Chapter 1. 向量空间

线性代数起源于对平面和立体直角坐标系的研究, 其中向量是既有大小又有方向的量, 由 2 个或 3 个实数构成的元组表示, 可以进行加法和数乘运算, 此即为我们熟知的欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$. 考虑进行推广, 不局限于几何中的点与向量, 也不局限于只能以实数作为标量, 定义更一般的向量空间的概念.

域 F 上的**向量空间**, 是指集合 V 配备**加法** $+ : V \times V \to V$ 和**数乘** $\cdot : F \times V \to V$ 运算, 以及一个特殊的**零元** $0 \in V$, 使得以下条件成立.

- 加法满足以下条件:
  - **结合律**: $(u+v)+w = u+(v+w)$;
  - **幺元性质**: $v+0 = v = 0+v$;
  - **交换律**: $u+v = v+u$;
  - **加法逆元**: $v+(-v) = 0$.
- 数乘满足以下条件:
  - **结合律**: $s \cdot (t \cdot v) = (st) \cdot v$;
  - **幺元性质**: $1 \cdot v = v$.
- 纯量乘法对加法满足 2 个**分配律**:
  - $(s+t) \cdot v = s \cdot v + t \cdot v$;
  - $s \cdot (u+v) = s \cdot u + s \cdot v$.

设 V 为 F-向量空间, 若子集 W 包含 0, 且在加法和数乘运算下封闭, 则在同样的运算下 W 也构成 F-向量空间, 称为 V 的**子空间**. 包含子集 S 的最小子空间称为 S 张成的子空间, 记作 $\langle S \rangle$.

对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 按以下方式赋予 F^n 向量空间的结构:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$t \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (tx_1, \ldots, tx_n)$$

OI 中研究的向量空间通常是 F^n 及其子空间, 特别地 $F = \mathbb{F}_p$ 为模 p 算术.

F-向量空间 V 的极大线性无关子集称为**基**, 基的大小称为**维数** $\dim V$, 每个元素都可以唯一表为基的线性组合, 基可以用 Gauss-Jordan 消元法计算.

向量空间 F^n 上可以定义**标准内积** $(x|y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, 若 $(x|y) = 0$ 则称 x 与 y **正交**. 对于子集 S 定义**正交补** $S^{\perp} := \{v \in F^n : \forall s \in S, (s|v) = 0\}$, 容易验证 $S^{\perp} = \langle S \rangle^{\perp}$ 是子空间.

维数公式. 设 V 是 F^n 的子空间, 则 $\dim V + \dim V^{\perp} = n$.

> 此即为秩-零化度定理, 值得注意的是 $V^{\perp}$ 的一组基可由 V 的基直接构造.

由定义容易验证 $\langle S \rangle \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$, 而由维数公式知 $\langle S \rangle = (S^{\perp})^{\perp}$.

> 注意对于一般的域 F 并无正定性可言, 也就没有正交化与直和性质, 这比通常的内积空间更加复杂. 有兴趣的同学可以参考 T. Y. Lam 的教材 *Introduction to Quadratic Forms over Fields*.

CF1672G, CF1336E2, UOJ72 是一些 $\mathbb{F}_2$-向量空间相关的问题. (选做)

Chapter 2. 行列式

设 V 为 n 维 F-向量空间, $m \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$, 称 $D : V^m \to F$ 为 V 上的 m 元**交错形式**, 是指满足以下两个条件:

- **线性性**: 对每个 $i \in [m]$ 有 $D(\dots, tv_i + v_i', \dots) = tD(\dots, v_i, \dots) + D(\dots, v_i', \dots)$;
- **反对称性**: 若存在 $i < j$ 使得 $v_i = v_j$, 则 $D(v_1, \dots, v_m) = 0$.

V 上的全体 m 元交错形式构成一个 F-向量空间, 记作 $\mathcal{D}_{V,m}$. 特别当 $m = n$ 时记作 $\mathcal{D}_V$.

定理. $\dim \mathcal{D}_V = 1$.

对于线性映射 $T \in \mathrm{End}(V)$ 和 $D \in \mathcal{D}_V$, 定义 $T^*D(v_1, \dots, v_n) = D(Tv_1, \dots, Tv_n)$, 容易验证 $T^* \in \mathrm{End}(\mathcal{D}_V)$, 定义 $\det T \in F$ 使得 $T^*D = (\det T) \cdot D$.

定理. $\det(\mathrm{id}_V) = 1$. 对 $S, T \in \mathrm{End}(V)$ 都有 $\det(ST) = \det(S)\det(T)$.

任取 V 的一组有序基 $e_1, \dots, e_n$, 将 T 表为矩阵 $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(F)$, 即得矩阵行列式 $\det A$ 的定义.

对于 $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(F)$, 定义其**经典伴随矩阵** $A^\vee := (A_{ji})_{i,j} \in \mathrm{M}_{n\times n}(F)$, 其中 $A_{ji} := (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称为**代数余子式**.

定理. $AA^\vee = (\det A) \cdot 1_{n\times n} = A^\vee A$.

例题. 设矩阵 $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 为 $a_{ij} = \gcd(i, j)$, 求 $\det(A)$.

LOJ3626, UOJ655, xmascon20_d 是一些矩阵行列式相关的题目, 神秘课件供参考.

特征多项式

设 $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(F)$, 定义 $\mathrm{Char}_A(X) := \det(X \cdot 1_{n\times n} - A) \in F[X]$ 为 A 的**特征多项式**. 容易验证相似的矩阵有相同的特征多项式.

定理. $\mathrm{Char}_A(A) = 0_{n\times n}$.

> 设 $B := (X \cdot 1_{n\times n} - A)^\vee$, 则 $(X \cdot 1_{n\times n} - A)B = \mathrm{Char}_A(X) \cdot 1_{n\times n}$, 对比两边系数.

QOJ59 是计算特征多项式的模板题, 简要题解供参考.

Schwartz-Zippel 方法

Schwartz-Zippel 方法可谓是代数算法的基础, 各种代数算法都运用了这种技巧.

给定 n 元多项式 P, 需要判断 P 是否为 0. 假设直接展开的复杂度难以接受, 但可以计算点值. 考虑随机选取 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}_p$, 计算 $P(x_1, \dots, x_n)$ 是否为 0, 若不是 0 则必有 $P \ne 0$, 否则很可能 $P = 0$, 其错误概率由 Schwartz-Zippel 引理保证.

Schwartz-Zippel 引理. 对于 n 元 d 次多项式 $P \in \mathbb{F}_p[X_1, \dots, X_n]$, 随机选取 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}_p$, 则 $\Pr[P(x_1, \dots, x_n) = 0] \le d/p$.

> 对 n 归纳, 当 $n = 0$ 时无事可作. 不妨设 X_1 在 P 中出现, 且出现的最高次数为 k, 则 $P = X_1^k Q + R$, 其中 Q 不含变元 X_1 且 R 中 X_1 出现的次数 $< k$, 先选取 $x_2, \dots, x_n \in \mathbb{F}_p$,
>
> - 当 $Q(x_2, \dots, x_n) = 0$ 时, 由归纳假设知概率 $\le (d-k)/p$;
> - 当 $Q(x_2, \dots, x_n) \ne 0$ 时, P 可以看作 X_1 的 k 次多项式, 至多有 k 个根.

> 综上所述, $\Pr[P(x_1,\dots,x_n)=0]\le (d-k)/p+k/p=d/p$.

例题. 给定二分图 $G=(V,E)$, 判断是否存在完美匹配.

> 定义 **Tutte 矩阵** $A_G=(a_{ij})_{i,j}\in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F}_p)$ 为
>
> $$a_{ij}=\begin{cases}X_{ij}, & (i,j)\in E,\\ 0, & \text{otherwise}.\end{cases}$$
>
> 所求即为 $\det(A_G)$ 是否为 0, 套用随机代值的方法即可.

GFOJ2513 是一个模板题, ~~笑点解析: NOIP 模拟赛题~~.

例题. 给定一般图 $G=(V,E)$, 判断是否存在完美匹配.

> 定义 **Tutte 矩阵** $A_G=(a_{ij})_{i,j}\in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F}_p)$ 为
>
> $$a_{ij}=\begin{cases}X_{ij}, & (i,j)\in E\land i<j,\\ -X_{ji}, & (i,j)\in E\land i>j,\\ 0, & \text{otherwise}.\end{cases}$$
>
> 所求即为 $\det(A_G)$ 是否为 0, 套用随机代值的方法即可.
> 值得注意的是 A_G 是反对称矩阵, 有兴趣的同学可以学习一下 Pfaff 型相关内容.

Chapter 3. 线性代数与图论

在图论的研究中, 邻接矩阵是一个基础且重要的概念, 从而不可避免地与线性代数扯上关系, 行将介绍的各种计数方法与 OI 的关系较为密切, 然而我不想再写一遍了所以请参考神秘课件.

LOJ3630, QOJ1262, QOJ7648 是一些 LGV 引理的题目. (选做)

参考资料

- 李文威: 《代数学讲义》(未完稿).
- Alistair Sinclair: UCB CS271 RANDOMNESS & COMPUTATION.
- 潘佳奇: 浅谈线性代数与图论的关系, 2021 年信息学奥林匹克中国国家集训队论文.
- 杨家齐: 基于线性代数的一般图匹配, 2017 年信息学奥林匹克中国国家集训队论文.