导数与微分

导数与微分

导数的定义

设函数$y=f(x)$在$U(x_0,\delta_0)$内有定义。若极限$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，则称$f(x)$在点$x_0$处可导，并且称此极限值为$f(x)$在$x_0$处的导数，记为$f'(x_0)$或者$\frac{df(x_0)}{dx}$。

从几何上来看，导数$f'(x_0)$就是曲线$y=f(x)$在点$P(x_0,f(x_0))$的切线的斜率。

函数四则运算的导数

设函数$f(x)$和$g(x)$都在点x处可导，则下列各式在点x处成立：

$(1)(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$

$(2)(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$(3)(\frac{f(x)}{g(x)})'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

基本初等函数的导数

结合导数的定义以及四则运算，我们能够得出所有基本初等函数的导数：

$(1)(C)'=0$

$(2)(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

$(3)(sin\ x)'=cos\ x$

$(4)(cos\ x)'=-sin\ x$

$(5)(tan\ x)'=\frac{1}{cos^2\ x}$

$(6)(cot\ x)'=-\frac{1}{sin^2\ x}$

$(7)(e^x)'=e^x$

$(8)(a^x)'=a^x ln\ a\ \ (a>0)$

$(9)(ln\ x)'=\frac{1}{x}$

$(10)(log_a x)'=\frac{1}{xln\ a}\ \ (a>0且a\neq 1)$

我们选取其中几个看看求的过程，在求之前，我们先要知道以下三个重要的极限：

> $(1)\lim\limits_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=log_a e=\frac{1}{ln\ a}$
>
> $(2)\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=ln\ a$
>
> $(3)\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{ax}=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^{aln(1+x)}-1}{aln(1+x)})(\frac{ln(1+x)}{x})=1$
>
> 对于x^α，有：
>
> $\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=x^{\alpha-1}\frac{(1+\frac{\triangle x}{x})^\alpha-1}{\frac{\triangle x}{x}}$
>
> 所以$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$

> 对于a^x，有:
>
> $\frac{a^{x+\triangle x}-a^x}{\triangle x}=a^x\frac{a^{\triangle x}-a}{\triangle x}$
>
> 所以$f'(x)=a^x ln\ a$
>
> 对于$sin\ x$，有:
>
> $\frac{sin(x+\triangle x)-sin\ x}{\triangle x}=\frac{2cos(x+\frac{\triangle x}{2})sin\frac{\triangle x}{2}}{\triangle x}$
>
> 所以，$f'(x)=cos\ x$
>
> 对于$tan\ x$，有:
>
> $f'(x)=(\frac{sin\ x}{cos\ x})'=\frac{(sin\ x)'cos\ x-sin\ x(cos\ x)'}{cos^2x}=\frac{cos^2x+sin^2x}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x}$

反函数求导

设函数$y=f(x)$在(a,b)内严格单调，并且令
$\alpha=min\{f(a+0),f(b-0)\},\beta=max\{f(a+0),f(b-0)\}$。如果$f(x)$在$(a,b)$内可导且导数$f'(x)\neq 0$，则它的反函数$x=f^{-1}(y)$在$(\alpha,\beta)$内可导，而且有$\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{f'(x)}$。

例：求$y=arcsin\ x$的导数

> 由$x=sin\ y$，得到
>
> $y'=(arcsin\ x)'=\frac{1}{(sin\ y)'}=\frac{1}{cos\ y}=\frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

类似可以得到:

$(arccos\ x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctan\ x)'=\frac{1}{1+x^2}$

复合函数求导

设函数$y=f(u)$在$U(u_0,\delta_0)$内有定义，函数$u=g(x)$在$U(x_0,i_0)$内有定义，且$u_0=g(x_0)$。若$f'(u_0)$与$g'(x_0)$都存在，则复合函数$F(x)=f(g(x))$在点x_0可导，且$F'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0)$。

也可以写作$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$，一般也称之为链锁法则。

例：求$y=sin\ x^2$的导数

> $y=sin\ x^2$可看成$y=sin\ u$和$u=x^2$的复合，因此
>
> $(sin\ x^2)'=2sin\ x(sin\ x)'=2sin\ xcos\ x=sin\ 2x$

微分

我们记dy为$y=f(x)$在点x_0处的微分，那么$dy=f'(x_0)dx$。

高阶导数

例：设$y=e^{ax}$，求$y^{(n)}$。

> $y'=ae^{ax},y''=a^2e^{ax},y'''=a^3e^{ax}$
>
> 所以由归纳法，可知$y^{(n)}=a^ne^{ax}$

洛必达法则

零比零型

若函数$f(x)$和$g(x)$满足下列条件：

(1)$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

(2)在点a的某去心领域内两者都可导，且$g'(x)\neq 0$

(3)$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$，则

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$

无穷比无穷型

若函数$f(x)$和$g(x)$满足下列条件：

(1)$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

(2)在点a的某去心领域内两者都可导，且$g'(x)\neq 0$

(3)$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$，则

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$

应用举例

洛必达法则可以很方便的计算一些比较难算的极限

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\ x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos\ x}{1}=1$

(2)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ln\ x}{x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{2x^2}=0$

泰勒公式

设函数$f(x)$在x_0处有$n(n\geq 1)$阶导数，则有

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\quad (x\to x_0)$

特别当$x_0=0$的时候，我们称之为麦克劳林公式。

下面是一些常用的泰勒展开公式：

(1)求$f(x)=e^x$的麦克劳林公式

> $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

(2)求$f(x)=sin\ x$的麦克劳林公式

> $f^{(k)}(x)=sin(x+\frac{k\pi}{2})$
>
> 得到：
>
> $f^{(2k)}(0)=0,f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$
>
> 所以：

> $sin\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$

(3)求$f(x) = cos\ x$的麦克劳林公式

> $f^{(k)}(x) = cos(x + \frac{k\pi}{2})$，得到:
>
> $f^{(2k)}(0) = (-1)^k, f^{(2k+1)}(0) = 0$
>
> 所以:
>
> $cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

(4)求$f(x) = ln(1 + x)$的麦克劳林公式

> $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$，得到:
>
> $f(0) = 0, f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$
>
> 所以:
>
> $ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

(5)求$f(x) = (1 + x)^\alpha$的麦克劳林公式

> $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k + 1)(1 + x)^{\alpha-k}$
>
> 所以:
>
> $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

(6)求$f(x) = arctan\ x$的麦克劳林公式

> 由于$(arctan\ x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$
>
> 因此$arctan\ x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$

特别的，如果在泰勒展开中，我们令$n \to +\infty$，得到的展式也被称为幂级数。