水题选讲

彭博

北京大学

2024.2

CF1924E Paper Cutting Again

有一个 $n \times m$ 的网格，你每次会在 $n+m-2$ 条线里随机选一条切开，只保留左边/下面那块。切到面积小于 K 时结束。

求期望会切几次。

$n, m \le 10^6$

CF1924E Paper Cutting Again

根据期望的线性性，对于每个没有结束的状态，把到达它的概率加起来，就是答案。

给每行每列随机一个 $[0,1]$ 的实数权值，每次从剩下的行列里选权值最小的切开，效果和题意是等价的。

那么能到达某个 (x,y) 当且仅当 x, y 的权值比所有 $i < x$ 和 $j < y$ 的权值都小。

这个概率是容易算的（转化成排列），求和也是容易的。

ARC168E Subsegments with Large Sums

给定一个长度为 n 的正整数序列 a ，你需要把它划分成 K 个非空段，最大化子段和大于等于 S 的段的数量。

$n \leq 2.5 \times 10^5, a_i \leq 10^9$

共有三个维度：从左往右做到第几个数字、分出了几个段、分数是多少。

无论在哪一维 dp 都需要维护另外两个维度，复杂度就 n^2 了。出路只能是发现某个凸性，从而用维护凸函数或直接 wqs 二分的方式解决掉一维。

稍微转化一下，可以把问题变成：给定一些区间，选出尽可能多的两两不交的区间，使得 $\sum(len-1) \le n-K$ 。

ARC168E Subsegments with Large Sums

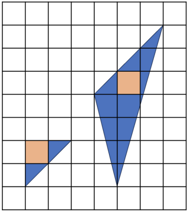
然后盲猜 $\sum(len-1)$ 关于区间个数是凸的。

证明凸性一般有三种方法：直接证明（比如归纳法）、建模成费用流、打表盲猜。

这里的证明方式是用 p 段和 $p+2$ 段的方案凑出两个 $p+1$ 段的方案，因此 $2s_{p+1} \le s_p + s_{p+2}$ 。

ARC167E One Square in a Triangle

给定正整数 S ，你需要构造一个三个点坐标都是整数的三角形，使得其面积为 $S/2$ ，且内部（包括顶点和边）包含恰好 1 个完整的正方形格子。



$1 \le S \le 10^8$

ARC167E One Square in a Triangle

不妨假设原点是三角形顶点之一。设三角形的一个点是 (a, b) 。

根据点到直线的距离公式，如果另一个点是 (x, y) ，三角形的面积就是 $|ax - by|/2$ 。

令 $ax - by = 1$ ，此时 (x, y) 处在最接近直线的整点上，取到面积 $1/2$ ，但三角形内一个正方形也没有。

不妨就选离 (x, y) 最近的正方形，令 $x' = x + 1, y' = y - 1$ ，则 $(0, 0), (a, b), (x', y')$ 的面积是 $(1 + a + b)/2$ 。简单分析一下发现三角形内确实只有唯一一个正方形。

$ax - by = 1$ 有解当且仅当 $\gcd(a, b) = 1$ 。枚举一下就行。

给定一棵 n 个点的树，第 i 个点的权值是 a_i 。

有两种操作，每次给一条链上的每个点权值加 w ，或者给一个子树的每个点权值加 w 。

每次操作之后求出此时的带权重心。如果有多个选择深度最小的。

$n, Q \leq 10^5$

考虑 dfs 序上的带权中点。

由于带权重心的子树内必然有一半以上的权值，所以带权重心的子树必然包含带权中点。

那就直接从带权中点倍增往上跳即可。

Ptz Winter 2020 Day6E The Destruction of the Crystals

有一个 $n \times m$ 的网格，上面有 k 个宝石，b 个炸弹。

一个炸弹可以横着爆或者竖着爆，并炸掉一行/一列的宝石，并引爆一行/一列的其他炸弹。

你可以选择每个炸弹的爆炸方向，然后引爆一个炸弹。问链式反应结束时至多能炸掉几个宝石。

$n, m \leq 3000$

可能有很多种想到最终解法的思路，这里直接给出解法。

注意到一个炸弹如果不是被第一步引爆的，那么只要它的爆炸方向与引爆它的方向不同，就可以把它所在的行和列的宝石都炸掉。只有第一步比较尴尬。

对于每个炸弹，把它所在的行和列连边。这样会得到一个 $n+m$ 个点的图。

考虑每个连通块。如果这个连通块有环，不难发现只要在环上任意引爆一条边，就可以把整个连通块都炸掉。

否则，连通块里必然会有一行或一列是炸不到的，因为每条边只能炸掉一个点。不难发现最优解一定是引爆一条连着叶子的边，使得除了叶子以外都被炸掉。

定义一个序列的权值是最少的交换相邻元素的次数，使得序列单峰，即 $a_1 < \cdots < a_k > \cdots > a_n$ 或 $a_1 > \cdot > a_k < \cdots < a_n$ 。

给定一个长度为 n 的排列 a ，你需要求出每个前缀的权值。

$n \le 2 \times 10^5$

对两种情况分别做。考虑 $a_1 < \cdots < a_k > \cdots > a_n$ 怎么做。

注意到最小值的最终位置一定在 a_1 或 a_n 。设其初始位置为 p ，则它贡献的逆序对数就是 $p-1$ 或 $n-p$ ，贪心选较小那个即可。

相当于是先把最小值移动到目标位置，然后就可以不管它了。

因此每个数对答案的贡献就是左边比它大的数量和右边比它大的数量的较小值。

注意到在尾部加数只会使得右边比它大的数量变多，因此这东西很好维护。

CF1889E Doremy's Swapping Trees

给定两棵 n 个点的树 T_1, T_2 。

你每次可以选一个点集 S ，满足 S 在 T_1 的导出子图的连通性与在 T_2 的导出子图的连通性相同，然后交换两个子图的边。两个图的连通性相同当且仅当任意两个点 x, y 要么同时连通，要么同时不连通。不难发现交换之后 T_1', T_2' 仍然是两棵树。

求出你可以造出多少种本质不同的 T_1 。

$\sum n \leq 2 \times 10^5$

简单分析一下，发现如果 S_1, S_2 在两棵树的导出子图都是连通的，那么 $S_1 \cap S_2$ 也是连通的。

在这个基础上，如果 S_1, S_2 现在都可以操作，那么 $S_1 \cap S_2$ 现在也一定可以操作，不管 S_1, S_2 是否连通。

也就是说，对于一个固定的状态，所有可操作的点集对于 $\cap$ 是封闭的。

那么一定存在一对极小的边集 (E_1, E_2)，使得它们连通且可交换，而其他可交换的边集要么与它无交，要么是它的超集。之所以换成边集是因为点集求交和边集求交是等价的，而这题本质上还是在对边进行操作。

可以发现这对边集与外界是独立的，它永远可交换，而其他可交换的边集永远与它无交或是它的超集。因此可以把它缩在一起，把答案乘二。

不断缩极小边集，直到只剩一个点，答案就是缩的次数个 2 相乘。

考虑怎么找极小边集。建图，$e_1 \to e_2$ 表示在 T_1 的一个包含 e_1 的边集必须对应一个在 T_2 的包含 e_2 的边集，然后缩点，那么一个出度为 0 的强连通块就是一个极小边集。

此时已经非常清晰了：答案就是 2 的强连通块个数次方。

给定 n 个两两不同的球，第 i 个球上写了数字 a_i 。你要把它们放进 k 个两两不同的盒子里，使得每个盒子非空。最大化每个盒子的 AND 之和，并计算有多少种最大化的方案。

$n, k \leq 10^5, a_i \leq 10^9$

感性理解一下，把大数字单独放在一个盒子里，好像总不是太亏。

假设所有数字里最高位是 2^b ，且只有不超过 $k-1$ 个数字有 2^b 。可以发现把它们每个单独放一个盒子一定是严格最优解：假设 x_1, y 一个盒子，x_2 一个盒子，且 $x_1, x_2 < 2^b \le y$ 。由于 $x_1 + x_2 = x_1$ OR $x_2 + x_1$ AND x_2 ，把 x_1, x_2 放一起只会亏掉 x_1 OR x_2 ，严格小于 y 。其他情况也可以用类似方式证明。

而如果超过 $k-1$ 个数字有 2^b ，同样可以证明 $< 2^b$ 的数字必然处于同一个盒子内。此时直接把它们合并成一个数字，那么无论怎么分配都会有 $k-1$ 个盒子能贡献 2^b ，于是 b 这一位就可以删掉了。

2nd ucup stage 12 A SQRT Problem

给定正整数 n, a, b ，你需要求出 $1 \le x < n$ 使得 $x^2 = a \pmod{n}$ 且 $\lfloor \sqrt[3]{x^2} \rfloor = b$ 。

保证 $\gcd(a, n) = 1$ ，n 是奇数，解唯一。

$n \le 10^{100} - 1, a, b \le n - 1$

因为 n 可能不是质数，a 的平方根会很难描述，也不太求的出来。
因此考虑转而描述 x^2 。令 $y = x^2$ ，则两个限制分别是 $y = kn + a$ 和 $b^3 \le y < (b+1)^3$ ，最后还需要 y 是平方数。
平方数同样不好描述。但是注意到 y 的区间被限制的很死，令 $t = b^{3/2}$ ，则 $y = (t+\Delta)^2$ ，其中 $0 \le \Delta < (b+1)^{3/2} - b^{3/2}$ 。
简单计算一下，$(b+1)^{3/2} - b^{3/2}$ 是 $\sqrt{b}$ 级别，远小于 t 。于是 $(t+\Delta)^2$ 可以近似为 $t^2 + 2t\Delta$ ，是关于 Δ 的一次函数。

2nd ucup stage 12 A SQRT Problem

于是只需要求出所有 $t^2+2t\Delta$ 和 $kn+a$ 的近似交点即可。近似指的是它们相差不超过 $\Delta^2=O(b)$ 。注意 $b=O(n^{2/3})$ ，所以近似交点是非平凡的。

盲猜一手近似交点不会太多：毛估估一下，如果把 $t^2+2t\Delta$ 看做是随机数，那么相差不超过 b 的概率是 $O(n^{-1/3})$ ，刚好 Δ 也只有 $O(n^{1/3})$ 个，所以可以猜交点只有 $O(1)$ 个。证明不会。

交点可以任意选择你最喜欢的欧几里得算法做。

Ptz Summer 2022 Day2H Grammy Sorting

给定一个 n 个点 m 条边的简单无向图，每个点上写了一个数字 p_i ，其中 p 是一个排列。

给定 A 和 B ，你希望把点上的数字进行重排，使得对于每个点 x 都存在一条从 A 到 B 的经过 x 的路径，且路径上的点权递增。

但你只能对 p 进行如下操作：选择一条从 A 出发的简单路径 $A = x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$ ，同时令 $p_{x_i} \leftarrow p_{x_{i+1} \bmod k}$ 。

你可以操作至多 10000 次。构造方案或判断无解。

Hint: 你可以认为题目额外给出了一个定向，使得 A 可以到达任意点，任意点可以到达 B 。

$n \leq 1000, m \leq 2000$

显然存在一个定向是有解的必要条件。尝试根据一个定向来构造出解。

但是直接做并不好做，先考虑一些简单情况，比如一条从 1 到 n 的链，那么就是要用若干次操作做排序。

可以把一次操作看做是把 p_1 丢到任意位置，于是不难想到插入排序，只需要 n 次操作就可以解决。

然后可以考虑一棵树，但每个叶子都与 A 相连。发现类似插入排序的操作仍然适用，只需要不断往根移动，直到找到第一个比自己大的数即可。只有最后一步需要注意，要把最小的叶子换到 A ，而不能是任意一个叶子。

Ptz Summer 2022 Day2H Grammy Sorting

最后考虑 DAG 。仍然用插入排序的方式，维护一组已经解决的点，每次把 A 的权值插进去。

往哪插呢？为了防止已经解决的点权又被弄乱的情况，我们可以让解决的点是拓扑序的一个后缀。那么这一次就要解决最靠后的还没被解决的点。

从这个点开始插入排序。但一个点会有多个后继，该往哪边走呢？如果随便走，可能出现的问题是虽然每个点都能递增地走到 B ，但 A 未必能递增地走到每个点。

解决方案是在插入排序的过程中要往权值最小的父亲走，就像树的情况的最后一步一样。

简单归纳一下发现这样就可以保证每个点都有前驱和后继，就做完了。

Bonus: 怎样求出一个定向？