Алгоритмы построения геометрических фигур. Отрезки прямой линии, окружности, эллипсы, фигуры Лиссажу, кривые Безье.

лекция 3

Растровые алгоритмы построения геометрических фигур.

Отрезки прямой линии:

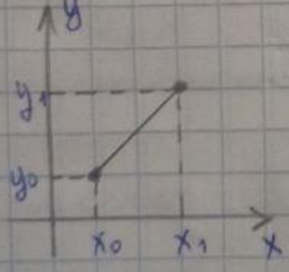
Способы задания прямой линии:

- в виде ф-ции $y = ax + b$
- в виде координат пары точек $((x_0, y_0), (x_1, y_1))$

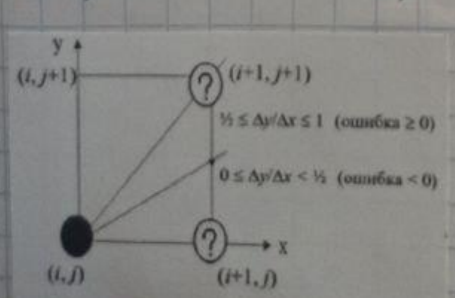
Связь этих 2ух способов: $a = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$;

$b = y_0 - a x_0$

Псевдокод: for (int $x = x_0$; $x \le x_1$; x++) Точка $(x, x \cdot a + b)$



Инкрементный алгоритм Брезенхема.



$e = e + m - 1$ $\quad m = \frac{dy}{dx}$

$e = e + m$ $\quad e = m - \frac{1}{2}$

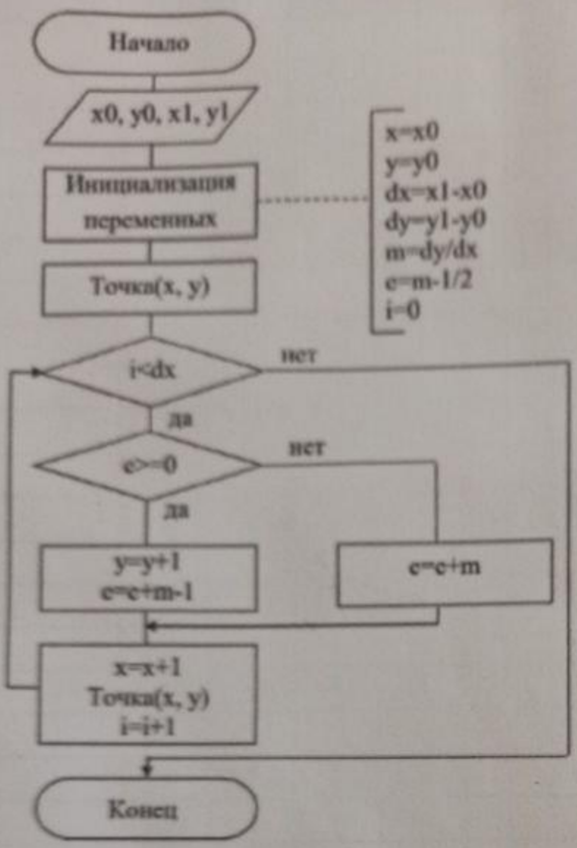
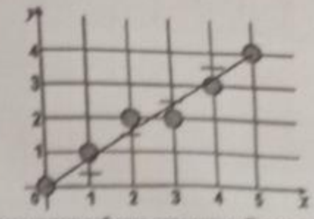


Схема алгоритма Брезенхама рисования прямой



Результат работы алгоритма Брезенхама

i	Точка	e	x	y
0	(0, 0)	3/10	0	0
1	(1, 1)	1/10	1	1
2	(2, 2)	-1/10	2	2
3	(3, 2)	7/10	3	2
4	(4, 3)	5/10	4	3
5	(5, 4)	3/10	5	4

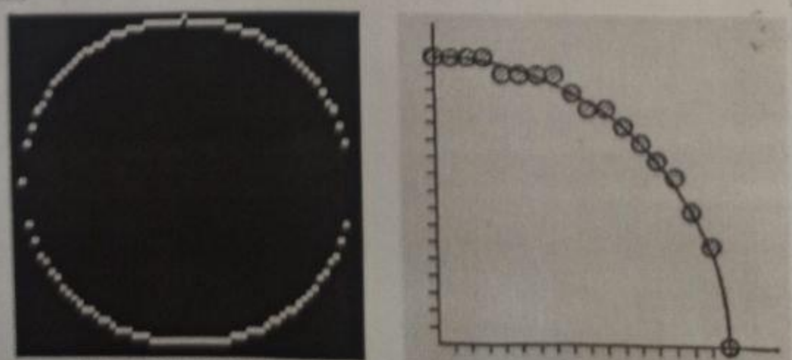
Трассировка работы алгоритма Брезенхама

Окружность и эллипс.

„Естественный" алгоритм

$$Y = \pm \sqrt{R^2 - (X - X_0)^2} + Y_0$$

```
For X:=X0-R to X<X0+R do begin
     Точка(X, Y0+sqrt(R*R-sqr(X-X0)));
     Точка(X, Y0-sqrt(R*R- sqr(X-X0)));
End;
```



Недостатки прорисовки контура круга у «естественного» алгоритма

Параметрический способ

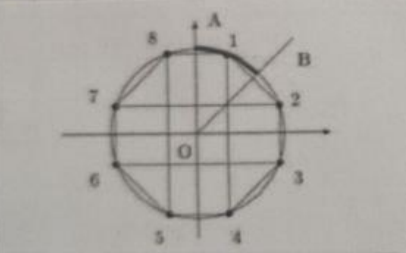
$$x = x_0 + R_1 \cos(\omega_1 t)$$

$$y = y_0 + R_2 \sin(\omega_2 t)$$

Инкрементный алгоритм Брезенхама для окр-ти.

2 идеи, позволяющие ускорить вывод на экран окр-ти:

1) Координаты точек окр-ти рассчитываются только для $\frac{1}{8}$ части всей окр-ти. Для остальных $\frac{7}{8}$ расчёты не производятся в силу симметрии.



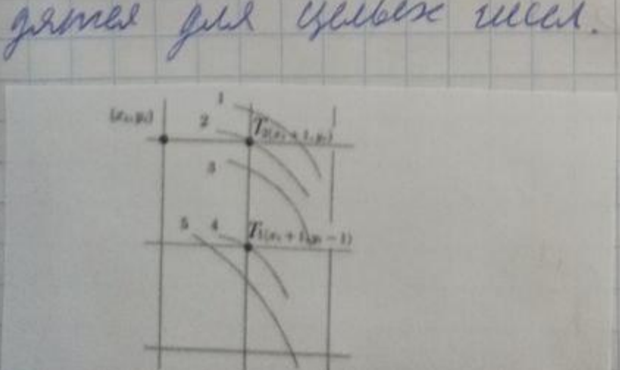
Симметричное отражение точки окружности

```
...
Procedure Draw8Pixels;
begin
   Точка(x+x0, y+y0, color);
   Точка(x+x0, -y+y0, color);
   Точка(-x+x0, y+y0, color);
   Точка(-x+x0, -y+y0, color);
   Точка(y+x0, x+y0, color);
   Точка(y+x0, -x+y0, color);
   Точка(-y+x0, x+y0, color);
   Точка(-y+x0, -x+y0, color);
end;
```

2) Расчёты координат точек в цикле производятся для целых чисел.

$$R_1^2 = (x_i+1)^2 + (y_i-1)^2$$

$$R_2^2 = (x_i+1)^2 + y_i^2$$



Возможное расположение окружности относительно пикселов экрана

$$\Delta' T_1 = R_1^2 - R^2 = (x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2$$

$$\Delta' T_2 = R_2^2 - R^2 = (x_i+1)^2 + y_i^2 - R^2$$

$$\Delta' = \Delta T_1 + \Delta' T_2$$

если $\Delta' > 0$, выберем т. T_1

если $\Delta' \le 0$, выберем т. T_2

Для положения 1. $\Delta^i T_1 < 0, \Delta^i T_2 < 0 \Rightarrow \Delta^i = \Delta^i T_1 + \Delta^i T_2 < 0$

$\Rightarrow$ выбирается T_2

Для положения 2. $\Delta^i T_1 < 0, \Delta^i T_2 = 0 = \Delta^i < 0 \Rightarrow$ выб. T_2

Для положения 3 возможны варианты (учитывая, что $\Delta^i T_1 < 0, \Delta^i T_2 > 0$)

В. 3.1: $|\Delta^i T_1| \geq |\Delta^i T_2| \Rightarrow \Delta^i < 0 \Rightarrow$ выб. T_2

В. 3.2: $|\Delta^i T_1| < |\Delta^i T_2| \Rightarrow \Delta^i > 0 \Rightarrow$ выб. T_1

Для положения 4. $\Delta^i T_1 = 0, \Delta^i T_2 > 0 \Rightarrow \Delta^i > 0 \Rightarrow$ выб. T_1

Для положения 5. $\Delta^i T_1 > 0, \Delta^i T_2 > 0 \Rightarrow \Delta^i > 0 \Rightarrow$ выб. T_1

$\Delta^i = \Delta^i T_1 + \Delta^i T_2 = (x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2 + (x_i+1)^2 + (y_i)^2 -$

$- R^2 = 2x_i^2 + 2y_i^2 + 4x_i - 2y_i + 3 - 2R^2$

Δ^{i+1} [при $y_{i+1} = y_i$] $= 2x_{i+1}^2 + 2y_{i+1}^2 + 4x_{i+1} - 2y_{i+1} + 3 - 2R^2 =$

$= 2(x_i+1)^2 + 2y_i^2 + 4(x_i+1) - 2y_i + 3 - 2R^2 = \Delta^i + 4x_i + 6$

Δ^{i+1} [при $y_{i+1} = y_i - 1$] $= 2x_{i+1}^2 + 2y_{i+1}^2 + 4x_{i+1} - 2y_{i+1} + 3 -$

$- 2R^2 = 2(x_i+1)^2 + 2(y_i-1)^2 + 4(x_i+1) - 2(y_i-1) + 3 -$

$- 2R^2 = \Delta^i + 4(x_i - y_i) + 10$

$x_1 = 0, y_1 = R \Rightarrow$

$\Delta^1_{T_1} = (0+1)^2 + (R-1)^2 - R^2 = 2 - 2R,$

$\Delta^1 T_2 = (0+1)^2 + R^2 - R^2 = 1,$

$\Delta^1 = \Delta^1 T_1 + \Delta^1 T_2 = 3 - 2R$

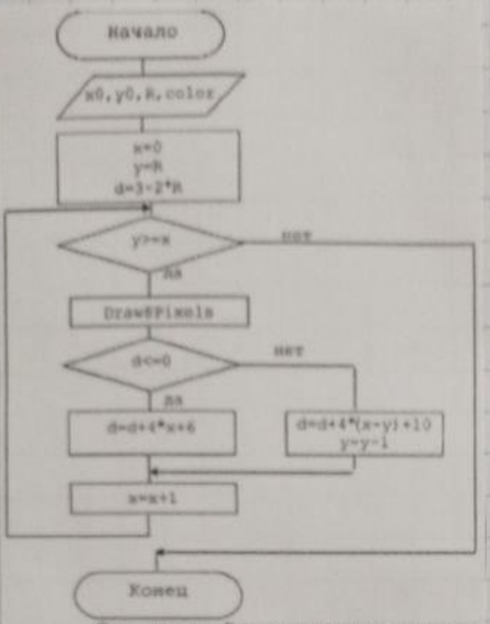


Схема алгоритма Брезенхама рисования окружности

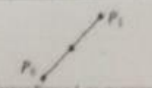
Кривые и поверхности Безье:

$$x = P_x(t) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i \, t^i (1-t)^{m-i} x_i$$

$$y = P_y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i \, t^i (1-t)^{m-i} y_i,$$

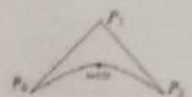
где $C_m^i = \frac{m!}{i!\,(m-i)!}$ сочетание m по i, а x_i и y_i - координаты точек-ориентиров.

1. $m=1$. (2 точки) Кривая вырождается в отрезок прямой линии $P(t) = (1-t) \cdot P_0 + t \cdot P_1$



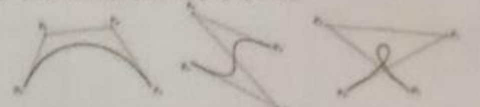
Кривая Безье 1-го порядка

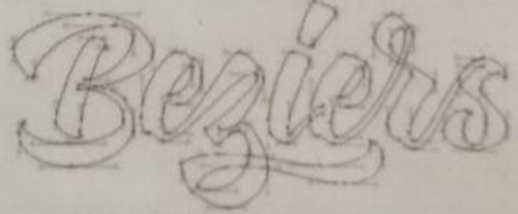
2. $m=2$. (3 точки)
$P(t) = (1-t)^2 \cdot P_0 + 2t\,(1-t) \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2$



Кривая Безье 2-го порядка

3. $m = 3$. (4 точки)
$P(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3t^2(1-t) \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$


Кривые Безье 3-го порядка



Шрифт, созданный с помощью кривых Безье 3-го порядка

Геометрический алгоритм построения кривой Безье:

1. Выбирается текущее значение параметра t $(0 \le t \le 1)$
2. Каждая сторона ломаной линии, проведенной через точки-ориентиры, делится пропорционально t.
3. Точки деления соединяются отрезками прямых, образуя контур с числом сторон на 1 < предыдущего.
4. Стороны нового контура снова делятся пропорционально t и соединяются до тех пор, пока не будет получена единственная точка деления. Это и будет точка, принадлежащая кривой Безье и соответствующая выбранному t.