dp 套 dp 例题

范绪杰

大连市第二十四中学

2024.1.12

[ZJOI2019] 麻将

定义一个 14 张牌的集合为“胡的”，当且仅当其形成了（四个刻子/顺子加一个对子）或者（七对不同的对子）。
现在有 $1-\mathsf{n}$ 每种牌各四张，给出初始的 13 张牌，求其余的牌随机排列依次抽出的情况下最早胡牌时间的期望。
一个时刻认为可以胡了，当且仅当此时摸到的牌的集合中存在一个“胡的”子集。
$5 \leq \mathsf{n} \leq 100$

[ZJOI2019] 麻将

先考虑如何判定一副牌是胡的。

[ZJOI2019] 麻将

先考虑如何判定一副牌是胡的。
考虑 dp：$f_{i,j,k,p}$ 表示当前考虑到数字 i，有 j 个目前长度为 1 的顺子，k 个目前长度为 2 的顺子，可以凑出不同的 p 对时最多可以凑出的面子数，容易转移。

[ZJOI2019] 麻将

先考虑如何判定一副牌是胡的。
考虑 dp：$f_{i,j,k,p}$ 表示当前考虑到数字 i，有 j 个目前长度为 1 的顺子，k 个目前长度为 2 的顺子，可以凑出不同的 p 对时最多可以凑出的面子数，容易转移。
不过在自动机上可以发现转移和 i 完全没关系，可以直接忽略。类似 bfs 的搜出所有状态，把所有胡牌的状态压到一起，发现只有 2092 种。

[ZJOI2019] 麻将

先考虑如何判定一副牌是胡的。
考虑 dp：$f_{i,j,k,p}$ 表示当前考虑到数字 i，有 j 个目前长度为 1 的顺子，k 个目前长度为 2 的顺子，可以凑出不同的 p 对时最多可以凑出的面子数，容易转移。
不过在自动机上可以发现转移和 i 完全没关系，可以直接忽略。类似 bfs 的搜出所有状态，把所有胡牌的状态压到一起，发现只有 2092 种。
如何求期望？转而求摸 i 张牌还不胡的方案数，设计 $g_{i,j,s}$ 表示考虑到数字 i，加入了 j 张牌，dp 状态为 s 的方案数。则 i 张牌还不胡的方案数就是 $\sum_{s'} g_{n+1,i,s'}$，其中 s' 为未胡牌的状态。

[ZJOI2019] 麻将

先考虑如何判定一副牌是胡的。
考虑 dp：$f_{i,j,k,p}$ 表示当前考虑到数字 i，有 j 个目前长度为 1 的顺子，k 个目前长度为 2 的顺子，可以凑出不同的 p 对时最多可以凑出的面子数，容易转移。
不过在自动机上可以发现转移和 i 完全没关系，可以直接忽略。类似 bfs 的搜出所有状态，把所有胡牌的状态压到一起，发现只有 2092 种。
如何求期望？转而求摸 i 张牌还不胡的方案数，设计 $g_{i,j,s}$ 表示考虑到数字 i，加入了 j 张牌，dp 状态为 s 的方案数。则 i 张牌还不胡的方案数就是 $\sum_{s'} g_{n+1,i,s'}$，其中 s' 为未胡牌的状态。
总复杂度 $O(n^2 S)$，S 为状态数量。

[NOI2022] 移除石子

n 堆石子排成一行，第 i 堆有 a_i 枚。可以进行如下两种操作：
1. 选择一堆石子，将其中至少 2 枚石子移除。
2. 选择一个石子堆的编号区间 $[l, r]$（$r - l + 1 \geq 3$），从中各移除一枚石子。

如果最终可以将所有石子移除，则称局面是必胜的。
现在已知 a_i 可以在 $[l_i, r_i]$ 中取值，并且在局面确定之后你还可以再额外加入恰好 k 枚石子，求有多少种局面可以使你必胜。
$n \leq 1000, k \leq 100, 0 \leq l_i \leq r_i \leq 10^9$

[NOI2022] 移除石子

先不考虑加入石子，如何判定静态局面合法？

[NOI2022] 移除石子

先不考虑加入石子，如何判定静态局面合法？
设 $f_{i,j,k}$ 表示考虑到 i，有 j 个操作二延伸到 i 且想停就停，k 个操作二延伸到 $i+1$ 才能停的局面是否可以存在。注意到由于操作二长度最多为 5，且没有必要进行相同的两次操作二，所以 $j \le 6, k \le 3$。

[NOI2022] 移除石子

先不考虑加入石子，如何判定静态局面合法？
设 $f_{i,j,k}$ 表示考虑到 i，有 j 个操作二延伸到 i 且想停就停，k 个操作二延伸到 $i+1$ 才能停的局面是否可以存在。注意到由于操作二长度最多为 5，且没有必要进行相同的两次操作二，所以 $j \le 6, k \le 3$。
然后再通过 简单的讨论 以及对拍，我们发现其实可以始终有 $j \le 2, k \le 2$。

[NOI2022] 移除石子

现在考虑 k > 0。
如果把恰好的限制改成至多，我们就可以把 k 这一维压到 dp 里了。
感性上多一些石子也没什么坏处。

[NOI2022] 移除石子

现在考虑 $k > 0$。
如果把恰好的限制改成至多，我们就可以把 k 这一维压到 dp 里了。
感性上多一些石子也没什么坏处。
那么到底什么时候多石子会出事呢？

[NOI2022] 移除石子

现在考虑 $k > 0$。
如果把恰好的限制改成至多，我们就可以把 k 这一维压到 dp 里了。
感性上多一些石子也没什么坏处。
那么到底什么时候多石子会出事呢？
假如原局面合法，但剩了一枚石子。假如原局面用了操作一，那么这枚石子可以顺手加进去。如果用了长度超过 3 的操作二，那么可以让操作二长度减一，没覆盖到的地方加枚石子改成操作一。假如操作二没有顶满，那么可以让操作二往外延伸一步。所以就只剩下了全是操作二长度都为 3 且顶满的情况，也就是 (x, x, x)，且 $x > 1$ 时直接用三次操作一就行了，所以其实只有 $(1, 1, 1)$ 和全 0 会出问题。

[NOI2022] 移除石子

现在考虑 $k > 0$。
如果把恰好的限制改成至多，我们就可以把 k 这一维压到 dp 里了。
感性上多一些石子也没什么坏处。
那么到底什么时候多石子会出事呢？
假如原局面合法，但剩了一枚石子。假如原局面用了操作一，那么这枚石子可以顺手加进去。如果用了长度超过 3 的操作二，那么可以让操作二长度减一，没覆盖到的地方加枚石子改成操作一。假如操作二没有顶满，那么可以让操作二往外延伸一步。所以就只剩下了全是操作二长度都为 3 且顶满的情况，也就是 (x, x, x)，且 $x > 1$ 时直接用三次操作一就行了，所以其实只有 $(1, 1, 1)$ 和全 0 会出问题。
而如果剩了超过一枚石子，随便放个地方用操作一就好了，不会出问题。会不会加石子加到 $(1, 1, 1)$ 然后恰好剩一枚？讨论可以发现这种时候总有别的方法可以使得局面合法。

[NOI2022] 移除石子

现在考虑 $k > 0$。
如果把恰好的限制改成至多，我们就可以把 k 这一维压到 dp 里了。
感性上多一些石子也没什么坏处。
那么到底什么时候多石子会出事呢？
假如原局面合法，但剩了一枚石子。假如原局面用了操作一，那么这枚石子可以顺手加进去。如果用了长度超过 3 的操作二，那么可以让操作二长度减一，没覆盖到的地方加枚石子改成操作一。假如操作二没有顶满，那么可以让操作二往外延伸一步。所以就只剩下了全是操作二长度都为 3 且顶满的情况，也就是 (x, x, x)，且 $x > 1$ 时直接用三次操作一就行了，所以其实只有 $(1, 1, 1)$ 和全 0 会出问题。
而如果剩了超过一枚石子，随便放个地方用操作一就好了，不会出问题。会不会加石子加到 $(1, 1, 1)$ 然后恰好剩一枚？讨论可以发现这种时候总有别的方法可以使得局面合法。

综上，只需要特判 $k = 1$ 下的 $(1, 1, 1)$ 和全 0，就可以把恰好转化为至多了。

[NOI2022] 移除石子

把添加石子加入之前的 dp：$f_{i,j,k}$ 表示考虑到 i，有 j 个操作二延伸到 i 且想停就停，k 个操作二延伸到 $i+1$ 才能停添加的最少石子数量，转移的时候尽可能少加石子即可。转移的时候 a_i 显然没有必要考虑到 10^9，由于前面的结论，≥ 8 的堆都是等价的，再结合 简单的讨论 以及对拍，可以发现 ≥ 6 的堆都是等价的，所以其实只有七种转移。

[NOI2022] 移除石子

把添加石子加入之前的 dp：$f_{i,j,k}$ 表示考虑到 i，有 j 个操作二延伸到 i 且想停就停，k 个操作二延伸到 $i+1$ 才能停添加的最少石子数量，转移的时候尽可能少加石子即可。转移的时候 a_i 显然没有必要考虑到 10^9，由于前面的结论，≥ 8 的堆都是等价的，再结合 简单的讨论 以及对拍，可以发现 ≥ 6 的堆都是等价的，所以其实只有七种转移。理论上不同的 dp 数量依然有 $O(102^9)$ 种，但是显然同一个 dp 状态下不同的 $f_{i,j,k}$ 之间相差不会太大，所以实际上只有 8765 种。

[NOI2022] 移除石子

把添加石子加入之前的 dp：$f_{i,j,k}$ 表示考虑到 i，有 j 个操作二延伸到 i 且想停就停，k 个操作二延伸到 $i+1$ 才能停添加的最少石子数量，转移的时候尽可能少加石子即可。转移的时候 a_i 显然没有必要考虑到 10^9，由于前面的结论，≥ 8 的堆都是等价的，再结合 简单的讨论 以及对拍，可以发现 ≥ 6 的堆都是等价的，所以其实只有七种转移。理论上不同的 dp 数量依然有 $O(102^9)$ 种，但是显然同一个 dp 状态下不同的 $f_{i,j,k}$ 之间相差不会太大，所以实际上只有 8765 种。

总复杂度 O(nS)，S 为自动机状态数量。