Solution

arisu

返回值为错误，当且仅当有一个数出现在 n 前面，且后面连续 k 个数都比它小。
直接计算是困难的，我们考虑计算返回值正确的排列数，记 f_i 为长度为 i 的排列，且没有提前返回的排列数。
那么
$ans = n! - \sum_{i=0}^{n-1} f_i \binom{n-1}{i} (n-i-1)!$

表示枚举最大值 n 前面有多少数，前面 i 个数不能提前返回值， n 后面的数可以随便排

关于 f_i 的递推式也比较显然
$f_i = \sum_{j=1}^{k} f_{i-j} \binom{i-1}{j-1} (j-1)!$
$\quad = (i-1)! \sum_{j=1}^{k} \frac{f_{i-j}}{(i-j)!}$
这个式子可以前缀和优化做到线性，计算答案也是线性的，总复杂度 $O(n)$

band

直接计算函数极其不现实，考虑函数的组合意义来尝试从其他角度计数。

$$f(T)=\frac{\sum_{e\in E(T)}f(T_u(e))\times f(T_v(e))}{n}$$

我们为了使这个函数具有组合意义，可以尝试将 $\frac{1}{n}$ 看成一种概率，但从所有边中选取一条的概率是 $\frac{1}{n-1}$，不对。发现树上不好加边，但可以加点，因此我们尝试将边转成点，这时点数 $n+(n-1)$ 依然不对，我们将 $n-1$ 乘上 P，即对于每个由边转换来的点，我们给其增加 $P-1$ 个儿子，这样总点数 $\mod P$ 意义下就是 n。由此我们可以将乘的 $\frac{1}{n}$ 看成是从所有点中等概率随机选择一个的概率。

我们将由边转换来的点称为“边点”。则 $f(T)$ 等价于对全树总共 $n+P\times(n-1)$ 个点进行随机排列，所有边点都在其所有邻居前面的概率。

我们将限制作为边连出来，会发现这棵上的边有上有下，我们考虑容斥，将所有向上的边改为向下或者没有限制，即没有边，容斥系数为改为向下的边的条数。现在我们的树可以看成是有一些无向边连接了一些外向树组成，于是我们得到了一个 DP:

记 $f_{i,j}$ 为考虑了 i 及其子树，向下构成的外向树的大小模意义下为 j，i 是在最终排列中是里面最靠前的点的方案数，考虑我们需要哪些转移：
对于一个普通点 x：我们要做的就是树形背包，设当前 x 外向树大小 i，当前枚举的儿子为 v，其外向树大小为 j，则：

$$f'_{x,i+j}-=f_{x,i}\times f_{v,j}$$

这里因为 x 是普通点，所以我们在选择边向下的时候要乘上容斥系数。
而如果我们选择不连向 v，则：

$$f'_{x,i}+=f_{x,i}\times\sum_{j=1}^{siz_v}f_{v,j}$$

由于 x 要排在最前面，所以在转移结束之后要给每一个值乘上一个 $\frac{1}{i}$。
边点新增的儿子都是叶子节点，不需要考虑。

对于一个边点 x 来说：他向儿子连的所有边在原图都是向下的，所以不需要容斥，然后发现枚举新增的 $P-1$ 个儿子进行转移并不会影响 f 的值，因此可以不做。而对于唯一需要的转移，由于 x 加上 $P-1$ 个儿子后在模意义下对 siz 没有贡献。所以我们只需要对于每一个 i 乘上 $\frac{1}{i}$。

$$f'_{x,i}=f_{v,i}\times\frac{1}{i}$$

$$ans=\sum_{i=1}^{n}f_{1,i}$$

$O(n^2)$。

hoshi

考虑最大生成森林的过程，每条边会 (u,v) 会在 u 和 v 不联通时加入边集，那么只需要同时维护 k 个边集，找到第一个使 u 和 v 不联通的边集，加入这条边就行。
又发现，两个点的连通性必然是有一个前缀边集 u 和 v 联通，后面的都不联通，那么可以直接二分，复杂度 $O(nk+mlogk)$ 。

slime

考虑 k 只有一种的情况

我们先求出这个状态下，可重集 S 中每种不同的数有几个，设 x 出现了 $b[x]$ 次。然后我们考虑，假如一个区间中一个数 x 出现了 $c[x]$ 次，那么我们需要在 $b[x]$ 中选 $c[x]$ 个进行排列，也就是 $b[x]^{\underline{c[x]}}$次。这个在 $c[x]$ 加一或者减一的时候可以 $O(1)$ 维护出来，显然想到莫队。

接下来还有一个问题就是，我们求得是钦定了 $[l,r]$ 区间内选的数的方案数，还有剩下随机排列的方案数要乘上去。

令 $A=n+mk, L=r-l+1$。

那么实际上要求的就是 $(A-L)^{\underline{n-L}}=\prod_{i=A-n+1}^{A-L} i$ 这个可以对于每种 k 预处理出来。

复杂度分析

首先其他部分都是不超过 $O((n+m)k+q\log k)$ 的，复杂度的瓶颈在莫队上。

假设对于每种 k，询问的次数分别为 $q_1,q_2,q_3,...,q_k$。

一次莫队的复杂度为 $O(n\sqrt{q})$，因此 $n\sum_i \sqrt{q_i}$。

运用权方和不等式可证，当所有 q_i 相等时，上式取得最大值。

因此复杂度即为 $O(nk\sqrt{\frac{q}{k}})=O(n\sqrt{qk})$，差不多能过。

标程写得比较丑，勿喷。