NOIP 模拟赛

PYWBKTDA

中国象棋（chess）

算法

根据题意模拟，期望得分 100

树（tree）

算法 1

定义 $f_{S,i}$ 表示当前位于 i 且 S 中的点均消失的答案，转移即

$$f_{S,i} = \max\{a_i, \max_{(i,j)\in E} \min_{x\notin S\cup\{j\}} f_{S\cup\{x\},j}\}$$

时间复杂度为 $O(n^2 2^n)$，期望得分 10

算法 2

每次消失的节点一定与所在节点相邻，因为这样相当于对应的连通块内所有点均消失

当确定起点 i 后，以 i 为根建树，定义 f_i 表示 i 子树内的答案，则 f_i 即为 a_i 与所有儿子中次大值的 max，时间复杂度为 $O(n^2)$，期望得分 40

算法 3

i 处的答案即相邻三项的 max，（结合算法 2）期望得分 50

算法 4

基于 $a_i \in \{1,2\}$ 性质的算法，（结合算法 2,3）期望得分 70

算法 5

任选一点为根建树，并在维护子树内的基础上维护子树外

具体的，定义 g_i 表示以 i 为根时 i 子树外所对应的子树的 DP 值，则 g_i 即 a_{fa_i} 和 g_{fa_i} 及 fa_i 除 i 以外所有儿子中次大值的 max

时间复杂度为 $O(n)$，期望得分 100

操作序列（permutation）

算法 1

用线段树区间覆盖优化过程，时间复杂度为 $O(mq\log n)$，期望得分 20

算法 2

分块或多个 log 的算法，期望得分 50

算法 3

每个 3 操作的答案仅取决于询问区间是否包含上一次覆盖其的 2 操作，可以 $O(m\log n)$ 预处理出该操作

从小到大枚举左端点，每次即将 3 操作的答案置为 0 或区间求和，可以用树状数组维护

时间复杂度为 $O(m\log n + q\log m)$，（结合算法 2）期望得分 70

算法 4

虽然有交换操作，但 3 操作的结果仍然仅取决于上一次覆盖其的 2 操作，只是这个覆盖可以是交换后覆盖

具体而言，从大到小枚举所有操作，并对每个位置维护其中未确定的 3 操作列表，从而

- 对于 1 操作，即交换两者的列表
- 对于 2 操作，即将确定了 $[l,r]$ 内所有列表的答案，根据均摊可以枚举所有非空列表并暴力枚举列表内的元素，得到覆盖其的 2 操作
- 对于 3 操作，即在对应的列表内加入该操作

之后与算法 3 相同，时间复杂度也为 $O(m\log n+q\log m)$，期望得分 100

集合划分（partition）

算法 1

枚举所有划分方式，时间复杂度为贝尔数，期望得分 10

算法 2

定义 $f_{i,S}$ 表示 $\{T_1, T_2, ..., T_i\} \sqsubseteq S$ 时的答案，转移即

$$f_{i,S} = \sum_{T \subseteq S} f_{i-1,S-T}(1 + \bigoplus_{j \in T} a_j)$$

用子集枚举优化，时间复杂度为 $O(m3^n)$，期望得分 20

算法 3

定义 $A \sqsubset S$ 表示在 $A \sqsubseteq S$ 的基础上 $\forall T \in A, T \neq \emptyset$

由于空集的答案为 1，枚举其中非空集的数量 i，类似的求出 $f_{i,S}$ 表示 $\{T_1, T_2, ..., T_i\} \sqsubset S$ 时的答案，则最终答案即 $\sum_{i=0}^{n} \binom{m}{i} f_{i,S}$

时间复杂度为 $O(n3^n)$，期望得分 40

算法 4

由于 $a_i = 2^i$，从而异或仍可以改为 $+$

将乘法展开，对于 $\prod_{i \in S} a_i$，其系数即

$$\binom{m}{|S|} \sum_{i=0}^{n-|S|} \binom{m}{i} S(n-|S|, i)$$

（其中 $S(n, m)$ 表示第二类斯特林数）

时间复杂度为 $O(n^2)$，（结合算法 3）期望得分 60

算法 5

不妨允许同一组继续拆分，并算出容斥系数

记 $g_S = 1 + \bigoplus_{i \in S} a_i$，构造 h_S 满足

$$g_S = \sum_{A \sqsubset S} \prod_{T \in A} h_T$$

具体的，利用 S 处的方程可解得

$$h_S = g_S - \sum_{\text{lowbit(S)} \in T \subset S} h_T g_{S-T}$$

代入原式，答案即

$$\begin{aligned} & \sum_{\{S_1,S_2,\dots,S_m\} \sqsubseteq [1,n]} \prod_{i=1}^{m} g_{S_i} \\ = \ & \sum_{\{S_1,S_2,\dots,S_m\} \sqsubseteq [1,n]} \prod_{i=1}^{m} \sum_{A_i \sqsubset S_i} \prod_{T \in A_i} h_T \\ = \ & \sum_{A \sqsubset [1,n]} \prod_{T \in A} h_T \sum_{\{A_1,A_2,\dots,A_m\} \sqsubseteq A} 1 \\ = \ & \sum_{A \sqsubset [1,n]} m^{|A|} \prod_{T \in A} h_T \end{aligned}$$

换言之，记 f_S 为集合 S 的答案，转移即

$$f_S = \sum_{\text{lowbit(S)} \in T \subseteq S} m h_T f_{S-T}$$

时间复杂度为 $O(3^n)$，期望得分 100