САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

Кафедра программных систем

Заболотнов Юрий Михайлович

Самара 2021

Рассмотрим приближение функций с одной независимой переменной.

Дана таблица $f(x_k) = f_k,\ k = 0,1,\ldots m$

Необходимо найти обобщенный полином

$$Q_n(x) = C_o\varphi_o(x) + C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k\varphi_k(x)$$

где n - степень полинома, $C_o, \ldots C_n$ - определяемые коэффициенты, $\varphi_o(x), \ldots \varphi_n(x)$ - заданные линейно независимые функции, x -скалярный аргумент.

В самом простом случае $\varphi_k(x) = x^k,\ k = 0,1,\ldots n$

Возможные постановки задачи

1. Интерполяция $(n = m)$

В этом случае кривая полинома проходит через все точки, то есть выполняются условия интерполяции

$$f(x_k) = P(x_k),\ k = 0,1,\ldots m$$

Возможные постановки задачи

2. Метод наименьших квадратов (МНК) $(n < m)$

В этом случае кривая полинома не может проходить через точки. Поэтому коэффициенты полинома определяются из условия минимума функции

$$S_m(C_o,...C_n) = \sum_{k=0}^{m} \left[P(x_k) - f_k\right]^2$$

Часто приближение функций рассматривают не на множестве точек, а на отрезке, то есть ставится задача о замене одной функции на другую, более простую

$$f(x) \Rightarrow P(x) \quad при \quad x \in [a,b]$$

В этом случае во многих случаях используется интегральный МНК. Тогда коэффициенты обобщенного полинома $P(x)$ **вычисляются исходя из минимума интеграла**

$$J(C_o,...C_n) = \int_a^b W(x)\left[P(x) - f(x)\right]^2 dx$$

Возможные способы построения интерполяционного полинома.

1. **Классические формулы Лагранжа и Ньютона**
2. **Сплайн - интерполяция**

Формула Лагранжа

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} C_k(x) f_k$$

где функции $C_k(x)$ **должны удовлетворять следующим условиям**

$$C_k(x_j) = \begin{cases} 0 \ при \ k \neq j \\ 1 \ при \ k = j \end{cases}$$

В этом случае условия интерполяции выполняются автоматически

$$P(x_k) = \sum_{k=0}^{m} C_k(x_k) f_k = f_k, \quad k = 0,1,\ldots m$$

ул. Московское шоссе, д.34, г.Самара, 443086, тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36, сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru

Задание функций $C_k(x)$

$$C_k(x) = \frac{\prod\limits_{k \neq j} (x - x_j)}{\prod\limits_{k \neq j} (x_k - x_j)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

Нетрудно заметить, что такое задание функций $C_k(x)$ **дает решение задачи интерполяции**

Формула Ньютона

$$P(x) = f_0 + (x-x_0) f(x_0,x_1) + (x-x_0)(x-x_1) f(x_0,x_1,x_2) + \ldots +$$
$$+ (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) f(x_0,x_1,\ldots x_n)$$

где $f(x_0,x_1), f(x_0,x_1,x_2),\ldots f(x_0,x_1,\ldots x_n)$ **- конечные разности первого, второго и n-ого порядка**

ул. Московское шоссе, д.34, г.Самара, 443086, тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36, сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru

Вычисление конечных разностей

$$f\left(x_{k-1},x_k\right)=\frac{f_k-f_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}$$ **- первого порядка**

$$f\left(x_{k-1},x_k,x_{k+1}\right)=\frac{f\left(x_k,x_{k+1}\right)-f\left(x_{k-1},x_k\right)}{x_{k+1}-x_{k-1}}$$ **- второго порядка**

$$f\left(x_0,x_1,\ldots x_n\right)=\frac{f\left(x_1,\ldots x_n\right)-f\left(x_0,\ldots x_{n-1}\right)}{x_n-x_0}$$ **- n -ого порядка**

Замечание. Задача интерполяции имеет единственного решение, поэтому формулы Лагранжа и Ньютона это один и тот же полином, только записанный в разных формах и который можно преобразовать в обычный полином

$$P_n\left(x\right)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

Оценим погрешность интерполяции классическими методами в точке $x \neq x_k,\ k = 0,1,\ldots m$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Предполагается, что функция, которую приближаем, дифференцируема до *n+1* порядка включительно.

Введем вспомогательную функцию $g(s) = f(s) - P_n(s) - K\omega(s)$

где $K = const,\quad \omega(s) = (s - x_0)(s - x_1)\ldots(s - x_n)$

Константу *K* определим из условия $g(x) = 0$

Тогда $K = \dfrac{f(x) - P_n(x)}{\omega(x)}$

В этом случае функция $g(s)$ **имеет *n+2* корня:** $x, x_k,\ k = 0,1,\ldots n$

Теперь будем дифференцировать n+1 раз функцию $g(s)$

Тогда $$g^{(n+1)}(s) = f^{(n+1)}(s) - P_n^{(n+1)}(s) - K\omega^{(n+1)}(s)$$

ул. Московское шоссе, д.34, г.Самара, 443086, тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36, сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru

Тогда $$g^{(n+1)}(s)=f^{(n+1)}(s)-P_n^{(n+1)}(s)-K\omega^{(n+1)}(s)$$

где $P_n^{(n+1)}(s)=0$

Для функции $\omega(s)=s^{n+1}+\ldots$

$$\omega'(s)=(n+1)s^n+\ldots,\ \omega''(s)=(n+1)ns^{n-1}+\ldots,\ \omega^{(n+1)}(s)=(n+1)!$$

Тогда

$$g^{(n+1)}(s)=f^{(n+1)}(s)-K(n+1)!$$

Имеем: функция $g(s)$ **имеет** ***n+2*** **корня; функция** $g'(s)$ **-** ***n+1*** **корня; функция** $g^{(n+1)}(s)$ **имеет 1 корень**

Тогда

$$g^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-K(n+1)!=0$$

Или

$$g^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-\frac{f(x)-P_n(x)}{\omega(x)}(n+1)!=0$$

Тогда получаем следующую оценку погрешности

$$\left|f(x)-P_n(x)\right|<\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega(x)\right|$$

где $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|<M_{n+1}<\infty$

Таким образом, погрешность интерполирования зависит:

1. **От количества точек *n***
2. **От поведения функции** $f(x)$ **(её гладкости, величины константы** M_{n+1} **)**
3. **От поведения функции** $\omega(x)$

В связи с этим российский математик Чебышёв поставил и решил задачу о поиске многочлена степени n, который минимально отклоняется от нуля. Это задача сводится к задаче на минимакс, то есть

$$\min_{x_0,\ldots x_n}\left(\max_x\left|\omega(x)\right|\right)$$

Решение этой задачи привело к определению специальных полиномов, которые впоследствии были названы полиномами Чебышёва. Корни этих полиномов дают решение задачи на минимакс.

ул. Московское шоссе, д.34, г.Самара, 443086, тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36, сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru

Полиномы Чебышёва определяются на конечном отрезке. Определим эти полиномы на стандартном отрезке $[-1,1]$

Полиномы Чебышёва могут быть определены в через тригонометрические функции и в виде рекуррентных формул.

Определение тригонометрическое

$$T_{k+1}(x)=\frac{1}{2^k}\cos\left[(k+1)\arccos x\right],\quad k=0,1,\ldots$$

Тогда $T_1(x)=x\ (k=0),\ T_2(x)=x^2-1/2\ (k=1),\ldots$

Зная первые два полинома, остальные можно определить по рекуррентной формуле

$$T_{n+2}(x)=xT_{n+1}(x)-\frac{1}{4}T_n(x),\quad n=1,2,\ldots$$

Например,

$$T_3(x)=x\left(x^2-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}x=x^3-\frac{3}{4}x,$$

$$T_4(x)=x\left(x^3-\frac{3}{4}x\right)-\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)=x^4-x^2-\frac{1}{8}$$ **и т. д.**

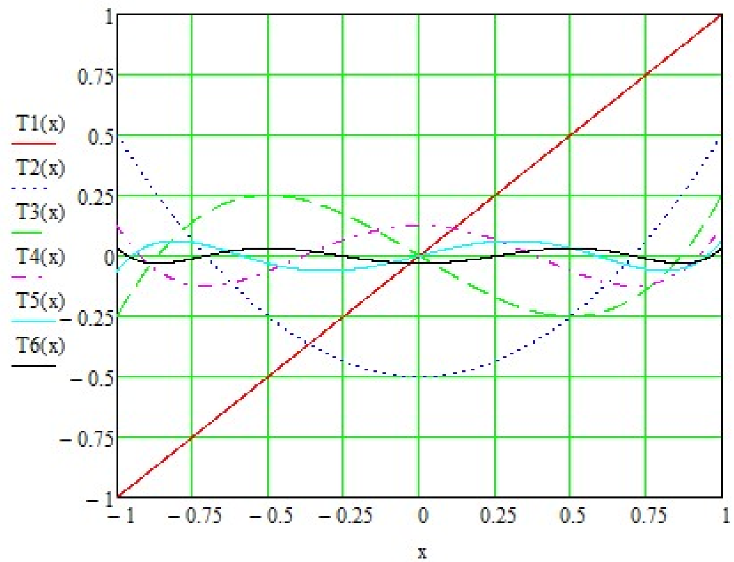
ул. Московское шоссе, д.34, г.Самара, 443086, тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36, сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru

Для полиномов Чебышёва

$$\left|T_1(x)\right| \le 1,\ \left|T_2(x)\right| \le \frac{1}{2},\ \left|T_3(x)\right| \le \frac{1}{4},$$

$$\left|T_4(x)\right| \le \frac{1}{8},\ \left|T_5(x)\right| \le \frac{1}{16},\ldots$$

Поэтому $\left|T_n(x)\right| \le \dfrac{1}{2^{n-1}},\ n = 1,2,3\ldots$

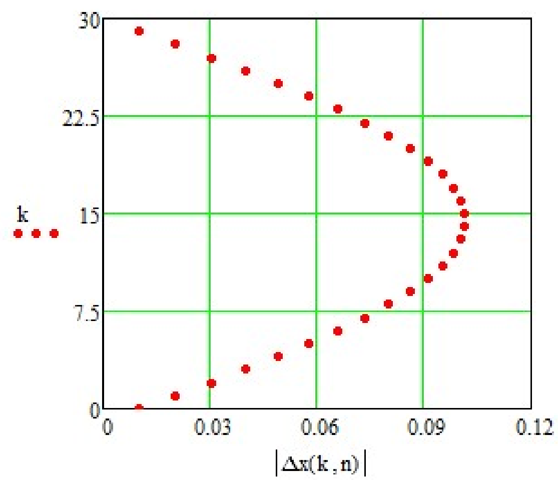


Оптимальное распределение узлов интерполирования на отрезке $[x_{min}, x_{max}]$

$$x_k = x^o + \Delta\cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right)$$

где $x^o = \dfrac{x_{min} + x_{max}}{2},\quad \Delta = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{2},\quad k = 0,1,\ldots n$

Расстояние между узлами $\Longrightarrow$



Сплайн - интерполяция

Сплайн – интерполяция заключается в построении на каждом отрезке $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ полинома небольшого порядка с последующим соединением этих полиномов в один полином $P(x)$ при выполнении некоторых условий непрерывности в точках их соединения («сшивки»).

Различают: $S_1(x)$ - линейный сплайн, $S_2(x)$ - параболический сплайн, $S_3(x)$ - кубический сплайн.

Общая формула для сплайнов:

$$S_m(x) = S^{(m)}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} C_k \left(x - x_k\right)_+^m,$$

где $m = 1,2,3$, $S^{(m)}(x)$ -«ядро» сплайна, C_k - определяемые коэффициенты сплайна,

$$\left(x - x_k\right)_+^m = \begin{cases} 0, \dots\dots\dots\dots\dots if \dots\dots x \le x_k \\ \left(x - x_k\right), \dots . if \dots\dots x > x_k \end{cases}$$

Для линейного сплайна

$$S^{(1)}(x) = y_0 + C_0\left(x - x_0\right),$$

Для параболического сплайна

$$S^{(2)}(x) = y_0 + u\left(x - x_0\right) + C_0\left(x - x_0\right)^2,$$

Для кубического сплайна

$$S^{(3)}(x) = y_0 + u\left(x - x_0\right) + w\left(x - x_0\right)^2 + C_0\left(x - x_0\right)^3.$$

Для параболического сплайна необходимо одно дополнительное условие, так как количество коэффициентов увеличилось на единицу

$C_{0,1,2,3}$ плюс u

Дополнительными условиями чаще всего являются граничные условия на производные

$$1)\, dS_2 / dx(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \text{или} \quad 2)\, dS_2 / dx(x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}.$$

Возможны более общие критерии для выбора параметра u

$$\int_{x_0}^{x_n} \sqrt{1 + \left(\frac{dS_2(x,u)}{dx} \right)^2} dx \underset{u}{\Rightarrow} \min$$

Это минимальная длина сплайна

Для кубического сплайна необходимо два дополнительных условий, так как количество коэффициентов увеличилось на два

$C_{0,1,2,3}$ плюс u и w

Дополнительными условиями чаще всего являются граничные условия на производные

$$1)\ dS_3 / dx(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\ ; \qquad 2)\ dS_3 / dx(x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\ ;$$

$$3)\ dS_3^2 / dx^2(x_1) = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{\left(\frac{x_2 - x_0}{2}\right)^2}\ ; \ 4)\ dS_3^2 / dx^2(x_{n-1}) = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{\left(\frac{x_n - x_{n-2}}{2}\right)^2}\ ;$$

Берутся два любых условия из приведенных четырех.

Пример более общего критерия выбора параметров *u, w*

$$\int_{x_0}^{x_n} \left(\frac{d^2 S_3\left(x,u,w\right)}{dx^2} \right)^2 dx \underset{u,w}{\Rightarrow} \min$$

Это минимальная кривизна сплайна

Рассмотрим приближение функций с одной независимой переменной.

Дана таблица $f\left(x_k\right)=f_k,\ k=0,1,\ldots m$

Необходимо найти обобщенный полином

$$Q_n(x)=C_o\varphi_o(x)+C_1\varphi_1(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_k\varphi_k(x)$$

где n - степень полинома, $C_o,\ldots C_n$ - определяемые коэффициенты, $\varphi_o(x),\ldots\varphi_n(x)$ - заданные линейно независимые функции, x-скалярный аргумент.

В самом простом случае $\varphi_k\left(x\right)=x^k,\ k=0,1,\ldots n$

В методе наименьших квадратов $\left(n<m\right)$
В этом случае кривая полинома не может проходить через точки.
Поэтому коэффициенты полинома определяются из условия минимума функции

$$S_m(C_o,\ldots C_n)=\sum_{k=0}^{m}\left[P(x_k)-f_k\right]^2$$

Рассмотрим полином $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \varphi_k(x)$$

Необходимое условие минимума

$$\frac{\partial S_m}{\partial C_j} = 2\sum_{i=0}^{m}\left[\sum_{k=0}^{n}(C_k\varphi_k(x_i) - y_i)\varphi_j(x_i)\right] = 0, \quad j = 0,1\ldots n$$

Получается система СЛАУ

$$C_o(\varphi_o, \varphi_o) + C_1(\varphi_1, \varphi_o) + \ldots + C_n(\varphi_n, \varphi_o) = (f, \varphi_o),$$

$$C_o(\varphi_o, \varphi_1) + C_1(\varphi_1, \varphi_1) + \ldots + C_n(\varphi_n, \varphi_1) = (f, \varphi_1),$$

....

$$C_o(\varphi_o, \varphi_n) + C_1(\varphi_1, \varphi_n) + \ldots + C_n(\varphi_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n).$$

где

$$\left(\varphi_k, \varphi_j\right) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)$$

СЛАУ в матричной форме

$$AC = B$$

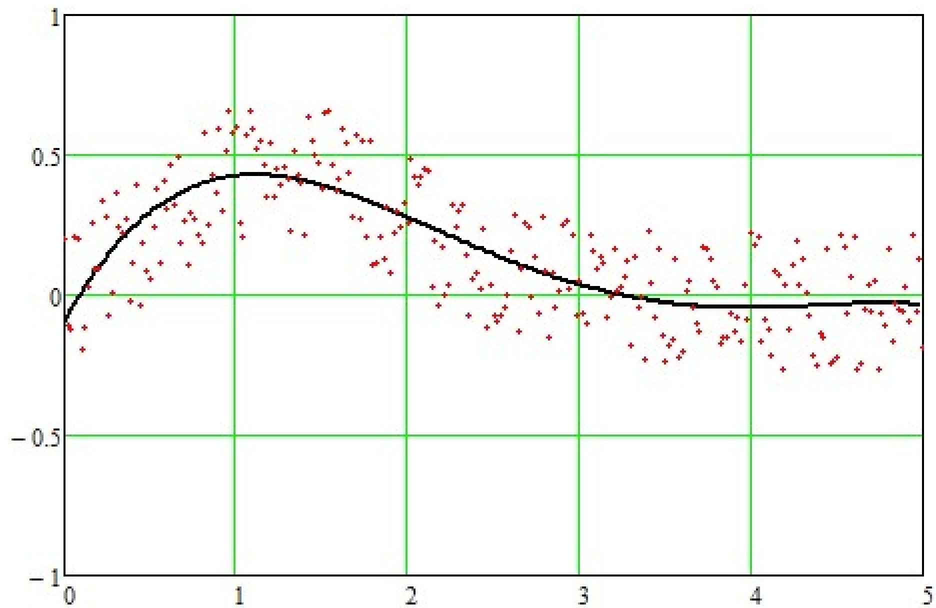
где

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \dots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \dots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_n,\varphi_o) & (\varphi_n,\varphi_1) & \dots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \dots \\ (f,\varphi_n) \end{pmatrix}$$

Для простого степенного полинома $\varphi_k(x) = x^k, \ k = 0,1,\dots n$

$$\begin{pmatrix} n+1 & \sum x_k & \dots & \sum x_k^n \\ \sum x_k & \sum x_k^2 & \dots & \sum x_k^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_k^n & \sum x_k^{n+1} & \dots & \sum x_k^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f_k \\ \sum f_k x_k \\ \dots \\ \sum f_k x_k^n \end{pmatrix}$$

Пример приближения МНК



Иногда в качестве меры погрешности используется остаточная дисперсия

$$D_m = \frac{\sum_{i=0}^{m} \left[P_n(x_i) - f_i \right]^2}{m - n}$$

Если порядок системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), к которой приводится метод наименьших квадратов, велик, то применение МНК становится громоздким. В этом случае рациональным становится использование ортогональных функций.

Определение. Функции $\varphi_k(x)$ и $\varphi_j(x)$, где $k \neq j$, называются ортогональными на множестве значений $x_o, x_1, \ldots x_m$, если

$$\left(\varphi_k, \varphi_j\right) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 0 \quad if \quad k \neq j \\ \sum\limits_{i=0}^{m} \varphi_k^2(x_i) > 0 \quad if \quad k = j \end{cases}.$$

Причем узлы $x_o, x_1, \ldots x_m$ не являются корнями функций $\varphi_k(x)$ и $\varphi_j(x)$

Если функции $\varphi_k(x)$ и $\varphi_j(x)$ ортогональны на множестве $x_o, x_1, \ldots x_m$, то СЛАУ метода наименьших квадратов (4.4), записанная в матричной форме

$$AC = B \quad ,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} (\varphi_o, \varphi_o) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\varphi_1, \varphi_1) & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \ldots \\ C_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} (f, \varphi_o) \\ (f, \varphi_1) \\ \ldots \\ (f, \varphi_n) \end{pmatrix}$$

имеет диагональную матрицу A и, следовательно, простое аналитическое решение

$$C_k = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \quad .$$

Эти коэффициенты получили название коэффициентов Фурье.

При интегральном МНК приближение функций рассматривают не на множестве точек, а на отрезке, то есть ставится задача о замене одной функции на другую, более простую

$$f(x) \Rightarrow P(x) \quad при \quad x \in [a,b]$$

Тогда коэффициенты обобщенного полинома $P(x)$ **вычисляются исходя из минимума интеграла**

$$J(C_o,...C_n) = \int_a^b W(x)\left[P(x) - f(x)\right]^2 dx$$

где $W(x) \geq 0$ **- весовая функция.**

Минимизация интеграла

$$\frac{\partial J}{\partial C_j} = 2\int_a^b W(x)(\sum_{k=0}^{n} C_k\varphi_k(x) - f(x))\varphi_j(x)dx = 0 \, ,$$

где $j = 0,...n$.

Определение. Система интегрируемых функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x)$ называется ортогональной с весом $W(x)$ на отрезке $[a, b]$, если

$$\left(\varphi_k, \varphi_j\right)_J = \int_a^b W(x)\varphi_k(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0 \;\; if \;\; k \neq j \\ \int_a^b W(x)\varphi_k^2(x)dx > 0 \;\; if \;\; k = j \end{cases},$$

Для ортогональных функций решения СЛАУ записываются в виде

$$C_k = \frac{\left(f, \varphi_k\right)_J}{\left(\varphi_k, \varphi_k\right)_J},$$

где $k = 0, 1, \ldots n$.

ул. Московское шоссе, д.34, г.Самара, 443086, тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36, сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru

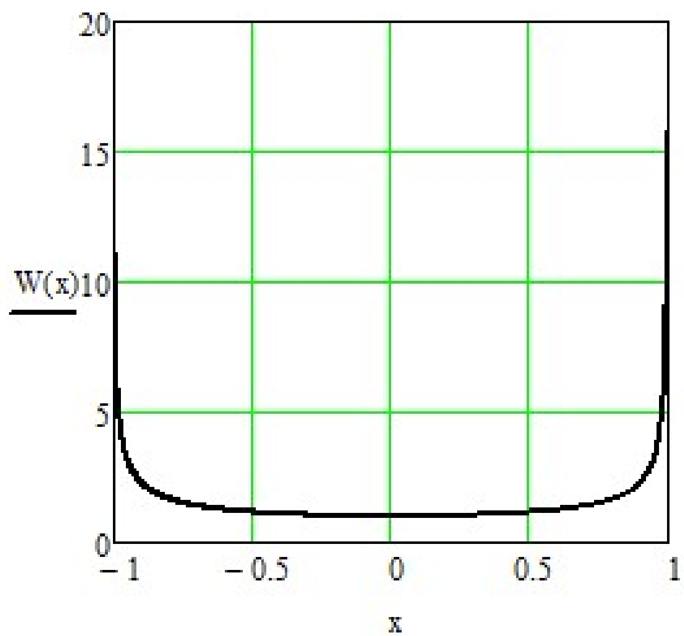
Некоторые примеры ортогональных полиномов

1. Полиномы Лежандра.

Отрезок $x \in [-1,1]$. **Весовая функция** $W(x) = 1$

2. Полиномы Чебышёва 1-ого рода.

Отрезок $x \in [-1,1]$. **Весовая функция** $W(x) = \left(1 - x^2\right)^{-0.5}$



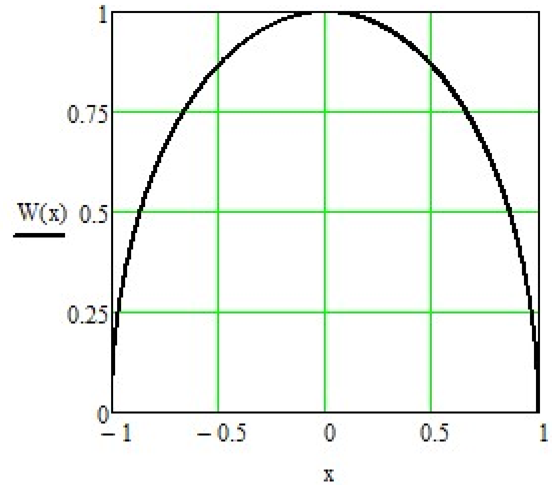
Некоторые примеры ортогональных полиномов

3. Полиномы Чебышёва 2-ого рода.

Отрезок $x \in [-1,1]$ **.**

Весовая функция

$$W(x) = \left(1 - x^2\right)^{0.5}$$



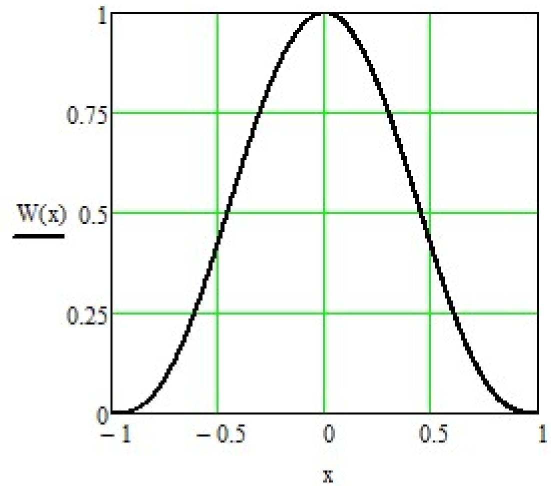
4. Полиномы Якоби.

Отрезок $x \in [-1,1]$ **.**

Весовая функция

$$W(x) = (1 - x)^{\alpha} (1 + x)^{\beta}$$

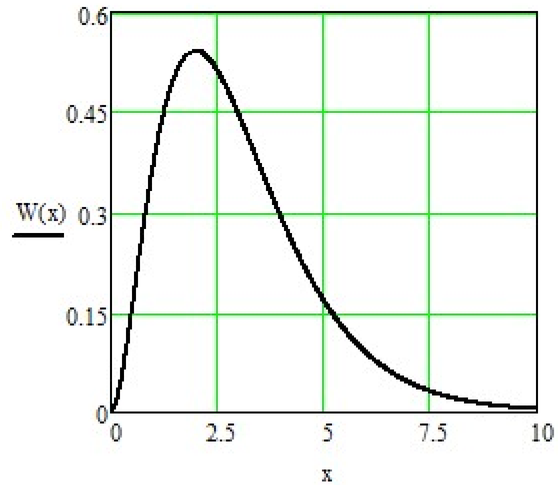
$$\alpha = \beta = 3$$



Некоторые примеры ортогональных полиномов

5. Полиномы Лагерра.
Отрезок $x \in [0, \infty)$ **.**
Весовая функция

$$W(x) = e^{-x} x^{\alpha}$$



$\alpha = 2$

6. Полиномы Эрмита.
Отрезок $x \in (-\infty, \infty)$ **.**
Весовая функция

$$W(x) = e^{-x^2}$$