数学知识基础

概率论基础

离散型随机变量以及其对应的知识我们之前都已经学过了，这边主要补充一些连续性随机变量相关的概念和知识。

分布函数

对于随机变量X，称函数$F(x)=P(X\le x)$为随机变量X的分布函数。记作$X\sim F(x)$。

分布函数具有以下性质：

1. 单调性：在R上单调递增（非严格）
2. $F(-\infty)=0.F(+\infty)=1$

密度函数

对于离散型随机变量，我们一般可以用$P\{X=x_i\}=p_i$来描述随机变量值为x_i的概率。

但是对于连续型随机变量X，这样的描述方法显然不太科学了。我们一般用极限，也就是下面的式子：

$f(x)=\lim_{\triangle x\to 0^+}\frac{F(x+\triangle x)-F(x)}{\triangle x}$

来描述X取值为x的可能性，这个$f(x)$被称为X的密度函数。并且我们显然也有：

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$

比如，如果X是一个在$[0,1]$范围内等概率取值的随机变量，那么$f(x)=1,x\in[0,1]$

连续型随机变量的期望

$EX=\int_{\mathbb{R}}xf(x)dx$

一个小问题

1. 有n个$[0,1]$之间的随机变量$x_1,x_2,\ldots,x_n$，求第i小的那个的期望值

   【解答】

   第一种方法：积分

   首先列出式子：

   $n\cdot\binom{n-1}{i-1}\int_0^1 x\cdot x^{i-1}\cdot(1-x)^{n-i}dx$

   就是选出第i个数，钦定小于等于它的$i-1$个数。

   这个积分不是很好积，用分部积分法：$\int_a^b uv'dx=uv|_a^b-\int_a^b vu'dx$

   在上面令$u=(1-x)^{n-i},v'=x^i$有：

   $原式=\int_0^1(n-i)(1-x)^{n-i-1}\frac{1}{i+1}x^{i+1}dx=\frac{n-i}{i+1}\int_0^1 x^{i+1}(1-x)^{n-i-1}dx$

   令$a_i=\int_0^1 x^i(1-x)^{n-i}dx$就有$a_i=\frac{n-i}{i+1}a_{i+1}$边界好搞

   求出$a_i=\frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}$

   所以期望为$\frac{i}{n+1}$

   第二种方法：组合意义

引入第$n+1$个随机变量，那么我们可以认为第i小的变量的期望等于第$n+1$个变量小于等于第i小的变量的概率。

所以我们求概率即可。统计方案数，这$n+1$个变量的大小关系一共有$(n+1)!$种，而第$n+1$个变量小于等于第i个变量的方案有$i\times n!$种，所以概率为$\frac{i}{n+1}$

第三种方法：Γ函数与B函数

不展开