图论

行列式与逆

定义

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{r(j_1 j_2, \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

其中$j_1 j_2 \dots j_n$表示n元排列，$r(j_1 j_2 \dots j_n)$表示其中逆序对个数

比如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

行列式的意义

首先向量的叉积（向量积）其实就是一个求行列式的过程。而向量积的意义是两个向量包围的平行四边形的面积。

三阶矩阵的行列式就是列向量组成的平行六面体的体积。

而行列式的一种解释其实就是和面积，体积有关。行列式就是线性变换的伸缩因子，行列式为1，说明这个线性变换不会改变面积（体积）；行列式>1，说明此变换面积增大；行列式在0到1之间说明此变换面积减小；行列式为0，说明矩阵不可逆，也说明如果是一个二维的图像会因为此变换坍缩成一维的，无法再通过其他变换复原了。行列式<0的话如果本来向量i和j满足右手法则，会变成满足左手法则。

当然行列式的意义还有其他解释。

行列式的性质

1. 转置操作不影响行列式的值，也就是$det(A^T) = det(A)$
2. 一行的因子可以提出，也即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. 两行互换，行列式反号
4. 将一行的倍数加到另一行上，行列式的值不变

行列式的计算

由于上三角行列式很容易计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

又根据行列式的性质，我们可以通过初等行变换来操作行列式，所以我们可以用类似高斯消元的方法，把行列式变成上三角行列式进行求解，复杂度为$O(N^3)$

矩阵求逆

把矩阵和一个单位阵合并，然后高斯消元，右边就是矩阵的逆了。

$$[A, I] \Rightarrow [I, A^{-1}]$$

LGV引理

1. P6657

   有一个 $n \times n$ 的棋盘，左下角为 $(1,1)$，右上角为 (n,n)，若一个棋子在点 (x,y)，那么走一步只能走到 $(x+1,y)$ 或 $(x,y+1)$。

   现在有 m 个棋子，第 i 个棋子一开始放在 $(a_i,1)$，最终要走到 (b_i,n)。问有多少种方案，使得每个棋子都能从起点走到终点，且对于所有棋子，走过路径上的点互不相交。输出方案数 $\bmod 998244353$ 的值。

   两种方案不同当且仅当存在至少一个棋子所经过的点不同。

   - $T \le 5$，$2 \le n \le 10^6$，$1 \le m \le 100$，$1 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_m \le n$，$1 \le b_1 \le b_2 \le \dots \le b_m \le n$

   【解答】

   我们发现只有a_i到b_i才会路径不相交，直接套引理即可

2. gym247727A

   求有多少个满足条件的 $n \times m$ $(1 \le n,m \le 10^3)$ 的矩阵 A，满足矩阵每个元素
   $A_{i,j} \in \{0,1,2\}$ 并且 $A_{i,j} \le A_{i+1,j}$，而且 $A_{i,j} \le A_{i,j+1}$
   答案取模 10^9+7

   $n,m \le 10^3$

   【解答】

   考虑到这个矩阵长什么样子（放到二维坐标系下）
   也就是存在两条分界线咯，也就是找两条从 $(n,0)$ 到 $(0,m)$ 的路径
   然而有个问题就是，它们可能边会重合（但一定是要求一个在另一个上方）
   于是把上方那条路径往左上方平移一下就不重合了，平移后就是这样的两条路径：
   $\begin{cases}(n,0) \to (0,m) \\ (n-1,-1) \to (-1,m-1)\end{cases}$那么路径条数就 LGV 定理一下就好了

3. P7736

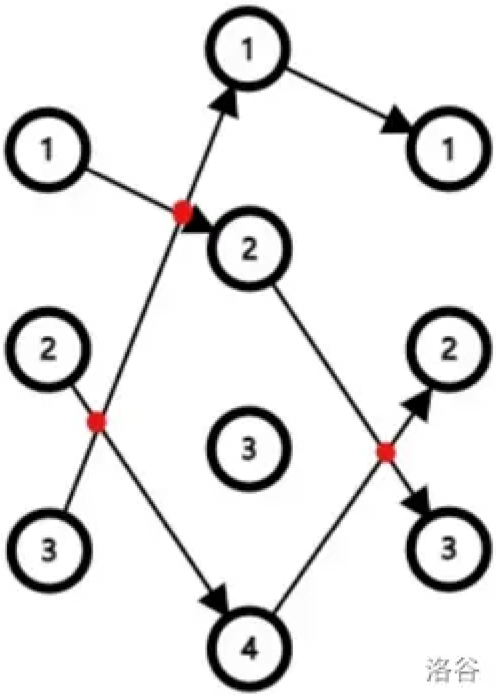
   小 L 有一个有向图，图中的顶点可以分为 k 层，第 i 层有 n_i 个顶点，第 1 层与第 k 层**顶点数相同**，即 $n_1 = n_k$，且对于第 j $(2 \le j \le k-1)$ 层，$n_1 \le n_j \le 2n_1$。对于第 j $(1 \le j < k)$ 层的顶点，以它们为起点的边只会连向第 $j+1$ 层的顶点。没有边连向第 1 层的顶点，第 k 层的顶点不会向其他顶点连边。

现在小 L 要从这个图中选出 n_1 条路径，每条路径以第 1 层顶点为起点，第 k 层顶点为终点，并要求**图中的每个顶点至多出现在一条路径中**。更具体地，把每一层顶点按照 $1, 2, \ldots, n_1$ 进行编号，则每条路径可以写为一个 k 元组 $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$，表示这条路径依次经过第 j 层的 p_j（$1 \le p_j \le n_j$）号顶点，并且第 j（$1 \le j < k$）层的 p_j 号顶点有一条边连向第 $j+1$ 层的第 p_{j+1} 号顶点。

小 L 把这些路径画在了纸上，发现它们会产生若干个交点。对于两条路径 P, Q，分别设它们在第 j 层与第 $j+1$ 层之间的连边为 (P_j, P_{j+1}) 与 (Q_j, Q_{j+1})，若，

$(P_j - Q_j) \times (P_{j+1} - Q_{j+1}) < 0$

则称它们在第 j 层后产生了一个交点。两条路径的交点数为它们在第 $1, 2, \ldots, k-1$ 层后产生的交点总数。对于整个路径方案，它的交点数为**两两不同路径间交点数之和**。例如下图是一个 3 条路径，共 3 个交点的例子，其中红色点是交点。



小 L 现在想知道有偶数个交点的路径方案数比有奇数个交点的路径方案数多多少个。两个路径方案被视为相同的，当且仅当它们的 n_1 条路径按第一层起点编号顺序写下的 k 元组能对应相同。由于最后的结果可能很大，请你输出它对 998244353（一个大质数）取模后的值。

$2 \le k \le 100$，$2 \le n_1 \le 100$，$1 \le T \le 5$

【解答】

容易发现交点数量的奇偶性恰好就是每个起点对应的终点的排列的逆序对个数的奇偶性。

求一下路径条数后LGV就好了

4. C23170三彩团子

【解答】

前面部分和T2差不多，就是要选出$k-1$条分界线，通过平移分离。

接下来考虑$p(r,c)=v$的限制，我们按照$v-1$的方式把p平移到p'，那么也就是p'左上方恰有$v-1$条分界线穿过。我们把边分类，从p'向左上角引一条射线，那么也就是方案中恰有$v-1$条被射线穿过的边。我们把被射线穿过的边的边权赋为x，那么答案就是x^{v-1}的系数。我们可以带入值之后，插值插值出系数。

5. qoj1262

有n个数$a_1, a_2, \ldots, a_n$（有顺序），你每次可以选取$i<j$然后把a_i, a_j同时加一。你需要保证任意时刻所有数互不相等。你要把它们变成$b_1, b_2, \ldots, b_n$（有顺序）。求操作方案数模998244353

$n \le 30, 1 \le a_i, b_i \le 200$

【解答】

很明显我们把a_i和b_i按从小到大顺序排序之后，原先的a_i和b_i必须得有相同的排名，不然肯定不能保证互不相等。我们不妨把他们都排序了，排序后a_i要变成b_i。

先考虑如果不要求互不相等该怎么做。首先我们操作的步数是一定的，设$t = \sum(b_i - a_i)/2$就是操作的步数了。接下来有两种做法（本质是相同的）。我们发现现在限制条件只有一个：单次操作的a_i和a_j不能是同一个数，我们把这个条件容斥掉就好了。我们设$d_i = b_i - a_i$，并且枚举单次操作了两个a_i的次数为x_i次，并设$s = \sum x_i$，得到式子：$\sum_{2x_i \le d_i} (-1)^s \binom{t}{x_1, x_2, \ldots, x_n} \binom{2(t-s)}{d_1 - 2x_1, d_2 - 2x_2, \ldots, d_n - 2x_n}$。另一种方法是把操作看做$(\sum x_i x_j)^t = ((\sum x_i)^2 - \sum x_i^2)^t$得到同样的式子。接下来这个式子，我们可以$dp$去依次枚举$x_i$求出。

但是现在有了互不相等的条件，我们联想到LGV引理。在LGV引理的推导的时候，有非常重要的一点，就是如果相交了，那么把后半部分交换后就可以互相抵消。在这边我们发现，如果出现相等的时刻，那么之后的操作也是可以互换的。利用LGV引理推导时候类似的式子，也就是$\sum_\sigma (-1)^{t(\sigma)} [(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to (b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \ldots, b_{\sigma(n)}) \text{的不要求互不相等方案数}]$就是我们要求的答案。但是我们没有办法去枚举排列然后算这个式子，复杂度爆炸，我们希望也能把这个式子转化成行列式的样子。就是我们希望中括号里面可以写出类似于$\prod f(a_i, b_{\sigma(i)})$的形式，这样我们就能转换成行列式了。我们接下来就是希望把上面得到的那个式子转换成这个形式。我们把式子中所有和i有关的项提出来，那么就是：

$\sum_{x_i} (\prod (-1)^{x_i} \frac{1}{x_i!} \frac{1}{(d_i - 2x_i)!}) \cdot \frac{(2t-2s)!}{(t-s)!}$，其中的$d_i = b_{\sigma(i)} - a_i$。咋一看因为$f(s) = \frac{(2t-2s)!}{(t-s)!}$这一项的存在无法转换成我们想要的形式。我们令$g_i(x) = \sum_{x_i} (-1)^{x_i} \frac{1}{x_i!} \frac{1}{(d_i - 2x_i)!} x^{x_i}$，那么我们知道$\prod_i g_i(x)$这个多项式的$x_s$这一项的系数就是前面式子括号内的部分了，我们设$\prod_i g_i(x) = \sum G_i x^i$，则上面的式子就是$\sum_s G_s f(s)$。所以我们就成功把式子写成我们想要的形式了，我们把这个多项式放进矩阵求行列式，用拉格朗日插值出最终的多项式就解决了这个题目了。

矩阵树定理

1. P6178

   给定一张 n 个结点 m 条边的带权图（可能为无向图，可能为有向图）。

   定义其一个生成树 T 的权值为 T 中所有边权的乘积。

   求其所有不同生成树的权值之和，对 $10^9 + 7$ 取模。

   注意：

   1. 本题中，有向图的生成树指的是 **以 1 为根的外向树**；
   2. 两棵生成树 T_1, T_2 不同，当且仅当存在存在一条边 e，满足 $e \in T_1$， $e \notin T_2$。

   $1 \le n \le 300,\ 1 \le m \le 10^5,\ t \in \{0,1\},\ 1 \le u, v \le n,\ 1 \le w \le 10^9$。

   图中 **可能** 存在重边和自环，重边算作多条边。

   【解答】

   矩阵树定理求的就是所有生成树边权乘积的和。

2. P3317

   T 国有 N 个城市，用若干双向道路连接。一对城市之间至多存在一条道路。

在一次洪水之后，一些道路受损无法通行。虽然已经有人开始调查道路的损毁情况，但直到现在几乎没有消息传回。

幸运的是，此前 T 国政府调查过每条道路的强度，现在他们希望只利用这些信息估计灾情。具体地，给定每条道路在洪水后仍能通行的概率，请计算仍能通行的道路恰有 $N-1$ 条，且能联通所有城市的概率。

$1 < N \le 50$。

【解答】

我们都知道矩阵树求的是：$\sum\limits_T \prod\limits_{e\in T} p_e$
而这题求的是：$\sum\limits_T (\prod\limits_{e\in T} p_e \prod\limits_{e\notin T}(1-p_e))$
通俗地将：枚举每个树，属于这个树边出现的概率×非树边出现的概率
$\sum\limits_T (\prod\limits_{e\in T} p_e \prod\limits_{e\notin T}(1-p_e))$
$= \sum\limits_T (\prod\limits_{e\in T} p_e \frac{\prod_e (1-P_e)}{\prod_{e\in T}(1-P_e)}) = \prod\limits_e (1-p_e)(\sum\limits_T \prod\limits_{e\in T} \frac{pe}{(1-pe)})$

3. P4336

幽香上台以后，第一项措施就是要修建幻想乡的公路。幻想乡一共有 n 个城市，之前原来没有任何路。幽香向选民承诺要减税，所以她打算只修 $n-1$ 条公路将这些城市连接起来。但是幻想乡有正好 $n-1$ 个建筑公司，每个建筑公司都想在修路的过程中获得一些好处。虽然这些建筑公司在选举前没有给幽香钱，幽香还是打算和他们搞好关系，因为她还指望他们帮她建墙。所以她打算让每个建筑公司都负责一条路来修。

每个建筑公司都告诉了幽香自己有能力负责修建的路是哪些城市之间的。所以幽香打算 $n-1$ 条能够连接幻想乡所有城市的边，然后每条边都交给一个能够负责该边的建筑公司修建，并且每个建筑公司都恰好修建一条边。

幽香现在想要知道一共有多少种可能的方案呢？两个方案不同当且仅当它们要么修的边的集合不同，要么边的分配方式不同。

$2 \le n \le 17$，$0 \le m_i \le \frac{n(n-1)}{2}$，$1 \le u, v \le n$。

【解答】

我们可以认为这个题有两个限制
1.建造的公路构成一只生成树
2.每个公路必须由不同的公司建造
发现同时满足两个条件很辣手，但是呢我们可以只满足第一个条件
直接对着这个图跑一边矩阵树定理就可以求出方案数了对吧~
注意:如果两个公司可以建造同一个公路，需要按重边处理!
此时我们会发现我们明显算多了，刚好由n-1个公司建造的生成树是统计上了
但是我们也统计上了刚好由n-2个公司建造的生成树。
没关系，我们枚举到底是哪n-2个公司建造了这个树，显然这样的集合有C_{n-1}^1种，**建图的时候只加入这n-2个公司的边**，对着这个图跑一边矩阵树就可以求出方案数了对吧~，然后依次减去这些集合的方案数
但是我们发现此时明显算少了,因为我们多减去了刚好n-3个公司建造的树，显然这样的集合有C_{n-1}^2种，我们继续枚举集合，**建图的时候只加入这n-3个公司的边**，然后继续跑矩阵树定理，此时我们依次加上这些集合的方案数
然后发现我们加多了......n-4个公司的情况被重复统计了，此时我们以此类推地枚举所有的集合，最后显然一个公司都不剩的情况方案数是0，因此我们的递归是有终点的，并且当递归结束的时候我们刚好统计了所有的方案数。
以上建图时请务必注意重边的处理，同一边不同公司造按重边记！！！
算法复杂度$O(2^{n-1}(n-1)^3log(10^9+7))$可以通过此题

4. P6624

小 W 刚刚在离散数学课学习了生成树的知识：一个无向图 $G=(V,E)$ 的生成树 T 为边集 E 的一个大小为 $|V|-1$ 的子集，且保证 T 的生成子图在 G 中连通。

小 W 在做今天的作业时被这样一道题目难住了：

给定一个 n 个顶点 m 条边（点和边都从 1 开始编号）的无向图 G，保证图中无重边和无自环。每一条边有一个正整数边权 w_i，对于一棵 G 的生成树 T，定义 T 的价值为：T 所包含的边的边权的最大公约数乘以边权之和，即：

$$val(T)=\left(\sum_{i=1}^{n-1} w_{e_i}\right)\times \gcd(w_{e_1},w_{e_2},\ldots,w_{e_{n-1}})$$

其中 $e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}$ 为 T 包含的边的编号。

小 W 需要求出 G 的所有生成树 T 的价值之和，他做了很久也没做出来，请你帮帮他。由于答案可能很大，你只需要给出答案对 998244353 取模后的结果。

$1\le n\le 30, 1\le m\le \frac{n(n-1)}{2}, 1\le w_i\le 152501$。

【解答】

第一步：我是推式子大师，我会大力推式子！但是欧拉反演是什么我全忘了，我们用莫反推！！

$$\begin{aligned}
&\sum_{(v,e)\in G,(v,e)\text{ is a tree}}\left(\sum_{i=1}^{n-1} w_{e_i}\right)\times \gcd(w_{e_1},w_{e_2},\ldots,w_{e_{n-1}})\\
=&\sum_{d=1}^{V} d\sum_{(v,e)\in G,(v,e)\text{ is a tree}}\sum_{i=1}^{n-1} w_{e_i}\left[\gcd(w_{e_1},w_{e_2},\ldots,w_{e_{n-1}})=d\right]
\end{aligned}$$

定义 G_d 为 G 关于所有边权为 d 倍数的边的导出子图，则原式化得

$$\begin{aligned}
=&\sum_{d=1}^{V} d\sum_{(v,e)\in G_d,(v,e)\text{ is a tree}}\sum_{i=1}^{n-1} w_{e_i}\left[\gcd(\frac{w_{e_1}}{d},\frac{w_{e_2}}{d},\ldots,\frac{w_{e_{n-1}}}{d})=1\right]\\
=&\sum_{d=1}^{V} d\sum_{(v,e)\in G_d,(v,e)\text{ is a tree}}\sum_{i=1}^{n-1} w_{e_i}\sum_{k|\frac{w_{e_1}}{d},\frac{w_{e_2}}{d},\ldots,\frac{w_{e_{n-1}}}{d}}\mu(k)\\
=&\sum_{d=1}^{V} d\sum_{(v,e)\in G_d,(v,e)\text{ is a tree}}\sum_{i=1}^{n-1} w_{e_i}\sum_{dk|w_{e_1},w_{e_2},\ldots,w_{e_{n-1}}}\mu(k)\\
=&\sum_{d=1}^{V} d\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{V}{d}\rfloor}\mu(k)\sum_{(v,e)\in G_{dk},(v,e)\text{ is a tree}}\sum_{i=1}^{n-1} w_{e_i}\\
=&\sum_{T=1}^{V}\sum_{d|T} d\mu\left(\frac{V}{d}\right)\sum_{(v,e)\in G_T,(v,e)\text{ is a tree}}\sum_{i=1}^{n-1} w_{e_i}\\
=&\sum_{T=1}^{V}\varphi(T)\sum_{(v,e)\in G_T,(v,e)\text{ is a tree}}\sum_{i=1}^{n-1} w_{e_i}
\end{aligned}$$

这个时候我们去枚举前面的 T，对应计算 G_T 中所有生成树的边权和之和。但是 Matrix-Tree 定理是计算边权积之和的，我们考虑如何去处理这个东西。

一个巧妙的 trick：将边权表示为 $1+w_ix$ 的少项式格式，这个时候我们有
$\prod(1+w_ix)=1+(\sum w_i)x+\ldots$

那么我们就可以去维护一个一次少项式作为矩阵里面的元素进行运算计算出行列式，从而得到答案。让我们看看一次少项式的基本运算：

- 加法：$(a+bx)+(c+dx)=(a+c)+(b+d)x$
- 减法：$(a+bx)-(c+dx)=(a-c)+(b-d)x$
- 乘法：$(a+bx)\times(c+dx)=ac+(ad+bc)x+bdx^2\equiv ac+(ad+bc)x \pmod{x^2}$
- 除法：不妨设 $(a+bx)\div(c+dx)=e+fx$，则有 $(c+dx)\times(e+fx)\equiv a+bx \pmod{x^2}$；展开得到 $ce+(cf+de)x=a+bx$，所以 $e=\dfrac{a}{c}$，$cf+de=b$，代入并化简可以得到 $f=\dfrac{bc-ad}{c^2}$。所以，$(a+bx)\div(c+dx)=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c^2}x$。

这样我们用一个少项式矩阵就能计算出一张图所有生成树边权和之和了。同时注意到如果 G_T 的边数 $<n-1$ 时其无法连通，也就不存在生成树，所以这样的情况可以直接不用算；剩下的 T 的个数就只有 $n\cdot d(V)$ 个了（其中 $d(x)$ 表示因数个数）。于是总复杂度 $\Theta(n^4 d(V)+V\log V)$，可以通过此题。

5. agc051_d

有一张 4 个点 4 条边的简单无向连通图，点的编号分别为 $1,2,3,4$ ，边分别连接着 $e1:(1,2),e2:(2,3),e3:(3,4),e4:(4,1)$。

给定 4 个数 v_1,v_2,v_3,v_4 求满足以下条件的路径数量：

从 1 号点出发并到 1 号点结束，且经过第 i 条边 e_i 恰好 v_i 次。

你需要输出路径数对 998244353 取模的结果。

$v_1,v_2,v_3,v_4\le 5\times10^5$

【解答】

欧拉回路计数嘛，度数不是偶数就可以输出 0 了。
然后无向图我不会但是有向图我会啊。有 BEST 定理：

> 对于有向图 $G=(V,E)$，图的欧拉回路数量 $ec(G)$ 为：
> $ec(G)=t_s(G)\prod_{v\in V}(\deg_v-1)!$
> 其中 $t_s(G)$ 表示以任意一点为根的外向树数量。

因此如果我们变成有向边就能做了。
不妨设 $1\to2,2\to3,3\to4,4\to1$ 的次数分别为 a,b,c,d，那么 $2\to1,3\to2,4\to3,1\to4$ 就分别为 $A-a,B-b,C-c,D-d$。因为出度和入度相等所以 a 固定后 b,c,d 也固定了，只需要枚举 a 即可。
然后有向边，我们可以 $\mathcal{O}(1)$ 得到 $ec(G)$，但是还不能统计进答案。考虑两点

- BEST定理给出的是无起点欧拉回路条数，我们要求得是有起点，所以要乘上 deg_1 表示从 1 出来第一步走了哪条边
- 每种边实际上是不作区分的，所以要乘上 $1/(a!b!c!d!(A-a)!(B-b)!(C-c)!(D-d)!)$

然后累加进答案即可。复杂度 $\mathcal{O}(A)$。

6. abc323_g

给定一个 1 到 N 的排列 $P_1,P_2,\ldots,P_N$。

对于一颗 N 个点的有标号无根树，定义其「逆序边」为满足 $P_u>P_v$ 的边 (u,v) $(u<v)$。

现对于所有 $K=0,1,\ldots,N-1$，求恰好有 K 条「逆序边」的有标号无根树个数，结果对 998244353 取模。

$2\le\ N\le\ 500$

【解答】

直接矩阵树定理，度数矩阵减去邻接矩阵再求个行列式。不过由于我们要区分逆序边，不妨为逆序边乘上个 x 的系数。设非逆序边的基尔霍夫矩阵 A，逆序边的为 B，则答案为 $[x^k]\det(A+xB)$ 。
考虑咋求这玩意。直接大力消元是 $O(n^4)$，接下来要介绍一点科技：特征多项式

定义

对于一个 $n \times n$ 的矩阵 A ，定义它的特征多项式为：
$p_A(x) = \det(xI_n - A)$
其中 I_n 是一个 n 阶的单位矩阵，最后的 $p_A(x)$ 是一个 n 次多项式

求特征多项式

暴力可以直接取 $0, 1, \ldots, n$ 一共 $n+1$ 个值代入 x 求行列式，再用多项式插值求出特征多项式，复杂度是 $O(n^4)$ 的，在这里不细讲
如果一个矩阵次对角线下方的位置全部都是 0 那么把其称为 “上海森堡矩阵”
那么接下来有一个算法一般叫做 “海森堡算法” 可以在 $O(n^3)$ 的时间内 **递推** 出特征多项式
将一个普通矩阵等价变换成我们需要的上海森堡矩阵的方法是 **类高斯消元**
高斯消元大家都非常熟悉了，但是我们需要在这基础上做一些调整， **这非常重要** ，千万不能遗漏

结论

对于初等可逆矩阵 P ，有：
$\det(xI_n - A) = \det(xI_n - PAP^{-1})$
证明：
$\det(xI_n - PAP^{-1}) = \det(xPI_nP^{-1} - PAP^{-1})$
$= \det((xPI_n - PA)P^{-1})$
$= \det((PxI_n - PA)P^{-1})$
$= \det(P(xI_n - A)P^{-1})$
$= \det(P) \times \det(xI_n - A) \times \det(P^{-1})$
$= \det(xI_n - A)$
我们称 $B = PAP^{-1}$ 为 A 的相似矩阵，于是我们得到了一个表述：

> 相似矩阵的特征多项式相同

由此，我们也加深了对 “特征” 二字的理解

更改高斯消元

一般的高斯消元可以理解为令一个普通矩阵 A 变成 PA ，这个 P 即为一个初等矩阵
我们发现，此时的 A' 并不与原来的 A 相似，但它们也就相差了一个 P^{-1}
高斯消元用到的三个操作：

- 交换两行
- 将一行 $\times k$ 加到另一行上
- 将一行 $\times k$

经过验证，这三个操作对应的初等矩阵 P 所需要多乘的 P^{-1} 实际上就是对 **列** 做一次一模一样的操作
同时发现，这样的操作是不会影响我们消成上海森堡矩阵的过程的
至此，我们完成了 **第一步**

递推

记 $p_i(x)$ 为保留 $A[1..i][1..i]$ 时的特征多项式
此时 A 是一个与读入矩阵相似的上海森堡矩阵
首先可以列出初值：
$p_0(x) = \{1\}$
$p_1(x) = \{-A[1][1], 1\}$
这里直接默认列表位置为对应多项式幂次的系数，没有写出来的不存在（即那个幂次系数为 0）
对 $p_2(x) = \det(xI_2 - A_2)$ 直接展开
$p_2(x) = (x - A[2][2])p_1(x) - A[2][1] \times A[1][2]p_0(x)$
对 $p_3(x)$ 、甚至是 $p_4(x)$ 展开，计算，归纳之后
发现可以写成递推式：

$$p_i(x) = (x - A[i][i])p_{i-1}(x) - \sum_{m=1}^{i-1} A[i-m][i](\prod_{j=i-m+1}^{i} A[j][j-1])p_{i-m-1}(x)$$

这个算法的名字就是“海森堡算法”
至此，我们完成了 **第二步**

时间复杂度

高斯消元的复杂度 $O(n^3)$
海森堡算法递推的复杂度是 $O(n^3)$
最后的答案即为 $p_n(x)$
综上，时间复杂度是 $O(n^3)$
达到了我们的目标

回到题目，我们把$\det(A + xB)$式子对B消元，变成$\det(xI - A')$就变成了求特征多项式了

7. agc060_f

给定一个 n $(2 \le n \le 400)$，对于所有 $1 \le i \le j \le n$ 给定 $C_{i,j}$。$(1 \le C_{i,j} \le 10^4)$

现在有一张 $\sum C_{i,j}$ 个点的简单无向图，其中标号为 (i, j) 的点有 $C_{i,j}$ 个。这张图满足对于任意两点 (l_1, r_1) 和 (l_2, r_2) 之间直接相连当且仅当区间 $[l_1, r_1]$ 和 $[l_2, r_2]$ 之间有公共交点。

请你求出这张图的生成树的个数，并对 998244353 取模。

【解答】

记总点数 $S = \sum_{i,j} C_{i,j}$。
设 $S \times S$ 的对角矩阵 A 和 矩阵 B。其中 $A_{i,i}$ 表示与第 i 个点连边的数量（认为每个点会向自己连自环）； $B_{i,j}$ 表示第 i 个点与第 j 个点是否连边。
那么由 Matrix-Tree 定理，答案即 $(A - B)$ 的 $n - 1$ 阶主子式。
然而 B 矩阵难以刻画。
引理：对于 $n \times n$ 的矩阵 A 及 $f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n$。

$$\begin{vmatrix} x & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ f_1 & A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ f_2 & A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} A_{1,1} - f_1g_1/x & A_{1,2} - f_1g_2/x & \cdots & A_{1,n} - f_1g_n/x \\ A_{2,1} - f_2g_1/x & A_{2,2} - f_2g_2/x & \cdots & A_{2,n} - f_2g_n/x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} - f_ng_1/x & A_{n,2} - f_ng_2/x & \cdots & A_{n,n} - f_ng_n/x \end{vmatrix}$$

证明：用第一行向下消元即可。
推论：对于 $n \times n$ 的矩阵 A 及 $1 \times n$ 行向量 $F_1, \cdots, F_n$ 和 $n \times 1$ 列向量 $G_1, \cdots, G_n$。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & G_1 & G_2 & \cdots & G_n \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & & & & \\ & & F_1 & & A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ & & F_2 & & A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & F_n & & A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{1,1}-F_1G_1 & A_{1,2}-F_1G_2 & \cdots & A_{1,n}-F_1G_n \\ A_{2,1}-F_2G_1 & A_{2,2}-F_2G_2 & \cdots & A_{2,n}-F_2G_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1}-F_nG_1 & A_{n,2}-F_nG_2 & \cdots & A_{n,n}-F_nG_n \end{vmatrix}$$

考虑用点乘刻画两个点 x, y 代表的区间 $[a, b]$，$[c, d]$ 是否相交，其等于 相交的点数 $-$ 相交的边数。

于是设 $1 \times (2n-1)$ 行向量 F_x 和 $(2n-1) \times 1$ 列向量 G_x，满足:

- $F_{x,2i-1} = G_{x,2i-1} = [a \le i \le b], i \in [1, n]$
- $F_{x,2i} = [a \le i < i+1 \le b], i \in [1, n)$
- $G_{x,2i} = -[a \le i < i+1 \le b], i \in [1, n)$

即向量每一位代表一个点或一条边。于是 $B_{i,j} = F_iG_j$。

那么代入引理，所求即:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & G_1 & G_2 & \cdots & G_{S-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & & & & \\ & & F_1 & & A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ & & F_2 & & 0 & A_{2,2} & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & F_{S-1} & & 0 & 0 & \cdots & A_{S-1,S-1} \end{vmatrix}$$

倒过来从右下角应用引理，最后消成左上角的 $(2n-1) \times (2n-1)$ 的矩阵。那么相当于每个 $F_{x,i}$ 与 $G_{x,j}$ 会对左上角第 i 列 j 行有 $-F_{x,i}G_{x,j}/A_{x,x}$ 的贡献，最后答案再乘上 $\prod_x A_{x,x}$。

最后的矩阵每一项都容易用二维前后缀和算出，高斯消元求行列式即可。

总时间复杂度 $O(n^3)$。

prufer序列

1. CF156D

   给定一个 n 个点 m 条边的带标号无向图，它有 k 个连通块，求添加 $k-1$ 条边使得整个图连通的方案数，答案对 p 取模。

   $n, m \le 10^5$

   【解答】

   设 s_i 为第 i 个连通块的点数，d_i 为第 i 个连通块的度数。

   对于给定的 d 序列构造 Prufer 序列的方案数为:

   $$\binom{k-2}{d_1-1, d_2-1, \cdots, d_k-1} = \frac{(k-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_k-1)!}$$

   对于给定的 d 序列使图连通的方案数为:

$$\binom{k-2}{d_1-1, d_2-1, \cdots, d_k-1} \cdot \prod_{i=1}^{k} {s_i}^{d_i}$$

枚举 d 序列使图连通的方案数为：

$$\sum_{d_i \ge 1, \sum_{i=1}^{k} d_i = 2k-2} \binom{k-2}{d_1-1, d_2-1, \cdots, d_k-1} \cdot \prod_{i=1}^{k} {s_i}^{d_i}$$

设 $e_i = d_i - 1$：

$$\sum_{e_i \ge 0, \sum_{i=1}^{k} e_i = k-2} \binom{k-2}{e_1, e_2, \cdots, e_k} \cdot \prod_{i=1}^{k} {s_i}^{e_i+1}$$

考虑多元二项式定理：

$$(x_1 + \cdots + x_m)^p = \sum_{c_i \ge 0, \sum_{i=1}^{m} c_i = p} \binom{p}{c_1, c_2, \cdots, c_m} \cdot \prod_{i=1}^{m} {x_i}^{c_i}$$

原式变为：

$$(s_1 + s_2 + \cdots + s_k)^{k-2} \cdot \prod_{i=1}^{k} s_i$$

即：

$$n^{k-2} \cdot \prod_{i=1}^{k} s_i$$

2. CF917D

   给定一棵有n个节点的无权无向树

   求对于这n个点，以及每个k=0,1,2...n-1，有多少棵由这n个点之间的边构造成的树，与给定的树恰好有k条边重复

   $n \le 100$

   【解答】

   记问题的答案为 f_x，发现 f 很难求，考虑转化。
   考虑容斥：设 g_x 表示包含给定树中 x 条边的树的数量（不要求其它 $n-1-x$ 条边不被包含；对于不同的 x 条边，同一棵树可能被计算多次），则有：
   $f_x = \sum_{i=x}^{n-1} (-1)^{i-x} \binom{i}{x} g_i$
   因此可以在 $O(n^2)$ 的时间里用 g 求得 f，接下来考虑如何求 g。

   根据上题的结论：
   若 n 个点的无向图中有 k 个连通块，且其中第 i 个连通块大小为 s_i，则把这 k 个连通块用 $k-1$ 条边连通起来的方案数为 $\prod s_i \cdot n^{k-2}$。

   包含给定树中 x 条边等价于有 $n-x$ 个连通块，因此我们只需对每个 x 计算出所有情况的 $\prod s_i$ 之和，并乘上 n^{n-x-2} 即可。
   考虑**树形背包 DP**，设 $f_{u,i,j}$ 表示：考虑以 u 为根的子树，将其分成 i 个连通块，且 u 所在连通块大小为 j 的所有情况的 $\prod s_i$ 之和（还未乘上 j）。不难想到转移：
   $f_{u,x,a} \cdot f_{v,y,b} \cdot b \to f'_{u,x+y,a}$
   $f_{u,x,a} \cdot f_{v,y,b} \to f'_{u,x+y-1,a+b}$
   其中 f' 表示更新后的 f，v 是 u 的儿子。（后文表示相同含义）
   说明：第一行表示不合并，第二行表示将 v 所在连通块与 u 所在连通块合并。

树上背包是 $O(n^2)$ 的（因为任意两个点只会在它们的 LCA 处合并恰好一次），算上额外的一维是 $O(n^3)$ 的，可以继续优化。

有一个经典的 Trick：**各部分数量之积等于在每一部分选一个元素的方案数。**
因此把第三维改为是否已选过：设 $f_{u,i,k}$ 表示，考虑以 u 为根的子树，将其分成 i 个连通块，且未/已选择好 u 所在连通块的点（$k=0/1$）。类似地可得转移：
$f_{u,x,0} \cdot f_{v,y,1} \to f'_{u,x+y,0}$
$f_{u,x,1} \cdot f_{v,y,1} \to f'_{u,x+y,1}$
$f_{u,x,0} \cdot f_{v,y,0} \to f'_{u,x+y-1,0}$
$f_{u,x,1} \cdot f_{v,y,0} + f_{u,x,0} \cdot f_{v,y,1} \to f'_{u,x+y-1,1}$
说明:

- 前两行表示不合并。
  1. v 所在连通块必须已选点。
  2. u 所在连通块是否选点与 v 无关。
- 后两行表示将 v 所在连通块与 u 所在连通块合并。
  1. 若合并前两个连通块都未选点，则合并后未选点。
  2. 若合并前恰有一个连通块已选点，则合并后已选点。
- 注意两个连通块不能都选点。

初始时 $f_{u,1,0} = f_{u,1,1} = 1$。
总时空复杂度为 $O(n^2)$。

3. arc106_f

有 N 个点，每个点有 d_i 个孔，每次可以选择两个不同点，连接两个未被连接过的孔，有多少中方案使得最后形成一棵树。

$2 \le N \le 2 \times 10^5, 1 \le d_i < 998244353$

【解答】

首先，根据 Prufer 序列的结论，我们枚举每个点的度数 d_i，对应的生成树应该有 $\frac{(n-2)!}{\prod(d_i-1)!}$ 个，而对于每个点，把边连到孔上的方案数有 $a_i^{\underline{d_i}} = \frac{a_i!}{(a_i-d_i)!}$ 种，那么我们得到答案的表达式：

$$\begin{aligned}\text{Answer} &= \sum_{\sum d_i = 2n-2} \frac{(n-2)!}{\prod(d_i-1)!} \times \prod \frac{a_i!}{(a_i-d_i)!} \\ &= \sum_{\sum d_i = 2n-2} \frac{(n-2)!}{\prod(d_i-1)!} \times \frac{\prod a_i!}{\prod(a_i-d_i)!}\end{aligned}$$

注意到分子非常有潜力写成组合数的形式，于是稍作变形得到：

$$\begin{aligned}\text{Answer} &= \sum_{\sum d_i = 2n-2} \frac{(n-2)!}{\prod(d_i-1)!} \times \frac{\prod a_i!}{\prod(a_i-d_i)!} \\ &= (n-2)! \times \frac{\prod a_i!}{\prod(a_i-1)!} \times \sum_{\sum d_i = 2n-2} \prod \frac{(a_i-1)!}{(d_i-1)!(a_i-d_i)!} \\ &= (n-2)! \times \prod a_i \times \sum_{\sum d_i = 2n-2} \prod \binom{a_i-1}{d_i-1}\end{aligned}$$

注意到 $d_i - 1 \in [0, a_i - 1]$，因此最后那个求和号里的东西可以看成一个多元范德蒙德卷积，记 $\sum a_i = S$，那么得到:

$$
\begin{aligned}
\text{Answer} &= (n-2)! \times \prod a_i \times \sum_{\sum d_i = 2n-2} \prod \binom{a_i - 1}{d_i - 1} \\
&= (n-2)! \times \prod a_i \times \binom{S-n}{n-2} \\
&= \prod a_i \times (S-n)^{\underline{n-2}}
\end{aligned}
$$

判断 $S \geq 2n-2$ 后暴力计算即可。
时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$。

4. P9536

众所周知，一棵 n 个点的有标号无根树与他的 Prüfer 序列一一对应。如果你不知道 Prüfer 序列指的是什么，可以参考下面提示说明中对 Prüfer 序列的解释。

现在给你一个长度为 m 的正整数序列 a，其中 $a_i \in [1, n]$。等概率随机选择这个序列的一个长度为 $n-2$ 的子序列（只要选择下标不同就认为两个子序列不同）作为 Prüfer 序列构造得到一棵树 T，对于所有 $1 \leq i < n$，你需要求出 $\operatorname{dist}(i, n)$ 的期望（$\operatorname{dist}(u, v)$ 定义为 u, v 两点简单路径的边数）。

答案对 $10^9 + 7$ 取模。

数据范围看原题，比较复杂

【解答】

考虑 Prüfer 序列构造树的过程，从前往后扫过整个序列，记录当前度数为 1 的点集 S，以及已经被删除的点集 T，每次如果遇到数 $x \notin (S \cup T)$，那么就将 S 中最小值连上 x，然后删除 S 中的最小值将其加入 T，而 x 则可能可以加入 S 也可能不加入 S，序列扫完后必然 $|S| = 1, |T| = n-2$，这时 S 中唯一的数就会连上 n。
于是可以如此 dp，设 $f(i, j, S, T)$ 表示考虑 $i \sim m$ 这个序列中的子序列为最后一段，S, T 为上面描述的两个点集，其中 j 与 n 距离的总和以及方案数。按照上面转移 $O(1)$，且 $S \cap T = \varnothing$，所以复杂度为 $O(3^n nm)$。
考虑 Prüfer 序列具体构造过程是如何从 $O(n \log n)$ 优化到 $O(n)$ 的，类似的，优化掉 3^n，用一个集合 $L = S \cup T$，那么实际上 S 就是 L 的一个后缀加上最多前面一个新加的点，所以可以将 3^n 优化到 $2^n n^2$，时间复杂度复杂度优化为 $O(2^n n^3 m)$。
但是我们发现如果当且 dp 要求的是 j 与 n 的距离，那么我们唯一关心的就是 j 连出去的父亲，所以如果新加的点如果不是 j 那么我们其实完全不关心它具体是谁，于是一个 n 可以被优化为一个 01 储存的状态，即 S 中当前最小的点是否恰好为 j，于是时间复杂度优化为 $O(2^n n^2 m)$，可以通过所有数据。