceil)(\lfloor\frac{b}{dj}\rfloor-\lceil\frac{a}{dj}\rceil+1)\\ &= \frac{b}{2}\sum_{T|b}(\lfloor\frac{b}{T}\rfloor+\lceil\frac{a}{T}\rceil)(\lfloor\frac{b}{T}\rfloor-\lceil\frac{a}{T}\rceil+1)\sum_{d|T}\mu(d)d\end{aligned}$$

那么我们只要把b分解一下质因数，然后dfs找出b的所有因子就可以了
然而这里还有一个问题，就是$f(T)=\sum_{d|T}\mu(d)d$该怎么快速计算
首先我们可以发现f也是个积性函数，有$f(p)=1-p, f(p^c)=1-p$
因为只有次数小于等于1的质因子会有贡献，所以我们在爆搜枚举因数的时候，如果$p\nmid i$，那么$f(i\times p)=f(i)\times(1-p)$

再给出另一个神仙做法

$$\begin{aligned}&\sum_{i=a}^{b} ib/gcd(i,b)\\ =&\sum_{i=a}^{b} ib\sum_{t} 1/t[gcd(i,b)=t]\\ =&\sum_{i=a}^{b} ib\sum_{t|i,t|b} f(t)\\ =&\sum_{t|b} f(t)\sum_{i=a}^{b} i[t|i]\end{aligned}$$

右侧即为 a 到 b 中 t 的倍数之和，容易计算。

系数需要满足 $\sum_{t|s} f(t)=1/s$，当然我们可以直接大力算出来，也可以发现它是积性的，$f(1)=1$，$f(p)=1/p-1$，$f(p^2)=1/(p^2)-1/p$，类似地 $f(p^k)=\frac{1}{p^k}-\frac{1}{p^{k-1}}$。将 b 分解因数后枚举因数 t 计算即可。

3. 51nod 1227

记 $f(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} lcm(i,n)$。

求 $\sum_{i=a}^{b} f(i) \bmod 10^9+7$。

$1\le a\le b\le 10^{10}$。

【解答】

$$f(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} lcm(i,n)=\sum_{d|n}\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n} i[gcd(i,n)=d]=\sum_{d|n}\sum_{i=1}^{n/d} i[gcd(i,n/d)=1]$$

熟知 $\sum_{i=1}^n i[gcd(i,n)=1]=\frac{n\varphi(n)+[n=1]}{2}$（$i$ 与 $n-i$ 均与 n 互质或不互质）。

带入有 $f(n)=\frac{1}{2}(1+\sum_{d|n} d\varphi(d))$。

考虑前缀和，我们要求的就是 $\sum_{i=1}^n \sum_{d|i} d\varphi(d)=\sum_{d=1}^n d\varphi(d)\lfloor n/d\rfloor$，将 $d\varphi(d)$ 杜教筛即可。

杜教筛的话：

$(id\cdot\varphi(d))*(I\cdot id)=(\varphi(d)*I)\cdot id=id_2$

4. project euler 530

记 $f(n)=\sum_{d|n}\gcd(d,n/d)$，求 $\sum_{i=1}^n f(i)$ 取模。

$n\le 10^{12}$。

【解答】

根据$\varphi*1=id$反演

$\sum_{i=1}^n f(i)=\sum_p\sum_q[pq\le n]gcd(p,q)=\sum_p\sum_q[pq\le n]\sum_{x|i,j}\varphi(x)$

$\sum_x\varphi(x)\sum_{x|p}\sum_{x|q}[pq\le n]=\sum_x\varphi(x)\sum_{p,q\ge 1}[pq\le n/x^2]=\sum_x\varphi(x)sd(n/x^2)$

枚举 x，根号算 sd。$\sum_{i=1}^n d(i)=\sum_{i=1}^n\sum_{h|i}1=\sum_{h=1}^n\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{h}\rfloor}1$

5. cometoj 1098

定义 $d(x)$ 是满足 $y|x$ 且 $y>1$ 的最小整数 y。

定义 $f(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ d(x)f\left(\frac{x}{d(x)^2}\right) & x>1, d(x)^2\mid x\\ f\left(\frac{x}{d(x)}\right) & \text{others}\end{cases}$。

求 $\sum_{i=1}^n f(i)$。

$T\le 10$ 组数据，$n\le 10^{13}$。

【解答】

设 $x=\prod_i p_i^{e_i}$，

$$f(x)=\prod_{i=1}^k p_i^{\lfloor e_i/2\rfloor}=\frac{x}{\prod_{i=1}^k p_i^{\lceil e_i/2\rceil}}=\sum_{j=1}^x[\prod_{i=1}^k p_i^{\lceil e_i/2\rceil}|j]=\sum_{j=1}^x[x|j^2]$$

最后一步可以这么理解，假设j的p[i]因子次数为q[i]，那么我们要求e[i]/2<=q[i]，即e[i]<=2q[i]。别的质因子显然无关紧要。

因而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(i)&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^i\left[i|j^2\right]=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^i\left[ik=j^2\right]\\&=\sum_{d=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^i[\gcd(i,k)=d]\left[ik=j^2\right]\\&=\sum_{d=1}^n\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{k=1}^i[\gcd(i,k)=1][i,k\text{ 都是完全平方数}]\\&=\sum_{d=1}^n\sum_{i=1}^{\sqrt{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}}\sum_{k=1}^i[\gcd(i,k)=1]=\sum_{d=1}^n\sum_{i=1}^{\sqrt{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}}\varphi(i)\\&=\sum_{i=1}^{\sqrt{n}}\varphi(i)\left\lfloor\frac{n}{i^2}\right\rfloor\end{aligned}$$

容易做到 $O(\sqrt{n})$ 预处理，每次询问 $O(n^{1/3})$（$O(n^{1/2})$ 亦可通过）。

这个非常难推，我们也可以大力powerful number筛就可以直接过了

6. 51nod 1847

记 $sgcd(i,j)$ 为 (i,j) 的公约数中第二大的，特别地若 $gcd(i,j)=1$ 定义 $sgcd(i,j)=0$。

求 $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n sgcd(i,j)^k$。

$n\le 10^9$，$k\le 50$。

【解答】

若 $gcd(i,j)=t>1$，容易看出 $sgcd(i,j)$ 为 $t/minp(t)$，其中 $minp$ 为最小质因子。

那么答案为 $\sum_{i=2}^n(\frac{i}{minp(i)})^k(2\sum_{i=1}^{n/i}\varphi(i)-1)$。

后一部分可以杜教筛。

前一部分我们设$f(i)=\frac{i}{minp(i)}$，那么我们需要去求$\sum_{i=1}^n f(i)^k$

我们发现$\sum_{i=1}^n f(i)^k=\pi(n)+\sum_{p\le\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{p}\rfloor}[minp(i)\ge p]i^k$

回顾min_25筛第一部分的dp式子：$h(n,k)=h(n,k-1)-p_k^c(h(\lfloor\frac{n}{p_k}\rfloor,k-1)-h(p_{k-1},k-1))$

我们发现上面式子的后面部分就和dp式子括号里面的部分是一样的，所以我们做min_25筛的这个dp的同时记录括号内部分的和，并且同时求出$\pi(n)$的值。

7. 51nod 1365

   $Fib_0=0, Fib_1=1, Fib_n=Fib_{n-1}+Fib_{n-2}$, 求 $(Fib_n \bmod Fib_k) \bmod 10^9+7$。

   $T\le 50000$ 组数据，$1\le n,k\le 10^{18}$。

   【解答】

   关于斐波那契，我们有公式 $F_n=F_kF_{n-k+1}+F_{k-1}F_{n-k}$ 和 $F_{k-1}^2+F_{k-1}F_k-F_k^2=(-1)^k$（考虑 $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{pmatrix}$）。为了方便起见，我们在负数区域内将数列拓展：$F_{-n}=(-1)^{n-1}F_n$。

   因此，$F_n\equiv F_{k-1}F_{n-k}\equiv F_{k-1}^{\lfloor n/k\rfloor}F_{n\bmod k}\pmod{F_k}$，设 $i=\lfloor n/k\rfloor, j=n \bmod k$，则 $F_n\equiv F_{k-1}^iF_j$。

   若 $i=2t$，$F_n\equiv(F_{k-1}^2)^tF_j\equiv((-1)^k+F_k^2-F_{k-1}F_k)^tF_j\equiv(-1)^{kt}F_j=(-1)^{ki/2}F_j$。

   若 $i=2t+1$，$F_n=F_{k-1}^iF_j=F_{k-1}^i(F_kF_{j-k+1}+F_{k-1}F_{j-k})\equiv F_{k-1}^{i+1}F_{j-k}\equiv(-1)^{k(i+1)/2}F_{j-k}=(-1)^{k(i+1)/2+(k-j-1)}F_{k-j}$。

   注意到 $0\le j,k-j\le k$，因而问题解决。

8. cometoj 1071

   给定 x,a,b，求有多少对 (i,j) 满足 $1\le i\le a$ 且 $1\le j\le b$ 且 $\lfloor x/i\rfloor j=\lfloor xj/i\rfloor$。

   $T\le 20$ 组数据，$1\le x,a,b\le 10^9$。

   【解答】

   $(x-x \bmod i)/i*j=(xj-xj \bmod i)/i$ 即 $x \bmod i*j=xj \bmod i$。

   令 $v=x \bmod i*j$，则我们有 $v=v \bmod i$，即 $v<i$。因此我们要求 $j<\frac{i}{x \mathrm{mod} i}$。

   因而答案是 $\sum_{i=1}^a\min(\lceil\frac{i}{x \mathrm{mod} i}\rceil-1,b)$。

   当 $i>x$ 时，该式为 $\sum_{i=x+1}^a\min(\lceil\frac{i}{x}\rceil-1,b)$，容易计算（讨论 $=b$ 的时刻点，小的时候是以 x 为周期 $+1$ 状物）。

   接下来考虑 $i\le x$ 的情况。注意到 $\lceil\frac{i}{x \mathrm{mod} i}\rceil=\lceil\frac{i}{x-x\lfloor x/i\rfloor}\rceil$，因而当 $\lfloor x/i\rfloor$ 和 $\lceil\frac{i}{x \mathrm{mod} i}\rceil$ 固定时满足条件的 i 是一个区间。枚举这两个值的所有可能对暴力计算。可以发现在 $x=10^9$ 时这样的对数为 693197，因此可以通过。

   详细证明可以见官方题解：https://static.eduzhixin.com/cometoj/solution/contest_38_1.pdf。