NOI2024 模拟赛　题解

2024 年 2 月 21 日

目录

1 duel **1**

2 aircraft **2**

3 nediam **3**

A　决斗（duel）

考虑已知序列 a 如何求出 $f(a)$。

首先，一个人 i 想要获胜，一定需要打败最大值。不妨设最大值为 a_p 且 $i < p$，那么 i 在打败最大值之前，先把 $[1, p-1]$ 全部打完是肯定不劣的。那么我们可以找出一个判定依据：

1. i 能够打完 $[1, p-1]$ 的人。
2. $a_i + (p-1) \geq a_p$。

第一个条件是一个递归的问题。那么我们可以设计递归函数 $\textsc{Solve}(l, r, x)$ 表示，区间 $[l, r]$ 中的 i，赢的充要条件是能打完 $[l, r]$ 的所有人，且 $a_i \geq x$。那么递归下去就可以求出 $f(a)$，借助笛卡尔树可做到 $O(n)$。

计数 a 可以采用相同的方法，设 $f_{l,r,x,y}$ 表示考虑 $[l, r]$ 中的 i，需要满足 $a_i \in [1, x]$，赢的充要条件是能打完 $[l, r]$ 且 $a_i \geq y$。每次枚举最大值的位置进行转移即可。复杂度 $O(n^3m^3)$。

B 炸飞机（aircraft）

考虑求出一个棋盘的方案数。我们可以设计一个 DP：设 $f_{i,S}$ 表示放下了所有左端 $\le i$ 的飞机，覆盖了第 $i+1$ 列中 $\in S$ 的格子（也就是"凸出"的部分）。答案就是 $f_{a_i,S}$。

那么 f_i 到 f_{i+1} 的转移是一个矩阵。由于 $k \le 6$，所以这个矩阵可以搜索出来。

直接用矩阵和线段树维护，复杂度为 $O((n+q)8^k \log n)$，无法通过。

Lemma 1. *$f_{i,0}$ 是线性递推数列。*

证明. 设 f_i 到 f_{i+1} 的转移矩阵为 A，即 $f_{i+1} = Af_i$，那么 $f_i = A^i f_0$。

设矩阵 A 的特征多项式为 $H(x) = \sum_{i=0}^{2^k} c_i x^i$，那么根据 $H(A) = O$ 可以得到：

$$\sum_{i=0}^{2^k} c_i A^i = 0$$

$$c_n A^{2^k} = -\sum_{i=0}^{2^k-1} c_i A^i$$

$$c_n A^{n+2^k} f_0 = \sum_{i=0}^{2^k-1} c_i A^{n+i} f_0$$

$$c_n f_{n+2^k} = \sum_{i=0}^{2^k-1} c_i f_{n+i}$$

故 f_i 有最高 2^k 阶线性递推式，那么 $f_{i,0}$ 自然是线性递推数列。 □

虽然根据特征多项式得到的 $f_{i,0}$ 的线性递推有 2^k 项，但实际上可能更少，可以通过 Berlekamp-Massey 算法甚至高斯消元求解。

记求解出的递推式的特征方程为 $F(x)$，那么我们只需要求 $x^m \bmod F(x)$ 就可以知道第 m 项的值。那么我们实际上要维护的是一个多项式的序列，支持区间乘、区间求和。使用线段树维护，复杂度为 $O((n+q)4^k \log n)$，可以通过。

一些卡常：使用 B 进制快速幂计算 $x^k \bmod F(x)$，线段树标记永久化。

C 肿胃数（nediam）

记 $a_i = -1$ 的位置有 q 个。

考虑枚举中位数 t，计算中位数和肿胃数均为 t 的方案数。

那么我们可以将 $< t$ 的视作 -1，$> t$ 的视作 1，$= t$ 的视作 0。真正的中位数只和 $a_i = -1$ 中 $-1, 1$ 的个数，而算肿胃数则更复杂一些。

我们提前把算法的分治树给建出来。设计 DP：$f_{i,x,y,k}$ 表示考虑分治树上 i 的子树，$a_i = -1$ 的位置中有 x 个 -1 和 y 个 1，且 i 的答案是 k 的方案数。注意到 x, y 的大小都是 $\leq q$ 的，并且转移是属性背包，所以这个 DP 的复杂度为 $O(n + q^4)$。因为 DP 的时候只考虑了 $-1, 0, 1$ 而没考虑具体值，最后答案还需要乘上 $t^x(m-1-t)^y$。

但是 m 太大，我们不能够 DP m 次。

设确定的数从小到大排序为 $A_1, A_2, \ldots, A_p$，一个简单的观察就是，当 $t \in [A_i + 1, A_{i+1} - 1]$ 时，DP 的结果是一样的。所以我们只需要求 $\sum_{t=L}^{R} t^x(m-1-t)^y$ 即可。这是一个关于 t 的 $x + y + 1$ 次多项式，可以用拉格朗日插值等方法做到 $O(q)$ 求值。

那么现在复杂度为 $O(n^2 + nq^4)$，仍然不够快。

实际上，能够称为中位数的 t 是很少的，只有满足 $A_{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor - q} \leq t \leq A_{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor + q}$ 的 t 才可以成为中位数。所以 t 的枚举量降为 $O(q)$。总复杂度 $O(n^2 + q^5)$，可以通过。