

讲选题杂

4182_543_731

2021 年 5 月 8 日

- 因为我很菜，所以这里面基本上都是良心题。
- 12 ~ 15 题，上午 7 题下午 5 题，还有 3 道额外的备选题，20 ~ 40 min 一题。题目可能有梯度或者弧度。
- 数据范围或者限制后面有括号的，表示括号内的范围为部分分的范围。
- 因为某些原因，题目以 DP 题为主。
- 因为某些原因，这里面大多数题目没有公开的提交方式/cy
- 不要喷讲题人/kel



给一个 n 个点 m 条边的 DAG，点 1 的入度为 0。随后向图中再加入一条有向边，加边后图可能不再是 DAG。

求出图中有多少个 $n - 1$ 条有向边的集合，满足只使用集合中的边能从 1 到达其它所有点（即有向生成树），模 $10^9 + 7$

$n \leq 10^5, m \leq 2 \times 10^5$

1s, 128MB

给一棵 n 个点的有根树，定义 $f(x)$ 表示 x 的子树内的点到它的最大距离。

q 次询问，每次给出 x, l, r ，表示将 x 设为根，然后询问 l 到 r 的链上所有点的 $f(x)$ 的异或和。

$$n, q \leq 10^6$$

2s, 512MB

有 n 个只包含小写字符的字符串 s_1, s_2, \dots, s_n , 你可以把它们按任意顺序拼接起来。

定义一个字符串是好的, 当且仅当它有偶数种本质不同的子序列 (计算空串)。

求出 $n!$ 种拼接方式中满足得到的字符串是好的的方案数。

$$n \leq 20, |s_i| \leq 10^4$$

2s, 512MB

有一个 n 个点的完全图，每条边有一个颜色。

这个完全图满足，对于任意一个简单环，都存在环上两条相邻的边颜色相同。

对于一个点集 S ，定义 $f(S)$ 为最大的 T 的大小，满足 $T \subset S$ 且 T 中任意两点间边的颜色相同。

求 $(\sum_{S \subset \{1,2,\dots,n\}} f(S)) \bmod (10^9 + 7)$ 。

$n \leq 3000$ (300)

1s, 512MB

给出 n 个字符串 s_1, \dots, s_n , 你需要在每个字符串中选出一个可以为空的子串 t_1, \dots, t_n , 将它们顺序拼接得到 $T = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ 。

求出可以得到的不同的非空 T 数量, 模 998244353。

$n \leq 10^5, \sum_{i=1}^n |s_i| \leq 3 \times 10^5$, 字符集大小为 $3 \times 10^5(10)$ 。

2s, 512MB

交互题。

你有一棵 n 个点的有根树，根为 1。

对于每个点，你可以钦定它的一条连向儿子的边为重边，也可以不钦定。

交互库首先给出这棵树，你需要给出一个钦定重边的方案。

随后交互库会进行 q 次询问，每次询问给定 x 。你可以在方案中进行若干次调整，使得 x 到根的路径上均为重边。一次调整定义为：

选择一个点，如果这个点没有钦定向儿子的重边，你可以钦定一条向儿子的边为重边。

如果这个点有钦定向儿子的重边，则你可以取消这个钦定，使这个点向儿子的边都不是重边。

你可以先进行若干次调整，使得 x 到根的路径上均为重边。在满足条件之后，你还可以进行若干次调整。这次询问中你的代价为两部分调整的次数的和。

你需要满足，在所有询问中，你单次询问的代价最大值不超过 35 (42, 60)。

$$n \leq 5 \times 10^4, q \leq 5 \times 10^5$$

3s, 512MB

给定 N, m, k , 求有多少个正整数序列 h 满足:

1. h 的长度 n 大于 0 不超过 N 。
2. $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, 1 \leq h_i \leq m$ 。
3. 正好存在 k 个 $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ 满足 $h_i < h_{i+1}$ 。

答案模 998244353。

$$2 \leq N, m, k \leq 2^{19}, (N - k + 1) * m \leq 2^{20}$$

1s, 512MB

上午和下午的分界线

给出 n, k , 有 n 个物品, 每个物品有重量 c_i 和价值 v_i 。
对于每个 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, 求出选择重量和不超过 i 的物品能得到的最大价值和。

$n \leq 10^6, k \leq 5 \times 10^4, c_i \leq 300$

2s, 256MB

给一个长度为 $n - 1$ 的正整数数组 b ，称一个长度为 n 的正实数数组 a 为合法的，当且仅当它满足 $\forall i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}, a_i * a_{i+1} \geq b_i$ 。

求出所有合法的 a 中 $\sum a_i$ 的最小值。

$n \leq 3000, b_i \leq 40000$

1s, 512MB

二维平面上有 n 个点, 点 i 的坐标为 (x_i, y_i) 。

有 p 个向量 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 你可以选一个 n 阶排列 p , 之后点 i 的坐标会变为 $(x_i + u_{p_i}, y_i + v_{p_i})$ 。

你选择的排列 p 需要满足对于每一个点对, 它们在坐标变化后的距离不小于坐标变化之前的距离。在此基础上, 你需要最大化变化后每一对点间距离的平方的和。

输出方案。

$n \leq 500$

1s, 512MB

交互题。

有一个 n 个点的竞赛图，你每次可以向交互库询问一条边的方向。找到任意一个出度大于等于 $n - 2$ 的点或者报告不存在这样的点。询问次数不超过 $4n$ ($5n$)。

$n \leq 1000$

3s, 512MB

有 n 个人，初始每个人有 1 个宝石。

每天晚上，等概率在当前所有的宝石中选出一个，这个宝石的拥有者获得 1 个宝石。

求出 m 个晚上后，拥有宝石数量前 k 多的人拥有的宝石数量和的期望，模 998244353。

$$n, m, k \leq 1.5 \times 10^7$$

1s, 512MB

备选题 1

给一棵 n 个点的树，每个点有点权 v_i ，每条边有权值 a_i, b_i 。
现在依次考虑每条边，对于第 i 条边，它有 $\frac{a_i}{a_i+b_i}$ 的概率被删掉，有 $\frac{b_i}{a_i+b_i}$ 的概率留下。
这样操作后，定义分数为每个连通块中的最大点权的最小值。求出分数的期望模 $10^9 + 7$ 。

$$n \leq 10^5$$

2s, 512MB

备选题 2

给一棵 n 个点的有根树, 1 为根, 求有多少个 n 阶排列 p 满足:

$$\forall i \in \{2, 3, \dots, n-1\}, \text{dep}(\text{lca}(p_{i-1}, p_i)) \leq \text{dep}(\text{lca}(p_i, p_{i+1}))$$

答案模 $10^9 + 7$ 。

$$n \leq 80$$

2s, 512MB

备选题 3

给两个长度为 n 的正整数序列 a, b 以及 m , 满足 $b_i \leq a_i \leq m$ 。
你可以进行不超过 l 次操作, 每次操作你可以给定正整数 l, r, k , 满足 $l \leq r, 1 \leq k \leq m$, 表示将 a_l, a_{l+1}, \dots, a_r 都对 k 取 \min 。
如果一次操作后序列 a 等于序列 b , 则你应该立即停止。
求在不超过 l 次操作内, 让序列 a 等于序列 b 的方案数, 模 998244353。
 $n, m, l \leq 100$
3s, 512MB