和式与二项式系数

和式化简

1. 求几何级数$S_n=\sum_{0\le k\le n}ax^k$

   【解答】

   用扰动法：

   $S_n+ax^{n+1}=ax^0+\sum_{0\le k\le n}ax^{k+1}=a+xS_n$

   所以：

   $S_n=\frac{a-ax^{n+1}}{1-x},x\ne 1$

2. 求$S_n=\sum_{0\le k\le n}k2^k$

   【解答】

   用扰动法：

   $S_n+(n+1)2^{n+1}=\sum_{0\le k\le n}(k+1)2^{k+1}=\sum_{0\le k\le n}k2^{k+1}+\sum_{0\le k\le n}2^{k+1}=2S_n+2^{n+2}-2$

   所以：

   $S_n=(n-1)2^{n+1}+2$

3. 化简$S=\sum_{1\le j\le k\le n}a_ja_k$

   【解答】

   $2S=\sum_{1\le j,k\le n}a_ja_k+\sum_{1\le j=k\le n}a_ja_k=(\sum a_i)^2+\sum a_i^2$

4. 化简$S=\sum_{1\le j<k\le n}(a_k-a_j)(b_k-b_j)$

   【解答】

   $2S=\sum_{1\le j,k\le n}(a_j-a_k)(b_j-b_k)-\sum_{1\le j=k\le n}(a_j-a_k)(b_j-b_k)$

   这边第二个和式等于零，第一个和式可以展开成下面这样：

   $\sum_{1\le j,k\le n}a_jb_j-\sum_{1\le j,k\le n}a_jb_k-\sum_{1\le j,k\le n}a_kb_j+\sum_{1\le j,k\le n}a_kb_k$

   $=2\sum_{1\le j,k\le n}a_jb_j-2\sum_{1\le j,k\le n}a_jb_k$

   $=2n\sum_{1\le k\le n}a_kb_k-2(\sum_{k=1}^n a_k)(\sum_{k=1}^n b_k)$

   两边都除以2并且移项可以得到下面这个重要的公式：

   $(\sum_{k=1}^n a_k)(\sum_{k=1}^n b_k)=n\sum_{1\le k\le n}a_kb_k-\sum_{1\le j<k\le n}(a_k-a_j)(b_k-b_j)$

4. 例：化简$S_n=\sum_{1\le j<k\le n}\frac{1}{k-j}$

   【解答】

   方法一：

   $S_n=\sum_{1\le k\le n}\sum_{1\le j<k}\frac{1}{k-j}$

   $\quad=\sum_{1\le k\le n}\sum_{1\le k-j<k}\frac{1}{j}=\sum_{1\le k\le n}\sum_{0<j\le k-1}\frac{1}{j}$

$= \sum_{1 \le k \le n} H_{k-1} = \sum_{0 \le k < n} H_k$

其中$H_k = 1/1 + 1/2 + ... + 1/k$，称为调和数。

方法二：

$S_n = \sum_{1 \le j \le n} \sum_{j < k \le n} \frac{1}{k-j}$

$= \sum_{1 \le j \le n} \sum_{j < k+j \le n} \frac{1}{k} = \sum_{1 \le j \le n} \sum_{0 < k \le n-j} \frac{1}{k}$

$= \sum_{1 \le j \le n} H_{n-j} = \sum_{1 \le n-j \le n} H_j = \sum_{0 \le j < n} H_j$

方法三：

$S_n = \sum_{1 \le j < k+j \le n} \frac{1}{k} = \sum_{1 \le k \le n} \sum_{1 \le j \le n-k} \frac{1}{k}$

$= \sum_{1 \le k \le n} \frac{n-k}{k} = \sum_{1 \le k \le n} \frac{n}{k} - \sum_{1 \le k \le n} 1$

$= nH_n - n$

我们也从中得出了一个关于调和数的恒等式：

$nH_n - n = \sum_{0 \le k < n} H_k$

5. 化简$S_n = \sum_{1 \le k \le n} k^2$

【解答】

$S_n = \sum_{1 \le j \le k \le n} k = \sum_{1 \le j \le n} \sum_{j \le k \le n} k$

$= \sum_{1 \le j \le n} (\frac{j+n}{2})(n - j + 1) = \frac{1}{2} \sum_{1 \le j \le n} (n(n+1) + j - j^2)$

$= \frac{1}{2} n^2 (n+1) + \frac{1}{4} n(n+1) - \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} n(n + \frac{1}{2})(n+1) - \frac{1}{2} S_n$

6. 化简$S_n = \sum_{k=0}^{n} k x^{k-1}$

【解答】

积分法：

由$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

两边求导得：

$S_n = \frac{(1-x)(-(n+1)x^n) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

7. 化简$U = \sum_{T \subseteq S} \prod_{s \in T} (w_s - 1)$

【解答】

$U = \sum_T \prod_{s \in T} w_s \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} = \prod_{s \in S} w_s$

二项式系数

牛顿二项式系数

牛顿二项式系数的定义

$$\binom{r}{n}=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n=0\\ \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!} & n>0\end{cases}$$

其中r为实数，n为整数。

广义牛顿二项式定理

$(x+y)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n y^{\alpha-n}$

其中x,y,α为实数，且$|\frac{x}{y}|<1$

重要的基础组合恒等式

(1) $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

(2) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

(3) $\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$

(4) $\sum_{k\le n}\binom{r+k}{k}=\binom{r+n+1}{n}$

(5) $\sum_{0\le k\le n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$

(6) $\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}=\binom{r+s}{n}$

> 两边都是在r个男人和s个女人中选取n个人的方法数

(7) $\sum_{-q\le k\le l}\binom{l-k}{m}\binom{q+k}{n}=\binom{l+q+1}{m+n+1}$

(8) $\sum_{k}\binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k=(-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l}$

(9) $\binom{r}{k}=(-1)^k\binom{k-r-1}{k}$

> $r^{\underline{k}}=r(r-1)\ldots(r-k+1)=(-1)^k(-r)(1-r)\ldots(k-r-1)=(k-r-1)^{\underline{k}}$

一些例题

1. 化简$\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}$

   【解答】

   先用式子(3)变换为：

   $\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}=\frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}}$

   所以原式变为：

   $\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}}$

   这时候分母就没有求和指标k了，可以移走。剩下要求的就是：

   $\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}$

   注意到上下指标都有k，可以想办法运用式子(4)：

   $\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}=\sum_{m-k=0}^{m}\binom{n-(m-k)}{m-(m-k)}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n-m+k}{k}=\binom{n+1}{m}$

   所以：

   $\text{原式}=\frac{\binom{n+1}{m}}{\binom{n}{m}}=\frac{n+1}{n+1-m}$

2. $\sum_k k\binom{n}{k}\binom{s}{k}$

   【解答】

   $\sum_k k\binom{n}{k}\binom{s}{k}=\sum_k s\binom{n}{k}\binom{s-1}{k-1}=s\sum_k\binom{n}{k}\binom{s-1}{s-k}=s\binom{n+s-1}{s}$

3. $S=\sum_{k=0}^{n}k\binom{m-k-1}{m-n-1}$

   【解答】

   $S=\sum_{k=0}^{n}(m-(m-k))\binom{m-k-1}{m-n-1}=m\sum_{k=0}^{n}\binom{m-k-1}{m-n-1}-(m-n)\sum_{k=0}^{n}\binom{m-k}{m-n}$

   接下来用上指标求和即可

4. $S=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$

   【解答】

   $S=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}\frac{(-1)^k}{n+1}=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{n}\binom{n+1}{k+1}\frac{(-1)^k}{n+1}$

   用式子(8)即可

一个重要的技巧：取一半

处理 $\dbinom{2n}{n}$ 形组合数。

如果 n 是整数, $\dbinom{n-\frac{1}{2}}{k}$ 能够被(轻易地)写成一些整组合数的乘积。

考虑下降幂的**加倍公式** : $x^{\underline{k}}(x-\frac{1}{2})^{\underline{k}}=x(x-\frac{1}{2})(x-1)\dots(x-k+1)(x-k+\frac{1}{2})$

$=2^{-2k}*2x(2x-1)(2x-2)\dots(2x-2k+2)(2x-2k+1)=\dfrac{x^{\underline{2k}}}{2^{2k}}$

也就是说,我们通过 $\frac{1}{2}$ 让两个下降幂交错，然后乘上 2 的幂，使得间隙扩大为 1 ,变回下降幂。

令 $x=k=n$ ，能得到 : $n^{\underline{n}}(n-1/2)^{\underline{n}}=\dfrac{n^{\underline{2n}}}{2^{2n}}$

在两边同时除以 $n!^2$ 以产生组合数 : $\dbinom{n-1/2}{n}=\dbinom{2n}{n}\Big/2^{2n}$

使用上指标反转又可得: $\dbinom{-1/2}{n}(-4)^n=\dbinom{2n}{n}$

现在我们来大胆地使用上式,尝试得出 $\sum\limits_{i=0}\dbinom{2i}{i}x^i$ 的封闭形式。

$=\sum\limits_{i=0}\dbinom{-1/2}{i}(-4x)^i$

逆用广义二项式定理。得到 $=(1-4x)^{-1/2}$,出人意料的简洁。

有限微积分（离散微积分）

上升幂与下降幂

对于$n>0$

$x^{\underline{n}}=x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$

$x^{\underline{-n}}=\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n)}$

$x^{\overline{n}}=x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$

$x^{\overline{-n}}=\frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}$

上升幂与下降幂的一些性质

1. $x^{\underline{a+b}}=x^{\underline{a}}(x-a)^{\underline{b}}$
2. $x^{\overline{a+b}}=x^{\overline{a}}(x+a)^{\overline{b}}$
3. $x^{\underline{n}}=(-1)^n(-x)^{\overline{n}}$
4. $x^{\overline{n}}=(-1)^n(-x)^{\underline{n}}$
5. $x^{\underline{k}}(x-\frac{1}{2})^{\underline{k}}=\frac{(2x)^{\underline{2k}}}{2^{2k}}$
6. 当n为自然数的时候，有
   $(x+y)^{\underline{n}}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{\underline{i}}y^{\underline{n-i}}$
   $(x+y)^{\overline{n}}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{\overline{i}}y^{\overline{n-i}}$

有限微积分

定义差分算子：$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$用来类比微分算子，我们发现对于下降幂有类似于微积分的一些性质。

1. $\Delta(x^{\underline{m}})=mx^{\underline{m-1}}$（类比微分）
2. $g(x)=\Delta f(x)$，令$\Sigma_a^b f(x)=\sum_{i=a}^{b-1}f(x)$（注意前面的不是求和标记），那么有
   $\Sigma_a^b g(x)=f(b)-f(a)$（类比积分）
3. 根据上式有：$\Sigma_0^n x^{\underline{k}}=\frac{n^{\underline{k+1}}}{k+1},k\neq-1$。当$k=-1$的时候，特别的$\Sigma_0^n x^{\underline{-1}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$也就是调和级数。（类比于微积分中特殊的$\int\frac{1}{x}=\ln x$）
4. $\Delta(2^x)=2^x$（类比于e^x）
5. 乘法法则：$\Delta(uv)=u\cdot\Delta v+Ev\cdot\Delta u$其中$E$算子为移位算子$Ef(x)=f(x+1)$
6. 分部积分法则：$\Sigma u\cdot\Delta v=uv-\Sigma Ev\cdot\Delta u$

一些基本的应用

如果能对于一个函数$g(x)$能找出$g(x)=\Delta f(x)$的函数f，可以快速的求出：

$\sum_{i=1}^{n}g(x)=f(n+1)-f(1)$

例如：求$\sum_{i=0}^{100}x^2$

我们令$g(x)=x^2=x(x-1)+x=x^{\underline{2}}+x^{\underline{1}}$

所以原函数$f(x)=\frac{1}{3}x^{\underline{3}}+\frac{1}{2}x^{\underline{2}}=\frac{x(x-1)(x-2)}{3}+\frac{x(x-1)}{2}$

带入就可以轻松求出来了。