Solution

幸运数字 (lucky)

40 pts

分别枚举两人所选的区间，暴力统计区间内幸运数字的个数，时间复杂度 $\mathcal{O}(r^3)$。期望得分 10pts。

在上述做法基础上预处理每个区间内幸运数字的个数，时间复杂度 $\mathcal{O}(r^2)$。期望得分 20pts。

注意到第二个人所选择的区间也可以预处理答案，我们需要在枚举 A 的同时维护 B 的一段区间最小值。单调队列或线段树均可，期望得分 40pts。

70 pts

注意到幸运数字的个数其实很少。当 $l = 1, r = 10^{10}$ 时，这个数量只有 $c = \sum_{i=1}^{10} 2^i = 2047$。

考虑 Icecream 的贪心策略，她选的最优决策区间 $[L, R]$ 一定满足 $L - 1$ 是幸运数字（或边界）。这个结论可以反证，如果 $L - 1$ 不是幸运数字，她把自己选的区间向左移一位得分一定不会变大。

同理，Strawberry 的贪心策略是选择区间 $[L, R]$，满足 $L + B - 1$ 是幸运数字。

因此她们都只有 c 个可能的决策，暴力枚举两人选择的位置，并预处理一段区间的幸运数字个数。时间复杂度 $\mathcal{O}(c^2 \log c)$。

100 pts

此处的 c 大概是 5×10^5 级别。用 20->40pts 的优化来优化上面的做法，时间复杂度 $\mathcal{O}(c \log c)$。

神秘排列 (perm)

20 pts

爆搜。

40 pts

设最终的序列为 b。我们观察操作的一些性质：

- 对于任意位置，$b_i \ge p_i$；
- 对于任意 x，所有 $b_i = x$ 的位置 i 都是连续的一段；
- 如果在初始序列中，数字 i 在数字 j 前面，且它们都在最终序列里出现了，那么 i 所在的连续段一定在 j 所在的连续段前面。

设 $f_{k,i,j}$ 表示操作了 k 步，考虑了原排列的前 i 个位置，确定了新序列的前 j 个位置的方案数。

枚举最后一段的开始位置，有：

$$f_{k,i,j} \leftarrow \sum f_{k-1,i-1,l} (p_i \text{ 被操作到 } [l+1, j] \text{ 合法})$$

$$f_{k,i,j} \leftarrow f_{k,i-1,j}$$

$$f_{k,i,i} \leftarrow f_{k,i-1,i-1}$$

为避免重复计数，这里的「操作了 k 步」指使用最少的操作次数为 k 步。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n^4)$。

$p_i = i$

正解调不出来可以写这个，思路相同但细节少很多。

100 pts

考虑「p_i 被操作到 $[l, r]$ 合法」这个转移条件的本质。这实际上是说从 i 到它要转移到的区间之间这一段，p_i 是最大值。

同时我们也知道当 i, r 均固定时，这个最大值随着 l 的增大单调不升。也就是合法的转移点是一个连续段。

预处理这个合法转移点的位置，使用前缀和优化即可做到 $\mathcal{O}(n^3)$。

猫猫聚会 (cats)

10 pts

枚举给了哪些猫金币和 $tp = 3$ 的猫去了哪边，判断方案是否合法即可，时间复杂度 $\mathcal{O}(2^n m)$。

$t_i \in [1, 2]$

考虑没有第三种猫的情况下怎么做。

因为我们知道每只猫去了哪边的聚会，跨越两个聚会的连边就不用考虑了，只需要分别考虑两个聚会各自内部的连边即可。

题目保证了连边关系是一个二分图，对两边分别求二分图最大独立集即可。

100 pts

两个特殊性质一个是留给匈牙利，一个是留给不会带权独立集的。

问题瓶颈在有些猫不知道它去哪边，考虑拆点。我们将这样的猫拆成两个点，一个表示去第一个聚会，另一个表示去第二个聚会。

首先它不能同时参加两个，这两个点之间要连边。然后用这两个点分别去连自己那一侧聚会的边就好了。

可以证明这样拆点连边后，新图还是二分图：

- 新图和直接连的区别就是所有 $tp = 3$ 的点都从一个点变成了两个点和一条边。
- 如果一个环不跨过两个集合，它也显然不经过 $tp = 3$ 的点增加的新边；
- 如果一个环跨过了两个集合，它一定经过新边偶数次，仍然是一个偶环。

对整个图跑二分图最大独立集即为答案。