Za 选博弈论 A

Li Jiayou

Dalian No. 24 High School

January 4, 2024

Notice

默认大家已经会了 nim 游戏，并知道 Grundy value（SG 函数）:)

Description

给定一棵 N 个点的有根树 T。Alice、Bob 轮流删去一条边并保留包含根的连通块，无法操作者负。Alice 先手，求谁有必胜策略。$N \leq 10^5$。

Solution

N 个点的链与一堆 $N-1$ 颗石子的 nim 游戏完全相同。
而如果原树形如许多从根出发的链，则类似多堆石子的 nim 游戏。
这启发我们计算一棵树的 Grundy value。
于是，比较显然地，我们发现，$g(x)=\text{mex}\{g(y) \mid y \in \text{child}(x)\}$。
时间复杂度 $O(n)$。

Description

L 棋是一种双人棋类游戏，在 4×4 的正方形棋盘上进行。
共有两种棋子：

- L 形棋：大小为 4，双方各有一枚；
- 中性棋：大小为 1，共两枚，中立。

任意时刻，棋盘上任意格子应至多被一枚棋子覆盖。
双方轮流操作。一次合法的操作是：先移动己方 L 形棋到任意与当前位置不同的合法位置，再将至多一枚中性棋移到任意合法位置。无法进行合法操作者败。
输入一个局面，若必胜请给出一种移动策略，否则请判断是和棋还是必败。

Solution

不难注意到，局面数只有 10^4 级别，转移也很少。
可以建出有向图，然后从必败态开始搜索即可。若已知一个状态必败，则其前驱状态都必胜。若已知一个状态没有后继必败态，则该状态必败。所有未知状态都是和棋。
「统一省选 2023 Day2 A 过河卒」的解法与本题类似。

Description

交互题。给定 n, l, r。黑板上写有整数 $1 \ldots n$。
你需要先决定先后手，然后你和交互库轮流操作。一次操作中你需要擦去连续的若干正整数（数目介于 $[l, r]$ 中，且所选择的数都未被擦去）。无法操作者负。
$1 \leq n \leq 2 \times 10^3$，$1 \leq l \leq r \leq n$。

Solution

首先，若存在 $k \in [l, r]$ 满足 $k \equiv n \pmod 2$，则可以先划掉中间的 k 个数然后下模仿棋。否则（即 $l = r, l \not\equiv n \pmod 2$），$O(n^2)$ 暴力求出 Grundy value 即可。
题目本身不是很难，但是交互的形式比较新颖，可以玩一玩。

Description

考虑石子堆数目为 2 的 nim 游戏。
额外给定 n 对非负整数 (x_i, y_i)，表示：若某一时刻两堆石子数目分别为 x_i, y_i，则先手立即输掉游戏。
m 次给定一个局面 (a_i, b_i)，求先手必胜还是后手必胜。
$n, m \le 10^5$，$x_i, y_i, a_i, b_i \le 10^9$。

Solution

由于并未涉及到游戏之间的组合，所以我们并不关心具体的 Grundy value，只关心某个状态是必胜还是必败。
可以将一个游戏局面抽象成一个点。记 S 为所有 (x_i, y_i) 构成的集合。首先不难注意到一些性质（证明是非常容易的）：

- 一行中至多有一个非平凡（不属于 S 的）必败态。
- 若一行中存在一个非平凡必败态，则这个状态中石子数比这一行中所有平凡必败态要小。
- 若 $x_0 < x_1$ 且两行都有非平凡必败态，则 $x = x_0$ 时的非平凡必败态的纵坐标比 $x = x_1$ 时的非平凡必败态的纵坐标要小。

依次考虑每行内是否有非平凡必败态。不难发现，所有非平凡必败态形成了 $O(n)$ 段斜率为 1 的直线（即 $(x_0, y_0), (x_0 + 1, y_0 + 1), \dots$）。记录下所有的直线即可。时间复杂度 $O((n + m) \log n)$。

Description

在 nim 游戏中加入「从 x 个石子中一次至多可以取出 $\sqrt[k]{x}$ 个石子」的限制。
现有 $\sum a_i$ 堆石子，大小分别为 $1 \dots a_1, 1 \dots a_2, \dots, 1 \dots a_n$。求先手必胜还是后手必胜。(换句话说，记一堆大小为 x 的石子的 Grundy 为 $g(x)$，你需要多次求出 $g(x)$ 的前缀异或和。)
$1 \le k \le 5$，$n \le 10^5$，$a_i < 2^{60}$。
提示：不难发现，$k = 2$ 时，g 的前几项分别为：

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{matrix}$$

Solution

先特殊处理 $k=1$ 的情况。

注意到 $g_k(x)=\begin{cases}\sqrt[k]{x} & \sqrt[k]{x}\in\mathbb{Z}\\ g_k(x-\lceil\sqrt[k]{x}\rceil) & \sqrt[k]{x}\notin\mathbb{Z}\end{cases}$，这是非常容易证明的。

问题变为快速求此数列的前缀异或和。可以想到设 $g_k(r,d)$ 表示 $g_k(r^k+d)$ $(r^k+d<(r+1)^k)$。这样一来，考虑到 $g_k(r,d)=g_k(r,d \bmod (r+1))$，我们就只关心 $g_k(r,d)$ $(d\le r)$ 了。

我们进一步分析 $g_k(r,d)$ 会递归到 $g_k(r-1,?)$，再将 g_k 的前缀和拆成若干段 $[r^k,(r+1)^k)$ 以及一段 $[r^k,(r+1)^k)$ 的前缀，不难得到 $O(\sum\log a_i)$ 的解法。详见 QOJ 上的官方题解。

Description

有一 $n \cdot m$ 的棋盘，其中每行恰有一枚棋子，第 i 行的棋子在第 c_i 列。
Alice 和 Bob 进行了 q 局独立的游戏。首先，他们会删掉第 l 列左侧与第 r 列右侧的部分。然后，他们会在剩余部分轮流进行如下操作：选择一枚棋子，并将其向左移动任意正整数格，不过不能超出第 l 列。Alice 先手，无法操作者负，求胜者。
$n, m, q \leq 2 \times 10^5$。

Solution

根据简单的 nim 游戏相关知识，记 $a_i = (\sum_j [c_j = i]) \bmod 2$，则我们只需要求出 $\bigoplus_{i=l}^{r} a_i(i-l)$。
很自然地考虑拆位。假设当前考虑 2^b 位，则记 $f_i = \bigoplus_{j=0}^{n-i} a_{i+j}[b \in j]$。$f_i$ 是容易求出的，而 $\bigoplus_{i=l}^{r} a_i(i-l)$ 可以通过 $O(1)$ 个 f_i 和 $O(1)$ 个区间异或和来解决。
时间复杂度 $O(n + (m+q)\log m)$。

Description

有一个游戏。初始时有一个序列 $s_{1\ldots n}$。双方轮流操作，每次将 s 重排为一个未出现过的序列或从 s 中删去一个位置，无法操作者负。

给定 n, k, p。求有多少长为 n 的序列 s 满足：$1 \le s_i \le k$，且若以 s 为初始序列进行上述游戏，先手必胜。答案对 p 取模。

$n \le 2.5 \times 10^5$，$k \le 26$，p is prime，$\mathrm{TL} = 3\mathrm{s}$。

Solution

考虑分析双方策略。
假设 s 有偶数种排列，那先手必然可以选择让自己还是对方先删掉一个位置。所以，先手必胜。
假设 s 有奇数种排列，那先手必定会选择删掉一个位置。不难发现，若 s 有奇数种排列，则每种取值的出现次数两两按位与为 0，于是必然存在一个位置，使得删去后 s 仍有奇数种排列。于是，双方会轮流删去一个位置，直到序列为空。
所以，先手必胜，当且仅当 s 有偶数种排列，或 $2 \nmid n$。
若 $2 \nmid n$，直接输出 k^n 即可。否则，需要统计有偶数种排列的 s 的数目。不妨改为统计有奇数种排列的 s 的数目。根据卢卡斯定理，每个字符的出现次数的二进制位集合必然属于 n。于是可以设 $f_{i,s}$ 表示用了 i 个字符，共用了 s 个位置的方案数。不难做到小常数 $O(n^{\log_2 3} \log n)$。

Description

有 n 条蛇，初始体力值分别为 $a_{1\dots n}$。
接下来每个时刻，体力值最大的蛇（若有多条则编号最大者）可选择是否吃掉体力值最小的蛇（若有多条则编号最小者）。如果选择吃则重复这个过程，如果选择不吃则立即退出这个过程，即不会再有任何蛇被吃。
每条蛇都会希望在自己尽量不死的条件下吃尽可能多的蛇。求最终剩余几条蛇。多测。$1 \le T \le 10$，$3 \le n \le 10^6$，$0 \le a_i \le 10^9$。

Solution

不难发现，如果大家都不宣布结束，则所有蛇的决策唯一。
于是考虑模拟大家都不宣布结束时的游戏流程，求出每次是谁吃了谁，并逆推出每次体力值最大的蛇会不会选择吃。
直接模拟是 $O(Tn\log n)$ 的，不过可以用双端队列优化到 $O(Tn)$。

Description

给定二进制序列 $s_{1\ldots n}$。
Alice 每次可以选择一对包含 0 的相邻位置令其变为 $\mathtt{xx}$，Bob 每次可以选择一对包含 1 的相邻位置令其变为 $\mathtt{xx}$。
Alice 先手，无法操作者负。求胜者。多测。$\sum n \leq 5 \times 10^5$。

Solution

若 0 和 1 的数目不同，则数位比较多的人必胜。这是因为胜者必定能够保证自己的数位数目在任意时刻都不比对方少。
若 0 和 1 的数目相同，不难证明，双方必定会优先将 01 或 10 变为 xx。而首先不能如此操作的人以其他形式操作必定会使自己的数位数目少于对手，从而落败。
于是，问题变为了：给定若干段极长 01 交错连续段，每次可从任意一段中擦去一对相邻位置并将其分裂成两段，无法操作者负。可以通过 $O(n^2)$ 的模拟来求出这个新问题中长为 x 的连续段的 Grundy value $g(x)$。这看似不太容易优化，不过不难发现该函数有长为 34 的循环节。于是可以 $O(n)$ 算出所有 $g(x)$。时间复杂度 $O(\sum n)$。

Description

给定一棵大小为 n 的树。
莲子梅莉与中枢控制系统轮流操作，莲子梅莉先手。
一次操作为：删去任一节点，并在剩余的若干连通块中选择一个保留。
无法操作（即操作前仅剩余唯一的节点）者胜。求胜者。多测。
$T \leq 5$，$n \leq 10^5$。

Solution

考察每个节点的度数，不难猜想：先手必胜当且仅当存在度数为偶数的节点。
这是容易证明的：若存在度数为偶数的节点，则必定可以用一次操作得到一棵度数全奇的树；而若不存在度数为偶数的节点，则无论如何操作都必定会得到一棵包含偶度点的树。于是可以归纳地证明先手必胜当且仅你当存在偶度点。
时间复杂度 $O(\sum n)$。

Description

给定 $n, m, v_{1\ldots n}$。有 n 堆石子，初始时第 i 堆石子有 v_i 个。
Alice 会选定一个整数 $a \in [1, m]$，Bob 会选定一个整数 $b \in [1, m]$。
然后 Alice, Bob 轮流操作。一次操作中，操作者可从任一堆石子中删除自己选定的整数那么多个。无法操作者负。
求所有 m^2 中可能情况中，下列四种局面的数目：Alice 必胜、Bob 必胜、先手必胜、后手必胜。
$n \le 100$，$m \le 10^5$，$v_i \le 10^{18}$，$\mathrm{TL} = 5\mathrm{s}$。

Solution

考虑对一对 (a,b) 判断其属于哪种局面。不妨设 $a \le b$。
不难发现，令 $v_i \leftarrow v_i \bmod (a+b)$ 后，必胜情况不会发生改变。
不过，由于不是公平游戏，所以我们难以计算 Grundy value。此时不妨直接考虑双方的策略。稍加分析，有以下判定条件（证明是容易的）：

1. 若存在 $a \le v_i < b$，则容易构造出 Alice 的必胜策略；
2. 否则，若存在至少两个 $v_i \ge 2a$，则容易构造出 Alice 的必胜策略；
3. 否则，若 $v_i \ge a$ 的石子堆数目为奇数，则先手必胜；
4. 否则，若存在 $v_i \ge 2a$，则 Alice 必胜；
5. 否则后手必胜。

不难注意到，我们只关心 $v_i < a$、$v_i < b$、$v_i < 2a$ 的石子堆数目。于是，不难想到枚举 $s = a + b$。此时，$n \le 100$，通过类似双指针的写法不难做到 $O(nm \log n)$。

Description

有有序的 N 堆石子，第 i 堆大小为 A_i。FL 与 SR 轮流操作。
FL 的一次操作可以从最左面一堆删去若干石子；SR 的一次操作可以从最右面一堆删去若干石子。
FL 先手，无法操作者负。求谁有必胜策略，多测。
$T \leq 100$，$N \leq 100$，$A_i \leq 10^9$。

Solution

问题比较复杂，且分析一些规模较小的情况后无法总结出非常优美的性质。
于是考虑 DP。由于操作在两端，所以容易考虑到区间 DP。
设 $f_{l,r}$ 表示剩下 $x, A_l, A_{l+1}, \ldots, A_r$，$x$ 至少是多少才能使 FL 先手必胜；设 $g_{l,r}$ 表示剩下 $A_l, \ldots, A_{r-1}, A_r, x$，$x$ 至少是多少才能使 SR 先手必胜。
转移的时候，考虑先手要消耗掉对面的多少石子即可。
不难得到一个时间复杂度 $O(Tn^3)$ 的转移。

Description

给定 n, d, m。E 和 S 在玩游戏。游戏规则是这样的：

1. E 指定一棵树 T，其中节点数为 n，且每个节点的度数不得超过 d；
2. S 指定节点 u, v $(u \neq v)$，并依次记录 $u \to v$ 路径上的节点编号 $a_1 \dots a_k$ (其中 k 为 $u \to v$ 路径长度)；
3. E 选择一个 $1 \le i < k$，并令序列 a 变为如下两个序列之一：
    1. $a_1, \dots, a_i, a_k + a_i, \dots, a_{i+1} + a_i$ (即 reverse 后一半并加上 a_i)；
    2. $a_1, \dots, a_i, -a_{i+1} + a_i, \dots, -a_k + a_i$ (即 negate 后一半并加上 a_i)。
4. 若最终 a 是单调的，则 E 胜，否则 S 胜。

一局游戏可以用 (T, u, v, i, op) 来描述。求最优策略下可能出现的局面数。(最优策略指：若存在必胜策略，则按照任意一个必胜策略行动；否则任意行动。)

$d < n \le 200$，$1 \le m \le 2 \times 10^9$，答案对 m 取模。

Solution

不难发现，E 必胜，当且仅当 S 给出的序列 a 单峰或单谷，故 E 给出的树中的所有路径必定都要单峰或单谷。此时，不难发现，这等价于存在至少一个节点 x，满足所有以 x 为端点的路径都单调。

在这样的树中，(u, v, i, op) 的数目必定为 $2n(n-1)$，因为无论 S 选择哪条路径，S 总有两种方法使 a 序列单调。所以，我们只需要统计这样的树的数目。

不难发现，这样的端点会构成一个连通块。于是考虑点边容斥。设 $f_{i,j}$ 表示 i 棵单调的有根树（根是最小值），大小总和为 j 的方案数。于是只要求出 f 即可求出答案，而转移并不困难。容易做到 $O(n^3)$。

Description

在一个序列 v 上，定义一个 convex game 如下：

- 先后手轮流选中序列中的元素，只是每次选中的元素要在上次选中的元素之后，且从 v 中提取选中的元素形成的新序列的差分要递增。无法选中元素者负。

形式化地，这个游戏其实维护了一个序列 i，初始为空。先后手轮流在 i 的末尾添加元素，只是任意时刻 i 需要满足下列条件，无法操作者负：

- $i_j < i_{j+1}$，即递增；
- $v_{i_j} - v_{i_{j-1}} < v_{i_{j+1}} - v_{i_j}$，即差分递增。

Alice 与 Bob 会同时进行 n 个 convex game，一次操作指任意一个 convex game 中进行操作，Alice 先手，无法操作者负，求谁有必胜策略。

$n \le 10^3$，$\sum |v| \le 10^5$，$v_{i,j} \le 10^5$。

Solution

考虑求出一个序列 $v_{1\dots m}$ 的 Grundy value。设 $g_{i,j}$ 表示最后选取的两个位置是 i 和 j 时的 Grundy value，则答案即 $\operatorname{mex}\{g_{i,i}\}$。
不难注意到，$\max g_{i,j} = O(\sqrt{V})$，且 $g_{*,j}$ 是单调不降的。于是，考虑值域相关做法。不难想到枚举 Grundy value，并一层一层地构建出 g。
设 $f_{i,j}$ 表示 $\max k\ (g_{k,j} \le i)$，考虑从 $f_{i,*}$ 转移到 $f_{i+1,*}$。
$g_{a,b} = i+1$ 当且仅当 $f_{i,b} < a \le b$ 且不存在 $v_c - v_b > v_b - v_a$ 满足 $g_{b,c} = i+1$。设 p_j 表示 $\min k\ (p_{j,k} = i+1)$，则 $g_{a,b} = i+1$ 当且仅当 $f_{i,b} < a \le b$ 且 $v_a \le 2v_b - v_{p_j}$。
考虑从后往前转移，在转移的时候，可以通过一个并查集来维护 p。不难做到 $O(\sum m\sqrt{V}\log m)$ 的复杂度。

Source

- A : [AGC017D] Game on Tree
- B : [BalticOI 2002 Day2 B] L Game © Edward de Bono
- C : [ABC278G] Generalized Subtraction Game
- D : [CF1458E] Nim Shortcuts
- E : [集训队互测 2023 Day10 C] 茧
- F : [CF1511G] Chips on a Board
- G : [CF838C] Future Failure
- H : [CSP-S 2020 D] 贪吃蛇
- I : [CF1704F] Colouring Game
- J : [Windy OI R6 D] 另一侧的月
- K : [CF1033G] Chip Game
- L : [AGC048D] Pocky Game
- M : [CF914H] Ember and Storm's Tree Game
- N : [CF1434E] A Convex Game