Лекция 12 - 13. Численные методы расчета динамических колебательных систем

1. Динамические колебательные системы

Важный класс динамических систем составляют колебательные динамические системы, описывающие поведение различных процессов, переменные состояния которых изменяются периодически или почти периодически во времени. Если такие системы характеризуются высокочастотными колебаниями, то расчет таких систем связан, как правило, с большими затратами времени, так как для численного расчета необходимо выбирать очень маленький шаг интегрирования. Практика показывает, что для достаточно точного воспроизведения колебательного процесса шаг интегрирования ОДУ должен составлять примерно $h \approx \left(\frac{1}{10} \div \frac{1}{20} \right) T$, где T - период колебаний. Кроме того, при больших частотах колебаний из-за мелкого шага интегрирования количество элементарных операций возрастает, что может привести к недопустимому увеличению вычислительной погрешности (погрешности округления чисел).

Возможные подходы:

1. Использование методов интегрирования высокого порядка точности. Это смягчает проблему, но не решает её полностью.
2. Использование неявных методов интегрирования для жестких систем. Хотя в этом случае можно существенно увеличить шаг интегрирования, но в этом случае погрешность воспроизведения колебательного процесса возрастает, хотя устойчивость метода интегрирования сохраняется. Амплитуды колебаний в этом случае вычисляются с большой погрешностью.
3. Использование методов малого параметра, в частности, метода усреднения.

Так как первые два подхода уже рассматривались, то здесь остановимся на третьем методе.

Некоторые понятия теории колебаний рассмотрим на простом примере движения математического маятника.

Уравнения движения маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad , \qquad (1)$$

где ω - частота колебаний.

Характеристическое уравнение, соответствующее (1), имеет вид $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, из которого определяются собственные значения системы $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, где $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица. Если собственные значения чисто мнимые, то из теории дифференциальных уравнений известно, что в этом случае общее решение уравнения (1) записывается в виде

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \quad , \tag{2}$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

Решение (2) можно также записать и в другой форме

$$x = K \cos(\omega t + \varphi_0) \quad . \tag{3}$$

Связь между постоянными C_1, C_2 и K, φ_0 следующая

$$K = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \;, \; \cos\varphi_0 = \frac{C_1}{K} \;, \; \sin\varphi_0 = -\frac{C_2}{K} \quad .$$

Из решения (3) следует, что постоянная K представляет собой амплитуду колебаний гармонического осциллятора (1) (максимальное расстояние от положения равновесия $x = 0$)), а постоянная φ_0 - начальную фазу колебаний. Постоянная ω в теории колебаний называется круговой частотой и связана с периодом колебаний T равенством $T = 2\pi / \omega$. Иногда используется частота колебаний в герцах $f = 1/T$ (количество колебаний в одну секунду).

При построении математических моделей колебательных систем применяются два основных способа их построения: теоретический и эмпирический. При теоретическом способе для построения математической модели используются известные физические законы: в механике это законы Ньютона, в радиоэлектронике это законы Ома и Кирхгофа и т.д. При эмпирическом способе построения обычно задаются видом математической модели и, далее, по результатам специально спланированных и проводимых экспериментов решается задача определения параметров заданной модели. Сформулированная задача называется задачей параметрической идентификации модели. Так, например, для простейшей линейной колебательной системы (1) необходимо определить единственный параметр системы – частоту колебаний ω.

Рассмотрим теоретический способ построения математической модели малых свободных колебаний динамической системы со многими степенями свободы на основе так называемых уравнений Лагранжа. Такой способ построения математической модели применяется как в механике, так и в радиоэлектронике. В этом случае для построения математической модели достаточно знать (или построить) две функции: кинетической (T) и потенциальной (Π) энергий.

Введем в рассмотрение вектор переменных состояния колебательной системы $x = (x_1, ... x_\nu)$ (матрица – столбец), где ν - число степеней свободы, и вектор соответствующих производных по времени (скоростей) $\dot{x} = (\dot{x}_1, ... \dot{x}_\nu)^*$, где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Потенциальная энергия по своему определению зависит только от вектора состояния: $\Pi(x)$, а кинетическая энергия – от вектора состояния и вектора скоростей: $T(x, \dot{x})$. Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_j} \quad , \tag{4}$$

где $j = 1, ... \nu$.

Причем кинетическая энергия является в прикладных задачах является квадратичной формой скоростей

$$T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x} * A(x) \dot{x} \quad , \tag{5}$$

где $A(x)$ - квадратная матрица размерностью ν, компоненты которой являются функциями переменных состояния x, $\dot{x}*$ - матрица-строка.

Малые колебания системы (4) рассматриваются в окрестности ее устойчивых положений равновесия, которые определяются из условия равенства нулю правых частей дифференциальных уравнений (4), то есть

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_j} = 0 \quad , \tag{6}$$

где $j = 1, ... \nu$. Следовательно, положения равновесия системы (4) являются экстремальными точками функции потенциальной энергии. Кроме того, для выделения из всех возможных положений равновесия устойчивых положений используется теорема Дирихле-Лагранжа.

Теорема. Положение равновесия, определяемое из условий (6), системы (4) устойчиво по Ляпунову, если в этом положении равновесии потенциальная энергия системы имеет изолированный минимум.

Теорема Дирихле-Лагранжа определяет достаточные условия устойчивости положений равновесия, при этом изолированность минимума означает, что существует некоторая окрестность минимума не содержащая других точек минимума. Для упрощения дальнейших выкладок условимся, что координаты системы $x_1, ... x_\nu$ будем отсчитывать от исследуемого положения равновесия, тогда в положении равновесия имеем $x_1 = ... = x_\nu = 0$. Кроме того, известно, что потенциальная энергия систем определяется с точностью до произвольной постоянной. Выберем эту постоянную так, чтобы в положении равновесия потенциальная энергия системы равнялась нулю

$$\Pi(0) = 0 \quad . \tag{7}$$

Как известно из математического анализа функций нескольких переменных, условия (6) представляют собой необходимые условия экстремума дифференцируемой функции $\Pi(x)$, а достаточными условиями изолированного минимума дифференцируемой функции $\Pi(x)$ является положительная определенность квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} c_{ij} x_i x_j \quad , \tag{8}$$

где $c_{ij} = \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x_i \partial x_j}(0)$ - компоненты матрицы c вторых производных, определенные в положении равновесия. Необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичной формы определяются условиями Сильвестра

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{ii} \end{vmatrix} > 0, \qquad i = 1,\dots\nu \ .$$

Проведем вывод приближенных дифференциальных уравнений малых колебаний системы (4). Для этого разложим функцию $\Pi(x)$ в точке $x = 0$ в ряд Тейлора как функцию нескольких переменных

$$\Pi(x) = \Pi(0) + \frac{\partial \Pi}{\partial x}(0)x + \frac{1}{2}x * cx + \dots \quad , \tag{9}$$

где $\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}(0)x = \sum_{i=1}^{\nu} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_i}(0)x_i$.

При малых колебаниях (малых отклонениях x от положения равновесия) можно пренебречь в выражении (9) слагаемыми порядка выше второго (по степеням x), тогда с учетом (6),(7) получим

$$\Pi(x) \approx \frac{1}{2}x * cx \quad . \tag{10}$$

Соответственно для кинетической энергии $T(x,\dot{x})$, представляющей собой квадратичную форму скоростей, при малых колебаниях используется приближенное выражение

$$T(\dot{x}) \approx \frac{1}{2}\dot{x} * a\dot{x} \quad , \tag{11}$$

где $a = A(0)$ - квадратная матрица размерностью ν, представляющая собой матричную функцию $A(x)$, определенную в положении равновесия.

Подставим квадратичные формы (10),(11) в уравнения Лагранжа (4), записав их также в матричной форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} \quad . \tag{12}$$

Тогда, используя правила дифференцирования квадратичных форм, получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2c\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 2c\ddot{x}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 2ax, \tag{13}$$

где $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Подставив соотношения (13) в уравнения Лагранжа (12), найдем линейную систему уравнений малых колебаний динамической системы (12) в матричной форме

$$a\ddot{x} + cx = 0 \quad . \tag{14}$$

Эта система в обычной форме имеет вид

$$\begin{aligned} &a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\ddot{x}_2 + \ldots + a_{1\nu}\ddot{x}_\nu + c_{11}x_1 + \ldots + c_{1\nu}x_\nu = 0, \\ &a_{\nu 1}\ddot{x}_1 + a_{\nu 2}\ddot{x}_2 + \ldots + a_{\nu\nu}\ddot{x}_\nu + c_{\nu 1}x_1 + \ldots + c_{1\nu}x_\nu = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

В теории колебаний доказывается, что если выполняются условия теоремы Дирихле-Лагранжа (в частности, выполняются условия Сильвестра для квадратичных форм (10) и (11)), то решения системы (15) имеют периодический или почти периодический характер и ищутся в виде

$$x = V\cos(\omega t + \varphi_0) \quad , \tag{16}$$

где V и φ_0 - произвольные постоянные, ω - скалярный параметр, характеризующий частоты колебаний систем (14) и (15).

Подставив решение (16) в систему (14), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$(c - a\omega^2)V = 0 \quad . \tag{17}$$

В этом случае приходим к известной задаче по определению собственных чисел и собственных векторов матриц.

Система линейных уравнений иметь ненулевые решения $V \neq 0$ тогда и только тогда, когда определитель

$$\det(c - a\omega^2) = 0 \quad . \tag{18}$$

Соотношение (18) фактически представляет собой характеристическое уравнение системы (14) относительно параметра ω^2. После раскрытия определителя соотношение (15) преобразуется в многочлен ν-ой степени по параметру ω^2 и имеет ровно ν положительных корней: ω_i^2, где $i = 1,...\nu$. В теории колебаний показывается, что положительность корней обеспечивается положительной определенностью квадратичных форм (10) и (11). Совокупность положительных значений ω_i, где $i = 1,...\nu$, определяет собственные частоты малых колебаний системы (14), поэтому уравнение (18) иногда называют частотным уравнением. В теории малых колебаний обычно рассматривается случай, когда среди корней частотного уравнения (18) нет кратных (равных). В этом случае каждой собственной частоте ω_i системы соответствует ненулевой собственный вектор $V^{(i)}$, который находится из условия

$$(c - a\omega_i^2)V^{(i)} = 0 \quad . \tag{19}$$

Из однородности системы (19) следует, что любой собственный вектор определяется с точностью до множителя, что характерно для любой линейной динамической системы. После определения собственных частот и собственных векторов можно записать общее решение линейной однородной системы (5.15), которое будет иметь вид

$$x = \sum_{i=1}^{\nu} C_i V^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_{0i}) \quad , \tag{20}$$

где C_i и φ_{0i} $(i = 1,...\nu)$ - произвольные постоянные, определяемые из начальных условий $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$.

Таким образом, колебание любой переменной системы x_j $(j = 1,...\nu)$ представляет собой суперпозицию ν колебаний системы с собственными частотами ω_i $(i = 1,...\nu)$.

2. Метод малого параметра

При разнообразных качественных, аналитических и численных исследованиях колебательных систем, при построении оптимальных и приближенно оптимальных законов их управления широкое распространение получили методы малого параметра.

Применение методов малого параметра позволяет: 1) уменьшить размерность задачи, а в некоторых случаях получить аналитические решения; 2) проводить более эффективное качественное исследование колебательных систем; 3) разрабатывать экономичные численные алгоритмы расчета колебательных систем, учитывающие аналитическую природу решаемых задач.

Малый параметр задачи обычно обозначают ε. Существует два основных способа введения малого параметра в динамическую систему.

Первый способ заключается в приведении системы к безразмерному виду и в сравнении величин коэффициентов в безразмерной системе. В этом случае малыми считаются коэффициенты, которые принимают значения много меньше единицы. Данный способ введения малого параметра используется для сравнительно простых уравнений и систем, когда количество уравнений невелико.

Пример. Рассмотрим динамическое уравнение, описывающее колебательное движение с одной степенью свободы

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(x, \dot{x}) \quad , \tag{21}$$

где ω - частота колебаний, $F(x, \dot{x})$ - функция, характеризующая действие на колебательную систему возмущений (например, сил сопротивления). Приведем уравнение (21) к безразмерному виду, введя безразмерное время $\tau = \omega t$ и безразмерное отклонение $\bar{x} = x / x_0$ от положения равновесия $x = \dot{x} = 0$, $x_0 = x(t_0)$ - начальное отклонение. Тогда, учитывая тождества

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \omega \frac{dx}{d\tau} = \omega x_0 \frac{d\bar{x}}{d\tau}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \omega^2 x_0 \frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2},$$

получим

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} + \bar{x} = \frac{1}{\omega^2 x_0} F(\bar{x}, \omega x_0 \frac{d\bar{x}}{d\tau}) \quad .$$

Теперь, если рассмотреть какую-либо конкретную возмущающую функцию, а именно $F(x, \dot{x}) = k\dot{x}$ (такая функция характеризует действие на систему сил сопротивления пропорциональных скорости, где k - некоторый постоянный коэффициент), то придем к безразмерному уравнению

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} + \bar{x} = \varepsilon \frac{d\bar{x}}{d\tau} \quad ,$$

причем решения этого уравнения зависят от одного безразмерного параметра $\varepsilon = \dfrac{k}{\omega}$.

Величина параметра ε сравнивается с единицей. Возмущение считается малым, если $\varepsilon << 1$. В прикладных задачах малыми считаются параметры $\varepsilon < \frac{1}{3}$. Ясно, что такой метод введения малых параметров приводит к большому их количеству, если в возмущающей функции $F(x,\dot{x})$ присутствует большое количество отдельных слагаемых. В этом случае последующее применение метода малого параметра становится громоздким, что является недостатком такого способа введения малых параметров.

Второй способ введения малого параметра ε связан с предположением, что решения системы с возмущением мало отличается от известного (невозмущенного) решения определенного вида, например, гармонических колебаний. При этом все слагаемые в системе делятся на две группы: основные и возмущающие. Возмущающие функции масштабируются путем введения перед ними множителя – малого параметра ε. В этом случае успех применения асимптотического метода определяется близостью решений рассматриваемой системы к известным решениям.

Пример. Рассмотрим опять динамическое уравнение, описывающее колебательное движение с одной степенью свободы (21). Пусть $F(x,\dot{x})$ является ограниченной функцией своих переменных $|F(x,\dot{x})| < M$, где M - некоторая константа, и заранее известно, что эта функция оказывает малое влияние на движение системы. Проведем масштабирование функции $F(x,\dot{x})$ с помощью множителя – малого параметра ε, то есть положим $F(x,\dot{x}) = \varepsilon f(x,\dot{x})$, где $f(x,\dot{x})$ - некоторая новая функция. Ясно, что если функция $F(x,\dot{x})$ (константа M) имела порядок ε, то функция $f(x,\dot{x})$ будет иметь порядок единицы. После введения таким образом малого параметра ε уравнение (21) примет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x,\dot{x}), \tag{22}$$

где параметр ε показывает, что возмущающая функция εf является малой по сравнению с основными членами, описывающими движение невозмущенной системы

$$\ddot{x}^o + \omega^2 x^o = 0 \quad . \tag{23}$$

Уравнение (23) получило название порождающего или невозмущенного, оно имеет известное решение (математический маятник)

$$x^o = K\cos\varphi \quad , \tag{24}$$

где K и $\varphi = \omega t + \varphi_o$ - амплитуда и фаза колебаний.

Основной задачей асимптотических методов является определение решений уравнений в виде рядов по степеням малого параметра

$$x = x^o(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + ... \quad , \tag{25}$$

где $x^o(t), x_1(t), x_2(t), \ldots$ - ограниченные функции, подлежащие определению.

Нулевой член ряда (25) представляет собой решение порождающего уравнения, а последующие члены определяют поправки к этому решению. Ясно, что определяя в виде ряда (25) решение исходного уравнения, мы предполагаем тем самым, что оно мало отличается от решения порождающего уравнения. После построения решения в виде ряда (25) при необходимости можно перейти к исходным функциям, положив формально в разложениях $\varepsilon = 1$ и рассматривать полученный ряд как некоторый ряд, члены которого определены через функции, входящие в исходное уравнение. Справедливость полученных решений в каждом конкретном случае можно проверить, сопоставляя значения учтенных и отброшенных членов ряда, а также численным моделированием на ЭВМ по исходным уравнениям.

Одним из основоположников применения асимптотических методов при исследовании динамических систем был великий французский математик А.Пуанкаре, который дал строгое определение асимптотическому ряду.

3. Метод усреднения для системы с одной степенью свободы (метод Ван-дер-Поля)

Рассмотрим колебательную систему с одной степенью свободы, на которую действует некоторая возмущающая функция (5.31)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \; . \tag{26}$$

При $\varepsilon = 0$ получаем невозмущенную систему (23), которая имеет решение (24). Решение для производной $\dot{x}^o$ в этом случае будет иметь вид

$$\dot{x}^o = -K\omega \sin\varphi \, . \tag{27}$$

Приведем исходное уравнение (26) к двум уравнениям первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = z \quad , \; \frac{dz}{dt} = -\omega^2 x + \varepsilon f(x, z) \quad . \tag{28}$$

Сделаем в системе (5.37) замену переменных

$$x = K\cos\varphi \quad , \; z = -K\omega\sin\varphi \quad . \tag{29}$$

Вид замены переменных (29) повторяет решение невозмущенной системы (24),(27), однако при подстановке в возмущенную систему (26) параметры K и φ_o уже считаются не постоянными. Эти параметры теперь будут зависеть от времени и будут изменяться согласно действующему на колебательную систему возмущению $\varepsilon f(x,z)$. Фактически в этом случае используется метод вариации произвольных постоянных. После подстановки замены (29) в систему (26) получим

$$\frac{dK}{dt}\cos\varphi - \frac{d\varphi}{dt}K\sin\varphi = -\omega K\sin\varphi \quad ,$$

$$-\frac{dK}{dt}\omega\sin\varphi - \frac{d\varphi}{dt}\omega K\cos\varphi = \qquad .$$

$$= -\omega^2 K\cos\varphi + \varepsilon f(K\cos\varphi, -\omega K\sin\varphi)$$

Выразив из этой системы производные $\frac{dK}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt}$, получим

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f(K\cos\varphi, -\omega K\sin\varphi)\sin\varphi \quad ,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon}{\omega K} f(K\cos\varphi, -\omega K\sin\varphi)\cos\varphi \ , \tag{30}$$

где $\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \frac{d\varphi_o}{dt}$, и правые части дифференциальных уравнений согласно проведенной замене есть периодические функции угла φ с периодом 2π.

Переход к переменным K и φ называется переходом к переменным амплитуда – фаза и часто производится при применении метода усреднения. После приведения системы к виду (30) согласно методу усреднения проводится процедура усреднения системы по быстрой фазе $\varphi = \omega t + \varphi_o$, где $\omega > 0$. Усредненная система имеет вид

$$\frac{dK^o}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega}\left\langle f(K^o\cos\varphi, -\omega K^o\sin\varphi)\sin\varphi\right\rangle_\varphi = \quad ,$$

$$= \varepsilon A_1(K^o)$$

(31)

$$\frac{d\varphi^o}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon}{\omega K^o}\left\langle f(K^o\cos\varphi, -\omega K^o\sin\varphi)\cos\varphi\right\rangle_\varphi = \quad ,$$

$$= \omega + \varepsilon B_1(K^o)$$

где скобками $\langle ... \rangle_\varphi$ обозначается оператор усреднения, имеющий следующую форму

$$\left\langle f(K^o \cos\varphi, -\omega K^o \sin\varphi)\sin\varphi \right\rangle_\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(K^o \cos\varphi, -\omega K^o \sin\varphi)\sin\varphi\, d\varphi \quad ,$$

$$\left\langle f(K^o \cos\varphi, -\omega K^o \sin\varphi)\cos\varphi \right\rangle_\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(K^o \cos\varphi, -\omega K^o \sin\varphi)\cos\varphi\, d\varphi$$

Причем интегралы по фазе φ берутся согласно принципу усреднения при постоянной амплитуде K^o (считается, что амплитуда за период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$ невозмущенной системы мало изменяется).

Полученная усредненная система (31) существенно проще исходной системы (30), так как ее первое уравнение

$$\frac{dK^o}{dt} = \varepsilon A_1(K^o) \quad , \tag{32}$$

может быть исследовано отдельно от второго уравнения. В частности, оно может быть проинтегрировано методом разделения переменных. После определения решения для амплитуды $K^o(t)$ решение для фазы $\varphi^o(t)$ находится из второго уравнения системы (31) взятием квадратуры (интеграла по времени t).

Изложенный вариант метода усреднения принято связывать с именем голландского инженера Ван-дер-Поля, впервые применившего описанную процедуру усреднения при исследовании нелинейных колебаний. Современный вариант метода усреднения включает в себя метод Ван-дер-Поля как нулевое приближение, при этом приближенные решения метода усреднения ищутся в виде асимптотического ряда

$$x = K^o \cos\varphi^o + \varepsilon\, u_1(K^o, \varphi^o) + \varepsilon^2 u_2(K^o, \varphi^o) + \ldots \quad ,$$

где $u_1(K^o, \varphi^o)$, $u_2(K^o, \varphi^o), \ldots$ - ограниченные функции, периодичные по фазе φ^o, подлежащие определению.

Некоторые конкретные примера расчета колебательных процессов

1. Колебания тросовой системы на орбите

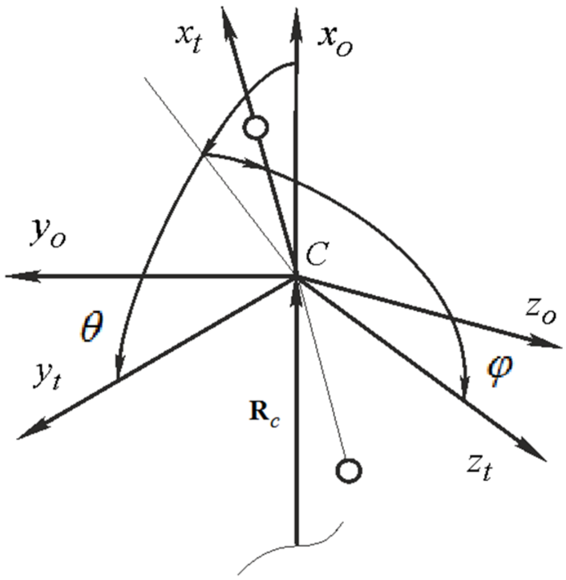


Рисунок 1 - Космическая тросовая система

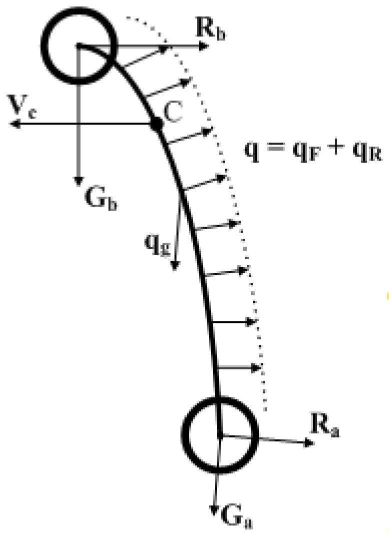


Рисунок 2 - Тросовая система при действии распределенной нагрузки

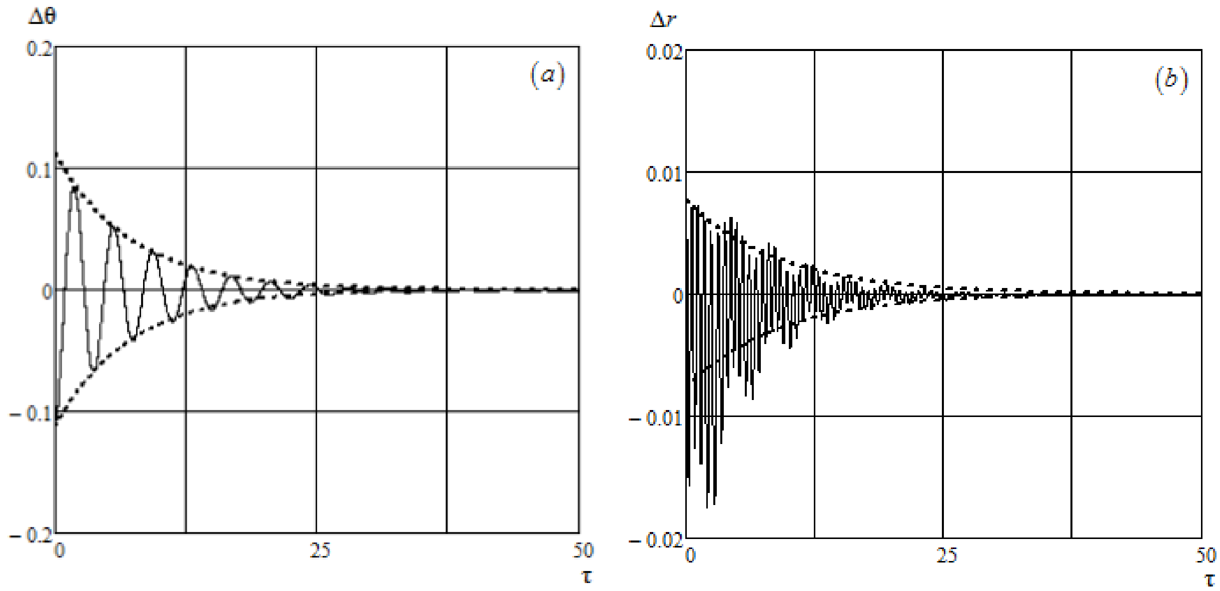


Рисунок 3 - Переходные процессы в тросовой системе

2. Колебания малого космического аппарата на тросе

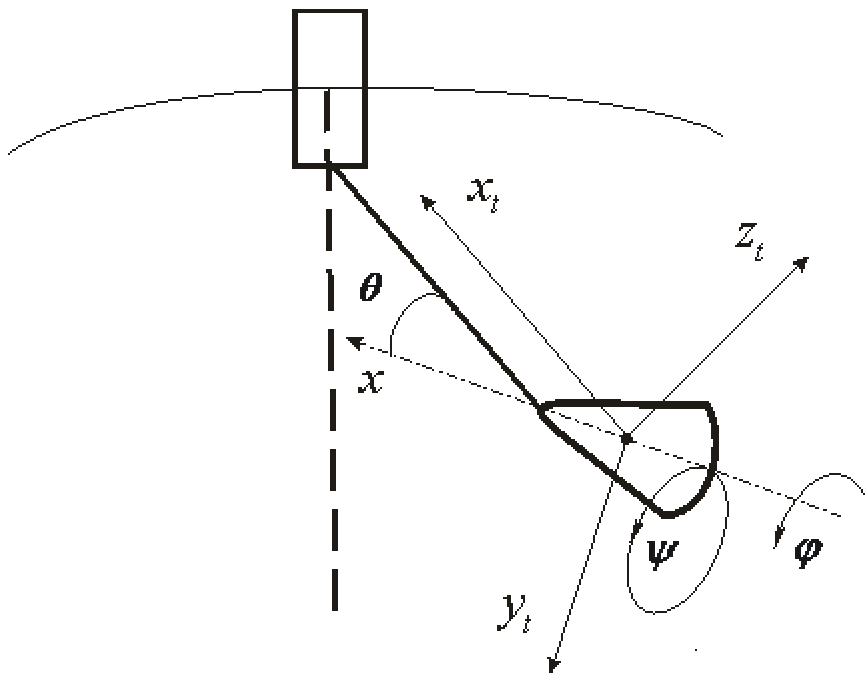
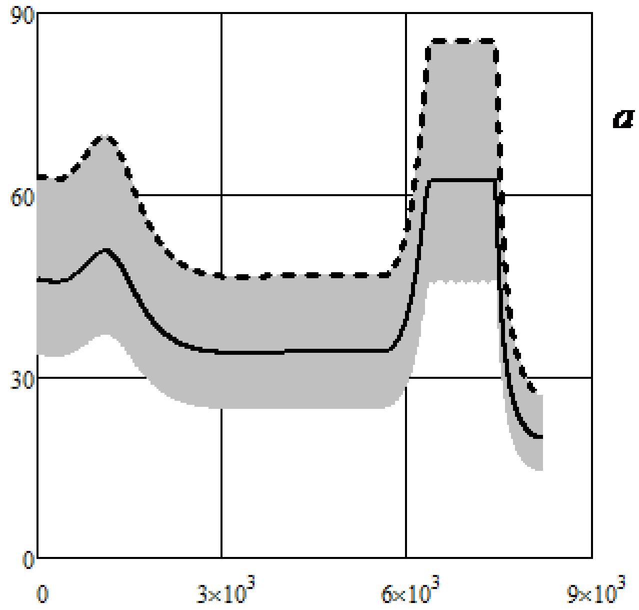


Рисунок 4 - Малый КА на тросе

Примеры определения амплитуды колебаний методом усреднения

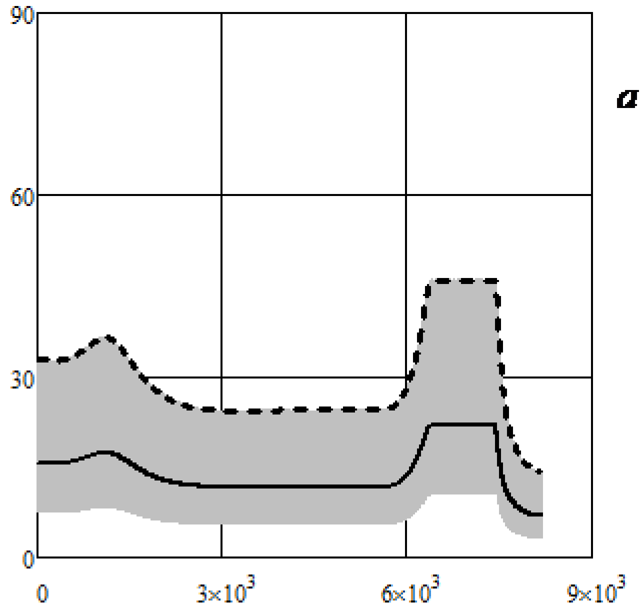
α



t

Рисунок 5

α



t

Рисунок 6

4. Метод усреднения для системы с многими степенями свободы

Рассматриваются движения колебательной системы с малыми возмущениями

$$\ddot{y} + Cy = \varepsilon f\left(y, \dot{y}\right), \tag{33}$$

где $y \in \mathrm{R}_n$ - вектор переменных системы, ε – малый положительный параметр, C - симметричная положительно определенная матрица, $f\left(y, \dot{y}\right)$ - вектор-функция возмущений, $\dot{y} = dy / dt$, $\ddot{y} = d^2 y / dt^2$.

Невозмущенное решение $\varepsilon = 0$ системы (33) характеризуется собственными частотами и векторами ω_k и $V^{(k)}$, где $k = 1, 2, ... n$, которые определяются из следующих соотношений

$$\left| C - \omega^2 E \right| = 0, \; \left(C - \omega_k^2 E \right) V^{(k)} = 0, \tag{34}$$

Сделаем замену переменных $y = Vx$, где V - матрица собственных векторов, получим

$$V\ddot{x} + CVx = \varepsilon f\left(Vx, V\dot{x}\right),$$

или

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \varepsilon F\left(x, \dot{x}\right), \tag{35}$$

где $\Omega^2 = \mathrm{diag}\left(\omega_1^2, ... \omega_n^2\right)$, $F = V^{-1} f$.

Невозмущенное решение в новых переменных имеет вид

$$x_k = K_k \cos\varphi_k, \quad \dot{x}_k = -\omega_k K_k \sin\varphi_k \quad \left(k = 1, 2, ... n\right), \tag{36}$$

где $\varphi_k = \omega_k t + \alpha_k$ - фазы, K_k и α_k - произвольные постоянные.

Основываясь на виде невозмущенного решения (36) и имея в виду использование метода усреднения, применяется стандартная замена переменных вида $\left(x, \dot{x}\right) \Rightarrow \left(K, \varphi\right)$ в системе (35), где K, φ - вектора амплитуд и фаз колебаний. Тогда, применяя метод вариации произвольных постоянных (метод медленно меняющихся амплитуд) и рассматривая соотношения (36) как замену переменных, получим

$$K_k = -\frac{\varepsilon}{\omega_k}\left[F_k\left(K,\varphi\right)\right]\sin\varphi_k, \tag{37}$$

$$\dot{\varphi}_k = \omega_k - \frac{\varepsilon}{K_k\omega_k}\left[F_k\left(K,\varphi\right)\right]\cos\varphi_k. \tag{38}$$

Так как система уравнений (37-38) это система с малыми возмущениями и правые части этой системы периодичны по всем переменным с периодом 2π, то можем провести процедуру усреднения. Тогда

$$\dot{K}_k = -\frac{\varepsilon}{\omega_k}\left\langle\left[F_k\left(K,\varphi\right)\right]\sin\varphi_k\right\rangle_{\varphi} = \varepsilon A_1^{(k)}\left(K\right), \tag{39}$$

$$\dot{\varphi}_k = \omega_k - \left\langle\frac{\varepsilon}{K_k\omega_k}\left[F_k\left(K,\varphi\right)\right]\cos\varphi_k\right\rangle_{\varphi} = \omega_k + \varepsilon B_1^{(k)}\left(K\right). \tag{40}$$

где $k = 1,2,...\nu$.

В этом случае уравнения для амплитуд (39) отделяются от уравнений для фаз (40) и могут быть проинтегрированы отдельно с увеличенным шагом интегрирования.

Здесь оператор усреднения имеет вид

$$A_1^{(k)}\left(K\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu}}\int_0^{2\pi}...\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon}{K_k\omega_k}\left[F_k\left(K,\varphi\right)\right]\cos\varphi_k d\varphi_1 \,..d\varphi_m \ ,$$

Однако такое усреднение в колебательной системе со многими степенями свободы можно осуществить не всегда. Чтобы это показать, надо применить более общий вариант метода усреднения, который заключается в определении решений в виде асимптотического ряда

$$K = K^o + \varepsilon\nu_1\left(K^o,\varphi^o\right) + \varepsilon^2..., \quad \varphi = \varphi^o + \varepsilon\mu_1\left(K^o,\varphi^o\right) + \varepsilon^2..., \tag{41}$$

где K^o,φ^o - новые переменные метода усреднения, $\nu_1\left(K^o,\varphi^o\right)$, $\mu_1\left(K^o,\varphi^o\right)$ - периодические функции по каждой из фаз φ_k ($k = 1,2,...\nu$) с периодом 2π.

Если функции $\nu_1\left(K^o,\varphi^o\right)$, $\mu_1\left(K^o,\varphi^o\right)$ ограничены, процедуру усреднения применять можно. Если неограниченны, то нет, ряды уже не будут соответствовать определению асимптотических рядов.

В теории асимптотических методов показано, что функции $\nu_1\left(K^o,\varphi^o\right)$, $\mu_1\left(K^o,\varphi^o\right)$ будут неограниченными в так называемых резонансных случаях, то есть когда линейная комбинация частот близка к нулю. Таким образом, условие применимости процедуры усреднения для системы со многими степенями свободы записывается в виде

$$s_1\omega_1+\ldots+s_\nu\omega_\nu\neq 0 \quad , \tag{42}$$

где $s_1,\ldots s_\nu$ - малые целые числа. Например, так называемый главный резонанс в системе с двумя частотами характеризуется условием

$$\omega_1-\omega_2\neq 0 \quad , \tag{43}$$

где $s_1=1,\ s_2=-1$.

5. Неявная схема метода усреднения

Здесь рассматриваются так называемая неявная схема метода усреднения. Она заключается в следующем. Строится преобразованная система ОДУ, быстрые переменные которой изменяются с меньшей частотой по сравнению с исходной системой. Однако вид этой преобразованной системы определяется из условия равенства уравнений первого приближения метода усреднения обеих систем, то есть усредненные уравнения обеих систем тождественно совпадают. Таким образом, для оценки изменения медленно изменяющихся переменных обеих систем (например, амплитуд колебаний) можно использовать преобразованную систему, которая интегрируется с существенно большим шагом. Это с одной стороны уменьшает время расчета, а с другой стороны уменьшает влияние вычислительной погрешности, которая неизбежно возникает при интегрировании с мелким шагом из-за большого количества элементарных операций.

Преимущество такого подхода также заключается в том, что явное усреднение функций при этом не производится, то есть соответствующие интегралы брать в явном виде не обязательно. Это позволяет применить такой подход для нелинейных систем для которых получение усредненных уравнений в явном виде невозможно (интегралы аналитически не определяются).

Применение метода иллюстрируется на рис. 7, где показаны зависимости, характеризующие движение КА при спуске с орбиты в плотных слоях атмосферы. Исходная система ДУ характеризуется высокочастотными колебаниями КА относительно центра масс, которые возникают из-за движения КА с большой скоростью, которая близка к первой космической. На рис. 7 показаны зависимости от времени угла атаки КА, близкого по форме к телу вращения. Угол атаки это угол между продольной осью КА и вектором скорости центра масс КА.

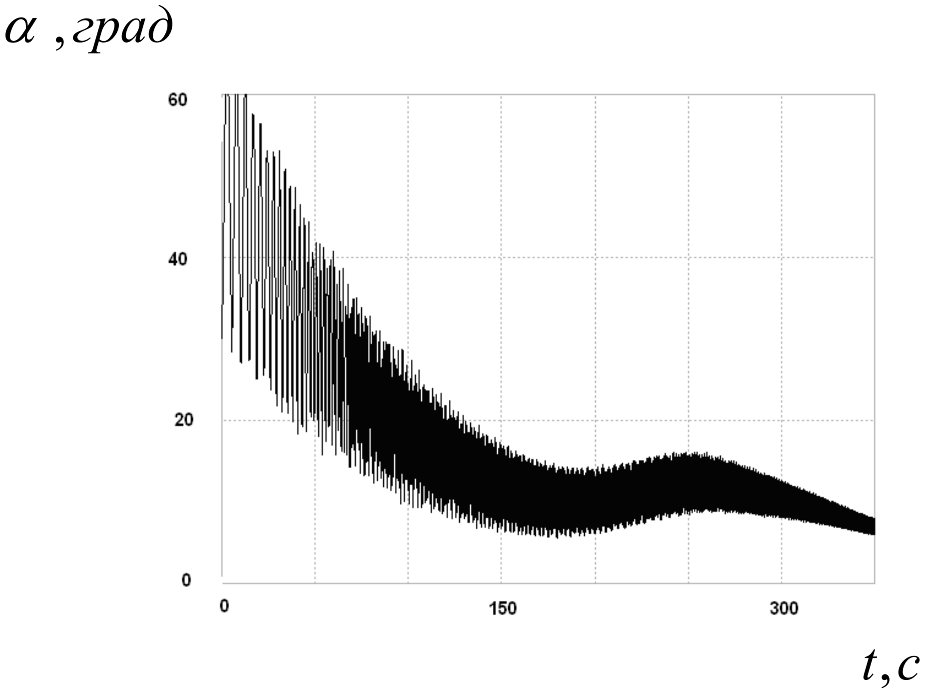


Рисунок 7 - Зависимости угла атаки КА от времени для исходной системы

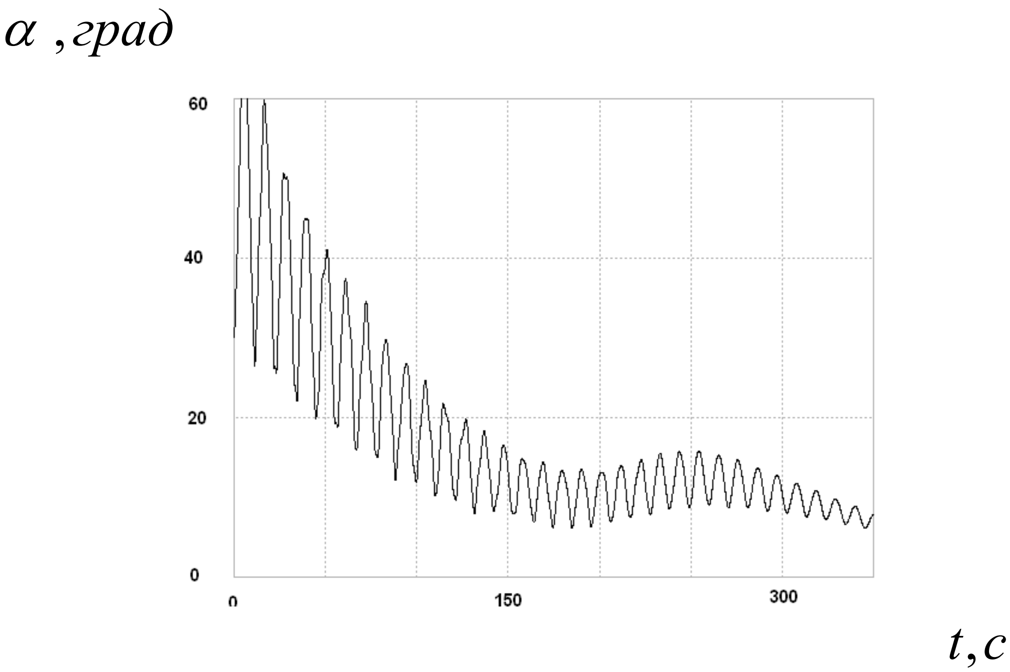


Рисунок 8 - Зависимости угла атаки КА от времени для преобразованной системы

Для иллюстрации метода рассмотрим систему с быстрыми и медленными переменными вида

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2\left(x\right)y=\varepsilon f\left(x,y,dy/dt\right), \tag{44}$$

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X\left(x,y,dy/dt\right), \tag{45}$$

где y - быстрая переменная, x - n - мерный вектор медленных переменных.

Запишем систему (44-45) как систему уравнений первого порядка

$$\frac{dz}{dt}=-\omega^2\left(x\right)y+\varepsilon f\left(x,y,z\right), \tag{46}$$

$$\frac{dy}{dt}=z, \tag{47}$$

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X\left(x,y,z\right), \tag{48}$$

Рассмотрим преобразованную систему следующего вида

$$\frac{dz_*}{dt}=-\nu\left(x_*\right)\omega^2\left(x_*\right)y_*+\varepsilon f\left(x_*,y_*,z_*\right), \tag{49}$$

$$\frac{dy_*}{dt}=\nu\left(x_*\right)z_*, \tag{50}$$

$$\frac{dx_*}{dt}=\varepsilon X\left(x_*,y_*,z_*\right), \tag{51}$$

где x_*, y_*, z_* - переменные преобразованной системы, $0<\nu\left(x_*\right)<1$ - коэффициент увеличения периода колебаний (уменьшения частоты).

Необходимо доказать, что усредненные значений переменных x, y, z и x_*, y_*, z_* совпадают.

Запишем исходную систему (46-48) в переменных "амплитуды - фазы". Такое преобразование уже делали раньше, когда рассматривали метод Ван-дер-Поля. Тогда

$$\frac{dK}{dt}=-\frac{\varepsilon}{\omega(x)}f\sin\varphi-K\frac{\dot{\omega}}{\omega}\sin^2\varphi, \tag{52}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega(x)-\frac{\varepsilon}{K\omega(x)}f\cos\varphi-\frac{\dot{\omega}}{\omega}\sin\varphi\cos\varphi, \tag{53}$$

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X\left(x,K\cos\varphi,-K\omega\sin\varphi\right), \tag{54}$$

Усредненная система имеет вид

$$\frac{dK}{dt}=-\frac{\varepsilon}{\omega(x)}\left\langle f\sin\varphi\right\rangle-K\frac{\dot{\omega}}{2\omega}, \tag{55}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega(x)-\frac{\varepsilon}{K\omega(x)}\left\langle f\cos\varphi\right\rangle, \tag{56}$$

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon\left\langle X\right\rangle, \tag{57}$$

где $\left\langle X\right\rangle$ - оператор усреднения по фазе φ.

Здесь необходимо отметить, что

$$\left\langle\sin^2\varphi\right\rangle=1/2,\ \left\langle\sin\varphi\cos\varphi\right\rangle=0$$

Теперь сделаем перейдем к переменным "амплитуды - фазы" в преобразованной системе (49-51). Сделаем замену переменных

$$x_*=K_*\cos\varphi_*,\quad z_*=-K_*\omega\sin\varphi_* \tag{58}$$

Тогда

$$\frac{dK_*}{dt}\cos\varphi_*-\frac{d\varphi_*}{dt}K_*\sin\varphi_*=-\omega K_*\sin\varphi_*,$$

$$-\frac{dK_*}{dt}\omega\sin\varphi_*-\frac{d\varphi_*}{dt}\omega K_*\cos\varphi_*-K_*\dot{\omega}\sin\varphi_*=$$

$$=-\nu\left(x_*\right)\omega^2K_*\cos\varphi_*+\varepsilon f(K_*\cos\varphi_*,-\omega K_*\sin\varphi_*)$$

Выражая отсюда производные, получим

$$\frac{dK_*}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega\left(x_*\right)}\left\langle f \sin\varphi_* \right\rangle - K\frac{\dot{\omega}}{2\omega}\,, \tag{59}$$

$$\frac{d\varphi_*}{dt} = \nu\left(x_*\right)\omega\left(x_*\right) - \frac{\varepsilon}{K_*\omega\left(x_*\right)}\left\langle f \cos\varphi_* \right\rangle, \tag{60}$$

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon\left\langle X\left(x_*, K_*\cos\varphi_*, -K_*\omega\sin\varphi_*\right)\right\rangle, \tag{61}$$

Теперь сравнивая систему (59-61) с системой (55-57) заключаем, что правые части этих систем отличаются только обозначением переменных. А значит правые части этих систем, усредненные по фазам φ и φ_*, тождественно совпадают. Значит медленные переменные этих систем изменяются по одним и тем же законам. Однако новая частота колебаний преобразованной системы в $1/\nu\left(x_*\right)$ раз меньше.

Так как частота колебаний исходной системы зависит от медленной переменной $\omega\left(x\right)$, то обычно используют следующий алгоритм изменения коэффициента $\nu\left(x_*\right)$

$$\nu\left(x_*\right) = \begin{cases} 1 \;\; if \;\; \omega\left(x_*\right) \le \omega_{\min} \\ \dfrac{\omega_{\min}}{\omega\left(x_*\right)} \;\; if \;\; \omega\left(x_*\right) > \omega_{\min} \end{cases}, \tag{62}$$

Здесь $\omega_{\min}$ - некоторая минимальная частота колебаний (параметр метода).

Получается адаптивная программа изменения коэффициента увеличения периода колебаний.