

Приближенное вычисление определенных интегралов

Постановка задачи о приближенном вычислении интегралов

Ставится задача о приближенном вычислении определенного интеграла вида

$$J = \int_a^b f(x)dx, \quad (6.1)$$

где $f(x)$ - подынтегральная функция, a и b - нижний и верхний пределы интегрирования.

Если один из пределов интегрирования a и b (или оба предела вместе) равен бесконечности, или функция $f(x)$ имеет точки разрыва второго рода (то есть в этих точках обращается в бесконечность), то такой определенный интеграл называется несобственным. При приближенном вычислении несобственных интегралов предполагается, что они сходятся, то есть в этом случае существуют соответствующие пределы. Так, например, интеграл

$$J = \int_a^{\infty} f(x)dx, \quad (6.2)$$

сходится, если существует предел

$$J = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx < \infty. \quad (6.3)$$

Из математического анализа известно, что задача вычисления определенного интеграла эквивалентна вычислению площади плоской фигуры, ограниченной кривой $f(x)$ и осью абсцисс на отрезке $[a, b]$.

Методы прямоугольников

Рассмотрим сначала случай, когда пределы интегрирования a и b являются конечными числами, а функция $f(x)$ не имеет точек разрыва на отрезке $[a, b]$. Определение интеграла (6.1) основывается на построении

некоторой интегральной суммы. При этом отрезок $[a, b]$ разбивается на отдельные отрезки. Например, можно использовать равномерное разбиение на n отрезков $x_0 = a$, $x_i = x_{i-1} + h$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), $x_n = b$, где $h = \frac{b-a}{n}$.

В этом случае интегральная сумма принимает вид

$$J_n = h \sum_{i=1}^n f(\xi_i), \quad (6.4)$$

где $\xi_i = [x_{i-1}, x_i]$.

Поэтому самые простые методы приближенного вычисления интеграла основываются на использовании соответствующих интегральных сумм $J \approx J_n$ при некотором фиксированном n . Так, если $\xi_i = x_{i-1}$, получаем формулу левых прямоугольников

$$J_n = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}). \quad (6.5)$$

В случае, когда $\xi_i = x_i$, имеем формулу правых прямоугольников

$$J_n = h \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (6.6)$$

Формулы (6.5) и (6.6) дают двухстороннюю оценку для величины интеграла (6.1) в случае, когда функция $f(x)$ является монотонной на отрезке $[a, b]$.

Однако, как показано в [6], большую точность вычислений дает формула средних прямоугольников

$$J_n = h \sum_{i=1}^n f(x_i - \frac{h}{2}). \quad (6.7)$$

Формула (6.7) определяет метод приближенного вычисления интеграла (6.1) второго порядка точности [6]. Поэтому методическая погрешность этого метода есть величина порядка h^2 , то есть

$$\varepsilon_{np} = |J - J_n| = O(h^2). \quad (6.8)$$

Методы Ньютона – Котеса

Если для приближенного вычисления интеграла (6.1) вместо функции $f(x)$ подставить интерполяционный полином Лагранжа (или Ньютона) и взять интеграл обычными методами математического анализа через определение первообразной, то получим методы Ньютона – Котеса. В этом случае представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = Q_m(x) + R_m(x), \quad (6.9)$$

где m - степень интерполяционного многочлена, Q_m - интерполяционный полином, $R_m(x)$ - функция, определяющая погрешность интерполяции.

Подставив выражение (6.9) в интеграл (6.1), получим

$$J = \int_a^b Q_m(x)dx + \int_a^b R_m(x)dx = J_m + \varepsilon_m, \quad (6.10)$$

где J_m определяет приближенное значение интеграла, а ε_m - погрешность приближенной формулы.

Метод трапеций

Если в формуле (6.10) положить $m = 1$, то получается формула метода трапеций. В этом случае интерполяционный полином представляет собой линейную функцию. Разобьем, как и раньше, весь отрезок на n равных частей и вычислим приближенное значение интеграла на первом отрезке $[x_0, x_1]$. Тогда заменив функцию $f(x)$ линейным полиномом в форме Ньютона (см. лабораторную работу 3),

$$Q_1^{(0)}(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0, x_1), \quad (6.11)$$

получим

$$J_1^{(0)} = \int_{x_0}^{x_1} Q_1^{(0)}(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]. \quad (6.12)$$

Формула (6.12) определяет площадь элементарной трапеции на отрезке $[x_0, x_1]$, ограниченной прямой (6.11). Суммируя площади всех трапеций, соответствующих n отдельным отрезкам, получим

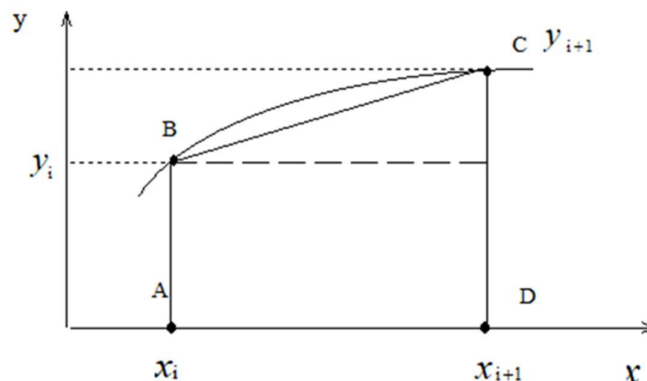
$$J_n = \sum_{i=1}^n J_1^{(i)} = h \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]. \quad (6.13)$$

Методическая погрешность для метода трапеций.

Предположим, что $y = f(x)$ - непрерывная функция вместе со своими первой и второй производными на $[a, b]$ функция. Остаточный член на i -м участке равен

$$R_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y dx - \frac{h}{2} (y_i + y_{i+1}) \quad \text{или}$$

$$R(h) = \int_{x_i}^{x_i+h} y dx - \frac{h}{2} (y(x_i) + y(x_{i+1})) \quad (6.14)$$



Дифференцируя формулу (6.14) по h последовательно два раза, получим

$$R'(h) = y(x_i + h) - \frac{1}{2}(y(x_i) + y(x_{i+1} + h)) - \frac{h}{2}y'(x_i + h) = \frac{1}{2}(y(x_i + h) - y(x_i)) - \frac{h}{2}y'(x_i + h), \quad (6.15)$$

$$R''(h) = \frac{1}{2}y'(x_i + h) - \frac{1}{2}y'(x_i + h) - \frac{h}{2}y''(x_i + h) = -\frac{h}{2}y''(x_i + h) \quad (6.16)$$

причём очевидно, что $R(0) = R'(0) = 0$.

Формулу (6.16) проинтегрируем по h и, используя теорему о среднем, получим:

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{1}{2} \int_0^h ty''(x_0 + t)dt = -\frac{1}{2}y''(\xi_1) \int_0^h tdt = -\frac{h^2}{4}y''(\xi_1), \quad (6.17)$$

где $\xi_1 \in (x_i, x_{i+1})$.

Еще раз проинтегрируем

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{4} \int_0^h t^2 y''(\xi)dt = -\frac{1}{4}y''(\xi) \int_0^h t^2 dt = -\frac{h^3}{12}y''(\xi), \quad (6.18)$$

где $\xi \in (x_i, x_{i+1})$.

Таким образом, окончательно имеем

$$R_i(h) = -\frac{h^3}{12}y''(\xi) \quad (6.19)$$

где $\xi \in (x_i, x_{i+1})$.

Тогда остаточный член на всём отрезке $[a, b]$ можно вычислить по формуле:

$$R(h) = \sum_{i=0}^{n-1} R_i(h) = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^n y''(\xi_i), \quad (6.20)$$

$$|R(h)| \leq \frac{n \cdot h^3}{12} |y''(\xi)| = \frac{(b-a)h^2}{12} |y''(\xi)|, \quad (6.21)$$

где $\xi \in [a, b]$.

Формула метода трапеций имеет на отрезке $[a, b]$ второй порядок точности, то есть

$$\varepsilon_{tr} = |J - J_n| = O(h^2). \quad (6.22)$$

Метод Симпсона

Если в формуле (6.10) положить $m = 2$, то получается формула метода Симпсона. В этом случае интерполяционный полином представляет собой параболу. Тогда на первых двух отрезках разбиения имеем

$$Q_2^{(0)}(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2), \quad (6.23)$$

$f(x_0, x_1)$, $f(x_0, x_1, x_2)$ - конечные разности первого и второго порядка.

Вычисляя интеграл от функции $Q_2^{(0)}(x)$ на отрезке $[x_0, x_2]$, получим

$$J_2^{(0)} = \int_{x_0}^{x_2} Q_2^{(0)}(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]. \quad (6.24)$$

Формула (6.24) определяет площадь, ограниченную параболой (6.23) на отрезке $[x_0, x_2]$. Группирую все отдельные отрезки по два и суммирую все элементарные площади, получаем формулу метода Симпсона

$$J_n = \sum_{i=1}^{n/2} J_2^{(i)} = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) \right], \quad (6.25)$$

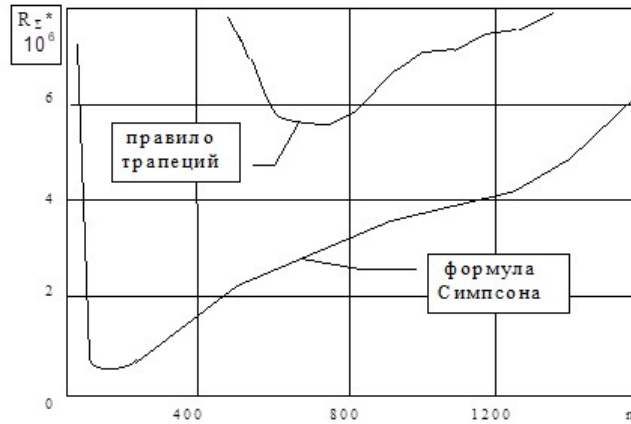
где количество отдельных отрезков $n \geq 2$ является четным.

Формула Симпсона на отрезке $[a, b]$ является формулой четвертого порядка точности, то есть

$$\varepsilon_{сим} = |J - J_n| = O(h^4). \quad (6.26)$$

Таким образом, переход от линейного интерполяционного полинома к квадратичному полиному сразу в два раза повышает порядок точности

приближенной формулы. Это обстоятельство явилось причиной особой популярности метода Симпсона по сравнению с другими методами.



Здесь для сравнения представлены графики суммарных ошибок интегрирования функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$ для правила трапеции и метода Симпсона. Из графиков видно несомненное превосходство правила Симпсона.

Обратный анализ погрешностей численного интегрирования

Для любого из рассмотренных методов приближенного вычисления определенного интеграла (6.1) имеем

$$\varepsilon = |J - J_n| = O(h^p), \quad (6.27)$$

где p - порядок точности формулы численного интегрирования.

Поэтому для оценки погрешностей приближенного вычисления определенных интегралов, также как и для оценки погрешностей численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (лабораторная работа 2), может быть использовано правило Рунге. Вывод формулы оценки аналогичен.

Запишем оценку (6.27) в несколько другой форме

$$J \approx J_n + C_p h^p, \quad (6.28)$$

предполагая, что константа может принимать значения обоих знаков.

Тогда, проводя два приближенных вычисления интеграла с шагом h и с шагом $\frac{h}{2}$, получим

$$J(h) \approx J_n + C_p h^p, \quad J\left(\frac{h}{2}\right) \approx J_n + C_p \left(\frac{h}{2}\right)^p, \quad (6.29)$$

где $J(h)$ и $J\left(\frac{h}{2}\right)$ - приближенные значения интеграла, вычисленные при шаге h и при шаге $\frac{h}{2}$.

Определяя из системы (6.29) константу C_p и вычисляя погрешность $\varepsilon \approx \left|C_p h^p\right|$, получим для любого метода порядка точности p следующую оценку

$$\varepsilon \approx C_p h^p = \frac{|J(h/2) - J(h)|}{2^p - 1} 2^p. \quad (6.30)$$

Методы приближенного вычисления несобственных интегралов

При приближенном вычислении несобственных интегралов сначала они приводятся к некоторому стандартному виду. Обычно рассматриваются следующие стандартные формы несобственных интегралов

$$J = \int_a^{\infty} f(x) dx, \quad (6.31)$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad (6.32)$$

$$J = \int_a^b f(x) dx, \quad (6.33)$$

где в последнем интеграле функция $f(x)$ имеет точки разрыва второго рода на концах отрезка $[a, b]$ (или на одном из них). Приведение интеграла (6.1) к нескольким стандартным формам заключается в разбиение

первоначального отрезка $[a, b]$ на несколько отрезков, на которых интеграл имеет стандартный вид (6.31)-(6.33). Так, например, если внутри отрезка $[a, b]$ имеется точка разрыва c функции $f(x)$ второго рода, то отрезок разбивается на два и интеграл представляется в виде суммы двух интегралов

$$J = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad (6.34)$$

которые имеют точку разрыва на конце отрезка интегрирования.

Одним из способов получения приближенных значений несобственных интегралов (6.23)-(6.25) является использование формул Гаусса – Кристоффеля, приспособленных для вычисления несобственных интегралов для конкретных особенностей подынтегральной функции $f(x)$. Например, если подынтегральная функция $f(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$ со скоростью порядка e^{-x} , то интеграл (6.31) преобразуется к виду

$$J = \int_a^\infty e^{-x} e^x f(x)dx = \int_a^\infty e^{-x} f_1(x)dx. \quad (6.35)$$

В этом случае приближенные формулы применяются к интегралу (6.35), где функция $q(x) = e^{-x}$ рассматривается как весовая функция для функции $f_1(x)$. Для таких функций построены приближенные формулы, которые получили название формул Лагерра, и они имеют вид

$$J_n = \sum_{i=1}^n A_i e^{x_i} f(x_i), \quad (6.36)$$

причем для весовых коэффициентов A_i и для узловых значений x_i определены соответствующие таблицы. Аналогично, существуют приближенные формулы для других особенностей функции $f(x)$.

Другой подход к вычислению несобственных интегралов заключается в применении обычных формул численного интегрирования (6.7), (6.13) и (6.25). В этом случае, например для интеграла (6.31), можно использовать формулу (6.3) и приближенное равенство

$$J \approx J_b = \int_a^b f(x)dx < \infty \quad (6.37)$$

при достаточно больших b .

В этом случае можно использовать следующий алгоритм вычисления интеграла с заданной погрешностью:

1. Задается некоторое значение b и подбирается с помощью правила Рунге число отдельных отрезков n (или h), которое соответствует заданной погрешности ε вычисления интеграла J_b .

2. Верхний предел увеличивается в два раза и вычисляется новое значение J_{2b} , при этом количество отдельных отрезков также увеличивается в два раза $2n$.

3. Увеличение верхнего предела происходит до тех пор, пока $|J_b - J_{2b}| < \varepsilon$.

4. Для последнего значения b для контроля можно опять применить правило Рунге оценки погрешности.