


简单 DP 选讲

4182_543_731

2021 年 2 月 20 日

- 相信大家对基础难度的动态规划问题有足够的了解。
- 后面的一道题大概留 15+ 分钟的时间。
- 有想法的可以直接私发，最好不要公开说正解以免影响他人切题。
- 由于本人水平极低，相信大家都能切掉 ppt 里的题。
- 如果您觉得题目过于简单或者您全部会了，您可以提前离场。
- 因为本人不太会用 latex 且日常手误，如果有错误请直接指出。
- 不要喷讲题人。 /kel
- 

经典例题

你有一个长度为 n 的排列，你可以将这个排列划分成若干段，每一段的代价为这一段内的逆序对数加上 k 。

求所有划分方案中每一段代价和的最小值。

$n \leq 3 \times 10^5$ ，时间限制 5s。

一个经典例题

给一棵 n 个点的树，边有边权，对于每个 k 求出大小为 k 的匹配的最大权值。

$n \leq 2 \times 10^5$ ，时间限制 $2s$ 。

一个经典例题

有一个 $n \times m$ 的网格图，边有边权，求大小为 k 的最小权匹配的权值。
 $n \leq 5 \times 10^4, m \leq 4$ 。

最后一个例题

给一个长度为 m 的字符串 T , 对于每个 i , 求出有多少个长度为 n 的字符串 S , 满足 $LCS(S, T) = i$, 模 $10^9 + 7$ 。 LCS 指最长公共子序列。
 $n \leq 1000, m \leq 15$, 字符集大小为 4。

杂题

喜闻乐见.jpg

因为上面那些东西大部分题目都是板子，所以下面几乎不会用到上面的东西。

因为我很菜，大部分题都很良心，但不保证难度按顺序排列。

本来这里会有一点集训队作业的 AGC 题，但因为某些原因就换掉了：



感觉可能在场的人都做过集训队作业(?)

一道现场过了 80% 的题

给一个长度为 $n - 1$ 的正整数数组 b ，称一个长度为 n 的正实数数组 a 为合法的，当且仅当它满足 $\forall i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}, a_i * a_{i+1} \geq b_i$ 。

求出所有合法的 a 中 $\sum a_i$ 的最小值。

$n \leq 3000, b_i \leq 40000$

一道题

给一个长度为 n 的非负整数序列 a ，你需要将其划分成 k 段。定义第 i 段的和为 su_i ，最大值为 mx_i ，你的划分方案需要满足

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, |su_i - su_{i+1}| \leq \max(mx_i, mx_{i+1}).$$

构造一个方案或输出无解。

$$3 \leq k \leq n \leq 10^5, 0 \leq a_i \leq 5 \times 10^4$$

一道题

给一棵 n 个点的树，随机一个 n 个点的排列 p ，然后进行如下操作：
维护一个集合 S ，初始为空集。顺序考虑排列中的每一个元素 p_i ，如果 $S \cup \{p_i\}$ 为树的一个独立集，则向 S 中加入 p_i ，否则不做操作。
求出操作结束后 $|S|$ 的期望乘上 $n!$ 的结果，模 $10^9 + 7$ 。
 $n \leq 200$

一道题

给定树 $T_1 = \{V, E_1\}$, $|V| = n$, 假设点集 V 能构成的生成树集合为 S , 求:

$$\sum_{T_2 \in S} |E_1 \cap E_2| * 2^{|E_1 \cap E_2|}$$

答案对 998244353 取模。

$$n \leq 2 \times 10^6$$

一道题

给定 c , 定义一个每个元素都为 $[1, c]$ 中整数的序列 a_1, \dots, a_k 的密度为最大的满足每一个长度为 m 的所有元素为 $[1, c]$ 中整数的序列都是 a 的子序列的 m 。

给一个长度为 n 的序列 v , 考虑它的所有 $2^n - 1$ 个非空子序列, 求出这些序列中密度为 $0, 1, 2, \dots, n$ 的序列个数, 模 998244353。

$n, c \leq 3000$, 时间限制 6s。

提示: 先思考 $O(n^3)$ 的做法。

一道题

有一个 $2 \times n$ 的棋盘，有 c 种颜色。棋盘上有一些格子已经染了色。你需要给剩下的格子染色，使得不存在两个相邻格子颜色相同，求染色的方案数，模 $10^9 + 9$ 。

$$5 \leq n, c \leq 10^5$$

一道题

给定 n, k 以及 n 对整数 l_i, r_i , k 个非负整数 c_i 。满足 $0 \leq l_i \leq r_i < 2^k$ 。
定义一个长度为 n 的非负整数序列 a 是合法的, 当且仅当 $\forall i, l_i \leq a_i \leq r_i$ 。
定义 $f(i) = \sum_{j=0}^{k-1} (\lfloor \frac{i}{2^j} \rfloor \bmod 2) * c_j$, 即 i 二进制表示上每一个为 1 的位对应的位权值和, 其中从低向高第 j 位的权值为 c_j 。
求出所有合法的序列中, $\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i \oplus a_{i+1})$ 的最小值, 这里 \oplus 表示异或。
 $n, k \leq 50, c_i \leq 10^{12}$

一道题

有 n 个单词，第 i 个单词的使用次数为 v_i 。

有三种字符，这三种字符使用一次的代价分别为 2, 2, 3。

你需要给每个单词分配一个由这三种字符组成的字符串，满足任意一个分配的字符串不是另外一个分配的字符串的前缀。

定义一个字符串的代价为字符串每个字符代价的和，定义分配方案的代价为每个单词对应的字符串代价乘以这个字符串的使用次数的和。

求出所有分配方案中最小的代价，以及达到最小代价的分配方案数，方案数对 $10^9 + 9$ 取模。

$n \leq 30, v_i \leq 1000$

因为篇幅原因被放弃的题

给一棵 n 个点的树，每条边的边权在 $[0, 1]$ 间均匀随机。
求直径长度的期望，模 $10^9 + 7$ 。
 $n \leq 100$ ，时间限制 6s。