生成函数

普通生成函数

定义

对于一个序列a，它的普通生成函数定义为形式幂级数：

$F(x) = \sum_n a_n x^n$

比如序列$a =< 1, 1, 1, ... >$的普通生成函数是$\sum_{n\geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + ...$。

再比如序列$a =< 1, 3, 5, 7, ... >$的普通生成函数是$\sum_{n\geq 0}(2n + 1)x^n$

基本运算

考虑两个序列f, g的普通生成函数，分别为$F(z), G(z)$。那么有：

$(1)\alpha F(z) + \beta G(z) = \sum_n(\alpha f_n + \beta g_n)z^n$

$(2)F(z)G(z) = \sum_n(\sum_k f_k g_{n-k})z^n$

> 令序列h的每一项$h_n = \sum_k f_k g_{n-k}$，则称序列h为序列f和g的卷积。

$(3)z^m G(z) = \sum_n g_{n-m} z^n$

> 相当于原序列右移m位，前面补0

$(4)G(cz) = \sum_n c^n g_n z^n$

$(5)G'(z) = \sum_n(n + 1)g_{n+1} z^n$

$(6)zG'(z) = \sum_n n g_n z^n$

$(7)\int_0^z G(t)dt = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} g_{n-1} z^n$

$(8)\frac{1}{1-z} G(z) = \sum_n(\sum_{k\leq n} g_k)z^n$

> 因为$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + ...$
>
> 所以根据式子(2)，可以得出式子(8)

常见数列的普通生成函数

数列	生成函数	封闭形式
$<1,0,0,0,..>$	$\sum_n [n=0] z^n$	1
$<0,0,\ldots,0,1,0,0,..>$	$\sum_n [n=m] z^n$	z^m
$<1,1,1,\ldots>$	$\sum_n z^n$	$\frac{1}{1-z}$
$<1,-1,1,-1,\ldots>$	$\sum_n (-1)^n z^n$	$\frac{1}{1+z}$
$<1,0,1,0,\ldots>$	$\sum_n [2\|n] z^n$	$\frac{1}{1-z^2}$
$<1,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,1,0,\ldots>$	$\sum_n [m\|n] z^n$	$\frac{1}{1-z^m}$
$<1,2,3,\ldots>$	$\sum_n (n+1) z^n$	$\frac{1}{(1-z)^2}$
$<1,2,4,8,\ldots>$	$\sum_n 2^n z^n$	$\frac{1}{1-2z}$
$<1,4,6,4,1,0,0,\ldots>$	$\sum_n \binom{4}{n} z^n$	$(1+z)^4$
$<1,c,C_c^2,C_c^3,\ldots>$	$\sum_n \binom{c}{n} z^n$	$(1+z)^c$
$<1,c,C_{c+1}^2,C_{c+2}^3,\ldots>$	$\sum_n \binom{c+n-1}{n} z^n$	$\frac{1}{(1-z)^c}$
$<1,c,c^2,c^3,\ldots>$	$\sum_n c^n z^n$	$\frac{1}{1-cz}$
$<1,C_{m+1}^m,C_{m+2}^m,\ldots>$	$\sum_n \binom{m+n}{m} z^n$	$\frac{1}{(1-z)^{m+1}}$
$<0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots>$	$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$	$ln\frac{1}{1-z}$
$<0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\ldots>$	$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$	$ln(1+z)$
$<1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\ldots>$	$\sum_n \frac{1}{n!} z^n$	e^z

应用

1. 求斐波那契数列的通项公式

   【解答】

   斐波那契数列的定义为$a_0=0,a_1=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n>1)$。设它的普通生成函数是$F(x)$，那么根据它的递推式，我们可以列出下面的方程：

$F(x)=xF(x)+x^2F(x)-a_0x+a_1x+a_0$

可以解得

$F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$

接下来就是求它的展开形式，我们可以用下面两种方法：

方法一：

将$x+x^2$作为一个整体，可以得到：

$\frac{1}{1-(x+x^2)}=\sum_n(x+x^2)^n=\sum_n\sum_{i=0}^n C_n^i x^{2i}x^{n-i}$
$\qquad\qquad=\sum_n\sum_{i=0}^n C_n^i x^{n+i}=\sum_n x^n\sum_{i=0}^n C_{n-i}^i$

就求得了a_n的通项公式

方法二：

去求解一个待定系数的方程：

$\frac{A}{1-ax}+\frac{B}{1-bx}=\frac{x}{1-x-x^2}$

通分得到

$\frac{A-Abx+B-aBx}{(1-ax)(1-bx)}=\frac{x}{1-x-x^2}$

从而得到：

$A+B=0$

$-Ab-aB=1$

$a+b=1$

$ab=-1$

解得：

$A=\frac{1}{\sqrt{5}},B=-\frac{1}{\sqrt{5}},a=\frac{1+\sqrt{5}}{2},b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

从而得到：

$\frac{x}{1-x-x^2}=\sum_n x^n\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$

对于任意多项式$P(x),Q(x)$，生成函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$的展开式都可以使用上述方法求出。在实际运用过程中，一般来说会先求出$Q(x)$的根，把分母表示为$\prod(1-p_ix)^{d_i}$的形式，再求分子。

2. 卡特兰数通项公式

【解答】

卡特兰数的递推式为：$H_n=\sum_{i=0}^{n-1}H_iH_{n-1-i}(n\geq 2)$，并且$H_0=H_1=1$。

写成生成函数的卷积形式：$H(x)=1+xH^2(x)$

求根得到：$H(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$

问题来了，应该取哪个根呢？把分子有理化：$H(x)=\frac{2}{1\pm\sqrt{1-4x}}$

带入$x=0$，得到H_0就排除了不合法的根了，所以得到$H(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

接下来用牛顿二项式定理展开：

$$\begin{aligned}(1-4x)^{\frac{1}{2}}&=\sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n\\&=1+\sum_{n\geq 1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\underline{n}}}{n!}(-4x)^n\end{aligned}\tag{1}$$

注意到：

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\cdots\frac{-(2n-3)}{2} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^n(2n-2)!!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}\end{aligned}$$

带回上式：

$$\begin{aligned}(1-4x)^{\frac{1}{2}} &= 1+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}(-4x)^n \\ &= 1-\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}2x^n \\ &= 1-\sum_{n\geq 1}\binom{2n-1}{n}\frac{1}{(2n-1)}2x^n\end{aligned}$$

最后得到：

$$\begin{aligned}H(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \\ &= \frac{1}{2x}\sum_{n\geq 1}\binom{2n-1}{n}\frac{1}{(2n-1)}2x^n \\ &= \sum_{n\geq 1}\binom{2n-1}{n}\frac{1}{(2n-1)}x^{n-1} \\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{2n+1}{n+1}\frac{1}{(2n+1)}x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}x^n\end{aligned}$$

就得到了通项公式了。

3. 利用生成函数证明范德蒙德卷积恒等式$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}=\binom{r+s}{n}$

   【解答】

   由于$(1+z)^r(1+z)^s=(1+z)^{r+s}$就得出恒等式

4. 求递归式：$g_0=g_1=1, g_n=g_{n-1}+2g_{n-2}+(-1)^n(n\geq 2)$的封闭形式

   【解答】

   首先插入修正因子修正$n<2$的结果得到方程：

   $g_n=g_{n-1}+2g_{n-2}+(-1)^n+[n=1]$

   所以：

   $\begin{aligned}G(z) &= \sum_n g_n z^n = \sum_n g_{n-1}z^n + 2\sum_n g_{n-2}z^n + \sum_n (-1)^n z^n + \sum_{n=1} z^n \\ &= zG(z)+2z^2G(z)+\frac{1}{1+z}+z\end{aligned}$

   得出：

   $G(z)=\frac{1+z+z^2}{(1+z)(1-z-z^2)}=\frac{1+z+z^2}{(1-2z)(1+z)^2}$

接下来有两种方法来处理这个生成函数：

方法一：

令$G(z)=\frac{A}{1-2z}+\frac{Bz+C}{(1+z)^2}$

可以列出方程：

$A-2B=1$

$B-2C+2A=1$

$C+A=1$

解得：$A=\frac{7}{9},B=-\frac{1}{9},C=\frac{2}{9}$

所以$g_n=\frac{7}{9}2^n+(\frac{1}{3}n+\frac{2}{9})(-1)^n$

方法二：

根据$G(z)$的形式，可以知道g_n的形式为$g_n=a_1 2^n+(a_2 n+c)(-1)^n$

带入$n=0,1,2$等值，同样可以求出g_n

5. 求递归式
   $U_0=1,U_1=0;V_0=0,V_1=1;U_n=2V_{n-1}+U_{n-2},V_n=U_{n-1}+V_{n-2}(n\geq 2)$的封闭形式

   【解答】

   首先修正因子有：

   $U_n=2V_{n-1}+U_{n-2}+[n=0],V_n=U_{n-1}+V_{n-2}$

   从而：

   $U(z)=2zV(z)+z^2U(z)+1,V(z)=zU(z)+z^2V(z)$

   解得：

   $U(z)=\frac{1-z^2}{1-4z^2+z^4},V(z)=\frac{z}{1-4z^2+z^4}$

   接下来为了方便，我们考虑分母，发现可以用z^2代替z，所以只需要去考虑

   $W(z)=\frac{1}{1-4z+z^2}$

   的生成函数即可。

   最后可以求得：

   $V_{2n+1}=\frac{3+2\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n+\frac{3-2\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n$

   $V_{2n}=0$

   $U_{2n}=\frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}}+\frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}}$

   $U_{2n+1}=0$

6. UOJ3028

   在许多不同种类的食物中选出n个，每种食物的限制如下：

   1. 承德汉堡：偶数个
   2. 可乐：0个或1个
   3. 鸡腿：0个，1个或2个
   4. 蜜桃多：奇数个
   5. 鸡块：4的倍数个
   6. 包子：0个，1个，2个或3个
   7. 土豆片炒肉：不超过1个
   8. 面包：3的倍数个

求方案数对10007取模的值。$n \le 10^{500}$

【解答】

设a_n表示选n个的方案数，那么多种食物选n个的方案数的生成函数就是他们生成函数的卷积。

接下来构造每种食物的生成函数：

1. $\frac{1}{1-x^2}$
2. $1+x$
3. $1+x+x^2=\frac{1-x^3}{1-x}$
4. $\frac{x}{1-x^2}$
5. $\frac{1}{1-x^4}$
6. $1+x+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}$
7. $1+x$
8. $\frac{1}{1-x^3}$

全部乘起来，得到答案的生成函数：

$F(x)=\frac{x}{(1-x)^4}$

转为展开形式：

$F(x)=\sum_{n\ge1}\binom{n+2}{n-1}x^n$

因此答案就是$\binom{n+2}{n-1}=\binom{n+2}{3}$

7. UOJ3027

   有n堆糖果，不同堆里糖果的种类不同。第i堆里有m_i个糖果。现在要吃掉至少a个糖果，但不超过b个。求有多少种方案。$n\le10, 0\le a\le b\le10^7, m_i\le10^6$。

   【解答】

   在第i吃j个糖果的方案数的生成函数为

   $F_i(x)=\sum_{j=0}^{m_i}x^j=\frac{1-x^{m_i+1}}{1-x}$

   因此总共吃i个糖果的方案数的生成函数就是$G(x)=(1-x)^{-n}\prod_{i=1}^{n}(1-x^{m_i+1})$

   我们要求的是$\sum_{i=a}^{b}[x^i]G(x)$

   由于$n\le10$，我们可以暴力展开$\prod_{i=1}^{n}(1-x^{m_i+1})$。

   然后对$(1-x)^{-n}$使用牛顿二项式定理：

   $(1-x)^{-n}=\sum_i C_{-n}^{i}(-x)^i=\sum_i C_{n-1+i}^{i}x^i$

   我们枚举$\prod_{i=1}^{n}(1-x^{m_i+1})$中$x^k$项的系数，假设为$c_k$。那么它和$(1-x)^{-n}$相乘后，对答案的贡献就是

   $c_k\sum_{i=a-k}^{b-k}C_{n-1+i}^{i}=c_k(C_{n+b-k}^{b-k}-C_{n+a-k-1}^{a-k-1})$

   这样可以$O(b)$求出答案。

   总时间复杂度为$O(2^n+b)$

8. 一副三色纸牌共32张，其中红黄蓝每种颜色的牌共10张，编号分别为1,2,3,...,10；另有大小王各一张，编号为0。从这副牌中取出若干张，然后用如下规则计算分值：每张编号为k的牌记为2^k分。求分值之和为2004的方案数。

   【解答】

   用a_n表示分值之和为n的方案数，于是a_n的母函数为

   $$\begin{aligned}f(x)&=(1+x^{2^0})^2(1+x^{2^1})^3(1+x^{2^2})^3\dots(1+x^{2^{10}})^3\\&=\frac{1}{1+x}((1+x^{2^0})(1+x^{2^1})(1+x^{2^2})\dots(1+x^{2^{10}}))^3\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1+x)(1-x)^3}(1-x^{2^{11}})^3$$

因为$2004 < 2^{11}$，故a_{2004}等于$\frac{1}{(1+x)(1-x)^3}$展开式中x^{2004}的系数，而

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2} = \sum_i x^{2i} \sum_j (j+1)x^j$$

所以系数为

$$2005 + 2003 + \ldots + 3 + 1 = 1003^2 = 1006009$$

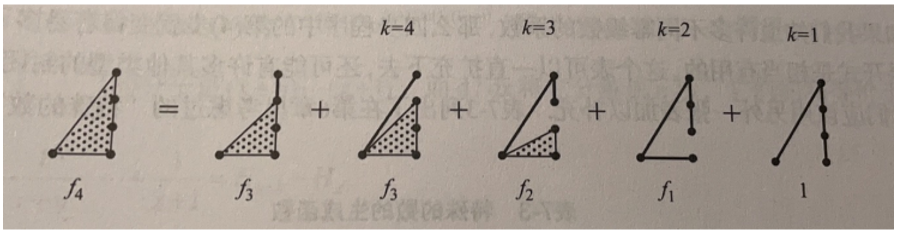
9. 一个阶为n的扇是一个以$\{0,1,\ldots,n\}$为顶点且有$2n-1$条边所定义的图：顶点0与其他n个顶点中的每一个都连有一条边，而对$1 \le k < n$，顶点k与顶点$k+1$连有一条边。求这个图中有多少棵生成树。

【解答】

方法一：

我们分析顶点n是如何与生成树的其他顶点相连的，如果它不与顶点0相连，它必定要和顶点$n-1$相连，在这个情形下，剩下的扇的f_{n-1}棵生成树中任意一棵都能补充成为整个图的生成树。

如果与顶点0相连，于是存在某个数$k \le n$使得顶点$n, n-1, \ldots, k$直接相连，但是k与$k-1$之间没有边存在。这样在0与$\{n-1, \ldots, k\}$之间就不能有任何的边，否则就会出现一条回路。于是，如果$k=1$，则生成树就被完全确定了。如果$k>1$，则产生$\{0,1,\ldots,k-1\}$上的生成树f_{k-1}选取方式中的任何一种，都将得到整个图的一棵生成树。例如当$n=4$的时候结果如下：



对$n \ge 1$成立的一般方程是：

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + \ldots + f_1 + 1$$

我们假设$f_0 = 0$，那么加上修正因子有：

$$f_n = f_{n-1} + \sum_{k<n} f_k + [n>0]$$

所以有：

$$\begin{aligned} F(z) &= zF(z) + \sum_{k,n} f_k z^n [k<n] + \sum_n [n>0] z^n \\ &= zF(z) + \sum_k f_k z^k \sum_n [n>k] z^{n-k} + \frac{z}{1-z} \\ &= zF(z) + F(z) \sum_{m>0} z^m + \frac{z}{1-z} \\ &= zF(z) + F(z)\frac{z}{1-z} + \frac{z}{1-z} \end{aligned}$$

得到：

$$F(z) = \frac{z}{1-3z+z^2}$$

这个结果刚好为偶数标号的斐波那契数列，即$f_n = F_{2n}$

方法二：

顶点k与顶点$k+1$之间的边有可能被选取作为树的组成部分，也可能不被选到，选取这些边的每一种方法都使得由相邻顶点组成的某些块相连通。例如$n=10$时，我们或许会使$\{1,2\},\{3\},\{4,5,6,7\},\{8,9,10\}$连通。接下来通过向顶点0添加边，可以做出多少棵生成树？有两种方法将0与$\{1,2\}$连起来。其他三块同理。

所以我们得出式子：

$$f_n = \sum_{m>0} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n; k_1,k_2,\ldots,k_m>0} k_1 k_2 \ldots k_m$$

这就是数列$< 0,1,2,3,... >$的m重卷积之和，因此f_n的生成函数就是

$F(z)=G(z)+G(z)^2+...=\frac{G(z)}{1-G(z)}$

而$G(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$

所以有：

$F(z)=\frac{z}{1-3z+z^2}$

指数生成函数EGF

定义

对于序列$\{a_n\}$，定义它的指数生成函数为无穷级数

$\hat{G}(x)=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2!}+a_3\frac{x^3}{3!}+...=\sum_i a_i\frac{x^i}{i!}$

基本运算

加减法等都是和普通生成函数相同的，不多说

$(1)z\hat{G}(z)=\sum_n ng_{n-1}\frac{z^n}{n!}$

$(2)\hat{G}'(z)=\sum_n g_{n+1}\frac{z^n}{n!}$（相当于左移）

$(3)\int_0^z\hat{G}(z)dz=\sum_{n>=1}g_{n-1}\frac{z^n}{n!}$（相当于右移）

(4)对于两个数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，对应指数生成函数为$\hat{G}(z)=\sum_i a_i\frac{z^i}{i}$和$\hat{F}(z)=\sum_i b_i\frac{z^i}{i!}$

那么$\hat{F}(z)\cdot\hat{G}(z)=\sum_n(\sum_i C_n^i a_i b_{n-i})\frac{z^n}{n!}$

> 序列$c_n=\sum_i C_n^i a_i b_{n-i}$也称为序列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的二项卷积

常见数列的指数生成函数

$\hat{G}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...=e^x$

$\hat{G}(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...=e^{-x}$

$\hat{G}(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$\hat{G}(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$\hat{G}(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...=ln(1+x)$

$\hat{G}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...=sin\ x$

$\hat{G}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...=cos\ x$

$\hat{G}(x)=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+...=(1+x)^a$

应用

指数生成函数有和普通生成函数一样的使用方法，在某些题目中计算会更简单

1. 用红蓝绿3种颜色去涂n个格子，每格涂一种颜色，求使得被涂成红色和蓝色的方格数均为偶数的涂色方法数

   【解答】

   $\hat{G}(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...)^2(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...)$

$= (\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 e^x = \frac{e^{3x}+2e^x+e^{-x}}{4}$
$= \sum_n \frac{1}{4}[3^n+2+(-1)^n]\frac{x^n}{n!}$

一个重要的结论

由乘法运算可以知道，对于$\hat{F}(z) = \sum_i b_i \frac{z^i}{i!}$有:

$\hat{F}^m(z) = \sum_n (\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} \binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m} b_{k_1} b_{k_2} \ldots b_{k_m}) \frac{z^n}{n!}$

那么对于递归式

$a_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} \binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m} b_{k_1} b_{k_2} \ldots b_{k_m}$

给出的序列a_n的指数生成函数为

$\hat{G}(z) = \frac{\hat{F}(z)}{1!} + \frac{\hat{F}^2(z)}{2!} + \frac{\hat{F}^3(z)}{3!} + \ldots = e^{\hat{F}(z)}$

这样如果知道$\hat{G}(z)$或者$\hat{F}(z)$中的一个，就可以利用多项式exp或多项式ln很方便的求另一个。

那么这个递归式有什么意义呢，我们举一个例子:

> 排列数与圆排列数
>
> 一个排列，是由若干个置换环构成的。例如$p = [4,3,2,5,1]$有两个置换环$[2,3]$和$[1,5,4]$。
>
> 而不同的置换环会导出不同的排列。
>
> 也就是说，长度为n的排列的方案数为
>
> 1. 把$1,2,\ldots,n$分成若干个集合
> 2. 每个集合形成一个置换环
>
> 的方案数。而一个集合的数形成置换环的方案数显然就是这个集合大小的圆排列方案数。因此长度为n的排列方案数就是：把$1,2,\ldots,n$分成若干个集合，每个集合的圆排列方案数之积。
>
> 所以就满足递归式:
>
> $a_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} \binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m} b_{k_1} b_{k_2} \ldots b_{k_m}$
>
> 所以我们知道排列数的指数生成函数是圆排列数的指数生成函数的exp。
>
> 我们验证一下，排列数的指数生成函数是:
>
> $\hat{P}(x) = \sum_n \frac{n!x^n}{n!} = \frac{1}{1-x}$
>
> 圆排列数的指数生成函数是:
>
> $\hat{Q}(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(n-1)!x^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -ln(1-x) = ln(\frac{1}{1-x})$
>
> 满足刚才的推论。

应用

1. P4841

   刚刚解决完电力网络的问题，阿狸又被领导的任务给难住了。

   刚才说过，阿狸的国家有 n 个城市，现在国家需要在某些城市对之间建立一些贸易路线，使得整个国家的任意两个城市都直接或间接的连通。

   为了省钱, 每两个城市之间最多只能有一条直接的贸易路径。对于两个建立路线的方案，如果存在一个城市对，在两个方案中是否建立路线不一样，那么这两个方案就是不同的，否则就是相同的。现在你需要求出一共有多少不同的方案。

好了，这就是困扰阿狸的问题。换句话说，你需要求出 n 个点的简单 (无重边无自环) 有标号无向连通图数目。

由于这个数字可能非常大, 你只需要输出方案数对 $1004535809(479\times 2^{21}+1)$ 即可。
$n\le 130000$

【解答】

设n个点带标号无向连通图的EGF是$\hat{F}(x)$，那么n个点带标号无向图的EGF就是$exp\hat{F}(x)$。后者可以很容易计算得到$exp\hat{F}(x)=\sum_n 2^{C_n^2}\frac{x^n}{n!}$。因此通过多项式ln来计算前者即可。

2. 求错排数的指数生成函数

   【解答】

   从置换环角度考虑，错排就是指置换环中不存在自环的排列。也就是说不存在长度为1的置换环。后者的指数生成函数是

   $\sum_{n\ge 2}\frac{x^n}{n}=-ln(1-x)-x$

   因此，错排数的指数生成函数是$exp(-ln(1-x)-x)$

3. 求有多少个映射$f:\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\}$，使得

   $\underbrace{f\circ f\circ\dots\circ f}_{k}=\underbrace{f\circ f\circ\dots\circ f}_{k-1}$

   $nk\le 2\times 10^6, 1\le k\le 3$

   【解答】

   考虑i向$f(i)$连边。相当于我们从任意一个i走k步和走$k-1$步到达的是同一个点。也就是说基环树的环是自环且深度不超过k（根结点深度为1）。把这个基环树当成有根树是一样的。因此我们的问题转化为：n个点带标号，深度不超过k的有根树森林的计数。

   考虑n个点带标号深度不超过k的有根树，假设它的生成函数是$\hat{F}_k(x)=\sum_n f_{n,k}\frac{x^n}{n!}$。

   由于深度不超过k的有根树，实际上就是深度不超过$k-1$的若干棵有根树，把它们的根结点全部连到一个结点上去。所以我们可以枚举根结点，所以方案数为$n[x^{n-1}]exp\hat{F}_{k-1}(x)$，也就是：

   $\hat{F}(x)=x\ exp\hat{F}_{k-1}(x)$

   那么答案的指数生成函数就是$exp\hat{F}_k(x)$。

4. CF891E

   给你一个n个数的序列$a_1,a_2,\dots,a_n$，和一个初值为0的变量s，要求你重复以下操作k次：

   1. 在$1,2,\dots,n$中等概率随机选择一个x。
   2. 令s加上$\prod_{i\ne x}a_i$。
   3. 令a_x减一。

   求k次操作后s的期望。

   $1\le n\le 5000, 1\le k\le 10^9, 0\le a_i\le 10^9$

   【解答】

   假设k次操作后a_i减少了b_i，那么实际上

   $s=\prod_{i=1}^n a_i-\prod_{i=1}^n(a_i-b_i)$

   因此实际上我们的问题转化为，求k次操作后$\prod_{i=1}^n(a_i-b_i)$的期望。

   不妨考虑计算每种方案的$\prod_{i=1}^n(a_i-b_i)$的和，最后除以n^k。

   而k次操作序列中，要使得i出现b_i次的方案数是$\frac{k!}{b_1!b_2!\dots b_n!}$

我们要求的就是$\sum_{b_1+b_2+...+b_n=k}\binom{k}{b_1,b_2,...,b_n}(a_1-b_1)(a_2-b_2)...(a_n-b_n)$。这个式子可以联想到指数生成函数的乘法。所以我们构造下面的指数生成函数:

$\hat{F}_j(x)=\sum_i(a_j-i)\frac{x^i}{i!}$

那么答案就是$[x^k]\prod_{j=1}^n\hat{F}_j(x)$

将$\hat{F}_j(x)$转化为封闭形式:

$\hat{F}_j(x)=a_je^x-xe^x$

因此:

$\prod_{j=1}^n\hat{F}_j(x)=e^{nx}\prod_{j=1}^n(a_j-x)$

其中$\prod_{j=1}^n(a_j-x)$是一个n次多项式，可以暴力计算出来。假设它的展开式是$\sum_{i=0}^n c_ix^i$，那么

$\prod_{j=1}^n\hat{F}_j(x)=(\sum_i\frac{n^ix^i}{i!})(\sum_{i=0}^n c_ix^i)$

x^k项系数为$\sum_{i=0}^n c_i\frac{n^{k-i}}{(k-i)!}$。

题目选讲

1. （P3784）遗忘的集合

小Q在他的个人主页上放出了一个悬赏：征集只含正整数的非空集合S，其中的每个元素都不超过n，并且满足一些附加条件。

众所周知，我们可以很轻松地对于任意不超过n的正整数x，计算出把x表示成S中元素之和的方案数$f(x)$，在这里我们约定，在任意方案中每个数字可以出现多次，但是不考虑数字出现的顺序。

例如，当$S=\{1,2,3,4,5\}$时，我们可以计算出$f(2)=2,f(3)=3,f(4)=5,f(5)=7$。

再例如，当$S=\{1,2,5\}$时，我们可以计算出$f(4)=3,f(5)=4,f(6)=5,f(7)=6$。

麻烦地是现在小Q忘记了S里有哪些元素，幸运地是他用存储设备记录下了所有$f(i) \bmod p$的值，小Q希望你能利用这些信息帮他恢复出S原来的样子。

具体来说，他希望你找到这样一个正整数的**非空**集合S，其中的每个元素都不超过n，并且对于任意的$i=1,2,\cdots,n$，满足把i表示成S中元素之和的方案数在模p意义下等于$f(i)$，其中p是记录在存储设备中的一个质数。他向你保证：**一定存在**这样的集合S。

然而，小Q觉得他存储的信息并不足以恢复出唯一的S，也就是说，可能会存在多个这样的集合S，所以小Q希望你能给出所有解中**字典序最小**的解。

对于满足条件的两个不同的集合S_1和S_2，我们认为S_1的字典序比S_2的字典序小，当且仅当存在非负整数k，使得S_1的前k小元素与S_2的前k小元素完全相等，并且，要么S_1的元素个数为k，且S_2的元素个数至少为$(k+1)$，要么S_1和S_2都有至少$(k+1)$个元素，且S_1的第$(k+1)$小元素比S_2的第$(k+1)$小元素小。

【解答】

我们把出现在集合中的每一个数字都认为是之前的一种食品限制，所以我们在令$a_i=0/1$表示元素i是否在集合S中，元素i的生成函数为$(\frac{1}{1-x^i})^{a_i}$，所以f的生成函数为$F(x)=\prod_{i\geq i}(\frac{1}{1-x^i})^{a_i}$。现在知道了$F(x)$要去求$a_i$。

两边同求负对数，我们得到$-\ln F(x)=\sum_{i\geq i}a_i\ln(1-x^i)$。再对$\ln(1-x^i)$泰勒展开得到$-\ln F(x)=\sum_{i\geq 1}a_i\sum_{j\geq 1}-\frac{x^{ij}}{j}$，变换一下求和顺序，去枚举$ij$，得到$\ln F(x)=\sum_{T\geq 1}x^T\sum_{i|T}a_i\times\frac{i}{T}$。左边通过多项式ln就能求出来了，就能对于所有的$T$知道了$\frac{1}{T}\sum_{i|T}a_i\times i$。

最后这个式子非常的熟悉，可以用莫比乌斯反演直接处理。不过这个式子也可以用枚举倍数调和级数来处理，复杂度均为$O(n\log n)$。

但是因为模数乱给，要用MTT，寄。

2. （P3978）概率论

【解答】

一个做过的题目，之前用的是双射证明，给一个生成函数的证明。

设$g(n)$表示有n个节点的二叉树的个数,$g(0)=1$

设$f(x)$表示n个节点的二叉树叶子节点的个数，$f_0=0,f_1=1$

那么$ans=\frac{f_i}{g_i}$

对于g_i

考虑有一颗n个点的二叉树,由于左右字数都是二叉树,枚举左右子树的点数

$g_n=\sum_{i=0}^{n-1}g_ig_{n-i-1}$

这就是卡特兰数，通项为$\frac{C_{2n}^n}{n+1}$

对于f_i

枚举左右子树的大小，我们可以有g函数推出,由于左右对称，最后$*2$

$f_n=2\sum_{i=0}^{n-1}f_i*g_{n-i-1}$

我们要找到f与h的关系

另$G(x)$为g的生成函数，$F(x)$为f的生成函数

$G(x)=xG^2(x)+1,F(x)=2xF(x)G(x)+x$

对于$G(x)$他的封闭形式为$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

对$F(x)$得到$F(x)=x*(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$

$(xG(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}=\frac{F(x)}{x}$

$xG(x)$的每一项$xg_nx^n=g_nx^{n+1}$求导后变为$(n+1)g_nx^n$,也就等于等式右边的$\frac{f_{n+1}x^{n+1}}{x}=f_{n+1}x^n$ 也就是说$f_{n+1}=(n+1)g_n$ 即$f_n=g_{n-1}$ 带入$g_n=\frac{C_{2n}^n}{n+1}$ 化简得到

$ans=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

3. （P4389）付公主的背包

这个背包最多可以装 10^5 大小的东西

付公主有 n 种商品，她要准备出摊了

每种商品体积为 v_i，都有无限件

给定 m，对于 $s\in[1,m]$，请你回答用这些商品恰好装 s 体积的方案数

$1\le n,m\le 10^5$，$1\le v_i\le m$。

【解答】

一眼完全背包然而过不了。

还是和前面一样的套路，先把每个物品的生成函数求出来，然后答案就是这m个生成函数的卷积。

一个体积为V的物品的生成函数为$\frac{1}{1-x^V}$

但是如果直接做多项式乘法复杂度为$O(mn\log n)$，封闭形式全部乘起来的复杂度为$O(2^m)$都不行。其实套路还是和前面一样，取$\ln$就好啦。

先求出$\ln$之后的多项式，然后用多项式exp还原就好啦。

4. P4451

lqp在为出题而烦恼，他完全没有头绪，好烦啊...

他首先想到了整数拆分。整数拆分是个很有趣的问题。给你一个正整数 N ，对于N的一个整数拆分就是满足任意 $m>0$，$a_1,a_2,a_3\ldots a_m>0$，且 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m=n$ 的一个有序集合。通过长时间的研究我们发现了计算对于 n 的整数拆分的总数有一个很简单的递推式，但是因为这个递推式实在太简单了，如果出这样的题目，大家会对比赛毫无兴趣的。

然后 lqp 又想到了斐波那契数。定义 $F_0=0,F_1=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n>1)$，$F_n$就是斐波那契数的第$n$项。但是求出第 n 项斐波那契数似乎也不怎么困难...

lqp 为了增加选手们比赛的欲望，于是绞尽脑汁，想出了一个有趣的整数拆分，我们暂且叫它：整数的lqp拆分。

和一般的整数拆分一样，整数的 lqp 拆分是满足任意 $m>0$，$a_1,a_2,a_3\ldots a_m>0$，且 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m=n$ 的一个有序集合。但是整数的lqp拆分要求的不是拆分总数，相对更加困难一些。

对于每个拆分，lqp 定义这个拆分的权值 $F_{a_1}F_{a_2}\ldots F_{a_m}$，他想知道对于所有的拆分，他们的权值之和是多少?

简单来说，就是求
$\sum\prod_{i=1}^{m}F_{a_i}$
$m>0$
$a_1,a_2\ldots a_m>0$
$a_1+a_2+\ldots+a_m=n$
由于答案可能非常大，所以要对 10^9+7 取模。

$1\le n\le 10^{10000}$。

【解答】

设n的答案为g_n，那么很容易得到一个递推式$g_n=\sum_{i=1}^{n}g_i fib_{n-i}$，特别的令$g_0=1$。

所以$g_n=[n=0]+\sum_{i=1}^{n}g_i fib_{n-i}$

所以有$G(x)=1+F(x)\times G(x)$，其中$F(x)$为斐波那契数列的生成函数。

解出$G(x)=1-\frac{x}{x^2+2x-1}$

利用上面教过的套路去展开，得到$g(n)=\frac{\sqrt{2}}{4}[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n]$

$\sqrt{2}$在模100000007等于59713600或940286407。

n根据费马小定理对$mod-1$取模就好啦

5. （P4463）（P5850）calc

一个序列 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是合法的，当且仅当：

长度为给定的 n。

$a_1,a_2,\ldots,a_n$ 都是$[1,k]$中的整数。

$a_1,a_2,\ldots,a_n$ 互不相等。

一个序列的值定义为它里面所有数的乘积，即 $a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$。

求所有不同合法序列的值的和。

两个序列不同当且仅当他们任意一位不一样。

输出答案对一个数 p 取余的结果。

【解答】

把序列变成集合，最后答案乘$n!$即可。

这样每一个数i的生成函数为$(1+ix)$，那么答案的生成函数就是$F(x)=\prod_{i=1}^{k}(1+ix)$

套路化取$\ln$，然后加起来之后再exp。

$\ln(1+kx)$可以用泰勒展开，也可以求导后再积分回去。

$\ln(1+kx)=\int\frac{k}{1+kx}dx=\int(k\sum_{i=0}^{\infty}(-k)^i x^i)dx$

$=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{k^i}{i}x^i$

那么$[x^n]\ln F(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{i=1}^{k}i^n$

这个自然数幂和不是那么好处理，一种方法是用伯努利数处理，不过可以用以下方法（其实就是伯努利数的推导过程的式子）。

列出指数生成函数：

$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}i^n\right)\frac{x^n}{n!}$

$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n x^n}{n!}$

$=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{e}^{ix}$

等比数列求和得到

$G(x)=\frac{e^{kx}-1}{1-e^{-x}}$

把两个e展开，这时候常数项都为0，所以同除x，用多项式求逆求出$G(x)$。

那么$[x^n]\ln F(x)=(-1)^{n-1}(n-1)![x^n]G(x)$

多项式exp得到$F(x)$，复杂度$O(n\log n)$。

6. P4931

有 n 对情侣来到电影院观看电影。在电影院，恰好留有 n 排座位，每排包含 2 个座位，共 $2n$ 个座位。

现在，每个人将会随机坐在某一个位置上，且恰好将这 $2n$ 个座位坐满。

如果一对情侣坐在了同一排的座位上，那么我们称这对情侣是和睦的。

你的任务是求出共有多少种不同的就坐方案满足**恰好**有 k 对情侣是和睦的。

两种就坐方案不同当且仅当存在一个人在两种方案中坐在了不同的位置。不难发现，一共会有 $(2n)!$ 种不同的就坐方案。

由于结果可能较大，因此输出对 998244353 取模的结果。

$1\le T\le 2\times 10^5, 1\le n\le 5\times 10^6, 0\le k\le n$。

【解答】

首先有一种很妙的不用高科技的做法：

先选K个配对的方案数为$(C_n^k)^2k!2^k$

接下来是错排，我们设$g[n]$为n对不匹配方案数量，先选第一排有$2n(2n-2)$种选法。

然后考虑他们的另一半，如果坐在一起就是在剩下$n-1$排选一排，两个人位置可以互换，有$2(n-1)g[n-2]$种。不坐一起的话，我们其实可以把这两个人看成是情况错排，所以是$g[n-1]$。

就结束了。

接下来是EI的神仙做法：

不妨设 D_n 是这个问题的“错排”：每对情侣都不在一排的方案数。那么对于答案 $f(n,k)$ 来说就可以用 D_n 进行表示，即考虑坐在一排的情侣是哪几对且他们在哪几排，即

$f(n,k)=\binom{n}{k}^2 D_{n-k}k!2^k$

这自然而然地导出了恒等式

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 D_{n-k}k!2^k=(2n)!$

其中 $\binom{n}{k}^2$ 引导我们将生成函数写成

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!^2}z^n$

那么因为

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!2^n}{n!^2}z^n=\mathrm{e}^{2z}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!^2}z^n=\frac{1}{\sqrt{1-4z}}$

带入原始，我们得到了 $D(z)$ 的生成函数方程

$D(z)\cdot\mathrm{e}^{2z}=\frac{1}{\sqrt{1-4z}}$

因此

$D(z)=\frac{\mathrm{e}^{-2z}}{(1-4z)^{1/2}}$

这帮助我们得到一个式子用于计算 D_n（其实就是容斥）

$D_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(-2)^k k!(2n-2k)!$

或者也可以直接卷积，但是这都不够快速。我们考虑对 $D(z)$ 进行求导。

$D'(z)=\frac{8z\cdot\mathrm{e}^{-2z}}{(1-4z)^{3/2}}=\frac{8z}{1-4z}D(z)$

这个微分方程可以帮助我们写出 $D(z)$ 的递推形式了，即

$D'(z)=4zD'(z)+8zD(z)$

提取系数有

$D_{n+1}=4n(n+1)D_n+8n^2(n+1)D_{n-1}$

概率生成函数

定义

若 X 为仅取非负整数值的随机变量，那么 X 的**概率生成函数**（probability generating function,PGF） 为

$$G_X(z)=\sum_{k\geq 0}\Pr(X=k)z^k$$

显然 $G_X(z)$ 的各项系数非负，且其和为 1。这个条件可以写成

$$G_X(1)=1$$

同样，反过来，任何具有非负系数且满足 $G(1)=1$ 的幂级数 $G(z)$ 都是某个随机变量的生成函数。

均值与方差

概率生成函数最大的长处是其可以大大简化均值与方差的计算。

均值

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{k\ge 0} k\Pr(X=k)\\ &= \sum_{k\ge 0}\Pr(X=k)k\cdot 1^{k-1}\\ &= G'_X(1)\end{aligned}$$

根据这个推导式我们可以进一步推出

$$\mathrm{E}(X^{\underline{k}}) = G_X^{(k)}(1)\ (k\ne 0)$$

~~然后应该可以通常幂转下降幂之类的东西搞事情~~

方差

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(X) &= \mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2\\ &= G''_X(1)+G'_X(1)-G'_X(1)^2\end{aligned}$$

这告诉我们，若我们知道 $G'_X(1)$ 与 $G''_X(1)$ 的值，我们就能够求出均值与方差。我们甚至不需要知道 $G_X(z)$ 本身的封闭形式。

乘积

概率生成函数的乘积对应于独立随机变量之和。例如，设 X 与 Y 是只取整数变量的随机变量，且相互独立，那么显然有

$$\begin{aligned}\Pr(X+Y=n) &= \sum_k \Pr(X=k\wedge Y=n-k)\\ &= \sum_k \Pr(X=k)\Pr(Y=n-k)\end{aligned}$$

这显然是一个卷积，即

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)$$

例题

1. P4548

   给定一个长度为 L 的序列 A，每次从 $[1,m]$ 中等概率选取一个整数加入到初始为空的序列 B 的末尾。若 $\mathrm{LCS}(A,B)=A$，则停止。求序列 B 的期望长度。

   $m,L\le 10^5$

   【解答】

   令 f_i 为结束时序列 B 长度为 i 的概率，其概率生成函数为 $F(z)$。
   令 g_i 为序列 B 长度为 i 且还未结束的概率，其概率生成函数为 $G(z)$。
   令 a_i 为序列 $A[1,i]$ 是否为一个序列的 `border`。
   容易发现我们的答案即为 $F'(1)$
   则有

   $$F(z)+G(z) = 1+zG(z)$$
   $$G(z)\cdot(\frac{1}{m}z)^L = \sum_{i=1}^{m} a_iF(z)(\frac{1}{m}z)^{L-i}$$

   第一个式子的意义为在一个未结束的序列后面添加一个数，有可能结束也有可能为结束，1 表示初始状态一定没有结束。
   第二个式子的意义为在一个未结束的序列后面添加序列 A，则一定会结束。但有可能尚未添加完所有字符就已经结束，这种情况仅可能发生在已添加的序列为给定序列的一个 `border`。我们可以枚

举此时序列的长度，然后再乘上多余字符的概率。
对第一个式子求导，有

$$F'(z)+G'(z)=G(z)+zG'(z)$$

代入 $z=1$ 有

$$F'(1)=G(1)$$

所以我们可以考虑求出 $G(1)$。
将 $z=1$ 代入第二个式子有

$$G(1)\cdot(\frac{1}{m})^L=\sum_{i=1}^{m}a_iF(1)(\frac{1}{m}z)^{L-i}$$
$$G(1)=\sum_{i=1}^{m}a_i(\frac{1}{m})^{-i}$$

然后 a_i 大家都会求，然后这个题就做完了。
根据类似的方法求出 $F''(z)$ 可以求出方差。

2. P3706

简化题面：和上题差不多，就是串是01串，求每个串首次取得的概率。$n,m\le 300$。

【解答】

首先看有正无穷项考虑生成函数。所以我们设$F_i(x)$为第i个串的生成函数，且有：

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}F_i(x)$$

显然我们要求的是每个$F_i(1)$。
然后类似的，设$G(x)$为到i长度没有结束的生成函数。所以类似上题，有：

$$xG(x)+1=F(x)+G(x)$$

但是放到这个题似乎并没有什么用的样子，因为我们要求的是每个串的概率，不是期望抛多少次硬币能得到这个串。于是考虑另一个柿子。
但是我们发现，这些东西好像是有点互相影响的。具体地说，当我们考虑在$G(x)$后增加一个串i时，可能会先出现另一个串j。我们考虑枚举这种关系：

$$G(x)\cdot(\frac{1}{2}x)^m=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{i,j,k}F_j(x)\cdot(\frac{1}{2}x)^{m-k}$$

其中$a_{i,j,k}$表示第i个串的[1,k]与第j个串的[m-k+1,m]相等。我们仍然可以用hash解决这个东西。
然后将x代入1，得：

$$G(1)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{i,j,k}F_j(1)\cdot 2^k$$

于是我们可以将$F_i(1)$和$G(1)$进行高斯消元，共n+1个元。由上式可得出n个方程，又有所有的$F_i(1)$的和，即$F(1)=1$，共n+1个方程。复杂度$O(n^3)$。得解。

3. hdu4652

一个 m 面的公平骰子，求最后 n 次结果相同就结束的期望次数或者求最后 n 次结果全不同就结束的期望次数。

$1\le n\le m\le 10^6$

【解答】

令 f_i 为掷了 i 次结束的概率，其概率生成函数为 $F(z)$。
令 g_i 为掷了 i 次还未结束的概率，其概率生成函数为 $G(z)$。
先看第一问。
那么显然有

$$F(z)+G(z)=1+zG(z)$$
$$G(z)z^n\frac{m}{m^n}=\sum_{i=1}^{n}F(z)z^{n-i}\frac{1}{m^{n-i}}$$

代入 $z=1$，可得 $G(1)=\sum_{i=1}^{n}m^{i-1}$。
意义和之前的题目差不多。
然后看第二问。
那么显然有

$$F(z)+G(z)=1+zG(z)$$
$$G(z)z^n\frac{m^{\underline{n}}}{m^n}=\sum_{i=1}^{n}F(z)z^{n-i}\frac{(m-i)^{\underline{n-i}}}{m^{n-i}}$$

代入 $z=1$，可得 $G(1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(m-i)!}{m!}m^i$。

4. 某题

   一个 n 面的骰子，每一面标号 1 到 n 。有个初始为 0 的计数器，每次扔骰子，如果结果是奇数，那么计数器清零，否则计数器加 1 并且如果结果是 n 则结束。问结束时计数器的期望。保证 n 是偶数。

   【解答】

   根据套路
   令 f_i 为计数器为 i 时结束的概率，其概率生成函数为 $F(z)$。
   令 g_i 为计数器为 i 时未结束的概率，其普通生成函数为 $G(z)$。

$$F(z)+G(z)=\frac{z}{2}G(z)+\frac{1}{2}G(1)+1$$
$$G(z)\frac{1}{n}z=F(z)$$

   第一个式子的意义是我们从未结束时掷骰子可能会有两种情况：

   - 有 $\frac{1}{2}$ 的概率掷出奇数，此时不管当前计数器的值为多少全部都会变到计数器为零且未结束的状态，这一部分的概率即 $\frac{1}{2}G(1)$。
   - 有 $\frac{1}{2}$ 的概率掷出偶数，此时有可能结束也有可能没结束。
   - 1 表示初始状态一定没有结束。

   第二个式子的意义是我们从一个未结束的状态多掷一步 n 则一定会结束。
   将 $z=1$ 代入第二个式子易得 $G(1)=n$，将其代入第一个式子有

$$F(z)+G(z)=\frac{z}{2}G(z)+\frac{n}{2}+1$$

   将 $G(z)\frac{1}{n}z=F(z)$ 代入第一个式子有

$$\begin{aligned}G(z)=&\frac{\frac{n}{2}+1}{1+\frac{z}{n}-\frac{z}{2}}\\=&\frac{n^2+2n}{2n-(n-2)z}\end{aligned}$$

于是有

$$
\begin{aligned}
F(z) =& G(z)\frac{1}{n}z \\
=& \frac{(n+2)z}{2n-(n-2)z} \\
F'(z) =& \frac{2n(n+2)}{(2n-(n-2)z)^2} \\
F'(1) =& \frac{2n}{n+2}
\end{aligned}
$$

5. 某题

求 n 个数的随机排列的轮换的个数的期望。

【解答】

首先可以设 $f_{n,k}$ 为 n 个数的排列，有 k 个轮换的概率，其概率生成函数为 $F_n(z)$。
显然有

$$
\begin{aligned}
F_n(z) =& \sum_{k=0}^{n}\frac{{n \brack k}z^k}{n!} \\
=& \frac{z^{\overline{n}}}{n!} \\
=& \prod_{k=1}^{n}\frac{k-1+z}{k} \\
=& \prod_{k=1}^{n}(\frac{k-1}{k}+\frac{1}{k}z)
\end{aligned}
$$

然后你发现这是一堆二项概率生成函数的乘积，每一项的期望为 $\frac{1}{k}$。
显然这一堆互相独立，所以实际上总的期望就是 H_n，即调和级数。