ЛЕКЦИЯ

Быстрое преобразование Фурье

Так называемое быстрое преобразование включает в себя экономичные алгоритмы вычисления коэффициентов Фурье (прямое преобразование) и тригонометрического полинома (обратное преобразование).Количество элементарных операций. необходимых для этих преобразований, уменьшается на несколько порядков.

Запишем ряд Фурье в комплексной форме (обратное преобразование)

$$Q(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{kx\,i} \qquad (1)$$

где A_k - коэффициенты Фурье, $i^2 = -1$.

Коэффициенты Фурье определяются из выражений (прямое преобразование)

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-kx\,i} dx \qquad (2)$$

Рассмотрим обратное преобразование Фурье. Разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на элементарные отрезки, то есть $2\pi = Nh$, где h - шаг дискретизации. В этом случае $x(n) = nh$, где $n = 0, 1, \ldots N-1$. Тогда

$$Q(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(k) e^{knh\,i} \approx \sum_{k=0}^{N-1} A(k) W_N^{-kn} \qquad (3)$$

где $W_N = e^{-\frac{2\pi}{N}i}$.

Таким образом, выражение (3) есть дискретное обратное преобразование Фурье.

Аналогично рассмотрим дискретное прямое преобразование Фурье. Тогда интегральная сумма будет иметь вид

$$A(k) \approx \frac{h}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-knhi} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W_N^{kn} \tag{4}$$

Теперь рассмотрим быстрые дискретные преобразования Фурье. Они основаны на делении множества точек пополам. Например, для прямого преобразования Фурье для (4) можно записать

$$NA(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2n) W_N^{2kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2n+1) W_N^{k(2n+1)} \tag{5}$$

или

$$NA(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2n) W_{\frac{N}{2}}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2n+1) W_{\frac{N}{2}}^{kn} \tag{6}$$

где $W_{\frac{N}{2}}^{kn} = W_N^{2kn}$

Выражение (6) можно переписать

$$A(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[f(2n) + W_N^k f(2n+1) \right] W_{\frac{N}{2}}^{kn} \tag{7}$$

или по другому

$$A(k) = \left[A_1(k) + W_N^k A_2(k) \right] \tag{8}$$

где

$$A_1(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2n) W_{\frac{N}{2}}^{kn} \tag{9}$$

$$A_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2n+1) W_{\frac{N}{2}}^{kn} \tag{10}$$

Разбиение общей суммы на две и вынос за скобку общего множителя W_N^k позволяет сократить количество элементарных операций. Подсчитано, для вычисление одной суммы вида

$$A(k) \approx \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n) W_N^{kn} \qquad (11)$$

требуется приблизительно $M \approx 2N^2$ операций. Следовательно, если мы разбили полную сумму (11) на две с учетом общего множителя, то количество операций будет $M_2 \approx 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 = N^2$, то есть примерно уменьшиться в 2 раза.

Далее для сумм $A_1(k)$ и $A_2(k)$ тоже можно применить тот же алгоритм деления множества точек пополам и т. д. Понятно, что для реализации рассматриваемого алгоритма необходимо, чтобы множества точек получаемых точек всегда делились пополам. Это можно сделать, если первоначальное множество точек было равно $N = 2^m$, например, $N = 2^{10} = 1024$, $N = 2^{11} = 2048$ и т.д. Конечно, от количества точек зависит погрешность приближения функции рядом Фурье и оно должно быть достаточно большим.

В общем случае подсчитано, выигрыш в количестве элементарных операций зависит от N и составляет

$$B \approx \frac{2N}{\log_2(N)} \qquad (12)$$

То есть, если $N = 2^{10} = 1024$, то выигрыш составит примерно в 200 раз. Кроме того, сокращение числа операций уменьшает вычислительную погрешность (погрешность округления чисел), которая может повлиять на результат вычислений.

Рассматриваемый алгоритм быстрого преобразования без изменений переносится на обратное дискретное преобразование

Фурье

$$Q(n) \approx \sum_{k=0}^{N-1} A(k) W_N^{-kn} \tag{13}$$

которое отличается от прямого преобразования

$$A(k) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W_N^{kn} \tag{14}$$

только общим множителем и знаком степени в сумме.