NOIP2023 模拟赛

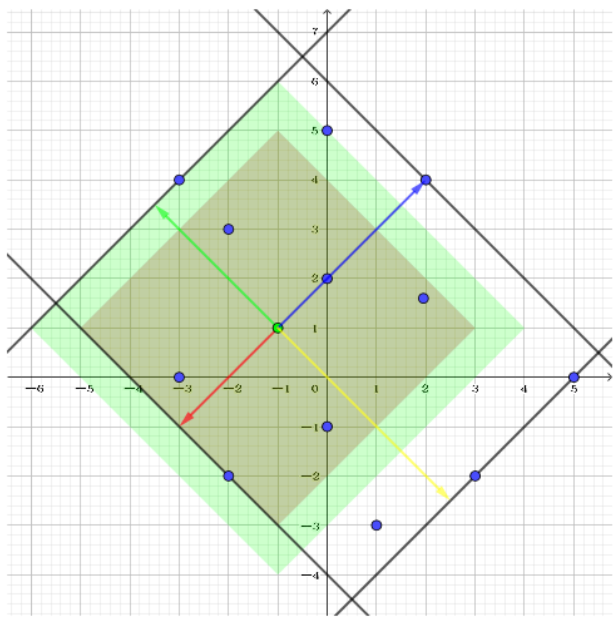
目录

A 剧场（theatre）

可以看出，这是一个 Manhattan 距离的问题。

如果我们可以得到对于每个建筑，它到最远选址剧场的距离，那么最后取个 min 就可以了。因此关键就是如何得到它与最远选址剧场的距离。即在 Manhattan 平面上做”圆”，使之碰到最远的点时，” 圆” 的“半径”。

我们知道，Manhattan 平面上的圆，其实就是 (45 度斜着摆的) 正方形，因此在一个方向最远的点，一定是作对应平行线最远的点 (有点绕，比如说，在东北方向最远的点，一定是 $x + y$ 最远的点，如下图)。



因此，对给定的 C 个点，我们只需求出使 $x + y, x - y, -x + y, -x - y$ 分别最大的 4 个点就可以了 (可能重复)，其它点均可忽略 (这是由 Manhattan 平面上的圆的性质所决定的，因此 Chebyshev 平面上也可以这么做，但是 Euclid 平面上就没办法了)。

那么对于每个建筑，到最远选址剧场的距离，一定是到这 4 个建筑的距离之一 (这个距离很简单，只需令它的 $a + b$ 值与 $a + b$ 的值作差即可)，那么取这 4 个距离的 max 值即可，时间复杂度 $O(C + 4H)$。

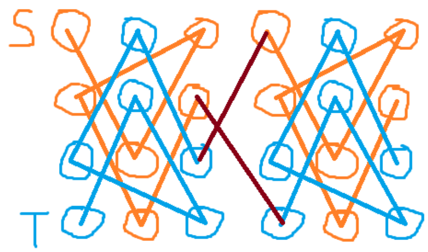
B 马（horse）

你首先需要一个爆搜程序，支持从给定起点开始，到给定终点。

爆搜发现 $n = 1, 2, 4$ 无解。爆搜写得好一点的话能搜出后面都有解。猜想其他情况都有解。

考虑递归构造（其实是递推）。这里的思路是每次 $n \to n + 3$。

发现如下次序：



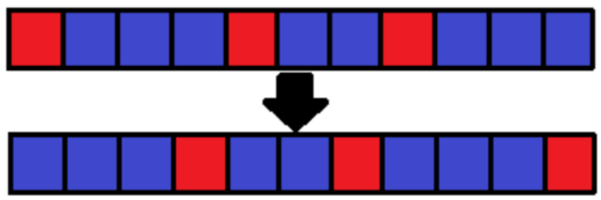
每走一轮 S 和 T 会互换，可以一直接下去。

只需要 $n = 3, 5, 6$ 时找到能够接到 S, T 的解即可，直接爆搜。搜出来有，所以就做完了。（现在都不知道解长什么样，反正搜出来有）

构造题无非就是递归构造和爆搜。

C 球衣（soccer）

显然只需要找到一个合法的想法 p 即可。考虑如何对一个 p 求出它对应的必须填蓝色的位置。如果两个必须填蓝色的位置连通, 那么它们在原方案中也一定连通。所以找到每个蓝色连通块出现的最靠前的位置和最靠后的位置即可。把 p 的所有蓝色块都移到最前面:



然后把每一段尽可能的移到最后面。设移到最前面之后, 未尾剩余了 k 个, 对于每个蓝色块, 尽可能的移到最后面相当于删除掉它的前 k 个。如果不足 k 个, 就直接删完。

枚举 k, 然后把所有蓝色连通块往左填 k 个。注意这个 k 不能超过前面/中间/后面的最短的空白段长度。

然后检验一个长度 >1 的空白段, 它需要能被 $\leq k$ 的连续段填满。这里的填满是指在保持两段之间空一格的情况下填满, 也就是长度 $=2$ 时是不可能的。

可以发现, 如果 $k \leq 3$ 不存在合法方案, 那么 $k \geq 4$ 时也不会存在合法方案。因为你可以把一个长为 x 的块变成 1+ white $+(x-2)$, 也就是说一定存在一个 $k-2$ 的合法方案。

时间复杂度 $O(n)$ 。

D 填数游戏（number）

2-sat。先二分一个答案，然后判断是否有解，适用于 $k=2$ 的情况。直接判的话复杂度是 $O(n^2)$ 的，期望得分：10 分。可以利用前缀和优化建图，将复杂度优化至 $O(n)$，期望得分：30 分。

观察一下特殊性质，并且发现 $k=3$。我们不由的想到的最小直径生成树。建图方式：先建出 $n+3$ 个点，其中 $n+1$ 号点向 $n+2$ 号点以及 $n+2$ 号点向 $n+3$ 号点连接一条边权为 X 的边，称之为 1 类边。然后 $n+j$ 号点向 i 号点连接一条边权为 $f[i][j]$ 的边，称之为 2 类边。最后跑一个最小直径生成树即可，记得判断边界情况（全填 1 或者全填 3）。

因为题目保证了 $X<f[i][j]$，所以这个算法是对的。时间复杂度：$O(n^2)$，期望得分：10 分。结合前面算法，期望得分：50 分。

考虑优化上述做法。其实我们只需要知道最小直径生成树的工作原理即可。先找到直径的中点，然后再跑最短路径树（即最短路）。分类讨论一下：

若中点在 2 类边上，那么我们直接做就好了。因为生成树显然不会出现 $i(1\le i\le n)$ 号点的度数大于 1 的情况，所以如果确定了某条边，那么 i 号点就确定了，不过你要确保直径的中点在该边上。我们暴力枚举，然后判断是否有解。然后呢？给你点 i $(n<i\le n+k)$，求点 i 到其他点中最短距离的最大值。这个可以通过简单的前缀最大值来实现。

若中点在 1 类边上，那么我们仍然可以直接做。思考一下：中点能在 1 类边的哪个位置呢？假设中点在 1 类边的 x 位置，此时距离它最远的点的距离为 y，我们肯定希望 y 越小越好。然后对于边的中点我们显然可以直接做。哦对，还有一个排序，时间复杂度：$O(n\log n)$（k 看作常数）。期望得分：65。

我们考虑题目要求的东西。也就是强行选择图中的某些边，然后让你找出最小直径生成树。怎么办呢？其实我们只需要借鉴最小直径生成树的一点点思想即可。也就是寻找直径的中点，由于图的特殊性，所以可以快速的做。还是按照刚才的方案，我们魔改一下，要求最小直径生成树中的点 $i(1\le i\le n)$ 的度数必须为 1。其实很简单，将连向点 i 的边视为有向边即可，也就是说，点 i 只能进不能出。问题来了：为什么这样是对的呢？证明这种东西我通常都有一个比较好的方法（个人总结）：对于任意一个构造的方案，一定大于等于最优解。对于最优方案，一定可以被构造出来。你可能会问边界情况，但其实稍微实现得优秀一点就可以免去边界情况。时间复杂度：$O(nk\log n)$，期望得分：100。