极限

序列的极限

序列极限的定义

设$\{x_n\}$是一个序列。若存在常数$a \in \mathbb{R}$，使得$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$，当$n > N$时，有$|x_n - a| < \varepsilon$。则称该序列是收敛的，并称$a$为该序列的极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。若不存在$a \in \mathbb{R}$，使得序列收敛于$a$，则称之为发散序列。

用一个简单的例子来看看怎么利用定义证明极限

1. 证明$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

   【证】

   对于任意给定的$\varepsilon > 0$，要使得$|\frac{n}{n+1} - 1| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$。只需要$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$。所以我们取任意大于$\frac{1}{\varepsilon} - 1$的正整数作为$N$，根据定义证明。

极限的四则运算

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}$，其中$b \neq 0, y_n \neq 0$

简单应用

2. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1)$

   【证】

   $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

3. 求$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n-100}{4n^2+5n+10^5}$

   【解】

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n-100}{4n^2+5n+10^5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+\frac{4}{n}-\frac{100}{n^2}}{4+\frac{5}{n}+\frac{10^5}{n^2}} = \frac{3}{4}$

夹逼收敛原理

设序列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n > N_0$$

若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

简单应用

4. 设$a_1 = 2, a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$，问$\{a_n\}$是否收敛，若收敛求其极限

   【解】

首先解一下$a=2+\frac{1}{a}$得$a=\sqrt{2}+1$。我们令$a_n=\sqrt{2}+1+h_n$，接下来只要证明$\lim\limits_{n\to\infty} h_n=0$即可。

我们代入原递推式可得：$h_{n+1}=\frac{h_n(1-\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}+h_n}$

我们容易归纳证明出$|h_n|<1$，则有$|h_{n+1}|\le\frac{1}{2}|h_n|$。则有$0<|h_n|<\frac{1}{2^{n-1}}$。由夹逼收敛原理证闭

重要序列的极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=e$

> 这是自然对数的底e的定义。e=2.718281828459045...
>
> 并且伴随着有不等式：
>
> $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1},\forall n\in\mathbb{N}$
>
> 两边取对数，得到：
>
> $\frac{1}{n+1}<ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$
>
> 此外，还可以通过这个不等式知道：
>
> $\frac{(n+1)^n}{n!}=\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k<e^n<\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^{k+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$
>
> 由此可得：
>
> $\frac{n+1}{e}<\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{e}\sqrt[n]{n+1}$
>
> 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$，得到：
>
> $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-ln\,n)=c$

> 其中c为欧拉常数，这个式子是欧拉常数的定义。c=0.577216

练习

1. 证：$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$

   【证】

   $1\le n^{\frac{1}{n}}=(\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1)^{\frac{1}{n}}\le\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}$

2. 证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}=0$

   【证】

   利用$\frac{a}{b}<\frac{a+1}{b+1}(0<a<b)$，有：

   $x_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{x_n}\cdot\frac{1}{2n+1}$

3. 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n})^{\frac{1}{n}}$

   【解】

   $\frac{1}{2n}\le\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\le 1$

4. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x_n}{n})=e^a$

   【证】

令$y_n = \frac{n}{x_n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$

则$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x_n}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{y_n})^{y_n}]^{x_n}$

函数的极限

函数极限的定义

设函数$f(x)$在$U_0(x_0,\delta_0)(\delta_0>0)$内有定义，若存在实数$A$，使得$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当$x\in U_0(x_0,\delta)$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当$x$趋向于$x_0$时，函数$f(x)$以$A$为极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$。

若A为正无穷或负无穷，则称为广义极限。

函数极限的四则运算

设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，则有

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = A\pm B$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$，这里假定$B\neq 0$

夹逼收敛原理

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$，而且存在$\delta>0$，使得$f(x)\leq h(x)\leq g(x)$对一切$x\in U_0(x_0,\delta)$成立，则有$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$

重要的函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\ x}{x} = 1$

> 首先我们可以用面积法知道一个重要的不等式：
>
> $sin\ x < x < tan\ x, \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$
>
> 利用这个不等式，可以知道，对一切$0\neq x\in\mathbb{R}$，有
>
> $|sin\ x| < |x|$
>
> 由此可以导出，对$\forall a\in\mathbb{R}$，有
>
> $|cos\ x - cos\ a| = |2sin\frac{x+a}{2}sin\frac{x-a}{2}| \leq 2|sin\frac{x-a}{2}| \leq |x-a|,$
>
> 从而有
>
> $\lim\limits_{x\to a} cos\ x = cos\ a$
>
> 再利用前面不等式，我们有
>
> $cos\ x < \frac{sin\ x}{x} < 1, \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$
>
> 利用偶函数性质，这一个不等式在$-\frac{\pi}{2} < x < 0$也成立。
>
> 这时候利用夹逼收敛原理，得到$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\ x}{x} = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

> 利用序列的结论可以推出

练习

1. 证$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

   【证】

   令$y=a^x-1$，则$x\to 0 \leftrightarrow y\to 0$

   $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a$