

博弈论

WEIRD GAME

两个长度为 $2n$ 的01串，两个人轮流开始取数字。

每次只能取两个人之前都没取过的位置的数字。

n 次后两个人就得到了两个长度为 n 的数字，谁的数字大谁赢。

两个人足够机智，问是先手必胜还是后手必胜还是平局。

$$1 \leq n \leq 10^6$$

CODEFORCES 293A WEIRD GAME

贪心。显然先用自己的1来使得对方拿不到1最优。

时间复杂度 $O(n)$ 。

热身

A 选择一个正整数 n 并保密，B 的目标是找出这个整数。

AB 分轮进行游戏。在每一轮游戏中，B 要在黑板上写下一个最多包含 n 个整数的列表。如果 B 在一轮中写的数字个数超过 n ，B 就输了。如果 n 是 B 所写的数字之一，B 就赢了游戏；否则，A 会宣布你所写的数字中哪些比 n 小，哪些比 n 大，然后进入下一轮。

问需要多少轮 B 能够赢得游戏。

必胜点和必败点

必胜点和必败点的概念：

- P点：必败点，换言之，就是谁处于此位置，则在双方操作正确的情况下必败。
- N点：必胜点，处于此情况下，双方操作均正确的情况下必胜。

必胜点和必败点的性质：

- 所有终结点是必败点P。
- 从任何必胜点N操作，至少有一种方式可以进入必败点P。
- 无论如何操作，必败点P都只能进入必胜点N。

GOOD LUCK IN CET-4 EVERYBODY!

Kiki和Cici打牌的规则是这样的：

- 总共 n 张牌；
- 双方轮流抓牌；
- 每人每次抓牌的个数只能是2的非负整数幂次；
- 抓完牌，胜负结果也出来了：最后抓完牌的人为胜者；

假设Kiki和Cici都是足够聪明，并且每次都是Kiki先抓牌，请问谁能赢呢？

$$1 \leq n \leq 1000$$

HDU 1847 GOOD LUCK IN CET-4 EVERYBODY!

冷静分析一波：

n	0	1	2	3	4	5	6
P/N	P	N	N	P	N	N	P

n	7	8	9	10	11	12	13
P/N	N	N	P	N	N	P	N

举个例子： $n = 5$ ，可以先拿2张牌变为 $n = 3$ 必败点，则 $n = 5$ 必胜点。

规律很明显了。实际上，我们可以归纳证明所有3的倍数的点都是P点，其余为N点。

KIKI'S GAME

有一个 $n \times m$ 的棋盘，一开始有一个硬币在 $(1, m)$

。 每轮每个人可以向左、向下、向左下移动硬币

。 不能移动硬币的人就输了。

Kiki要和zz玩这个游戏，kiki先手，判断在双方操作最优的情况下谁赢。

$$0 < n, m \leq 2000$$

HDU 2147 KIKI'S GAME

n/m	1	2	3	4	5	6
1	P	N	P	N	P	N
2	N	N	N	N	N	N
3	P	N	P	N	P	N
4	N	N	N	N	N	N
5	P	N	P	N	P	N
6	N	N	N	N	N	N

在填写表格的时候，我们也可以发现一定规律：

比如 $(x, y) = P$ 当且仅当 $(x - 1, y) = (x, y - 1) = (x - 1, y - 1) = N$ 。

归纳易得规律。

A SIMPLE STONE GAME

一堆石子有 n 个，首先第一个人开始可以去 $1 \sim (n - 1)$ 个，接下来两人轮流取石子。每个人可取的石子数必须是一个不超过上一次被取的石子的 k 倍的整数。

$$2 \leq n \leq 10^8, 1 \leq k \leq 10^5$$

HDU 2486 A SIMPLESTONE GAME

“k倍动态减法游戏”

考虑 $k = 1$ ，分析：

n	2	3	4	5	6	7	8
P/N	P	N	P	N	N	N	P

观察后归纳推理容易得到，所有必败状态为 2^i 。

我们可以把 n 分解为二进制，例如 $n = 13$ ，二进制表示为1101，考虑为何必胜。

我们可以先手去掉最后一个1，即变为 $n = 12(1100)$ 那么后手不能一次去掉更高位的1。

如果 $n = 2^i$ ，那么先手无法一次取完，后手则一定可以按照之前策略取而必胜。

HDU 2486 A SIMPLESTONE GAME

考虑 $k = 2$ ：利用和1中相同的策略，我们可以发现必败态是Fibonacci数列。

将一个数利用fibonacci分解有这样一个特殊的性质：一定不存在相邻的1。

那么就利用 $k = 1$ 完全相同的策略即可解决 $k = 2$ 的问题。

那么接下来我们就得想办法构造数列，将 n 写成数列中一些项的和。

使这些被取到的项的相邻两个倍数差 $> k$ ，那么仍然利用 $k = 1$ 方法即可解决。

设这个数列已经构造了 i 项， a_1, a_2, \dots, a_i ，前 i 项可以完美对 $1 \dots b_i$ 编码：

完美编码意为：存在一个 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_s}$ 的组合使得 $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_s} = n$ 且 $\frac{a_{i_j+1}}{a_{i_j}} > k$ 。

那么 $a_{i+1} = b_i + 1, b_{i+1} = b_i + a_{i+1}$ ，其中 t 为满足 $\frac{a_{i+1}}{a_t} > k$ 的 t 。

HDU 2486 A SIMPLESTONE GAME

设这个数列已经构造了 i 项, a_1, a_2, \dots, a_i , 前 i 项可以完美对 $1 \dots b_i$ 编码:

完美编码意为: 存在一个 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_s}$ 的组合使得 $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_s} = n$ 且 $\frac{a_{i_j+1}}{a_{i_j}} > k$.

那么 $a_{i+1} = b_i + 1, b_{i+1} = b_t + a_{i+1}$, 其中 t 为满足 $\frac{a_{i+1}}{a_t} > k$ 的 t 。

我们只需要判断 n 是否在这个数列中即可。

时间复杂度和这个数列有关系, 仔细分析(试验)可以发现足够通过所有数据。

NIM游戏

两个人玩这个游戏，他们轮流操作。

有若干堆石子，每堆石子的数量都是有限的。

一次合法的移动是“选择一堆石子并拿走若干颗（不能不拿）”。

如果轮到某个人时所有的石子堆都已经被拿空了，则判负。

如果双方都按照最优策略，谁必胜？

BOUTON'S THEOREM

对于一个nim游戏的局面 a_1, a_2, \dots, a_n ，它是P点当且仅当：

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0$$

【证明】

1. 终结点只有一种，就是 $0, 0, \dots, 0$ ，显然符合异或后为0，为P点。
2. 对于 a_1, a_2, \dots, a_n 且 $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0$ ，经一次移动后必然到达 (b_1, b_2, \dots, b_n) ，其中
$$b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_n \neq 0$$

从而到达N点。

3. 对于 a_1, a_2, \dots, a_n 且 $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n \neq 0$ ，必存在移动方法可以到达P点。

BOUTON'S THEOREM

我们设 $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = k$ ，那么设 k 二进制表示下最高位的1为第 p 位。

那么， a_1, a_2, \dots, a_n 中必定存在至少一个 a_i 使得 a_i 二进制表示下第 p 位为1。

从而，将第 i 堆石头取 $a_i - a_i \oplus k$ 个石头即可保证一定到达P点。

首先，由于 $a_i \oplus k$ 第 p 位为0，所以 $a_i \oplus k < a_i$ ，从而 $a_i - a_i \oplus k > 0$ ，符合游戏规则。

并且，取 $a_i - a_i \oplus k$ 个石头后，第 i 堆石头变为 $a_i \oplus k$ ，对于新局面 $a_1, a_2, \dots, a_i \oplus k, \dots, a_n$ ：

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_i \oplus k \oplus \dots \oplus a_n = k \oplus k = 0$$

从而一定为P点。

有向图移动游戏

有向图移动游戏可以看作所有 *Impartial Combinatorial Games* 的抽象模型。

NIM 游戏就是 *Impartial Combinatorial Games* 中的一种。

也就是说，所有 ICG 游戏都可以看成：

给定一个 *DAG* 及一个点上的一个棋子，两名选手交替将棋子沿边移动，无法移动判负。

我们把 NIM 游戏的每一个状态看成一个点，把这个状态和其可以转移到的下一个状态连边。

那么 NIM 游戏也被抽象成了一个有向图移动游戏！

SG函数

定义 $\text{mex}(S) = k$: k 为最小的不属于集合 S 的非负整数。

SG函数的定义: 对于任意一个状态 x , 都定义一个SG函数。

我们先给出定义式, 再具体说明意义。

对于任意状态 x , 设 x 的后继状态集合为 S , 则:

$$sg(x) = \text{mex}(S)$$

如果一个状态为终结点, 则 $S = \emptyset$, 从而 $sg(x) = 0$ 。

有向图移动游戏

事实上，如果把所有ICG游戏抽象成有向图移动游戏，那么sg函数就是：

$$sg(x) = \text{mex}\{sg(y) | (x \rightarrow y)\}$$

我们有这样的结论：

$$sg(x) = 0 \Leftrightarrow x \text{ 为必败点 } P \text{ 点}$$

$$sg(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \text{ 为必胜点 } N \text{ 点}$$

这个结论的正确性显然：

对于 $sg(x) = 0$ 的节点，显然根据定义， x 的后继中一定不存在 $sg(y) = 0$ 的节点 y ！

同时，对于 $sg(x) \neq 0$ 的节点，根据定义，一定存在一个 x 的后继 y 使 $sg(y) = 0$ ！

取石子问题

两个人取石子，每个人可以取1,3,4个石子。

共有 n 个石子，求是先手必胜还是后手必胜。

WYTHOFF'S GAME

将现在有两堆石子，**A**和**B**每次可以从一堆中拿走 x 个，或者从两堆中各拿走 x 个，无法拿石子的输。问什么情况下 **A** 后手有必胜策略。

输入两堆石子个数，输出**A**后手是否必胜。

WYTHOFF'S GAME

将现在有两堆石子，**A**和**B**每次可以从一堆中拿走 x 个，或者从两堆中各拿走 x 个，拿走最后一个石子的赢 ($x > 0$)。问什么情况下 **A** 后手有必胜策略。

令 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，则若两堆石子个数为 $\{[k\phi], [k\phi] + k = [k\phi^2]\}$ 时，**A**后手必胜。

考虑**B**取石子后,假设剩下两堆为 $\{a, a + d\}$

- 若 $a > [d\phi]$ ，则**A**直接取到后手必胜态 $\{[d\phi], [d\phi] + d\}$ 。
- 若 $a = [d\phi]$ ，不可能，为什么？
- 若 $a < [d\phi]$
 - 若存在 k ，使得 $a = [k\phi]$ ，**A**直接取到后手必胜态 $\{[k\phi], [k\phi] + k\}$ 。
 - 若存在 k ， $a = [k\phi^2]$ ，**A**直接取到后手必胜态 $\{[k\phi^2], [k\phi]\}$ 。
 - 必然满足上面两个存在条件中的一个，为什么？

WYTHOFF'S GAME

我们观察 $\{[k\phi]\}$ 和 $\{[k\phi^2]\}$

- $\{[k\phi]\} = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 30, 32, \dots\}$
- $\{[k\phi^2]\} = \{2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, 23, 26, 28, 31, 34, 36, 39, 41, 44, 47, \dots\}$
- 这两个数列既不重复，也不遗漏地枚举了整个正整数
 - $\{[k\phi]\} \cup \{[k\phi^2]\} = \mathbb{N}^+$
 - $\{[k\phi]\} \cap \{[k\phi^2]\} = \emptyset$
 - 等价于任何一个数，要么存在一个正整数 k ，使得 $a = [k\phi]$ ，要么存在一个正整数 k ，使得 $a = [k\phi^2]$

这解释了证明的两个为什么

但是为什么这两个数列满足这样的性质呢？

- 关键词：OEIS, Beatty sequence, Zeckendorf representation

SG定理

假设一个游戏可以分成若干个子游戏，这些子游戏的sg函数值为 s_1, s_2, \dots, s_k ，则：

整个游戏的sg函数为：

$$sg(All) = s_1 \text{ xor } s_2 \text{ xor } \dots \text{ xor } s_k$$

证明？

SG定理

我们设 $sg(x) = a$ ，那么也就是说 x 的后继节点 y 能取遍 $1, 2, \dots, a - 1$ 。

那么我们选取后继，事实上可以看成“取石子”的过程。

这样想的话，就可以利用**Bouton's Theorem**的证明来理解SG定理了。

这只是一个简单的感性推导，用于加深理解，严谨的证明可以参考[这里](#)。

FIBONACCI AGAIN AND AGAIN

今天，又一个关于Fibonacci的题目出现了，它是一个小游戏，定义如下：

- 这是一个二人游戏，两人轮流走；
- 一共有3堆石子，数量分别是 m, n, p 个；
- 每走一步可以选择任意一堆石子，然后取走 f 个；
- f 只能是菲波那契数列中的元素；
- 最先取光所有石子的人为胜者。

假设双方都使用最优策略，请判断先手的人会赢还是后手的人会赢。

$$0 \leq n, m, p \leq 1000$$

HDU 1848 FIBONACCI AGAIN AND AGAIN

分成三个子游戏，分别求出每个子游戏的sg函数，异或得总游戏sg函数即可。

是一个sg函数和sg定理的简单应用。

BOB AND BEN

给出一片森林。

每棵树有两个参数，节点数 n 和特殊参数 k ，其中 k 意义为：

第 i 个节点的父亲为第 $\max\left(1, p\left[\frac{i}{k}\right]\right)$ 个节点

两人进行游戏，每次可以删除一棵树（必须存在非叶子）或树中一个叶子。其中，叶子定义为度数为1的点。

无法操作的人输。询问先手是否必胜。

HACKERRANK BOB AND BEN

考虑一棵大小为 n 的树。

当 $n = 1$ 时, $sg(1) = 1$ 。

当 $n = 2$ 时, $sg(2) = 0$ 。

当 $n \geq 3$ 时, 一定存在非叶子节点, $sg(n) = \text{mex}\{sg(n-1), 0\}$

归纳知 $n \geq 3$ 时, $sg(2k) = 2, sg(2k+1) = 1$

利用SG定理合并即可。

(事实上, 我们发现此题中 k 并没有作用)

分裂游戏

聪聪和睿睿最近迷上了一款叫做分裂的游戏。该游戏的规则是：

- 共有 n 个瓶子，标号为 $0, 1, 2, \dots, n-1$ ，第 i 个瓶子中装有 p_i 颗巧克力豆，两个人轮流取豆子；
- 每一轮每人选择3个瓶子。标号为 i, j, k ，并要保证 $i < j, j \leq k$ 且第 i 个瓶子中至少要有1颗巧克力豆；
- 随后这个人从第 i 个瓶子中拿走一颗豆子并在 j, k 中各放入一粒豆子（ j 可能等于 k ）。
- 如果轮到某人而他无法按规则取豆子，那么他将输掉比赛。

两人最后决定由聪聪先取豆子，

聪聪希望你帮他判断是否能赢得比赛。

如果能赢得比赛，输出第一步要怎么取（字典序最小），并输出第一步的取法数量。

$$1 < n \leq 21, 0 \leq p_i \leq 10000$$

BZOJ 1188 HNOI 2007 分裂游戏

终结状态一定是所有豆子在 n 号瓶子中。

这样的话，我们可以把每一个豆子看成一个子游戏。

目标是把这个豆子移动到 n 号瓶子中。

那么，如果两个豆子在同一个瓶子中，胜负关系不改变（模仿移动即可）。

所以，可以把所有瓶子内豆子对2取模得到一个等价的游戏。

下面就要求sg函数啦！一个状态 i 会延伸出2个游戏（ j, k 两个瓶子），所以根据SG定理：

$$sg(i) = mex\{sg(j) \text{ xor } sg(k)\}$$

后面两问，因为 n 不大，直接暴力模拟第一步所有走法判断sg值即可。

移动了一次的sg值不需要重新算，把原sg值异或 $sg(i), sg(j), sg(k)$ 即可。**思考含义**。

棋盘游戏

有一个 100×100 的棋盘，其中左下角的编号为 $(0,0)$ ，右上角编号为 $(99,99)$ 。

棋盘上有 n 个Queen，最开始第 i 个Queen的位置为 (x_i, y_i) 。

两个玩家依次操作，每次一个玩家可选一个Queen，将它跳到 $(x_i - k, y_i)$ 或 $(x_i, y_i - k)$ 或 $(x_i - k, y_i - k)$ ，其中 $k > 0$ 。

注意在游戏的过程中，一个格子里面可能出现多个Queen。

如果谁先将任意一个Queen移动到 $(0,0)$ ，谁就获胜。问先手必胜还是后手必胜？

多组数据。

$$1 \leq T \leq 10, 1 \leq n \leq 1000$$

BZOJ 1457 棋盘游戏

首先显然Queen之间互不影响，利用SG定理，看成 n 个子游戏。

原来的题目都是全部移完/取完胜利，本题是有一个移动到(1,1)即胜利。

如何转化？

首先，我们定义集合 N 为能一步走到(1,1)的点， M 为一步只能走到 N 集合的点。

如果有Queen在集合 N 中的点上，先手必胜显然；

那么我们把所有的 M 集合中的点的sg值设为0，意为先手必败。

如果Queen在此处，那么先手无论怎么移动，后手都可以一步移动到(1,1)。

然后我们求出每个点的sg函数值，就得到每个子游戏的sg值，异或即得总sg值。

江南乐

给定一个数 F ，有 n 堆石子每堆初始 a_i 个，小A和对手轮流操作，其中小A为后手。

操作者先选定一个正整数 $M(M \geq 2)$ ，然后将任意一堆数量不少于 F 的石子分为 M 堆。

并满足：这 M 堆石子中石子数最多的一堆比最少的一堆至多多1。

(这样相当于尽量平均，容易证明给定 F, M 后分法唯一)

当一个玩家不能操作时，即每堆石子数量都严格小于 F 时，输掉该游戏。

求在双方操作都正确的情况下，谁会取胜。一共有 T 组数据。

$$1 \leq T \leq 100, 1 \leq n \leq 100, 1 \leq F, a_i \leq 10^5$$

BZOJ 3576 HNOI 2014 江南乐

首先，如果给定了 m ，那么根据SG定理：

$$sg(a) = \left(\bigoplus_{i=1}^{a - \lfloor \frac{a}{m} \rfloor} sg \left(\left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor \right) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{a \bmod m} sg \left(\left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor + 1 \right) \right)$$

如果这样的话，由于只要考虑奇偶性，那么复杂度是 $O(F^2)$ 级别的。

利用分块枚举除法来优化：

设当前数字 x ，块数 m ，令 $u = \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor$, $r = x \bmod m$ ，那么随着 m 每次+1，余数变化为减少 u 。

那么对于 u 相同的， m 变化偶数次，余数奇偶性不发生改变。

于是就可以进行分块枚举除法， u 的值最多 \sqrt{F} 个，每次只需计算 $sg \left(\left\lfloor \frac{x}{u} \right\rfloor \right)$ 和 $sg \left(\left\lfloor \frac{x}{u} \right\rfloor + 1 \right)$ 即可。

用记忆化搜索进行实现。

GAME ON TREE

以1为根的树，两人轮流操作，每次切掉一个子树。

切掉的子树不能包含节点1。

不能操作者输。

$$2 \leq n \leq 10^5$$

AGC017D GAME ON TREE

问题变成求树上的sg值。

如果根有 $k(k > 1)$ 个儿子，那么可以拆成 k 个游戏，然后用sg定理合并即可。

如果根只有一个儿子，那么我们给出这样一个定理。

【定理】 $sg(T) = sg(T') + 1$ ，其中 T' 为树 T 去掉根节点后的树。

这个定理可以通过归纳假设证明。

那么有了这个定理，我们通过一遍dfs即可求出整棵树的sg值，从而知道答案。

时间复杂度 $O(n)$

ANTI-NIM

除了规则改为谁先取完谁失败，其他规则不变。即：

两个人玩这个游戏，他们轮流操作。

有若干堆石子，每堆石子的数量都是有限的。

一次合法的移动是“选择一堆石子并拿走若干颗（不能不拿）”。

如果轮到某个人时所有的石子堆都已经被拿空了，则判胜。

如果双方都按照最优策略，谁必胜？

结论

必胜条件：

1. 所有堆的石子数均等于1，且有偶数堆石子；
2. 至少有一个堆的石子数大于1，且石子堆的异或和不为0。

证明

设石子数异或和为 p ，那么：

1. 当所有堆石子数均为1时：
 - A) $p = 0$ 即偶数堆，先手必胜；
 - B) $p = 1$ 即奇数堆，后手必胜。
2. 当有一堆石子数大于1时：那么显然 $p \neq 0$ 。
 - A) 总共有奇数堆石子，那么把大于1的那堆取到1个石子，转化为1B，从而先手必胜；
 - B) 总共有偶数堆石子，那么把大于1的那堆取完，转化为1B，从而先手必胜。

证明

3. 当有两堆及以上石子数大于1时:

- A) $p = 0$, 那么先手可以转化为以下两个子状态:
 - ① 至少两堆及以上的石子数大于1且 $p \neq 0$, 转化为3B;
 - ② 只有一堆石子数大于1, 由2A/2B可知必败。
- B) $p \neq 0$, 则参考Bouton Theorem 证明, 总有一种方法能转化为3A状态。

我们知道了什么?

3B总能把3A状态扔给对方, 而3A状态只能转化回3B状态或直接转化为2A/2B状态。

而2A/2B状态必胜, 所以3B状态总占先机。从而将2和3B状态合并得到结论中的2。
结论中的1显然。

ANTI-SG 与 SG定理

决策集合为空的操作者胜利，其余规则与一般SG游戏相同。

【SJ定理】

对于任意一个Anti-SG游戏，如果定义所有子游戏SG值为0时游戏结束，先手必胜条件：

1. 游戏的SG值为0且所有子游戏的SG值均不超过1；
2. 游戏的SG值不为0且至少一个子游戏的SG值超过1。

证明可以感性参考Anti-NIM必胜态的证明。

小约翰的游戏

桌子上有 n 堆石子，小约翰和他的哥哥轮流取石子。

每个人取的时候，可以随意选择一堆石子，在这堆石子中取走任意多的石子。

我们规定取到最后一粒石子的人算输。

小约翰先取，请你预测一下谁将获得游戏的胜利。

多组数据。

$1 \leq n \leq 50, 1 \leq T \leq 500$ ，每堆石子数不超过5000。

小约翰的游戏

可以求出每堆石子的sg值。（事实上， $sg(i) = i$ ， i 为石子数量）
然后用SJ定理解决本题。

总结

SG函数解题一般套路：先用暴力求出SG函数。

然后考虑是否可以优化SG函数的求解过程，从而使复杂度降低。

如果没有什么特别的思路，一个非常有效的方法就是打表。

我们可以打出sg函数的表，观察规律。

有时候，题目中不是所有的sg值都要求出来，只要求出部分sg值情况，利用记忆化搜索！

这样可以减少很多不必要的运算！

（如后文的Arpa and a game with Mojtaba）

TRIANGULATION

一个平面上有 n 个点组成了凸多边形，每次可以连接一个平面上的两个点。
要求连线之间不能相交，现在总共有 m 个平面，每个平面都有一个多边形。
两个人轮流连边，谁不能连边就输了。问先手是否必胜。

$$1 \leq m \leq 10^6, 1 \leq n \leq 10^9$$

TRIANGULATION

显然每个平面的游戏独立，所以利用SG定理，我们只需要知道每个子游戏的sg值。

令 $sg(x)$ 表示平面上有 x 个点时这个游戏的sg值，那么连一条线相当于又分成了两个平面。

（因为连线之间不能相交）

$$sg(x) = \text{mex}\{sg(i) \oplus sg(x - i - 2)\}$$

现在大家可以写一下这道题目，打一个表看能找出什么规律吧！

HDU 4664 TRIANGULATION

显然每个平面的游戏独立，所以利用SG定理，我们只需要知道每个子游戏的sg值。

令 $sg(x)$ 表示平面上有 x 个点时这个游戏的sg值，那么连一条线相当于又分成了两个平面。

（因为连线之间不能相交）

$$sg(x) = \text{mex}\{sg(i) \oplus sg(x - i - 2)\}$$

打表后找规律发现，当 x 较大时，呈现出一个长度为34的循环。

因此，对于 x 小的部分暴力， x 大的部分可以直接根据循环得出结果。

A SIMPLE NIM

有 n 堆石子，每堆 a_i 个。

每个人可以在一堆内取走任意多个石子，或者将其分成3个非空的堆。

不能取的人输。求先手必胜或后手必胜。

$$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq a_i \leq 10^9$$

试试自己写一下这题。

HDU 5795 A SIMPLENIM

有 n 堆石子，每堆 a_i 个。

每个人可以在一堆内取走任意多个石子，或者将其分成3个非空的堆。

不能取的人输。求先手必胜或后手必胜。

$$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq a_i \leq 10^9$$

试试自己写一下这题。

其实打表出来，规律非常明显啦！

综合博弈题

STONE

两个人在玩游戏，他们轮流写一个数字。

设上一轮写的数字为 y （若本轮为第一轮则 $y = 0$ ），本轮写的数字为 x ，那么需要满足：

$$1 \leq x - y \leq k$$

谁写的数 x 先满足 $x \geq n$ 则输。

多组数据。

$$0 < n \leq 10^8, 0 < k \leq 100$$

HDU 4764 STONE

转化：如果某人在 $n - 1$ 处，那么必败；

转化：有 $n - 1$ 个石子，每个人可以取 $1, 2, 3, \dots, k$ 个石子，谁先拿完谁赢。

那么很显然判断条件为 $(n - 1) \bmod (k + 1) = 0$ 。

COIN GAME

给你 n 个硬币排成一圈，编号 $1, 2, 3, \dots, n$ 。

两个人玩游戏，轮流操作。

每人每次只能翻转连续的 $1 \sim k$ 个的硬币。

翻最后一枚硬币者赢。硬币不能翻过去后再翻回来。

问先手必胜还是后手必胜。

多组数据。

$$3 \leq n \leq 10^9, 1 \leq k \leq 10, T \leq 1000$$

HDU 3951 COIN GAME

若 $k = 1$ ，那么很容易通过奇数和偶数来判断出胜负。

当 $k > 1$ 时，如果 $k \geq n$ 显然先手可以一步把所有硬币翻转完，必胜。

否则后手必胜。

证明：无论先手翻多少个硬币，由于不能翻完，他一定会把环拆成链。

后手只需要把剩下的分成完全相同的两个部分即可，称为①和②。

先手翻①的部分，后手对应翻②的部分即可必胜。

GAME OF STONES

有 n 堆石子，每堆石子开始有 s_i 个。两人轮流取石子。

每次可以在一堆石子中任意数量（不能为0个）的石子。不能取的人输。

由于这个游戏太简单了，所以下面是这个游戏的加强版。

不能在同一堆石子中取两次相同数量的石子。

在双方策略最优的情况下，先手必胜还是后手必胜？

$$1 \leq n \leq 10^6, 1 \leq s_i \leq 60$$

CODEFORCES 768E GAME OF STONES

对于普通的游戏，可以归纳得 $sg(x) = x$ ，然后运用SG定理即得答案。

我们可以推算一下新游戏得sg值，找找规律。

$$sg(0) = 0, sg(1) = \text{mex}\{sg(0)\} = 1, sg(2) = \text{mex}\{sg(1')\} = 1$$

（由于2若转移到1，那么就出现了重复的移动）

$$sg(3) = \text{mex}\{sg(0), sg(1), sg(2')\} = 2$$

$sg(4) = \text{mex}\{sg(0), sg(1), sg(3')\}$ ，其中 $sg(3')$ 为3个石子但是不能取1个石子的sg值。

$$sg(3') = \text{mex}\{sg(0)\} = 1, \text{ 故 } sg(4) = 2。$$

继续打表可知： $sg(5) = 2, sg(6) = 3, sg(7) = 3.....$

—容易发现， $sg(x)$ 表示使得 $\sigma_{i=1}^n i \leq x$ 的最大 n 。利用SG定理即得答案。

CODEFORCES 768E GAME OF STONES

sg函数博弈题常用步骤：打表找规律。

该题题解解法为dp+优化，明显利用sg函数打表找出规律效率更高。

原题解：<http://codeforces.com/blog/entry/50550>

ARPA AND A GAME WITH MOJTABA

两个玩家玩游戏，这个游戏一开始有 n 个数，两个玩家轮流操作。

每一个玩家操作时，他可以选择一个质数 p 和正整数 k 使得 p^k 至少整除这 n 个数的一个。

对于每一个能被 p^k 整除的数 x ，将 x 替换成 $\frac{x}{p^k}$

无法操作的玩家输。

求双方操作最优的情况下，先手还是后手会赢。

$$1 \leq n \leq 100, 1 \leq a_i \leq 10^9$$

CODEFORCES 850C ARPA AND A GAME WITH MOJTABA

因为 p 只能是素数，所以我们将 a_1, a_2, \dots, a_n 分解质因数后，对于每一个质数分开考虑。

接下来就相当于对单个质数求sg值。

我们需要把状态存下来，假设当前有五个数为：2 4 6 12 32，当前 $p = 2$ ，那么我们转化为
1 2 1 2 5

我们发现，对于每次操作，相同的数一定是同时操作的，所以实际上可以压缩成1 2 5

我们用二进制压位来存储这个状态，由于状态量可能很大，用记忆化搜索+map实现。

假设当前状态为 s ，可以枚举正整数 k ，那么下一个状态就是：

$$(s \gg k) | (s \& (1 \ll (k - 1) - 1))$$

利用sg函数定义即可求得每个质数（子游戏）的sg值，用SG定理合并即得总sg值。

LIEGES OF LEGENDRE

有 n 堆石子，第 i 堆石子初始有 a_i 个。每次可以对一堆石子进行操作。

如果当前石子是偶数，那么可以选择将这 $2x$ 个石子分成 k 堆石子数为 x 的石子堆。

还有一种没有前提的操作是取走当前堆的一个石子。

问先手有必胜策略还是后手有必胜策略。

$$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq k, a_i \leq 10^9$$

GAMEIA

有一颗 n 个节点的树，每个节点初始没有颜色。**A**和**B**玩游戏，**A**先手。

B有 k 次小动作，可在任意时刻用且一次性可以用多次，每次小动作他会选择切掉一条树边。

两人轮流操作，**A**每次将一个无色点染白，**B**每次将一个无色点染黑并将相连点染黑。

即使相连点已经被**A**染白，也可以再染回黑色。

当不能操作后，如果存在被染白的点，**A**胜，否则**B**胜。问谁有必胜策略。

多组数据。

$$T \leq 100, 1 \leq n \leq 500, 0 \leq k \leq 500$$

HDU 6105 GAMEIA

只有这棵树存在完美匹配，且B有足够的小动作数能将这棵树分成若干组点对时B胜利。

其他情况均为A胜利。

- 如果不存在完美匹配，那么A从树叶开始，每次都染树叶父节点，那么B就被迫染叶子。因为B染叶子不会改变局势，且图不存在完美匹配，总存在一个时刻，A染到了一个周围已被染色的孤立点。这时候B就输了。
- 如果存在完美匹配，但是B小动作不足以将这个树分成点对，那么：
 - 如果一个节点有多于一个叶子，那么B显然已经输了。
 - 否则，找到一个叶子，其父节点只有一个儿子，A染色之。
 - 这时候，B会被迫染这个父节点，但是这个父节点有连带影响，使得未染色点为奇数。
 - 当未染色点为奇数时，即不存在完美匹配，B必须通过小动作切断树边阻止这样的影响。
 - 当B的小动作不够时，B就输了。

GAME

Alice和Bob在玩游戏。初始Alice有 A 元，Bob有 B 元。

有 n 件商品，每件价格为 c_i 元。Alice和Bob要轮流买一些商品（不能不买）。

当且仅当有人买了第 i 件商品，才能第 $i + 1$ 件商品。每件商品只能被买一次。

不能操作的人输。Alice先手，求谁必胜。

$$1 \leq n \leq 10^6, 0 \leq A, B, c_i \leq 10^9$$

HDU 4701 GAME

两人的初始总钱数固定，为 $(A + B)$ 。

在买若干件商品后，一部分钱已花在了买商品上面，另一部分钱分别留在两个人的手中。

若我们知道当前买完了某件商品后其中一个人剩多少钱，那我们可推另一个人有多少钱。

$f(i)$ 表示在买第 i 件商品时，只要先手的人钱数不少于 $f(i)$ 就有必胜策略。

对于最后的商品， $f(n) = c_n$ （只要买一件最后一个商品即可）

如何递推？

HDU 4701 GAME

从 i 到 $i - 1$ ，分两种情况：

1. 第 $i - 1$ 种商品和第 i 种商品同一个人购买，说明在购买第 $i - 1$ 件商品就有必胜策略。

此时手里最少还要剩余 $f(i) + c_{i-1}$ ；

2. 第 $i - 1$ 种商品和第 i 种商品不是同一个人购买，那么：

前一个人在购买第 $i - 1$ 个商品后留必败态给下一个人购买第 i 件商品。

从而我们知道对于第 i 种商品，必败态为钱数不足 $f(i)$ 。

我们又知道考虑完前 $i - 2$ 商品后，两人总钱数剩余 $A + B - \sigma_{j=1}^{i-2} c_j$ 。

从而如果先手至少又 $A + B - \sigma_{j=1}^{i-2} c_j - f(i) + 1$ 元钱则必胜。¹

故 $f(i - 1) = \min(A + B - \sigma_{j=1}^{i-2} c_j - f(i) + 1, f(i) + c_{i-1})$. 时间复杂度 $O(n)$ 。

BLACK AND WHITE TREE

两个人轮流给一个有 n 个节点的树上的节点染色。先手染白色，后手染黑色。

如果最后树上存在一个白色点，与之相连没有黑色点，先手胜，否则后手胜。

求先手必胜还是后手必胜。

$$2 \leq n \leq 10^5$$

AGC014D BLACK AND WHITETREE

结论：后手赢 \Leftrightarrow 这棵树要有完美匹配。

证明：如果有完美匹配，后手显然必赢（把先手染色的点的匹配点染色即可）

下面证明必要性：若后手赢，这棵树有完美匹配。

证明逆否命题：若这棵树没有完美匹配，后手必败。

首先找到一个未匹配点，提到根，其余贪心匹配。

和上一题一样的，如果有一个点有多于一个叶子，那么先手染这个点肯定赢了。

否则，找到一个叶子节点，其父亲只有一个儿子，染父亲，那么后手只能染这个叶子。

于是这两个点就可以删掉了，最后全匹配完，根周围一定都是先手染过色的。

先手染根就赢了。所以若这棵树没有完美匹配，后手必败。

DECREMENTING

有一个 n 个数的正整数数列，初始所有数的最大公约数为1。

每次选择一个大于1的正整数，将其减1，然后设 $d = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，将所有数除以 d 。

不能操作的人输。

$$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq a_i \leq 10^9$$

AGC010D DECREMENTING

首先，题目保证了一开始至少有一个奇数。

如果有奇数个偶数，那么先手必胜。

先手先操作一个偶数，现在就出现了至少两个奇数，且有偶数个偶数。

后手如果将一个奇数变成偶数，先手可以再把这个偶数变成奇数；

后手如果把一个偶数变为奇数，先手可以把另一个偶数变成奇数。

中途如果进行了除法，那么很显然除数不会是偶数，因此不改变奇偶性。

操作到最后显然先手必胜。

如果有偶数个偶数，那么怎么办呢？

AGC010D DECREMENTING

如果有偶数个偶数，那么后手必胜？

按照上面的分析，似乎很有道理？

不对！如果有偶数个偶数，但是只有一个奇数，怎么办？

先手肯定只能操作这个奇数，不然根据前面的分析必败。

操作这个奇数后局面就变得复杂了，那么.....我们可以递归判断！

CANDY PILES

有 n 堆石子，第 i 堆初始有 a_i 个石子，两个人游戏。

每次一个人可以选择从所有堆中都取掉1个石子，或是取走含有最多个石子的一整堆。

无法操作者输，求先手必胜或后手必胜。

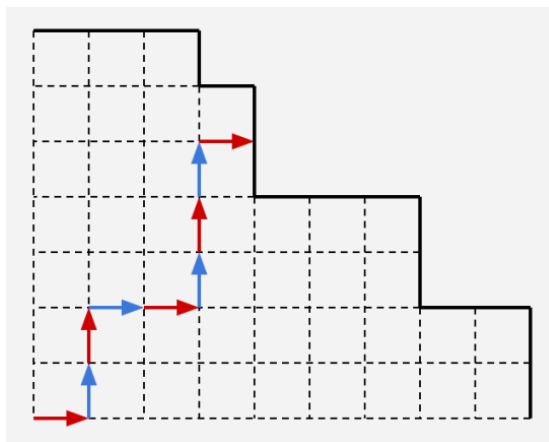
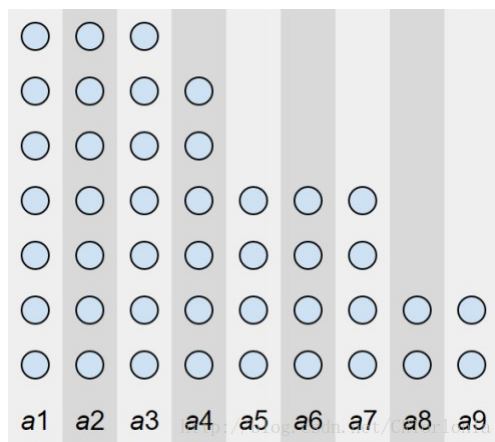
$$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq a_i \leq 10^9$$

AGC002E CANDY PILES

转化模型：把一堆石子看成石子个数 $\times 1$ 的矩形，按照石子从多到少排列。

每次相当于删除下面一行或者左边一列。

假设有一个点在 $(1,1)$ ，看成每次往上移动或者往右移动，不能移动的输。



AGC002E CANDY PILES

用SG函数容易算出每一个点是必胜还是必败，但是复杂度过大，考虑找规律。

观察得知，除了边界线上外，对角线的状态是一样的。

证明：

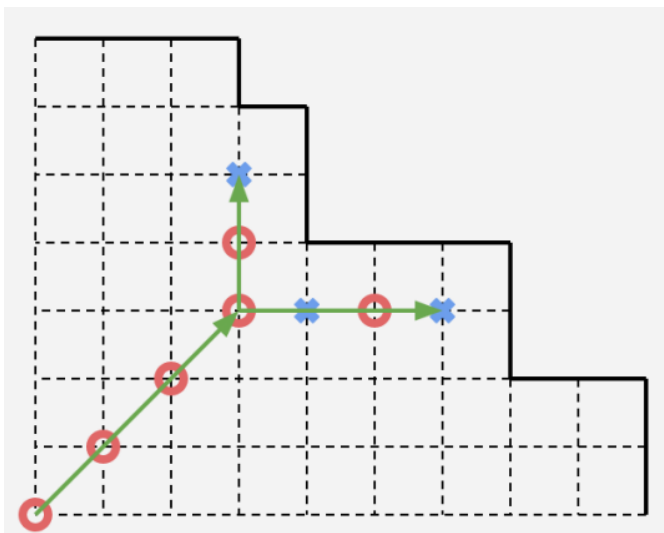
1. 如果 $(x + 1, y + 1)$ 在边界线内且必败，则 $(x + 1, y)$ 和 $(x, y + 1)$ 均必胜，从而 (x, y) 必败；
2. 如果 $(x + 1, y + 1)$ 在边界线内且必胜，则 $(x + 1, y + 2)$ 和 $(x + 2, y + 1)$ 至少有一个必败；
利用1知 $(x, y + 1)$ 和 $(x + 1, y)$ 至少有一个必败，故 (x, y) 必胜。

AGC002E CANDY PILES

有了这个结论，我们从(1,1)不断向斜上方走，不要碰到边界线。

然后计算该点向右和向上离边界线距离，如果均为奇数，则必败；否则，必胜。

博弈论有时需要适当的模型转化！



GAMES ON DAG

给出一个 n 个点 m 条边的DAG，记为 G 。

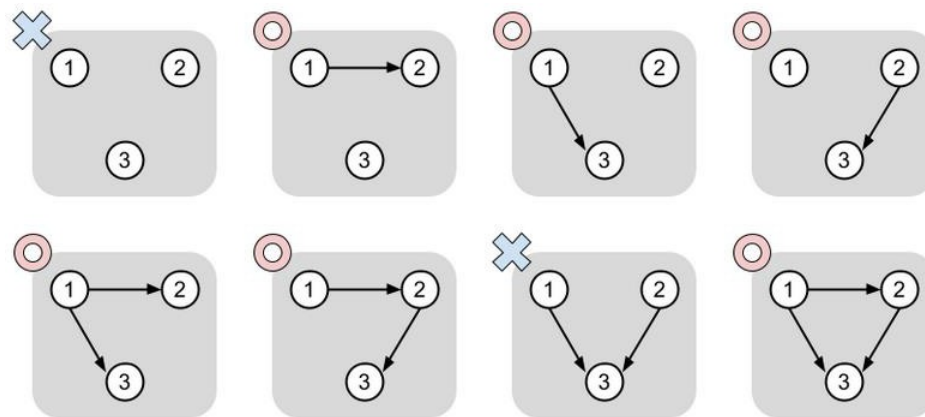
可以删掉若干条边成为 G' ，显然有 2^m 种不同的 G' 。

连边保证：若有 $(x_i \rightarrow y_i)$ 边，则 $x_i < y_i$ 。

初始点1和点2有一个标记，Alice和Bob玩游戏，每次可以将任意一个标记沿边移动。

不能移动者输，求这 2^m 张图有多少先手必胜。对 $(10^9 + 7)$ 取模。

$$2 \leq n \leq 15$$



AGC016F GAMES ON DAG

首先两个标记可以分开考虑，当作两个不同的子游戏。

那么利用SG定理我们知道，只有当1点和2点sg值不同时，先手必胜。

利用补集转换，我们求有多少种图使1点和2点sg值相同。

发现 n 很小，考虑状压。令 $f(S)$ 表示只考虑 S 这个点集的方案数。

枚举 S 的子集 T ，设 $U = S - T$ 。

那么我们令 U 点集为sg值为0的点的集合， S 点集为sg值不为0的点的集合。

那么，怎么进行计算呢？

AGC016F GAMES ON DAG

令 U 点集为sg值为0的点的集合， T 点集为sg值不为0的点的集合

1. U 之间点不能互相连边；
2. T 中每一个点至少向 U 连一条边；
3. U 中每个点向 T 随便连边；
4. T 中点的连边方案数就是 $f(T)!$ （把 $f(T)$ 任意一个方案所有sg值加1即可）

通过预处理可以使得复杂度为 $O(n3^n)$ ，其中 3^n 为枚举子集。

HARLEQUIN

给定 n 堆石子，每堆开始有 a_i 个。

两个人玩游戏，每一次可以选择任意多堆石子（不能为0堆），从选出的每堆拿一个石子。

不能操作的玩家输。求先手必胜还是后手必胜。

$$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq a_i \leq 10^9$$

ATCODER CADDI2018B HARLEQUIN

结论： 存在一堆石子有奇数个石子，则先手获胜；否则如果全为偶数，则后手获胜。

设有奇数个石子状态 S ，均为偶数个石子状态 T 。

则 S 一定可以转化成 T ，而 T 只能转化为 S 。

考虑最终所有获胜状态，均存在奇数个石子，故 S 为必胜态， T 为必败态。