

Лекция (4 часа)

Тема лекций "Численное решение нелинейных уравнений и систем"

Решение нелинейных уравнений и систем - это существенно более сложная задача, чем решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Достаточно сказать, что нелинейные уравнения и системы могут иметь не одно, а много решений.

Пример. Уравнение $F(x) = x - \operatorname{tg} x = 0$ имеет бесконечное множество корней и для них невозможно найти аналитического решения. В этом нетрудно убедиться, если графически построить функции x и $\operatorname{tg} x$, и найти хотя бы качественно точки их пересечения.

Поэтому универсальных методов, которые бы гарантированно решали эти задачи не может существовать. Обычно определяются последовательно каждый корень по порядку, и находят только те корни, которые интересны в некоторой прикладной задаче.

Все изложенные ниже методы предназначены для определения какого-либо одного решения нелинейных уравнений или систем.

3.1 Численное решение нелинейного одномерного уравнения

Дано нелинейное уравнение

$$F(x) = 0, \quad (3.1)$$

где $F(x)$ - известная алгебраическая или трансцендентная функция.

Необходимо найти по крайней мере один корень уравнения (3.1) с заданной погрешностью.

Обычно задаются некоторым отрезком $x \in [a, b]$, который интересен в конкретном случае, причем должно выполняться

условие $F(a)F(b) < 0$. Тогда, если функция $F(x)$ непрерывна, то на этом отрезке должен обязательно существовать по крайней мере один корень, который необходимо найти.

Практически все приближенные методы нахождения корней нелинейных алгебраических уравнений и систем относятся к классу итерационных методов.

Определение. *Методом итерации назовем численный метод, который последовательно, шаг за шагом, уточняет первоначальное, грубое значение корня.*

Каждый шаг в таком методе называется **итерацией**. Важным свойством итерационных методов, которое присуще им или нет, является **сходимость итерационных методов**.

Пусть некоторый итерационный метод генерирует последовательность новых приближенных значений решений уравнения (3.1), которое начинается из точки x_0 : $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$. Если по мере увеличения числа шагов разница между приближенным значением корня x_n и точным x^* $\left(|x_n - x^*| \right)$ уменьшается, то говорят, что метод итераций сходится.

3.2 Метод последовательных приближений (метод простых итераций)

Уравнение (3.1) приведем к виду:

$$x = f(x). \quad (3.2)$$

Это преобразование можно сделать следующим образом. Прибавив к левой и правой частям (3.1) x и поменяв их местами, получим :

$$x = x + F(x)$$

тогда, обозначив через $f(x) = x + F(x)$, имеем (3.2).

Итерационный процесс в методе последовательных приближений строится по следующей простой формуле:

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad (3.3)$$

при этом предполагается, что начальное приближение корня уравнения (3.1) нам известно (x_0) . Начиная с x_0 последовательно подставляя найденные новые приближенные значения корня в (3.3), мы реализуем итерационный метод последовательных приближений. Основным вопросом этого метода является вопрос о сходимости x_n к решению уравнения (3.2).

Достаточное условие сходимости метода простой итерации

Пусть x^* корень уравнения (3.2), т.е.:

$$x^* = f(x^*). \quad (3.4)$$

Из равенства (3.3) вычтем равенство (3.4), получим:

$$x_n - x^* = f(x_{n-1}) - f(x^*), \quad (3.5)$$

Умножая (3.5) на $\frac{(x_{n-1} - x^*)}{(x_{n-1} - x^*)}$ имеем:

$$x_n - x^* = \frac{f(x_{n-1}) - f(x^*)}{(x_{n-1} - x^*)} \cdot (x_{n-1} - x^*),$$

тогда по теореме о среднем для непрерывной и дифференцируемой функции $f(x)$, имеющей непрерывную производную справедливо:

$$x_n - x^* = f'(\xi) \cdot (x_{n-1} - x^*),$$

где точка ξ находится между точками x_{n-1} и x^* .

Если $|f'(\xi)| < 1$ во всем рассматриваемом интервале, т.е. в интервале включающем точки $x_0, x_1, \dots, x_n, x^*$, то

$|x_n - x^*| < |x_{n-1} - x^*|$. Последнее означает, что новое значение x_n ближе к x^* чем приближенное значение корня x_{n-1} , полученное на предыдущем шаге, т.е. метод простой итерации сходится.

Таким образом, если $|f'(x)| < 1$, то процесс сходится, если же $|f'(x)| > 1$, то процесс расходится.

На рисунке 3.1 представлены геометрические интерпретации сходящегося и расходящегося процессов для метода простой итерации.

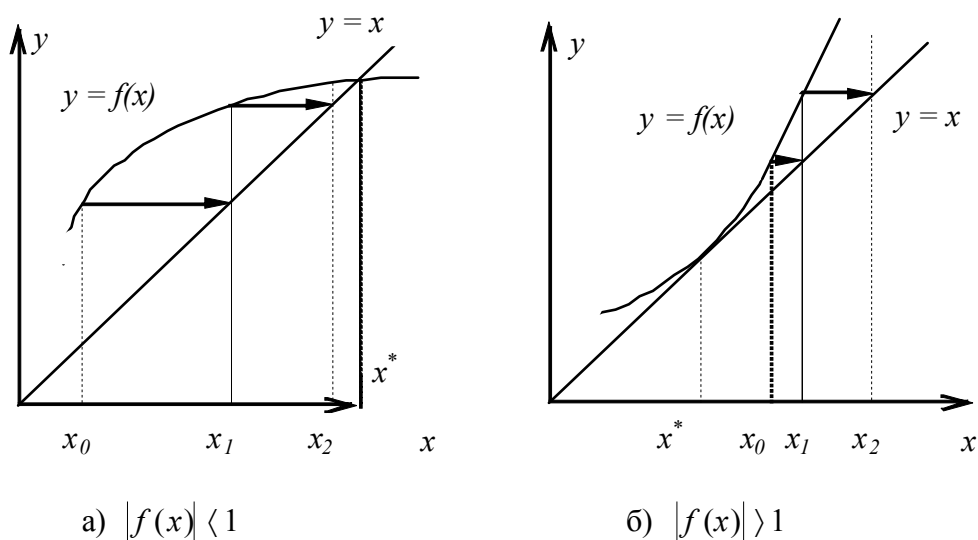


Рис.3.1 Геометрическое представление сходящегося (а) и расходящегося (б) процессов метода простой итерации.

Обычно в методе простой итерации вводят параметр

$$x_{n+1} = x_n + hF(x_n)$$

покажем, что параметр можно выбрать так, чтобы метод сходиллся.

Итерационная функция

$$f(x) = x + hF(x).$$

Найдем производную

$$f'(x) = 1 + hF'(x).$$

Приближенное условие сходимости

$$|f'(x)| = |1 + hF'(x)| < 1$$

Раскроем абсолютную величину:

$$\text{а) } 1 + hF'(x) \geq 0, \text{ тогда } 1 + hF'(x) < 1 \Rightarrow hF'(x) < 0$$

$$\text{б) } 1 + hF'(x) < 0, \text{ тогда } -1 - hF'(x) < 1 \Rightarrow -2 < hF'(x)$$

Соединяя неравенства, получим

$$-2 < hF'(x) < 0$$

Таким образом, параметр h всегда можно выбрать так, чтобы удовлетворить приближенное условие сходимости: 1) знак h противоположен знаку производной $F'(x)$; 2) по модулю параметр h должен быть достаточно мал, чтобы выполнялась левая часть полученного неравенства.

3.3. Метод Ньютона-Рафсона

Метод простой итерации медленно сходится к решению x^* . Скорость сходимости можно существенно увеличить, если «движение» к новому приближению корня (рис.3.1а) делать не параллельно оси Ox до пересечения с прямой $y = x$, а по касательной к графику кривой $y = f(x)$.

Пусть итерационный процесс достиг точки x_{n-1} . Составим уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_{n-1} :

$$y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1}) \cdot (x - x_{n-1}).$$

Найдем точку пересечения касательной с прямой $y = x$:

$$x = \frac{f(x_{n-1}) - x_{n-1} \cdot f'(x_{n-1})}{1 - f'(x_{n-1})}.$$

Построим итерационный процесс по формуле:

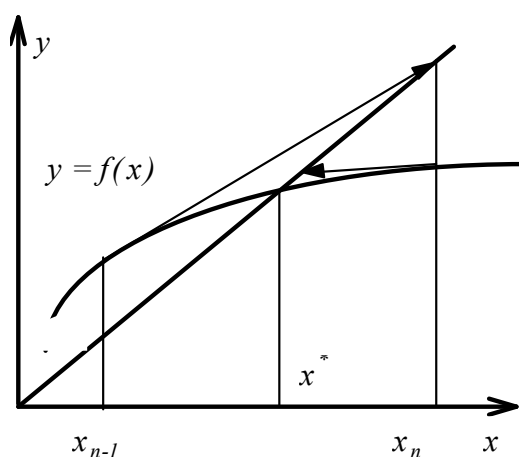


Рис.3.2 Метод касательных

$$x_n = \frac{f(x_{n-1}) - x_{n-1} \cdot f'(x_{n-1})}{1 - f'(x_{n-1})}. \quad (3.5)$$

Это и есть метод Ньютона-Рафсона. Для уравнения (3.1) итерационную формулу после несложных преобразований можно представить в виде:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}. \quad (3.6)$$

Сходимость метода Ньютона-Рафсона

Введем в обращение функцию $g(x) = \frac{f(x) - x \cdot f'(x)}{1 - f'(x)}$, тогда с помощью функции $g(x)$ итерационная формула (3.5) преобразуется к виду:

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad (3.7)$$

итерационный метод (3.7) сходится, если

$$|g'(x)| < 1$$

или

$$|g'(x)| = \left| \frac{f'(x)[f(x) - x]}{[1 - f'(x)]^2} \right| < 1$$

или

$$|g'(x)| = \left| \frac{F(x)F''(x)}{F'(x)^2} \right| < 1 \quad (3.8)$$

Несложный анализ выражения (3.8) показывает, что метод Ньютона-Рафсона сходится, если:

- 1) x_0 выбрано достаточно близко к x^* .
- 2) производная $F''(x)$ не становится слишком большой.
- 3) производная $F'(x)$ не слишком близка к нулю.

3.4. Ошибки округления в итерационных методах

Вычислительные процессы на ЭВМ практически всегда связаны с возникновением ошибок округления. Во многих случаях эти ошибки накапливаются. Так, например, при вычислении степенных рядов на ЭВМ накапливаются ошибки арифметических операций. Итерационные методы являются приятным исключением, когда

достаточно длинные итерационные процессы не только не накапливают ошибки округления, но и уменьшают ее.

В сходящихся итерационных процессах общая ошибка округления равна ошибке, возникшей в последней итерации и не зависит от арифметических операций, выполненных на предыдущих итерациях. Причина этого явления ясна - каждое новое приближение, включая и предпоследнее, можно рассматривать как исходное приближение. Ошибка округления при вычислении последнего приближения зависит, таким образом, только от арифметических операций, с помощью которых это последнее приближение получается из предпоследнего.

3.5. Выбор начального приближения

Для «запуска» итерационного метода необходимо задать начальное приближение значения корня x_0 . Иногда такое начальное приближение известно из физических соображений. Довольно часто его можно найти с помощью грубого анализа функции $F(x)$. В некоторых случаях помогает графический метод решения уравнения. В общем случае не существует эффективного алгоритма отыскания начального приближения x_0 . Приведем некоторые соображения, полезные при нахождении исходного приближения.

Любая функция $F(x)$ имеет свою область определения. В качестве примера на рисунке 3.3. приведена область определения

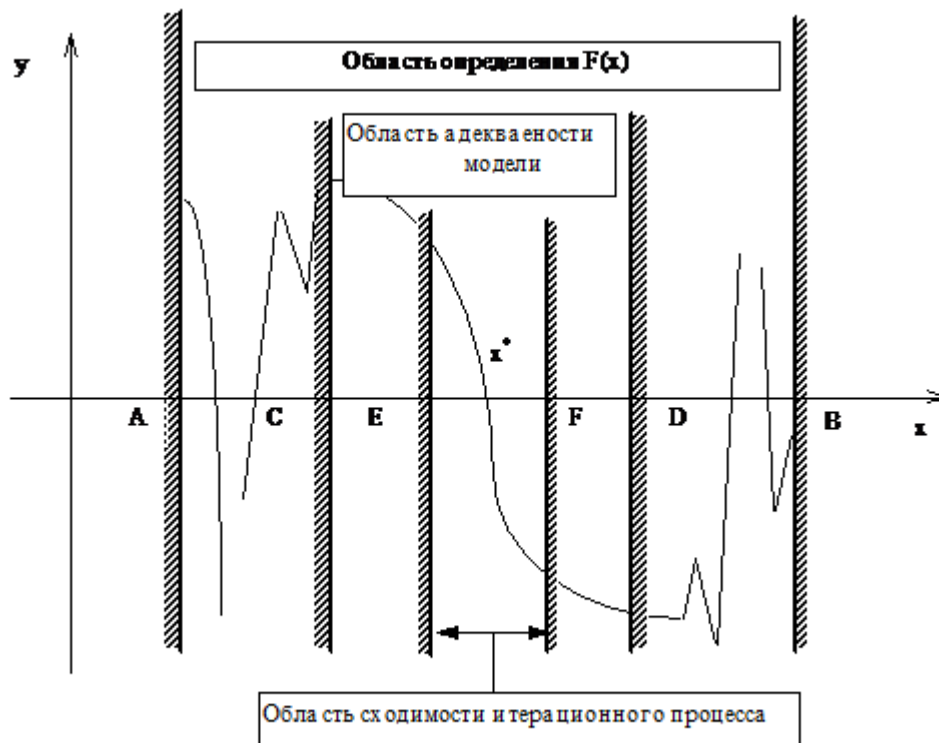


Рис. 3.3. Выбор начального приближения

некоторой функции $F(x)$ - отрезок $[A,B]$. Считается, что за пределами отрезка $[A,B]$ функция не определена. Внутри отрезка $[A,B]$ вложен еще один отрезок $[C,D]$, который описывает область адекватности математической модели $F(x)=0$.

Область адекватности - это множество таких точек, для которых функция $F(x)$ с достаточной достоверностью (т.е. с заданной точностью) описывает реальные физические процессы или явления.

Область адекватности математической модели для сложных физических объектов значительно уже области определения

функции $F(x)$, что обычно связано с большим количеством упрощающих предположений, принятых на начальном этапе построения математической модели объекта. Внутри области адекватности (отрезка $[C,D]$, рис.3.3.) можно обнаружить область сходимости итерационного метода (отрезок $[E,F]$, рис. 3.3.). Размеры области сходимости зависят от используемого итерационного метода. Очевидно, что идеальным случаем является выбор x_0 из области сходимости итерационного метода, т.е. когда $x_0 \in [E, F]$. Попадание начального приближения x_0 за пределы области сходимости, но в область адекватности может вызвать расходимость итерационного метода. Попадание x_0 за пределы области адекватности математической модели приводит, либо к нахождению несуществующих корней функции $F(x)$ (см. $[A,C]$ рис. 3.3.), либо к аварийному завершению программы (переполнение разрядной сетки, корень из отрицательного числа и т.д.).

При разработке метода нахождения начального приближения следует учитывать еще одно обстоятельство. Границы перечисленных выше областей обычно неизвестны, а ограниченность разрядной сетки ЭВМ вызывает их серьезное сужение. Задача определения границ областей адекватности модели и сходимости итерационного метода по своей трудоемкости значительно сложнее задачи отыскания корня уравнения $F(x)=0$. На практике целесообразно использовать достаточно простые методы, учитывающие перечисленные факторы.

Предположим, что из физических соображений известен отрезок $[a,b]$, содержащий решение x^* . Разыграем серию

случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, при $\xi_k \in [a, b]$, равномерно распределенных на отрезке $[a, b]$. В качестве начального приближения можно взять такую точку ξ_k , для которой $|F(\xi_k)|$ минимально, т.е. $x_0 = \xi_k$. Итерационный процесс запускается из точки x_0 , если при этом метод расходится, то необходимо разыграть еще одну серию случайных величин и т.д., пока не будет найдено решение x^* . При реализации предложенного метода выбора начального приближения x_0 необходимо изыскать возможность перехвата программных прерываний в тех случаях, когда ξ_k выходит за пределы области определения $F(x)$.

В тех случаях, когда область адекватности модели $F(x)$ достаточно велика, решить проблему нахождения начального приближения x_0 позволяет **метод продолжения по параметру**.

Метод продолжения по параметру

Из условия (3.8) сходимости метода Ньютона-Рафсона видно, что метод сходится, если начальное приближение x_0 достаточно близко к решению уравнения x^* . Идея метода продолжения по параметру заключается в искусственном приведении условий сходимости итерационного метода к случаю, когда он сходится.

Пусть x_0 - начальное приближение, из которого итерационный метод для задачи:

$$F(x)=0 \tag{3.15}$$

расходится.

Построим новую функцию, зависящую от параметра t $H(x, t)$, и рассмотрим задачу о нахождении корней уравнения:

$$H(x, t) = F(x) + (t - 1)F(x_0) = 0 \quad (3.16)$$

при заданном t .

Из (3.16) видно, что при $t=0$ уравнение:

$$H(x, 0) = F(x) - F(x_0) = 0$$

имеет тривиальное решение $x^* = x_0$ и в этом случае итерационный метод всегда сходится. С другой стороны, при $t=1$ решение уравнения:

$$H(x, 1) = F(x) = 0.$$

совпадает с решением исходного уравнения (3.15).

Выбирая промежуточные значения параметра $t \in [0, 1]$, можно добиться, чтобы значение корня уравнения:

$$H(x, t_1) = 0$$

было бы достаточно близко к начальному приближению x_0 . В результате находим решение x_1^* .

Новое значение x_1^* используется в качестве начального приближения для решения другой задачи при $t_1 < t_2$ в результате получаем решение x_2^* , которое уже достаточно близко от решения исходной задачи. На последнем этапе решается исходная задача $F(x)=0$ при $t=1$ для последнего найденного начального приближения x_2^* .

Таким образом вместо решения исходного уравнения $F(x)=0$ из точки x_0 в методе продолжения по параметру предлагается

построить последовательность задач для функций $H(x, t_1), H(x, t_2), \dots$, в каждой из которых начальное приближение расположено достаточно близко от своего решения. Тогда предпоследнее из найденных решений будет находиться в окрестностях решения исходной задачи, а алгоритм за конечное число шагов вычислит корень уравнения (3.15).

4. Численные методы решения систем уравнений

4.1. Введение

Проблемы решения систем уравнений возникают на практике достаточно часто. Например, с помощью системы нелинейных уравнений описываются математические модели большинства объектов исследования. Проблема решения систем нелинейных уравнений привлекает внимание ученых многих поколений. В результате, в настоящее время, имеется множество методов её решения.

В этой главе основное внимание сосредоточим на наиболее типичных представителях методов решения систем уравнений, наглядно раскрывающих главную идею метода, полагая, что с различными модификациями этих методов читатель может познакомиться в специальной литературе.

Практически все известные методы решения систем нелинейных уравнений относятся к классу итерационных методов. В связи с чем рассмотрим общие вопросы организации итерационного численного метода решения системы нелинейных уравнений. Пусть нам задана система нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Требуется найти такие значения $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, которые преобразуют уравнения (4.1) в систему тождеств. Систему (4.1) удобно записать в компактной матричной форме:

$$F(X) = 0, \quad (4.2)$$

где $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ - вектор неизвестных переменных, $F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X))^T$ - векторная функция. Через X^* обозначим решение системы уравнений (4.2).

Численные методы решения системы (4.2) сводятся к нахождению последовательности векторов X^0, X^1, \dots, X^k , которая сходится к точному решению X^* . Вектор X^0 называется начальным приближением.

Большинство итерационных методов решения системы нелинейных уравнений можно представить следующей обобщенной итерационной формулой:

$$X^{k+1} = G(X^k, H^k), \quad (4.3)$$

где H^k - вектор-параметр итерационного процесса, зависящий от результатов выполнения предыдущих операций, $G(X, H)$ - итерационная вектор-функция, вид которой зависит от способа построения итерационного процесса. Если H^k не зависит от k , то метод будет стационарным с обобщенной итерационной формулой вида:

$$X^{k+1} = G(X^k) \quad (4.4)$$

К основным характеристикам итерационных методов относятся:

1. *Сходимость метода*, определяющая его алгоритмическую надежность.
2. *Скорость сходимости*, определяющая точность и экономичность метода.

Сходимость итерационных методов

Итерации называются сходящимися, если выполняются следующие условия:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^k = X^*.$$

Пусть вектор-функция $G(X)$ определена и непрерывна вместе со своей матричной производной $G'_X(X) = \frac{dG}{dX}$ тогда, если X^k не выходит из области определения вектор-функций $F(X)$ и $G(X)$ и если спектральный радиус ρ матрицы $G'_X(X)$ меньше 1, т.е.:

$$\rho(G'_X(X)) < 1 \quad (4.5)$$

то процесс итераций (4.4) сходится к решению X^* .

Условие (4.5) определяет достаточное условие сходимости итерационного процесса. Здесь под матричной производной $G'_X(X)$ (якобиан) подразумевается следующее выражение:

$$G'_X(X) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2(X)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n(X)}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Определение. Спектральным радиусом $\rho(A)$ квадратной матрицы A называется максимальный из модулей ее собственных значений:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\} \quad (4.6),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - собственные значения (числа) матрицы A .

Условия сходимости (4.5) итерационного метода (4.4) напоминает достаточный признак сходимости метода последовательных

приближений решения нелинейных уравнений (см. п. 3.2), с той лишь разницей, что вместо $f(x)$ в (4.5) используется матричная производная векторной функции $G(X)$, а операция взятия модуля заменяется оператором вычисления спектрального радиуса.

Условия сходимости итерационного метода сформулировано для произвольных значений X из области определения $G(X)$ и $F(X)$, т.е. для любого начального приближения X^0 и относится к глобальной теореме сходимости.

Однако доказать сходимость итерационных процессов на основании этой теоремы и дать практические рекомендации к обоснованию сходимости итераций, во многих реальных случаях не представляется возможным. В связи с этим нашло применение условие локальной сходимости, в котором предполагается, что решение X^* существует, а начальное приближение X^0 выбрано достаточно близко к X^* . В этом случае достаточно оценить спектральный радиус матрицы $G(X)$ только в точке X^* , а результаты распространить на окрестности точки X^* . Такая оценка позволяет теоретически оценить поведение итерационного процесса в окрестностях точного решения.

При необходимости с помощью условия (4.5) можно проверить, будет ли сходиться метод из произвольной точки X^k .

Скорость сходимости итераций

Выполнение условия (4.5) обеспечивает уменьшение расстояния между X^k и X^* $\left(\|X^k - X^*\|\right)$ с увеличением номера итераций k .

Скорость, с которой уменьшается $|X^k - X^*|$ в ближайшей окрестности точного решения, называется скоростью сходимости итераций. Скорость сходимости можно оценить по формуле

$$|X^{k+1} - X^*| = c |X^k - X^*|^m \quad (4.7)$$

где m целое число, c - константа ($|c| < 1$).

Если $m = 1$, то итерационный метод имеет линейную скорость сходимости, так как $|X^{k+1} - X^*|$ является линейной функцией от $|X^k - X^*|$.

Если $m = 2$, то метод обладает квадратичной скоростью сходимости.

Если $1 < m < 2$, то говорят о сверхлинейной скорости сходимости.

Если $c > 1$, то итерационный метод расходится.

4.2. Метод простой итерации

В большинстве итерационных методов решения систем нелинейных уравнений структура итерационной функции $G(X)$ имеет следующий вид:

$$G(X) = X + B \cdot F(X) \quad (4.8)$$

где B - некоторая итерационная матрица размера $n \times n$. В результате имеем вместо (4.4) следующую обобщенную итерационную формулу:

$$X^{k+1} = X^k + B \cdot F(X^k) \quad (4.9)$$

В методе простой итерации итерационная матрица имеет вид

$$B = h \cdot E, \quad (4.10)$$

где h - скалярная величина, E - единичная матрица размера $n \times n$.

Тогда итерационная формула метода простой итерации может быть

представлена формулой:

$$X^{k+1} = X^k + h \cdot F(X^k) \quad (4.11)$$

Сходимость метода простой итерации

Вычислим $G'_X(X)$ для метода простой итерации:

$$\frac{\partial G(X)}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} [X + h \cdot F(X)] = \frac{\partial X}{\partial X} + h \cdot \frac{\partial F(X)}{\partial X} \quad (4.12)$$

Для векторной функции $F(X)$ матрица

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

получила название матрицы Якоби или якобиан. Тогда, учитывая

обозначение $Я = \frac{\partial F(X)}{\partial X}$, для (4.12) имеем:

$$G'_X(X) = E + h \cdot Я \quad (4.13)$$

Для сходимости метода простой итерации требуется, чтобы

$$\rho(E + h \cdot Я) < 1$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ собственные значения матрицы Я. Для единичной матрицы E собственные значения $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 1$.

Покажем, что собственные значения матрицы $E + h \cdot Я$ будут: $1 + h\lambda_1, 1 + h\lambda_2, \dots, 1 + h\lambda_n$.

Первоначально найдем собственные значения матрицы $h \cdot Я$.

Если λ_i собственные значения матрицы Я, то из определения

собственного значения следует, что

$$|Y - \lambda_i \cdot E| = 0.$$

Тогда справедливо:

$$|h \cdot Y - h \lambda_i \cdot E| = h |Y - \lambda_i \cdot E| = 0, \text{ т.е.}$$

$h \lambda_i$ -собственные значения матрицы $h \cdot Y$.

Рассмотрим:

$$|(E + h \cdot Y) - (1 + h \lambda_i) \cdot E| = |E + h \cdot Y - E - h \lambda_i \cdot E| = |h \cdot Y - h \lambda_i \cdot E| = 0$$

из чего следует, что $1 + h \lambda_i$ - собственные значения матрицы $E + h \cdot Y$.

Используя определение спектрального радиуса, можно записать условия сходимости для нашего случая:

$$\rho(E + h \cdot Y) = \max\{|1 + h \lambda_1|, \dots, |1 + h \lambda_n|\} < 1 \quad (4.14)$$

Условие (4.14) можно заменить системой неравенств:

$$\begin{cases} |1 + h \lambda_1| < 1 \\ |1 + h \lambda_2| < 1 \\ \dots \\ |1 + h \lambda_n| < 1 \end{cases} \quad (4.15)$$

Анализ условий (4.15) показывает, что имеет место три случая соотношений собственных чисел λ_i , определяющие сходимость или расходимость метода простой итерации.

Случай 1. Пусть все действительные части собственных значений λ_i отрицательны, т.е. $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, тогда система неравенств (4.15) будет выполняться, если:

$$(1 + h \text{Re}(\lambda_i))^2 + h^2 (\text{Im}(\lambda_i))^2 < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

где $\text{Im}(\lambda_i)$ - мнимая часть собственного значения λ_i , из чего следует,

что параметр h необходимо выбирать положительным из системы неравенств:

$$0 < h < \frac{2|\operatorname{Re}(\lambda_i)|}{[\operatorname{Re}(\lambda_i)]^2 + [\operatorname{Im}(\lambda_i)]^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.16)$$

Случай 2. Пусть все действительные числа собственных значений положительны. В этом случае метод сходится, если параметр h выбрать по формуле (4.16) со знаком минус.

Случай 3. Если действительные части собственных значений имеют разные знаки, то метод простой итерации расходится.

Метод простой итерации имеет линейную скорость сходимости, в связи с чем медленно сходится к решению системы нелинейных уравнений X^* . На практике используются различные модификации этого метода, ускоряющие итерационный процесс.

К сожалению, полное исследование областей сходимости итерационных методов - задача на порядок сложнее, чем нахождение решения систем уравнений. Поэтому на практике такие исследования не проводятся.

Значительно проще ввести в программу критерий проверки сходимости метода, например, сравнивая расстояния между соседними итерациями:

$$\left| X^k - X^{k-1} \right| \geq \left| X^{k+1} - X^k \right|. \quad (4.22)$$

В случае расхождения итерационного процесса (невыполнения условия (4.22)) необходимо пересмотреть начальное приближение.

Методы коррекции начального приближения были рассмотрены в разделе для методов решения нелинейных уравнений.

4.3 .Метод Ньютона

Пусть итерационная матрица B в формуле (4.8) имеет вид: $B = -Я^{-1}$

тогда итерационный процесс метода Ньютона строится в соответствии с формулой:

$$X^{k+1} = X^k - Я^{-1}F(X^k). \quad (4.23)$$

Метод итераций, реализующий итерационный процесс по формуле (4.23) получил название метода Ньютона. Метод Ньютона в окрестности решения системы нелинейных уравнений X^* имеет очень высокую скорость сходимости. Как правило, это квадратичная скорость сходимости. В среднем метод Ньютона сходится за число шагов, приблизительно равное размерности пространства переменных.

Сходимость метода Ньютона

Итерационная функция метода Ньютона имеет вид:

$$G(X) = X - Я^{-1}F(X).$$

Чтобы метод Ньютона сходил к точному решению X^* из произвольного начального приближения X^0 достаточно чтобы:

$$\rho(G'_X(X)) < 1 \quad , \text{т.е. } \rho(E - (Я^{-1}F(X))'_X) < 1$$

(матричная производная берется от произведения матриц $Я^{-1}F(X)$).

К сожалению, глобальная сходимость метода Ньютона достигается при выполнении жестких ограничений на функцию $F(X)$. В частности, она должна быть непрерывной, дифференцируемой и строго выпуклой (вогнутой) в области определения $F(X)$.

Для изучения вопроса локальной сходимости метода Ньютона необходимо исследовать поведение $G'_X(X)$ в окрестности решения X^* .

Полагая матрицу Якоби в окрестности X^* , постоянной, имеем:

$$\rho(E - Y^{-1}(X^*)F'_X(X)) = \rho(E - Y^{-1}(X^*)Y(X^*)) = 0 \quad (4.24)$$

$$\text{т.к. } F'_X(X) = Y(X^*).$$

Из (4.24) следует, что для метода Ньютона всегда есть некоторая окрестность точки X^* , в которой выполняются условия сходимости итераций $\rho(G'_X(X)) < 1$. Другими словами, если начальное приближение выбрано достаточно близко к X^* , то метод Ньютона всегда сходится к точному решению X^* . Для выбора или коррекции начального приближения можно рекомендовать методы, предложенные в п. 3.6.

Особенно эффективен метод продолжения по параметру. Учитывая свойство локальной сходимости метода Ньютона, всегда можно подобрать такую последовательность параметров t_1, t_2, \dots, t_m , что начальные приближения частных задач $H(X, t_i) = 0 : X^0, X^1, \dots, X^m$ будут находиться в локальных окрестностях их решений X^1, X^2, \dots, X^* .

В качестве условия перехода к корректировке начального приближения можно предложить следующий надежный, универсальный критерий.

Если не удалось найти решение за 6,7 итераций с заданной точностью, то необходимо выбрать новое начальное приближение.

Метод Ньютона наиболее эффективен при аналитическом вычислении элементов матрицы Якоби. В тех случаях, когда найти аналитические выражения элементов матрицы Я не удастся, частные производные $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ можно заменить конечно разностными аппроксимациями:

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(x_1, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{\Delta x_j} \quad (4.25)$$

или

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(x_1, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_j - \Delta x_j, \dots, x_n)}{2\Delta x_j} \quad (4.26)$$

где Δx_j - заданный параметр дискретизации.

С учетом ошибок округления формула (4.26) более предпочтительна. С другой стороны, формула (4.25) требует меньшее количество дополнительных вычислений функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$. Дискретный метод Ньютона требует многократных вычислений каждой из нелинейных функций $f_i(x)$ на каждом итерационном шаге метода. От точности вычисления частных производных зависит не только скорость сходимости метода, но и сама сходимость метода.