

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

В отличие от начальной задачи, которая рассматривалась ранее и в которой все условия для её решения задавались для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в начальной точке здесь рассматривается более общая задача, когда часть условий на отрезке $[a, b]$ задаются слева в точке a , а часть условий - справа в точке b .

В качестве примера рассмотрим ОДУ второго порядка вида

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{df}{dx} + Q(x) = 0, \quad (1)$$

где x - независимая переменная, $Q(x)$ - известная функция, $f(x)$ - искомая функция. Решение уравнения ищется на отрезке $[a, b]$.

Так как уравнение (1) второго порядка, то необходимо задать два краевых условия. Здесь возможны следующие краевые условия:

$$\text{а) } f(a) = \alpha; \text{ б) } f(b) = \beta; \text{ в) } f'(a) = \gamma; \text{ г) } f'(b) = \delta. \quad (2)$$

Условия (а) и (б), накладываемые на функцию, принято называть граничными условиями Дирихле, а условия (в) и (г) - условиями Неймана.

Замечание. Иногда рассматриваются более сложные, так называемые смешанные граничные условия, например, $c_1 f(a) + c_2 f'(a) = c_1 \alpha + c_2 \gamma$,

где c_1, c_2 - весовые коэффициенты, для которых $c_1 + c_2 = 1$.

Здесь рассматриваются случаи, когда одно условие задано слева, а другое - справа, то есть возможны следующие варианты: 1) условия (а) и (б); 2) условия (а) и (г); 3) условия (б) и (в); 4) условия (в) и (г).

Предположим, что решение уравнения (1) при заданных краевых условиях существует и единственно.

Решение сформулированной задачи можно находить различными методами. Изложим здесь два подхода: 1) метод пристрелки (стрельбы); 2) метод конечных разностей.

Метод пристрелки.

Этот метод может быть использован для уравнений второго порядка вида (1) и имеет ограниченное применение. Метод сводит решение сформулированной краевой задачи к неоднократному решению более простой задачи: начальной задачи, которая была рассмотрена ранее. Рассмотрим, например, решение задачи при условиях $f(a) = \alpha$ и $f(b) = \beta$. Приведем уравнение второго порядка (1) к двум уравнениям первого порядка

$$\frac{df}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{df}{dx} - Q(x). \quad (3)$$

Зафиксируем условие $f(a) = \alpha$, и будем решать начальную задачу, изменяя $f'(a) = c$. В этом случае решение исходной краевой задачи сводится к подборе параметра c исходя из выполнения условия $f(b) = \beta$ заданной погрешностью. Приведенные рассуждения можно сформулировать как задачу решения уравнения

$$F(c) = \tilde{f}(b, c) - \beta = 0, \quad (4)$$

где $\tilde{f}(b, c)$ - это численное решение системы (3) при начальных условиях $f(a) = \alpha$, $f'(a) = c$.

Таким образом, решение краевой задачи сводится к решению одномерного уравнения (4) с одним неизвестным c . Правда в этом случае для вычисления $F(c)$ при каждом значении c необходимо численно решать начальную задачу для системы (3). Для решения уравнения можно, например, использовать метод половинного деления (метод бисекции). Для этого выбирается отрезок $[c_1, c_2]$ такой, чтобы $F(c_1)F(c_2) < 0$ и

предполагается, что функция $F(c)$ непрерывно зависит от параметра c . Тогда на отрезке $[c_1, c_2]$ существует по крайней мере один корень. Для уточнения значения этого корня с заданной погрешностью $\delta > 0$ используется следующий алгоритм.

1. Проверка условия окончания счета $|c_1 - c_2| < \delta$.
2. Если условие пункта 1 не выполняется, то вычисляется $x = \frac{c_1 + c_2}{2}$.
3. Если $F(c_1)F(x) < 0$, то $c_2 = x$. Иначе $c_1 = x$. Переход на пункт 1 алгоритма.

Если условие пункта 1 выполняется, то за приближенное решение уравнения (3) принимается $\tilde{c} = \frac{c_1 + c_2}{2}$, то есть $F(\tilde{c}) \approx 0$.

После определения \tilde{c} решается начальная задача для системы (3) при $f(a) = \alpha$, $f'(a) = \tilde{c}$ и получается приближенное решение краевой задачи $\tilde{f}(x)$.

Аналогично могут быть решены краевые задачи для условий (а) и (г), (б) и (в), (в) и (г) (2). В этом случае решаются следующие уравнения.

Для (а) и (г):

$$F(c) = \tilde{f}'(b, c) - \gamma = 0, \quad (5)$$

где $\tilde{f}'(b, c) = \tilde{z}(b, c)$ - это численное решение системы (3) при начальных условиях $f(a) = \alpha$, $f'(a) = c$.

Для (б) и (в):

$$F(c) = \tilde{f}(b, c) - \beta = 0, \quad (6)$$

где $\tilde{f}(b, c)$ - это численное решение системы (3) при начальных условиях $f(a) = c$, $f'(a) = \gamma$.

Для (в) и (г):

$$F(c) = \tilde{f}'(b, c) - \delta = 0, \quad (7)$$

где $\tilde{f}'(b, c) = \tilde{z}(b, c)$ - это численное решение системы (3) при начальных условиях $f(a) = c$, $f'(a) = \gamma$.

Все уравнения (5-7) могут решены также с помощью метода половинного деления, изложенного выше.

Метод конечных разностей.

Более универсальным методом решения краевых задач для ОДУ и для дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) является метод конечных разностей (МКР). Метод основывается на приближении производных конечными разностями (см. лекцию, посвященную численному дифференцированию).

Основные этапы МКР:

1. Дискретизация области, где определяется решение.
2. Замена производных конечными разностями.
3. Построение дискретного аналога решаемых дифференциальных уравнений.
4. Запись краевых условий с учетом проведенной дискретизации.
5. На основании дискретного аналога (разностных уравнений) и дискретизации краевых условий построение системы алгебраических уравнений и ее решение.

Решение системы алгебраических уравнений позволяет определить значения искомых функций в точках, которые получаются в результате дискретизации области решений, и тем самым приближенно найти определяемые функции.

В качестве примера рассмотрим решение ОДУ (1) при заданных краевых условиях (2).

Произведем дискретизацию отрезка $[a, b]$ узловыми точками. Для простоты рассмотрим отрезок $[0, 1]$, тогда $x_m = m/n$, где $m = 0, 1, \dots, n$.

Аппроксимируем производные в уравнении (1) конечными разностями во всех внутренних точках

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_m \approx \frac{f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}}{h^2}, \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_m \approx \frac{f_{m+1} - f_{m-1}}{2h} \quad (8)$$

где $m = 1, 2 \dots n-1$, $h = 1/n$ - параметр дискретизации.

Запишем дискретный аналог ОДУ (1)

$$\frac{f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}}{h^2} + \frac{f_{m+1} - f_{m-1}}{2h} + Q_m = 0, \quad m = 1, 2 \dots n-1 \quad (9)$$

где $Q_m = Q(x_m)$.

Краевые условия (а) и (б):

$$f_0 = f(0) = \alpha \text{ и } f_n = f(1) = \beta. \quad (10)$$

Разностные уравнения можно записать в виде системы СЛАУ

$$\begin{aligned} f_2 - 2f_1 + f_0 + \frac{h}{2}(f_2 - f_0) + h^2 Q_1 &= 0, \\ f_3 - 2f_2 + f_1 + \frac{h}{2}(f_3 - f_1) + h^2 Q_2 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} + \frac{h}{2}(f_n - f_{n-2}) + h^2 Q_{n-1} = 0,$$

Систему (11) можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} -2 & 1+h/2 & 0 & \dots & 0 \\ 1-h/2 & -2 & 1+h/2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1-h/2 & -2 & 1+h/2 \\ 0 & \dots & 0 & 1-h/2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h^2 Q_1 - f_0(1-h/2) \\ -h^2 Q_2 \\ \dots \\ -h^2 Q_{n-2} \\ -h^2 Q_{n-1} - f_n(1+h/2) \end{pmatrix} \quad (12)$$

ИЛИ

$$A f = B, \quad (13)$$

где вид матрицы A и векторов f, B следует из (12).

Для учета краевых условий (а) и (б) достаточно подставить (10) в правую часть(12).

Систему линейных алгебраических уравнений можно решить любым стандартным методом и определить массив значений искомой функции f_m , $m = 1, 2, \dots, n-1$.

Для учета других краевых условий необходимо сначала их записать с учетом проведенной дискретизации. Рассмотрим в качестве примера краевые условия $f'(a) = \gamma$ и $f'(b) = \delta$. Для этого их надо записать с помощью конечных разностей $\frac{f_1 - f_0}{h} = \gamma$ и $\frac{f_n - f_{n-1}}{h} = \gamma$. Отсюда выражаем $f_0 = f_1 - \gamma h$ и $f_n = \gamma h + f_{n-1}$. Подставляя новые значения f_0, f_n в (11), получим

$$\begin{aligned} f_2 - f_1 - \gamma h + \frac{h}{2}(f_2 - f_1 - \gamma h) + h^2 Q_1 &= 0, \\ f_3 - 2f_2 + f_1 + \frac{h}{2}(f_3 - f_1) + h^2 Q_2 &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

.....

$$\gamma h - f_{n-1} + f_{n-2} + \frac{h}{2}(\gamma h + f_{n-1} - f_{n-2}) + h^2 Q_{n-1} = 0,$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} -1-h/2 & 1+h/2 & 0 & \dots & 0 \\ 1-h/2 & -2 & 1+h/2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1-h/2 & -2 & 1+h/2 \\ 0 & \dots & 0 & 1-h/2 & -1+h/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h^2 Q_1 - \gamma h(1+h/2) \\ -h^2 Q_2 \\ \dots \\ -h^2 Q_{n-2} \\ -h^2 Q_{n-1} - \gamma h(1+h/2) \end{pmatrix} \tag{15}$$

Таким образом, при использовании других краевых условий изменяются только первое и последнее уравнения в системе (15) по сравнению с системой (12).

Численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных

Многие задачи математической физики, например, теплообмена, аэродинамики и прочности летательных аппаратов, газодинамики и др. сводятся к решению дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Особенностью ДУЧП является наличие нескольких независимых переменных, например, прямоугольных координат x, y, z и времени t . В качестве примера можно привести уравнение теплообмена, которое описывает распределение температуры в пластине

$$\frac{\partial f}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (16)$$

где a - параметр, характеризующий материал пластины.

Решением уравнения является функция $f(x, y, t)$, зависящая от трех независимых переменных.

В состав математических моделей математической физики кроме ДУЧП обязательно входят граничные и начальные (если решение зависит от времени) условия. Граничные условия задаются на границе некоторой области, где ищется решение на плоскости или в пространстве. Начальные условия определяют распределение искомой функции в этой области в начальный момент времени. Если задача решается на плоскости, как для уравнения (16), то необходимо задать двумерную область $x, y \in G$. На рис. 1 в качестве примера изображена прямоугольная область. На границе этой области задаются граничные условия, которые могут иметь различный вид.

Различают:

1. Граничные условия Дирихле.

В этом случае на границе области (или её части) задаются значения самой

функции, например, $f(x, y, t) \Big|_{x, y \in \Gamma} = g(x, y, t)$, где Γ - граница области G .

2. Граничные условия Неймана.

В этом случае на границе области (или её части) задается производная

$$\frac{\partial f}{\partial n}(x, y, t) \Big|_{x, y \in \Gamma} = p(x, y, t).$$

3. Смешанные граничные условия.

Например, $\left(f(x, y, t) + L(x, y) \frac{\partial f}{\partial n}(x, y, t) \right) \Big|_{x, y \in \Gamma} = P(x, y, t).$

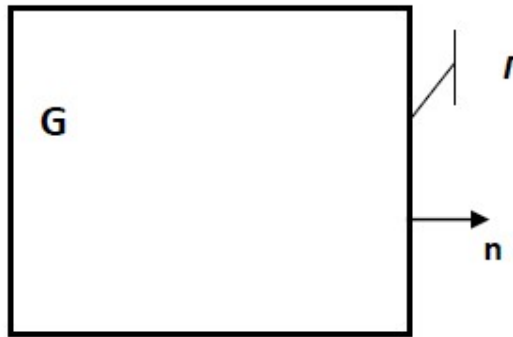


Рисунок 1 - Пример прямоугольной области

Наряду с граничными условиями необходимо также задать начальные условия, которые для уравнения (16) имеют вид $f(x, y, 0) \Big|_{x, y \in G} = h(x, y).$

В приведенных примерах граничных и начальных условий функции $g(x, y, t), p(x, y, t), P(x, y, t), L(x, y), h(x, y)$ заданы.

Классификация уравнений в частных производных второго порядка

Обычно в качестве примеров, иллюстрирующих применение различных методов численного решения ДУЧП, используются уравнения второго порядка вида

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0. \quad (17)$$

где A, B, C - заданные коэффициенты, которые могут зависеть от координат x, y .

Уравнения (17) классифицируют следующим образом.

1. Уравнения эллиптического типа, когда $B^2 - AC < 0$.
2. Уравнения параболического типа, когда $B^2 - AC = 0$.
3. Уравнения гиперболического типа, когда $B^2 - AC > 0$.

В качестве примера эллиптического уравнения можно привести уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad (18)$$

для которого $B^2 - AC = -1$.

В качестве параболического уравнения можно рассматривать одномерное уравнение теплообмена

$$\frac{\partial f}{\partial t} - a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0. \quad (19)$$

В этом случае $B^2 - AC = 0$.

К гиперболическим уравнениям можно отнести волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0. \quad (20)$$

Здесь в качестве одной независимой переменной рассматривается время, поэтому $B^2 - AC = 1$.

Уравнение Лапласа описывает стационарное или равновесное распределение температуры. Одномерное уравнение теплообмена - распределение температуры в стержне, причем процесс зависит от времени. Волновое уравнение - описывает распространение одномерной волны, например, в стержне (волны сжатия - растяжения).

Метод конечных разностей для уравнения теплообмена

Применение метода конечных разностей для ДУЧП проиллюстрируем на примере параболического уравнения теплообмена (19). Рассмотрим

уравнение (19) на отрезке $[0,1]$ сначала для граничных условий Дирихле $f(0,t) = \alpha(t)$, $f(1,t) = \beta(t)$ с начальными условиями $f(x,0) = g(x)$. Решение определяется на интервале времени $t \in [0, T]$.

Проведем дискретизацию отрезков, на которых находится решение $x_m = m / n$ ($m = 0, 1, \dots, n$), $t_k = kT / \nu$ ($k = 0, 1, \dots, \nu$). Представим производные в уравнении (19) конечными разностями и запишем дискретный аналог этого уравнения

$$\frac{f_m^{(k+1)} - f_m^{(k)}}{\Delta t} - a \frac{f_{m+1}^{(k)} - 2f_m^{(k)} + f_{m-1}^{(k)}}{h^2} \approx 0. \quad (m = 1, \dots, n-1) \quad (21)$$

где $\Delta t = \text{const}$ и $h = \text{const}$ - параметры дискретизации по времени и координате.

Перепишем (21) в виде

$$f_m^{(k+1)} = f_m^{(k)} + a\mu \left(f_{m+1}^{(k)} - 2f_m^{(k)} + f_{m-1}^{(k)} \right). \quad (m = 1, \dots, n-1) \quad (22)$$

где $\mu = \Delta t / h^2$.

Разностные уравнения (22) представляют собой явную схему метода конечных разностей для уравнения (19). Для начала итераций (22) необходимо задать начальные и граничные условия. Они в данном случае для уравнений (22) будут иметь вид $f_m^{(0)} = g(x_m)$ ($m = 1, \dots, n-1$), $f_0^{(k)} = \alpha(t_k)$, $f_n^{(k)} = \beta(t_k)$ ($k = 0, 1, \dots$). Вычисления заканчиваются по времени при достижении конца отрезка $t \in [0, T]$.

Наряду с явными схемами метода конечных разностей часто используются неявные схемы. Для неявной схемы имеем

$$f_m^{(k+1)} = f_m^{(k)} + a\mu \left(f_{m+1}^{(k+1)} - 2f_m^{(k+1)} + f_{m-1}^{(k+1)} \right). \quad (m = 1, \dots, n-1) \quad (23)$$

Для определения решения в соответствии с (23) необходимо составить СЛАУ. Для этого запишем несколько уравнений из (23)

дискретной форме $\frac{f_1^{(k+1)} - f_0^{(k+1)}}{h} = \gamma(t_{k+1})$ и $\frac{f_n^{(k+1)} - f_{n-1}^{(k+1)}}{h} = \delta(t_{k+1})$.

Далее найти отсюда $f_0^{(k+1)} = f_1^{(k+1)} - h\gamma(t_{k+1})$, $f_n^{(k+1)} = f_{n-1}^{(k+1)} + h\delta(t_{k+1})$

и подставить эти значения в первое и последнее уравнения (24). Затем необходимо скорректировать матрицу A (первая и последняя строки) и вектор $B^{(k)}$ (первый и последний элемент).

Решение полученной СЛАУ можно найти любым численным методом решения СЛАУ: методом Гаусса, итерационным методом и т.д.

Метод конечных разностей для эллиптического уравнения [1]

Одним из простейших примеров уравнения эллиптического типа является уравнение Пуассона

$$f''_{xx} + f''_{yy} = -F(x, y), \quad (26)$$

где $f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Уравнение Пуассона отличается от уравнения Лапласа (18) только наличием в правой части неоднородности $F(x, y)$.

Рассмотрим в качестве примера решение уравнения (26) в прямоугольной области (рис. 2), где $x, y \in [0, 1]$.

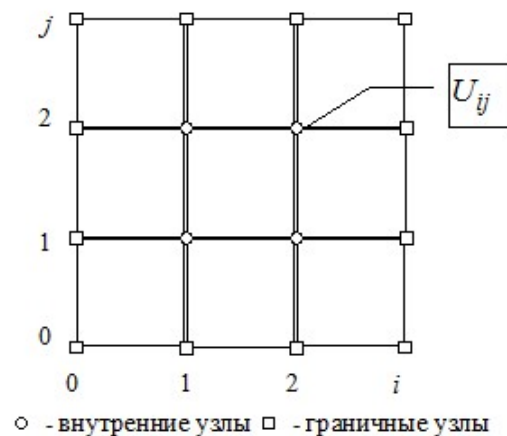


Рисунок 2 - Дискретизация области

Разобьем область (рис. 2) сеткой, то есть проведем дискретизацию задачи и запишем дискретный аналог уравнения (26)

$$\frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2} + \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{h^2} = -F_{i,j}, \quad (27)$$

где h - шаг сетки. Разностное уравнение (27) записывается для любой внутренней точки. То есть если n - количество отрезков по осям x, y , то $x_i = ih, y_j = jh, i, j = 1, 2, \dots, n-1$.

Рассмотрим случай граничных условий Дирихле. Имеем четыре стороны квадрата, на которых зададим значения функции $f(x, y)$

$$f(0, y) = g_1(y), f(x, 1) = g_2(x), f(1, y) = g_3(y), f(x, 0) = g_4(x) \quad (28)$$

где $g_{1,2,3,4}$ - известные функции своих переменных.

Условия (28) также можно записать в дискретном виде

$$f_{0,j} = g_1(y_j), f_{i,n} = g_2(x_i), f_{n,j} = g_3(y_j), f_{i,0} = g_4(x_i) \quad (29)$$

где $i, j = 1, 2, \dots, n-1$.

Уравнение (27) можно переписать в виде

$$4f_{i,j} - f_{i+1,j} - f_{i-1,j} - f_{i,j+1} - f_{i,j-1} = h^2 F_{i,j}, \quad (30)$$

Для простого случая $n = 3$ получаем следующие уравнения

$$\begin{aligned} 4f_{1,1} - f_{2,1} - f_{0,1} - f_{1,2} - f_{1,0} &= h^2 F_{1,1}, \\ 4f_{1,2} - f_{2,2} - f_{0,2} - f_{1,3} - f_{1,1} &= h^2 F_{1,2}, \\ 4f_{2,2} - f_{3,2} - f_{1,2} - f_{2,3} - f_{2,1} &= h^2 F_{2,2}, \\ 4f_{2,1} - f_{3,1} - f_{1,1} - f_{2,2} - f_{2,0} &= h^2 F_{2,1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Систему уравнений (31) можно записать в матричной форме

$$Af = B, \quad (32)$$

где $f = \begin{pmatrix} f_{1,1} \\ f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ f_{2,1} \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных узловых значений,

$$B = \begin{pmatrix} f_{0,1} + f_{1,0} + h^2 F_{1,1} \\ f_{0,2} + f_{1,3} + h^2 F_{1,2} \\ f_{3,2} + f_{2,3} + h^2 F_{2,2} \\ f_{3,1} + f_{2,0} + h^2 F_{2,1} \end{pmatrix} \text{ - вектор правых частей, } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Здесь в вектор B включены все граничные заданные значения (29) функции $f(x, y)$.

Система (32) может быть решена любым методом решения СЛАУ и соответственно могут быть найдены искомые узловые значения функции $f(x, y)$. Однако здесь необходимо отметить, что чаще всего при решении ДУЧП используются итерационные численные методы [1]. При использовании, например, прямого метода Гаусса несложные подсчеты показывают, что в этом случае этот метод мало пригоден. Для “скромной” по плотности сетки размера 100×100 число неизвестных значений функции равно 10000, а матрица системы уравнений приобретает размеры 10000×10000 . При решении такой системы уравнений возникают проблемы с памятью ЭВМ, необходимой для размещения матрицы системы, а также серьезную проблему составляют ошибки округления арифметических операций. Для полученной СЛАУ (32) матрица A является матрицей с диагональным преобладанием, то есть для нее выполняются условия

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad (33)$$

которые являются достаточными для сходимости итерационного метода (Якоби, Зейделя и др.).

При учете граничных условий Неймана на некоторой части границе задаются значения производной по направлению ее нормали (рис. 1). Так,

например, зададим граничные условия Неймана на правой стороне области (рис. 2), то есть $\frac{\partial f}{\partial x}(1, y) = p(y)$. Дискретизация этого граничного условия для рассматриваемой задачи дает $\frac{f_{3,j} - f_{2,j}}{h} = p(y_j) = p_j$, где $j = 1, 2$. Отсюда $f_{3,1} = f_{2,1} + hp_1$, $f_{3,2} = f_{2,2} + hp_2$. Подставляя эти значения в систему (31), получим

$$\begin{aligned} 4f_{1,1} - f_{2,1} - f_{0,1} - f_{1,2} - f_{1,0} &= h^2 F_{1,1}, \\ 4f_{1,2} - f_{2,2} - f_{0,2} - f_{1,3} - f_{1,1} &= h^2 F_{1,2}, \\ 3f_{2,2} - hp_2 - f_{1,2} - f_{2,3} - f_{2,1} &= h^2 F_{2,2}, \\ 3f_{2,1} - hp_1 - f_{1,1} - f_{2,2} - f_{2,0} &= h^2 F_{2,1}. \end{aligned} \quad (34)$$

При этом вектор B и матрица A для СЛАУ (32) принимают вид

$$B = \begin{pmatrix} f_{0,1} + f_{1,0} + h^2 F_{1,1} \\ f_{0,2} + f_{1,3} + h^2 F_{1,2} \\ hp_2 + f_{2,3} + h^2 F_{2,2} \\ hp_1 + f_{2,0} + h^2 F_{2,1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для измененной матрицы также выполняются условия диагонального преобладания.

Численное решение нестационарного эллиптического уравнения]

Рассмотрим численное решение нестационарного уравнения Пуассона

$$f'_t + f''_x + f''_y = -F(x, y, t), \quad (35)$$

где $f'_t = \frac{\partial f}{\partial t}$.

В этом случае кроме граничных условий Дирихле

$$\begin{aligned} f(0, y, t) &= g_1(y, t), \quad f(x, 1, t) = g_2(x, t), \\ f(1, y, t) &= g_3(y, t), \quad f(x, 0, t) = g_4(x, t) \end{aligned} \quad (36)$$

которые в этом случае могут зависеть от времени, необходимо задать начальное распределение функции $f(x, y, t)$ в рассматриваемой области

$$f(x, y, 0) = g_0(x, y), \quad (37)$$

и отрезок времени, на котором будет искаться решение $t \in [0, T]$.

При решении нестационарного уравнения Пуассона можно рассмотреть два подхода:

1. Одновременная дискретизация уравнения (35) по координатам и по времени конечными разностями, и использование явной или неявной схемы решения полученного разностного уравнения.
2. Дискретизация по координатам и сведение ДУЧП к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и далее решение начальной задачи любым известным методом, например, методом Рунге-Кутты некоторого порядка точности.

Первый подход был рассмотрен выше при решении параболического уравнения теплообмена и его применение для эллиптического уравнения (35) аналогично. Поэтому изложим второй подход.

Проводя дискретизацию по координатам уравнения (35), получим для любой внутренней точки

$$\frac{df_{i,j}}{dt} = \frac{4f_{i,j} - f_{i+1,j} - f_{i-1,j} - f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{h^2} - F_{i,j}. \quad (38)$$

Уравнения (39) можно записать в матричной форме, используя те же матрицы, что при записи СЛАУ

$$\frac{df}{dt} = (Af - B(t)) / h^2. \quad (39)$$

Однако в правой части системы (39) в связи с видом граничных условий (36) и функции $F(x, y, t)$ присутствуют компоненты, которые зависят от времени. Так, например, граничные условия Дирихле для рассмотренной выше задачи в этом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} f_{0,1}(t) &= g_1(y_1, t), f_{0,2}(t) = g_1(y_2, t), f_{1,3}(t) = g_2(x_1, t), f_{2,3}(t) = g_2(x_2, t), \\ f_{3,1}(t) &= g_3(y_1, t), f_{3,2}(t) = g_3(y_2, t), f_{1,0}(t) = g_4(x_1, t), f_{2,0}(t) = g_4(x_2, t). \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда вектор B запишется следующим образом

$$B(t) = \begin{pmatrix} f_{0,1}(t) + f_{1,0}(t) + h^2 F_{1,1}(t) \\ f_{0,2}(t) + f_{1,3}(t) + h^2 F_{1,2}(t) \\ f_{3,2}(t) + f_{2,3}(t) + h^2 F_{2,2}(t) \\ f_{3,1}(t) + f_{2,0}(t) + h^2 F_{2,1}(t) \end{pmatrix}, \text{ где } F_{i,j}(t) = F(x_i, y_j, t).$$

Для решение системы (39) любым численным методом решения системы ОДУ на отрезке $t \in [0, T]$ необходимо учесть начальные условия для вектора f . Для любой компоненты вектора f в соответствии с (37) будем иметь

$$f_{i,j}(0) = g_0(x_i, y_j). \quad (41)$$

Таким образом, в данном случае задача решения нестационарного эллиптического уравнения (35) сводится к стандартной начальной задаче Коши для системы ОДУ (39) с начальными условиями (41) на отрезке $t \in [0, T]$.

Численное решение волнового уравнения.

Волновое уравнение (20) относится к уравнениям гиперболического типа. Данный тип ДУЧП является математической моделью многих колебательных процессов, проходящих в различных средах: колебания струны, упругие колебания в стержне, электрические волны в проводнике и др. Рассмотрим волновое уравнение с диссипацией (рассеиванием энергии) вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (42)$$

где a и $\beta > 0$ (коэффициент диссипации) - известные коэффициенты.

Уравнение описывает колебания струны, где функция $f(t, x)$ определяет смещение точек струны относительно горизонтали.

Рассмотрим решение уравнения (42) при следующих условиях:

$$f(t, 0) = \alpha(t), \quad f(t, 1) = \gamma(t), \quad f(0, x) = g_0(x), \quad \frac{\partial f}{\partial t}(0, x) = g_1(x) \quad \text{на}$$

интервалах $t \in [0, T], x \in [0, 1]$.

Как и при решении нестационарного уравнения Пуассона, процесс решения уравнения (42) разобьем два этапа:

1. Дискретизация по координате x отрезка $x \in [0, 1]$ и приведение уравнения (42) к системе ОДУ.
2. Решение начальной задачи Коши для системы ОДУ по времени на интервале $t \in [0, T]$.

После первого этапа дискретизации получим

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} - a^2 \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + \beta \frac{df_i}{dt} = 0. \quad (43)$$

где $i = 1, 2, \dots, n-1$; $f_i = f(x_i)$, $x_i = hi$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$, $h = 1/n$.

Для интегрирования системы (43) приведем ее стандартной форме системы уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{dt} &= V_i \\ \frac{dV_i}{dt} &= a^2 \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} - \beta V_i = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

с начальными и граничными условиями $f_i(0) = g_0(x_i)$, $V_i(0) = g_1(x_i)$, $f_0(t) = \alpha(t)$, $f_n(t) = \gamma(t)$.

Если заданы граничные условия Неймана $\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) = \delta(t)$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(1, t) = \nu(t)$, то необходимо их записать в дискретном виде

$$\frac{f_1 - f_0(t)}{h} = \delta(t), \quad \frac{f_n(t) - f_{n-1}}{h} = \nu(t), \quad \text{и отсюда выразить}$$

$f_0(t) = f_1 - h\delta(t), \quad f_n(t) = f_{n-1} + h\nu(t)$. Эти значения используются в системе (44) в первых двух ($i = 1$) и в последних двух ($i = n - 1$) уравнениях.

Пример.

Исходные данные:

$$n = 10, \quad a = 2.2, \quad \beta = 0.05, \quad f_0 = f_n = 0, \quad f(0, x) = g_0(x) = \sin \pi x, \quad$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0, x) = 0.$$

Некоторые результаты вычислений представлены на рис. 3-5. На рис. 3 показаны смещения точек струны относительно горизонтали. Так как струна закреплена с обоих концов, то смещение 5 точки (жирная линия), которая находится дальше от концов наибольшее. На рис. 4 показаны соответствующие вертикальные скорости тех же точек. На рис. 5 показаны три положения струны в разные моменты времени относительно горизонтали.

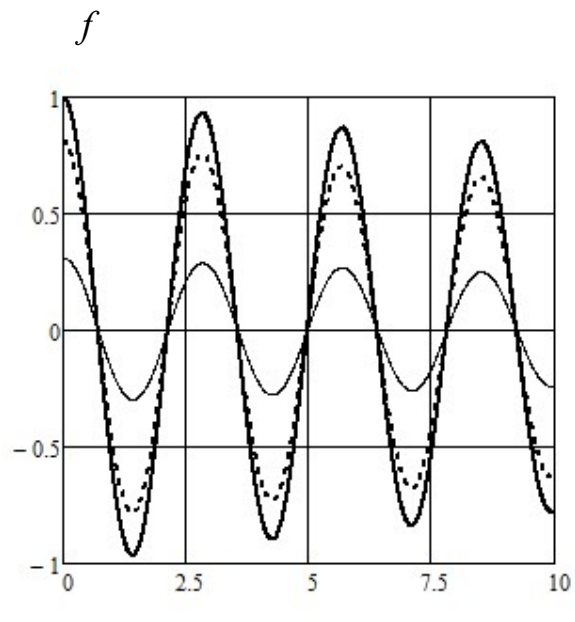


Рисунок 3 - Смещения 1, 3, 5 точек струны относительно горизонтали

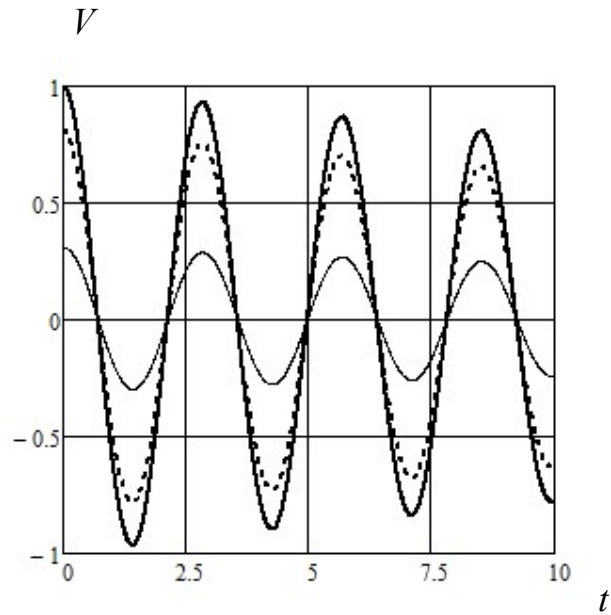


Рисунок 4 - Скорости 1, 3, 5 точек струны

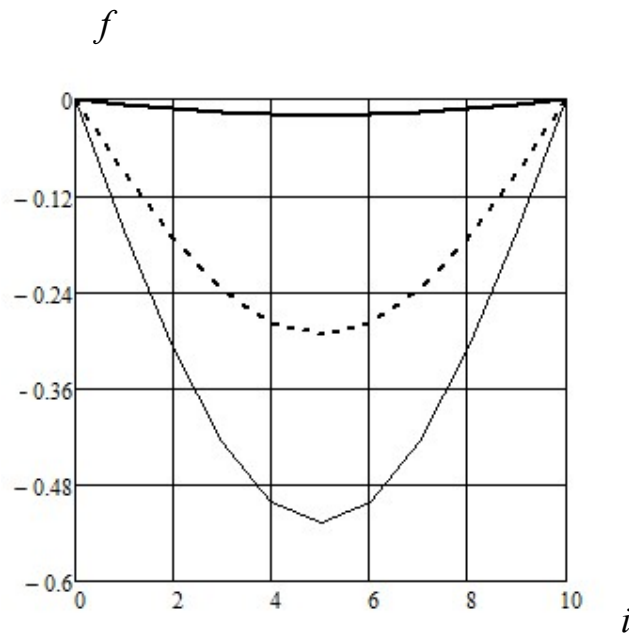


Рисунок 5 - Три положения струны в процессе колебаний

Численный расчет системы (44) был проведен методом Рунге-Кутты 4-ого порядка точности.

Более сложный случай граничных условий показана на рис. 6, где положение левого конца непостоянно, а имеет периодическое возмущение вида $f_0(t) = \alpha(t) = \alpha_m \sin \omega_m t$, где $\alpha_m = 0.2$, $\omega_m = 0.5$. На рис. 6 показаны

смещения средней точки струны. В этом случае колебания имеют характер биений, когда на колебательный процесс накладываются периодические низкочастотные колебания амплитуды.

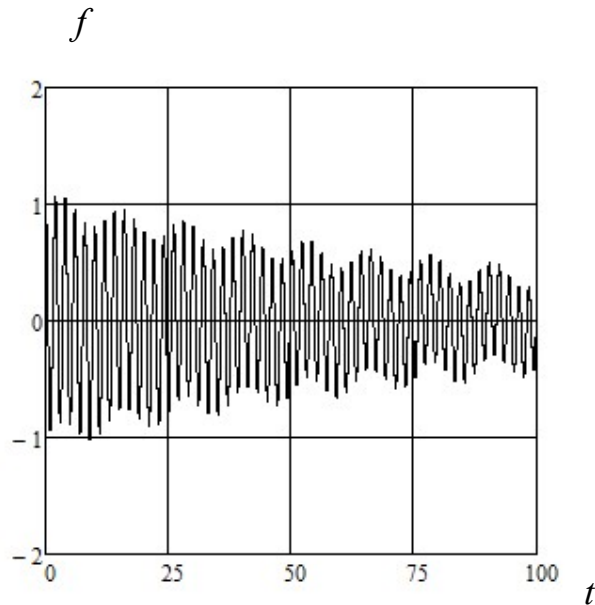


Рисунок 6 - Колебания при периодическом возмущении

Решение волнового уравнения методом усреднения. Метод взвешенных "невязок".

Рассмотрим волновое уравнение с возмущениями вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \lambda f + \varepsilon F\left(f, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}\right). \quad (45)$$

где λ - некоторый параметр, ε - малый параметр, $F\left(f, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$ - известная функция, $x \in [0, 1]$.

Граничные условия: $f(t, 0) = f(t, 1) = 0$.

Начальные условия: $f(0, x) = g(x)$, $\frac{\partial f}{\partial t}(0, x) = G(x)$.

Решение состоит из двух этапов:

1. Приведение к системе ОДУ.
2. Применение метода усреднения.

1 этап.

Рассмотри невозмущенную систему при $\varepsilon = 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \lambda f. \quad (46)$$

Решение ищется методом разделения переменных в виде

$$\tilde{f}(t, x) = \sum_{m=1}^M (A_m \cos \omega_m t + B_m \sin \omega_m t) \sin m\pi x. \quad (47)$$

где A_m, B_m - произвольные постоянные, ω_m - частоты.

Решение (7) можно переписать также в виде

$$\tilde{f}(t, x) = \sum_{m=1}^M Z_m(t) N_m(x). \quad (48)$$

где $N_m(x)$ - базисные функции.

Проведем дифференцирование

$$\frac{\partial \tilde{f}(t, x)}{\partial t} = \sum_{m=1}^M \omega_m (-A_m \sin \omega_m t + B_m \cos \omega_m t) \sin m\pi x. \quad (49)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}(t, x)}{\partial t^2} = - \sum_{m=1}^M \omega_m^2 (A_m \cos \omega_m t + B_m \sin \omega_m t) \sin m\pi x. \quad (50)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}(t, x)}{\partial x} = \pi \sum_{m=1}^M m (A_m \cos \omega_m t + B_m \sin \omega_m t) \cos m\pi x. \quad (51)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}(t, x)}{\partial x^2} = -\pi^2 \sum_{m=1}^M m^2 (A_m \cos \omega_m t + B_m \sin \omega_m t) \sin m\pi x. \quad (52)$$

Подставим производные (50), (52) в невозмущенное уравнение (46) и приравняем к нулю выражения при $\cos \omega_m t, \sin \omega_m t$ (они получаются одинаковыми). Тогда

$$\omega_m^2 = a^2 m^2 \pi^2 - \lambda > 0. \quad (53)$$

то есть получаем выражения для определения частот в системе.

Теперь будем искать решение исходного возмущенного уравнения в виде

$$\tilde{f}(t, x, \varepsilon) = \sum_{m=1}^M Z_m(t, \varepsilon) \sin m\pi x. \quad (54)$$

Найдем производные

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}(t, x, \varepsilon)}{\partial t^2} = \sum_{m=1}^M \ddot{Z}_m(t, \varepsilon) \sin m\pi x. \quad (55)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}(t, x, \varepsilon)}{\partial x^2} = -\pi^2 \sum_{m=1}^M m^2 Z_m(t, \varepsilon) \sin m\pi x. \quad (56)$$

Подставим производные (55) и (56) в исходное уравнение, тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \ddot{Z}_m(t, \varepsilon) \sin m\pi x - a^2 - \pi^2 \sum_{m=1}^M m^2 Z_m(t, \varepsilon) \sin m\pi x - \\ & - \lambda \sum_{m=1}^M Z_m(t, \varepsilon) \sin m\pi x - \varepsilon F\left(\tilde{f}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right) = R(\tilde{f}) \end{aligned} \quad (57)$$

Здесь $R(\tilde{f}) \neq 0$ - "невязка", то есть ошибка, которая возникает при подстановки приближенного решения в исходное уравнение.

Метод взвешенных "невязок" заключается в определении решения исходя из условия

$$\int_0^1 R(\tilde{f}) N_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (57)$$

или

$$\int_0^1 R(\tilde{f}) \sin n\pi x dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots, M. \quad (58)$$

Условия (58) можно упростить, используя условия ортогональности базисных функций $N_m(x)$. Из условий ортогональности следует

$$\int_0^1 \sin n\pi \sin m\pi x dx = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq m \\ 1/2 & \text{if } n = m \end{cases}. \quad (59)$$

Учитывая условия (59) выражения (58) упрощаются и принимают вид

$$\ddot{Z}_n + \left(a^2 n^2 \pi^2 - \lambda\right) Z_n = 2\varepsilon \int_0^1 F \sin n\pi x dx = 2\varepsilon F_n(Z_n, \dot{Z}_n). \quad (60)$$

или

$$\ddot{Z}_n + \omega_n^2 Z_n = \varepsilon F(Z_n, \dot{Z}_n) . \quad (61)$$

Здесь необходимо отметить, что выражение $F_n(Z_n, \dot{Z}_n) = \int_0^1 F \sin n\pi x dx$ - это

фактически коэффициенты разложения функции F в ряд Фурье.

Предполагается, начальные условия тоже можно разложить в ряд Фурье

$$g(x) = \sum_{n=1}^M g_n \sin n\pi x, \quad G(x) = \sum_{n=1}^M G_n \sin n\pi x. \quad (62)$$

Тогда, приравнивая

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M Z_n(0) \sin n\pi x &= \sum_{n=1}^M g_n \sin n\pi x, \\ \sum_{n=1}^M \dot{Z}_n(0) \sin n\pi x &= \sum_{n=1}^M G_n \sin n\pi x \end{aligned} , \quad (63)$$

получим $Z_n(0) = g_n, \dot{Z}_n(0) = G_n$

Таким образом, имеем систему ОДУ (61) с начальными условиями $Z_n(0) = g_n, \dot{Z}_n(0) = G_n$, то есть начальную задачу Коши. Кроме того, система (61) представляет собой колебательную систему с n степенями свободы, при решении которой можно применить метод усреднения. Делается замена переменных

$$Z_n = K_n \cos \varphi_n, \dot{Z}_n = -K_n \omega_n \sin \varphi_n, \quad (64)$$

то есть переход к переменным "амплитуды - фазы", и далее усреднение.

Используется стандартная схема метода усреднения для системы со многими степенями свободы для нерезонансного случая, изложенная ранее в лекции, посвященной колебательным системам.

Метод коллокаций

В методе коллокаций приближенное решение удовлетворяет уравнению в точках дискретизации (в точках коллокаций).

Поясним этот метод на двух достаточно простых задачах. Сначала рассмотрим стационарное уравнение, а потом нестационарное.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + Q(x) = 0, \quad (65)$$

где x - независимая переменная, $Q(x)$ - известная функция, $f(x)$ - искомая функция. Решение уравнения ищется на отрезке $[0,1]$ с граничными условиями Дирихле $f(0) = f(1) = 0$.

Проведем дискретизацию отрезка $x_m = m / n, m = 0, 1, \dots, n$.

Будем искать приближенное решение уравнения (65) в виде

$$\tilde{f}(x) = \sum_{m=1}^{n-1} a_m N_m(x), \quad (66)$$

где $N_m(x)$ - линейно независимые базисные функции, a_m - определяемые коэффициенты.

Для удовлетворения граничным условиям можно подобрать базисные функции так, чтобы $N_m(0) = N_m(1) = 0$. Для данной задачи можно принять

$$\text{a) } N_m(x) = \sin(m\pi x); \quad \text{b) } N_m(x) = x^m(1-x)^m \quad (67)$$

Подставим (66) в уравнение (65) и определим его в точках коллокаций

$$\sum_{m=1}^{n-1} a_m N_m''(x_j) + Q(x_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (68)$$

Таким образом, приходим к СЛАУ

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,n-1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(x_1) \\ Q(x_2) \\ \dots \\ Q(x_{n-1}) \end{pmatrix}. \quad (69)$$

где $A_{m,j} = N_m''(x_j)$ - компоненты матрицы A .

Определяя коэффициенты a_m , получаем решение

$$\tilde{f}(x) = \sum_{m=1}^{n-1} a_m N_m(x). \quad (70)$$

Погрешность решения можно определить, сравнивая решения для различных n .

Нестационарная задача.

На примере уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial f}{\partial t} = k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (71)$$

При $t \in [0, T]$, $x \in [0, 1]$.

Начальные условия: $f(0, x) = g(x)$.

Граничные условия: $f(t, 0) = f(t, 1) = 0$.

Решение задачи разбивается на два этапа:

1. Дискретизация по x и приведение к системы обыкновенных ДУ
2. Решение начальной задачи для ОДУ любым численным методом.

Решение ищется в виде

$$\tilde{f}(t, x) = \sum_{m=1}^{n-1} a_m(t) N_m(x), \quad (72)$$

где $N_m(x)$ - линейно независимые базисные функции, $a_m(t)$ - определяемые коэффициенты, зависящие от t .

При это должно быть $N_m(0) = N_m(1) = 0$.

Будем решать задачу методом коллокаций.

Найдем производные

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \sum_{m=1}^{n-1} \dot{a}_m(t) N_m(x), \quad \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^{n-1} a_m(t) N_m''(x). \quad (73)$$

Подставим (73) в уравнение (71) и определим его в точках коллокаций

$$\sum_{m=1}^{n-1} \dot{a}_m(t) N_m(x_j) = k \sum_{m=1}^{n-1} a_m(t) N_m''(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (74)$$

Или в матричной форме

$$A \dot{a} = C a, \quad (75)$$

где $a = (a_1, \dots, a_{n-1})^T$, а матрицы A, C размером $(n-1) \times (n-1)$ имеют компоненты

$$A_{mj} = N_m(x_j), \quad C_{mj} = k N_m''(x_j), \quad m, j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (76)$$

Получили систему ОДУ, однако, чтобы ее привести к стандартному нормальному виду Коши для численного решения, необходимо найти A^{-1} .

После этого получаем

$$\dot{a} = A^{-1} C a. \quad (77)$$

Для решения (77) любым численным методом надо задать начальные условия

$$\sum_{m=1}^{n-1} a_m(0) N_m(x_j) = g(x_j), \quad (78)$$

откуда

$$a_m(0) = A^{-1} g, \quad (79)$$

где $g = (g(x_1), \dots, g(x_{n-1}))^T$.

Надо отметить, обращать матрицу A в (77) и (79) надо только один раз.

