

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева»  
(Самарский университет)

Ю.М. Заболотнов

Методические указания к лабораторным работам  
по вычислительным методам

Самара 2019

**УДК 519.95**

**Методические указания к лабораторным работам по вычислительным методам / Ю.М. Заболотнов. Кафедра программных систем. Самарский университет. 2019. 67 с. 17 илл.**

Методические указания составлены для выполнения лабораторных работ по курсу «Вычислительные методы» по направлению – 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и по курсу «Вычислительная математика» по направлению 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» на факультете информатики.

Лабораторные работы охватывают следующие разделы рабочих программ: численное дифференцирование, численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, интерполирование функций, приближение функций методом наименьших квадратов, приближение рядами Фурье и приближенное вычисление определенных интегралов.

Лабораторные работы выполняются на ЭВМ с применением современной математической системы MATHCAD.

Выполнено на кафедре программных систем.

## Содержание

<b>Введение .....</b>	<b>4</b>
<b>1. Лабораторная работа 1. Численное дифференцирование функций.....</b>	<b>7</b>
<b>2. Лабораторная работа 2. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений.....</b>	<b>16</b>
<b>3. Лабораторная работа 3. Интерполирование функций.....</b>	<b>31</b>
<b>4. Лабораторная работа 4. Метод наименьших квадратов.....</b>	<b>41</b>
<b>5. Лабораторная работа 5. Приближение рядами Фурье.....</b>	<b>47</b>
<b>6. Лабораторная работа 6. Приближенное вычисление определенных интегралов.....</b>	<b>57</b>
<b>Список использованных источников .....</b>	<b>67</b>

## **Введение**

Цель методических указаний – изучение студентами особенностей решения некоторых часто встречающихся вычислительных задач на компьютере. Особое внимание при этом уделяется анализу методической и вычислительной погрешностей, неизбежно возникающих при реализации численных методов на ЭВМ. Лабораторные работы проводятся с применением современной математической системы MATNCAD.

При выполнении лабораторных работ студенты обучаются основным методам и приёмам решения вычислительных задач на компьютере, закрепляя знания, полученные на лекциях и практических занятиях. Вначале студент знакомится с приведенными общими теоретическими положениями, затем выполняет индивидуальное задание, проводя исследование по анализу возникающих погрешностей и приобретая необходимые навыки применения вычислительных методов, в заключение составляет отчет о проделанной работе и отвечает на контрольные вопросы.

В лабораторный практикум входят следующие лабораторные работы.

### **№1. Численное дифференцирование функций.**

При выполнении данной лабораторной работы студент знакомится с методами численного дифференцирования функций. Целью работы является определение первой – четвертой производных известной функции с помощью формул численного дифференцирования и сравнение их значений с точными значениями производных, вычисленных программными средствами MATNCAD. Исследуется зависимость погрешности определения производных от шага дискретизации и оценивается влияние вычислительной погрешности, которая неизбежно возникает при малом шаге дискретизации.

**№2. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений.**

Цель работы: приобретение практических навыков численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе

студенты определяют численное решение заданного обыкновенного дифференциального уравнения с помощью трех методов: метода Эйлера, классического метода Рунге-Кутты 4-ого порядка точности и метода, который входит в индивидуальное задание. Проводится сравнение точности методов и исследуется зависимость погрешности от шага интегрирования.

### №3. Интерполирование функций.

При выполнении данной работы студент знакомится с приемами интерполирования функций. С использованием формулы Лагранжа строится интерполяционный полином для заданной таблицы значений функции и производится контроль правильности построения полинома с помощью графических средств пакета MATHCAD. Во второй части работы исследуется зависимость погрешности интерполирования от количества узлов интерполяции для заданной аналитической функции, которая приближается интерполяционным многочленом Лагранжа. Рассматриваются два способа выбора узлов интерполяции: равномерное разбиение интервала интерполирования и оптимальный выбор узлов как корней полиномов Чебышёва.

### №4. Приближение функций методом наименьших квадратов.

При выполнении данной работы студент изучает особенности применения метода наименьших квадратов для приближения функций. К заданной таблице значений известной функции с помощью датчика случайных чисел добавляются случайные числа, имитирующие ошибку, возникающую при проведении измерения некоторой выходной характеристики исследуемого объекта. В первой части работы необходимо построить линейный многочлен, коэффициенты которого определяются с помощью метода наименьших квадратов, и представить полученные результаты приближения в графическом виде. Во второй части работы заданные табличные значения приближаются с помощью нелинейной математической модели (по аргументу функции) и метода наименьших квадратов.

#### №5. Приближение функций рядами Фурье.

Цель работы: приобретение практических навыков приближения функций рядами Фурье. В данной работе студент должен построить ряд Фурье для заданной непрерывной функции и для заданной кусочно-непрерывной функции. При выполнении работы исследуется зависимость погрешности ряда Фурье и неизбежно возникающих краевых эффектов (для непериодических и кусочно-непрерывных функций) от количества удерживаемых слагаемых ряда.

#### №6. Приближенное вычисление определенных интегралов.

При выполнении данной лабораторной работы студент приобретает практические навыки приближенного вычисления определенных интегралов с заданной точностью. В данной работе студент должен различными приближенными методами и с заданной погрешностью вычислить определенный интеграл, соответствующий его индивидуальному заданию. Изучаются методы прямоугольников, трапеций, Симпсона. При выполнении работы исследуется зависимость погрешности вычисления определенного интеграла от параметра дискретизации. Кроме того, в работе рассматривается приближенное вычисление одного несобственного интеграла.

# Численное дифференцирование функций

## *Теоретические основы численного дифференцирования*

Под численным определением производных понимается приближенное вычисление производных по результатам вычислительного эксперимента. Оценка производных производится по результатам вычисления функции при заданных значениях аргумента. Численное дифференцирование является основой многих разделов вычислительной математики: численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных, поиск экстремумов функций, решение систем нелинейных алгебраических уравнений и др.

### *Вычисление первой производной*

Пусть на интервале  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $f(x)$ . Данная функция может быть задана в виде некоторого аналитического выражения или алгоритмически, то есть имеется возможность вычислять значения функции при заданном значении аргумента. Разобьем интервал точками  $x_i = a + ih$ , где  $i = 0, 1, \dots, N$ ;  $h = (b - a) / N$ . В качестве приближенных выражений для первой производной для любой внутренней точки заданного интервала можно взять любую из следующих формул

$$\tilde{f}'(x_i) \approx (f_i - f_{i-1}) / h, \quad (1.1)$$

$$\tilde{f}'(x_i) \approx (f_{i+1} - f_i) / h, \quad (1.2)$$

$$\tilde{f}'(x_i) \approx (f_{i+1} - f_{i-1}) / 2h, \quad (1.3)$$

где  $f_i = f(x_i)$ ,  $f_{i-1} = f(x_{i-1})$ ,  $f_{i+1} = f(x_{i+1})$ .

Формулы (1.1), (1.2) и (1.3) называются соответственно левой, правой и центральной разностными производными функции  $f(x)$  в точке  $x = x_i$ . Если точка  $x_i$  фиксирована, а  $h \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ), то каждое из выражений (1.1)-(1.3) в соответствии с определением первой производной стремится к точному значению производной  $\tilde{f}'(x_i) \rightarrow f'(x_i)$ . Поэтому в качестве приближенного

выражения для оценки первой производной можно взять любую из этих формул.

### ***Вычисление второй производной***

Аналогично может быть произведено численное вычисление второй производной функции  $f(x)$ . Вычитая правые части выражений для правой и левой разностных производных (1.2) и (1.1) друг из друга и разделив на шаг  $h$ , получим

$$\tilde{f}''(x_i) \approx (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) / h^2 \quad . \quad (1.4)$$

### ***Вычисление третьей и четвертой производных***

Используя формулу вычисления второй производной нетрудно получить выражения для оценки третьей и четвертой производных функции  $f(x)$  [1]

$$\tilde{f}'''(x_i) \approx (f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}) / 2h^3 \quad , \quad (1.4)$$

$$\tilde{f}^{IV}(x_i) \approx (f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}) / h^4 \quad . \quad (1.5)$$

### ***Оценка точности вычисления первой производной***

Произведем оценку точности численного дифференцирования при вычислении первой производной. Сначала рассмотрим оценку точности определения левой разностной производной (1.1). Представим выражение (1.1) в виде

$$\tilde{f}'(x) \approx (f(x) - f(x-h)) / h \quad , \quad (1.6)$$

где  $x = x_i$ ,  $f(x) = f_i$ ,  $f(x-h) = f_{i-1}$ .

Определим значения  $f(x-h)$ , разложив функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора в точке  $x$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \dots \quad .$$

Отсюда

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f''(x) - \dots \quad .$$

Тогда



$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) \dots \quad (1.7)$$

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и ее вторая производная ограничена на интервале  $[a, b]$  некоторой константой  $M < \infty$ , то из выражения (1.7) получим оценку (с точностью до слагаемых порядка  $h^2$ )

$$|f'(x) - \tilde{f}'(x)| < \frac{h}{2} M \quad . \quad (1.8)$$

Иногда оценку (1.8) записывают по другому, используя символ порядка  $O(h)$

$$|f'(x) - \tilde{f}'(x)| = O(h) \quad . \quad (1.9)$$

**Определение.** Функция  $F(h)$  является величиной порядка  $h^k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h)}{h^k} = C_k \quad , \quad (1.10)$$

где  $C_k < \infty$  - ограниченная константа.

Нетрудно показать, что точность оценки первой производной с помощью правой разностной производной та же (1.9). Однако вычисление первой производной с помощью центральной разностной схемы выше. Покажем это. Наряду с рядом (1.7) рассмотрим ряд

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) \dots \quad (1.11)$$

Тогда вычитая левые и правые части выражений (1.11) и (1.7), получим

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \dots \quad .$$

Отсюда при условии ограниченности третьей производной функции  $f(x)$ , для центральной разностной схемы получаем

$$|f'(x) - \tilde{f}'(x)| = O(h^2) \quad . \quad (1.12)$$

Следовательно, центральная разностная схема (1.3) в общем случае дает большую точность при численном вычислении первой производной, чем формулы (1.1),(1.2).

### ***Оценка точности вычисления второй производной***

Аналогично может быть получена оценка точности вычисления второй производной (1.4). Для этого необходимо выписать ряды (1.7) и (1.11) до слагаемых порядка  $h^4$  и подставить в формулу (1.4), тогда

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{12} f^{IV}(x) + \dots$$

или при условии ограниченности четвертой производной

$$|f''(x) - \tilde{f}''(x)| = O(h^2) \quad . \quad (1.13)$$

### ***Оценка точности вычисления производных k-ого порядка***

Используя описанную выше методику, можно показать, что существует класс методов, для которых точность вычисления производных k-ого порядка с помощью разностных схем определяется неравенством

$$|f^{(k)}(x) - \tilde{f}^{(k)}(x)| = O(h^k) \quad , \quad (1.14)$$

где  $k = 1, 2, \dots$ .

Однако в общем случае оценку правильнее написать в виде

$$|f^{(k)}(x) - \tilde{f}^{(k)}(x)| = O(h^p) \quad , \quad (1.15)$$

где  $p$  - порядок точности формулы. В частности, для формулы центральной разности (1.3) имеем  $p \neq k$ .

Замечание. Априорная оценка погрешности (до проведения численного эксперимента) формул численного дифференцирования или каких-либо других выражений вычислительной математики называется прямым анализом погрешностей.

### ***Влияние вычислительной погрешности на точность численного дифференцирования***

Оценка (1.15) показывает, что погрешность численного вычисления производной  $k$ -ого порядка убывает при уменьшении шага  $h$  со скоростью пропорциональной  $h^P$ . Так, например, при уменьшении шага в два раза погрешность численного вычисления производной должна уменьшиться в  $2^{-P}$  раз. Однако оценка (1.15) учитывает только методическую погрешность численного вычисления производных (погрешность дискретизации или разностной схемы). При реализации формул численного дифференцирования на компьютере неизбежно возникает вычислительная погрешность, связанная с ограниченностью разрядной сетки ЭВМ (погрешности округления, ограниченность диапазона представляемых чисел и т.д.). Поэтому реальная скорость увеличения точности формул численного дифференцирования с уменьшением шага  $h$  может быть меньше. Поясним это на простом примере. Пусть  $\delta_i$  и  $\delta_{i-1}$  вычислительная погрешность определения значений функции в точках  $x_i$  и  $x_{i-1}$ . Тогда, применяя, например, разностную схему (1.1), получим

$$\tilde{f}'(x_i) \approx (f_i - f_{i-1}) / h + (\delta_i - \delta_{i-1}) / h .$$

В этом случае оценка для вычислительной погрешности  $\delta_f$  определения производной дает

$$|\delta_f| = |(\delta_i - \delta_{i-1}) / h| \leq \frac{2\delta}{h} , \quad (1.16)$$

где  $\delta = \max(|\delta_i|, |\delta_{i-1}|)$ . Поэтому при  $h \rightarrow 0$  вычислительная погрешность (1.16) неограниченно возрастает.

- В общем случае существует некоторый минимальный шаг дискретизации  $h_0$ , при котором методическая и вычислительная погрешности приблизительно равны. Этот минимальный шаг дискретизации можно оценить, приравняв соответствующие погрешности. Так, для формулы (1.1) имеем

$$\frac{h_o}{2} M \approx \frac{2\delta}{h_o} \quad .$$

Отсюда

$$h_o \approx 2\sqrt{\frac{\delta}{M}} = O(\sqrt{\delta}) \quad .$$

При вычислении производных высших порядков влияние вычислительной погрешности может быть еще больше. Можно показать, что

$$h_o \approx O(\delta^{1/2k}) \quad , \quad (1.17)$$

и это справедливо для формул (1.14).

### ***Порядок выполнения первой лабораторной работы***

1. Построить график функции, соответствующей индивидуальному заданию.

2. Выбрать точку  $x$ , для которой будет производиться численное вычисление производных.

Замечание. Точку необходимо выбрать вдали от точек разрыва функции.

3. С помощью программных средств пакета MATHCAD найти аналитические выражения для производных (до четвертого порядка включительно) заданной функции.

4. На основании формул численного дифференцирования (1.1), (1.3), (1.4)-(1.6) задать функции для приближенных оценок производных (до четвертого порядка включительно).

5. Задать функции для определения относительной погрешности вычисления производных

$$\varepsilon_k(h) = \left| \frac{f^{(k)} - \tilde{f}^{(k)}}{f^{(k)}} \right| \quad , \quad (1.18)$$

где  $k = 1, 2, 3, 4$ .

6. Построить графики функций  $\varepsilon_k(h)$ . Уменьшая шаг  $h$ , приближенно оценить значения шага  $h_o$ , при которых сравниваются методическая и

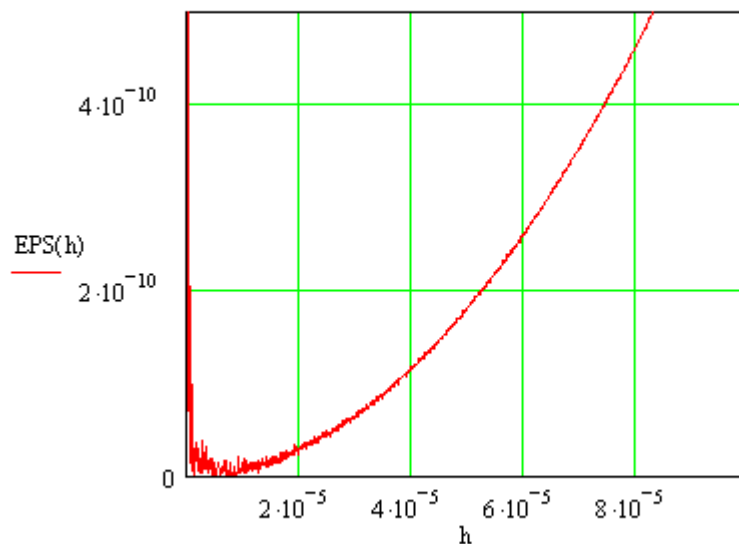
вычислительная погрешности. Это можно определить по характерному резкому увеличению относительной погрешности.

Замечание. Апостериорная оценка погрешности  $\varepsilon_k(h)$  (по результатам проведенного численного эксперимента) формул численного дифференцирования или каких-либо других выражений вычислительной математики называется обратным анализом погрешностей.

### ***Результаты выполнения первой лабораторной работы***

Примеры полученных зависимостей погрешности от шага дискретизации приводятся на рис. 1–4.

**Зависимость погрешности вычисления первой производной от шага дискретизации**



**Рис. 1**

Зависимость погрешности вычисления второй производной от шага дискретизации

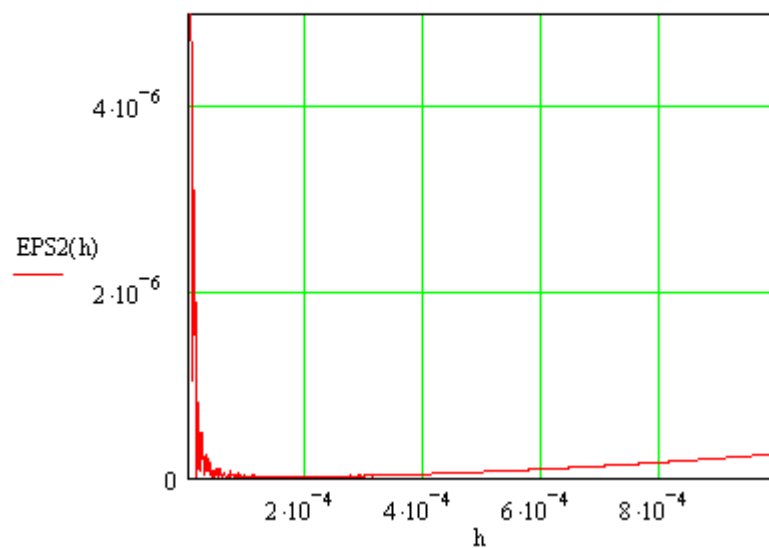


Рис. 2

Зависимость погрешности вычисления третьей производной от шага дискретизации

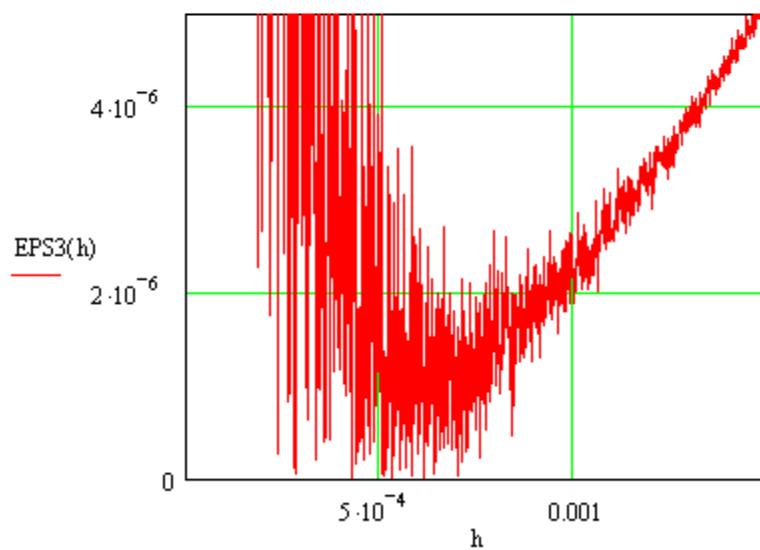
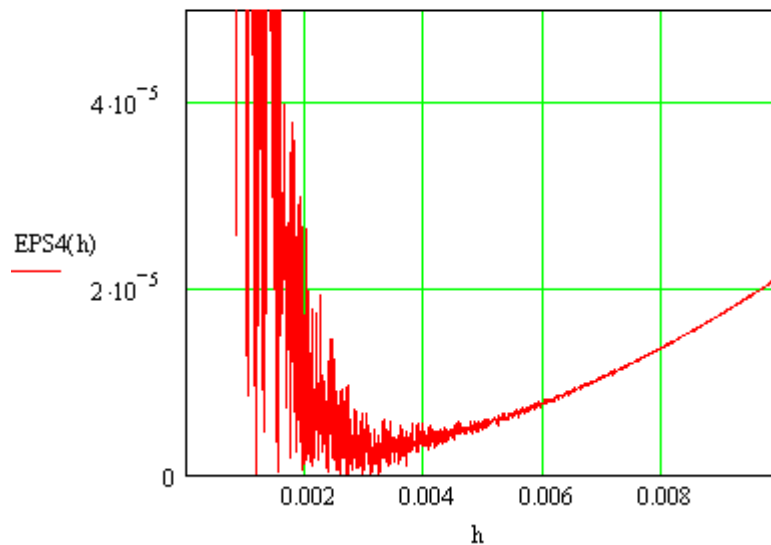


Рис. 3

### Зависимость погрешности вычисления четвертой производной от шага дискретизации



**Рис. 4**

### *Отчет к первой лабораторной работе*

Отчет к лабораторной работе должен включать в себя: название, задание, постановку задачи, основные используемые формулы, распечатку программы, выводы по работе.

### *Контрольные вопросы к первой лабораторной работе*

1. Что такое численное дифференцирование?
2. Как производится построение приближенных формул численного дифференцирования?
3. Как производится оценка методической погрешности численного дифференцирования?
4. В чем заключается влияние вычислительной погрешности на точность численного дифференцирования?
5. Как определяется минимальный шаг дискретизации при численном дифференцировании?
6. Прямой и обратный анализ погрешностей при численном дифференцировании.

## Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений

### *Теоретические основы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*

При математическом моделировании поведения динамических систем часто приходится иметь дело с необходимостью решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для задач, представляющих практический интерес, редко удается получить решение ОДУ в аналитическом виде, поэтому приходится пользоваться численными методами.

### **Постановка задачи численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений**

Математические модели, полученные в виде систем ОДУ, могут быть представлены либо в нормальной форме Коши, либо в неявной форме.

Нормальная форма Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad , \quad (2.1)$$

где  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$  - вектор переменных состояния системы,

$f(x, t) = (f^{(1)}(x), \dots, f^{(n)}(x))$  - заданная вектор-функция правых частей,  $t$  - независимая переменная (чаще всего время).

Неявная форма

$$\Phi(x, \frac{dx}{dt}, t) = 0 \quad , \quad (2.2)$$

где  $\Phi(x, \frac{dx}{dt}, t) = \left( \Phi^{(1)}(x, \frac{dx}{dt}, t), \dots, \Phi^{(n)}(x, \frac{dx}{dt}, t) \right)$  - заданная вектор-функция.

Систему (2.1) можно получить из системы (2.2), если последнюю удастся разрешить относительно производных  $\frac{dx^{(1)}}{dt}, \dots, \frac{dx^{(n)}}{dt}$ . Представление систем



ОДУ в виде (2.1) удобно при решении задач на компьютере и наиболее часто встречается. Поэтому здесь будем рассматривать численное интегрирование систем ОДУ, приведенной к нормальной форме (2.1).

Рассмотрим решение начальной задачи Коши для системы (2.1), которая формулируется следующим образом. Необходимо найти решение системы ОДУ (2.1)  $x(t)$  на отрезке  $[t_o, T]$  при заданных начальных условиях  $x(t_o) = x_o$ , где  $x_o = (x_o^{(1)}, \dots, x_o^{(n)})$  - вектор начальных условий. Далее будем предполагать, что точное решение задачи Коши для уравнения (2.1) существует и единственно.

Первый шаг на пути численного решения системы (2.1) при заданных начальных условиях состоит в разбиении отрезка  $[t_o, T]$  на конечное число частей введением узловых точек

$$t_o < t_1 < \dots < t_m < \dots < t_N = T .$$

Хотя неравномерное разбиение отрезка не ведет к каким-либо трудностям, для простоты положим, что узловые точки делят отрезок на равные части  $h = (T - t_o) / N$ , где  $N$  - число отрезков,  $h$  - шаг интегрирования. Очевидно, что в этом случае  $t_m = t_o + mh$  ( $m = 0, 1, \dots, N$ ).

Большинство численных методов решения задачи Коши для системы (2.1) сводится к последовательному нахождению значений  $x(t_o), x(t_1), \dots, x(t_m), \dots, x(t_N)$ , то есть к определению  $x(t_{m+1})$  по формуле

$$x_{m+1} = x_m + hF(h, x_{m+1}, x_m, x_{m-1}, \dots, x_{m-M}, \dot{x}_{m+1}, \dot{x}_m, \dot{x}_{m-1}, \dots, \dot{x}_{m-M}), \quad (2.3)$$

где  $x_{m+1} = x(t_{m+1})$ ,  $x_m = x(t_m), \dots$

$\dot{x}_{m+1} = f(x_{m+1}, t_{m+1})$ ,  $\dot{x}_m = f(x_m, t_m), \dots$

$F$  - некоторая функция, определяемая применяемым методом,  $M$  - количество предыдущих точек, следующих за точкой  $t_m$ , используемых в численном методе.

Если для получения  $x_{m+1}$  используются только значения  $x_m, \dot{x}_m$ , то есть  $M = 0$ , то метод называется явным одношаговым методом. Если  $M > 0$ , то метод называется многошаговым. Если правая часть соотношения (2.3) зависит от определяемых значений  $x_{m+1}, \dot{x}_{m+1}$ , то метод называется неявным методом. Сейчас наиболее популярными при расчетах на ЭВМ являются явные одношаговые методы. Это связано в основном с простотой их алгоритма, гибкостью, они позволяют легко изменять шаг интегрирования, не требуют предварительного “разгона” (формулу (2.3) можно применять сразу на первом шаге) как многошаговые методы. Иногда применяют неявные методы интегрирования, однако они требуют на каждом шаге численного интегрирования решения в общем случае нелинейное уравнение (2.3) относительно определяемого значения  $x_{m+1}$ .

### **Метод Эйлера**

Наиболее простым методом интегрирования систем ОДУ является метод Эйлера

$$x_{m+1} = x_m + hf(x_m, t_m) \quad , \quad (2.4)$$

где  $h = t_{m+1} - t_m$ .

Формула (2.4) основана на приближенном определении производной в точке  $(x_m, t_m)$  с помощью разностной схемы

$$\frac{dx_m}{dt} \approx \frac{x_{m+1} - x_m}{t_{m+1} - t_m} \approx f(x_m, t_m) \quad .$$

### **Методы Рунге-Кутты**

Основная идея метода Рунге-Кутты была предложена К.Рунге, а затем развита В.Куттой. Окончательно методы Рунге-Кутты сформировались в современном виде в 60-х годах прошлого века благодаря работам Батчера [2].

Если метод Эйлера (2.4) использует одно вычисление производной  $f(x_m, t_m)$  на каждом шаге численного интегрирования, то в методах Рунге-Кутты таких вычислений несколько, что позволяет повысить точность интегрирования системы (2.1). Общая формула методов Рунге-Кутты имеет вид

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x_m + hF(h, x_m, t_m) \quad , \\ F(h, x_m, t_m) &= \sum_{i=1}^S C_i K_i \quad , \quad K_1 = f(x_m, t_m) \quad , \\ K_i &= f\left(x_m + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j, t_m + h a_i\right) \quad , \quad i = 2, \dots, S \quad . \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $S$  - количество этапов метода. Формулы методов Рунге-Кутты являются одношаговыми, поэтому удобны при программировании и позволяют легко менять шаг интегрирования в процессе интегрирования.

Возможно, наиболее известной является в настоящее время формула 4-х этапного классического метода Рунге-Кутты

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x_m + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad , \\ K_1 &= f(x_m, t_m) \quad , \quad K_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2} K_1, t_m + \frac{h}{2}\right) \quad , \\ K_3 &= f\left(x_m + \frac{h}{2} K_2, t_m + \frac{h}{2}\right) \quad , \quad K_4 = f(x_m + hK_3, t_m + h) \quad . \end{aligned} \quad (2.6)$$

### ***Оценка погрешности интегрирования систем ОДУ***

Пусть  $x(t_m)$  - точное решение системы (2.1), а  $x_m$  - приближенное численное решение, вычисленное по формуле (2.3).

**Определение.** Величина  $\varepsilon_{m+1}^{\Pi} = x(t_{m+1}) - x_{m+1}$  называется полной ошибкой интегрирования на  $m+1$ -ом шаге.

Полную ошибку интегрирования можно определить, если известно аналитическое решение системы (2.1), однако это возможно только в

простейших случаях. В практических расчетах, когда точное решение неизвестно, необходимо уметь оценивать полную ошибку интегрирования.

Полная ошибка интегрирования на  $m+1$ -ом шаге зависит от следующих ошибок: 1) ошибки, возникшей на  $m$ -ом шаге  $\varepsilon_m^{\Pi}$ ; 2) вычислительной ошибки, связанной с ограниченностью разрядной сетки ЭВМ  $\varepsilon_m^B$  (вычислительная погрешность) и возникающей на  $m+1$ -ом шаге при использовании формулы (2.3); 3) локальной методической ошибки на  $m+1$ -ом шаге  $\varepsilon_m^{\Pi}$ , связанной с неточностью приближенной формулы (2.3) (эта ошибка зависит от шага дискретизации  $h$ ).

Если положить  $\varepsilon_m^B = 0$ , то величину  $\varepsilon_{m+1}^{\Pi}$  иногда называют глобальной методической погрешностью на  $m+1$ -ом шаге.

Оценим сначала  $\varepsilon_m^{\Pi}$  для простейшего метода Эйлера, полагая, что в точке  $(x_m, t_m)$   $\varepsilon_m^{\Pi} = 0$  и  $\varepsilon_m^B = 0$  (методическая погрешность на одном шаге). Тогда локальная методическая ошибка на  $m+1$ -ом шаге равна  $\varepsilon_m^{\Pi} = \varepsilon_{m+1}^{\Pi}$  и может быть вычислена по формуле (см. определение  $\varepsilon_{m+1}^{\Pi}$ )

$$\varepsilon_m^{\Pi} = x(t_{m+1}) - x_{m+1}$$

или с учетом выражения (2.4)

$$\varepsilon_m^{\Pi} = x(t_{m+1}) - x(t_m) - hf(x(t_m), t_m) \quad , \quad (2.7)$$

где  $x(t_m)$  и  $x(t_{m+1})$  - точные значения вектора  $x$  в точках  $t_m$  и  $t_{m+1}$ .

Представим точное решение  $x(t)$  в точке  $t_m$  в виде ряда Тейлора, тогда

$$x(t) = x(t_m) + \frac{dx}{dt}(t_m)(t - t_m) + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2}(t_m)(t - t_m)^2 + \dots \quad , \quad (2.8)$$

где  $\frac{dx}{dt}(t_m) = f(x_m, t_m)$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}(t_m) = \frac{df}{dt}(t_m)$ .

Принимая  $t = t_{m+1}$ ,  $h = t_{m+1} - t_m$ , приведем выражение (2.8) к виду

$$x(t_{m+1}) = x(t_m) + hf(x(t_m), t_m) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2x}{dt^2}(t_m) + \dots \quad (2.9)$$

Подставляя ряд (2.9) в формулу (2.7), получим

$$\varepsilon_m^{\mathcal{L}} = \frac{h^2}{2} \frac{d^2x}{dt^2}(t_m) + \dots \quad (2.10)$$

Если вторая производная функции  $x(t)$  ограничена некоторой постоянной

$$\left| \frac{d^2x}{dt^2}(t_m) \right| < A \quad ,$$

то с учетом слагаемых второго порядка  $h^2$  из соотношения (2.10) получим оценку

$$\left| \varepsilon_m^{\mathcal{L}} \right| < \frac{h^2}{2} A = O(h^2) \quad , \quad (2.11)$$

то есть для метода Эйлера методическая погрешность интегрирования на одном шаге есть величина порядка  $h^2$ .

По той же схеме может быть произведена оценка методической погрешности любого численного метода, заданного формулой (2.3). Точное решение  $x(t_{m+1})$  для малых  $h$  в этом случае всегда можно определить, разлагая решение  $x(t)$  в ряд Тейлора в точке  $t_m$ . При этом формула интегрирования будет давать ту же точность, что и соответствующий ей усеченный ряд Тейлора.

**Определение.** Порядком точности  $p$  метода интегрирования называется порядок производной (или степени  $h^p$ ) члена ряда Тейлора, до которого формула интегрирования (2.3) аппроксимирует точное решение при достаточно малых  $h$ .

Локальную методическую ошибку  $\varepsilon_m^{\mathcal{L}}$  определяют путем оценки суммы оставшихся членов ряда Тейлора. В соответствии с приведенных

определением метод Эйлера (2.4) является методом первого порядка точности.

В общем случае можно показать, что для метода порядка точности  $p$  справедлива оценка

$$\left| \varepsilon_m^I \right| < O(h^{p+1}) . \quad (2.12)$$

• Локальная методическая погрешность  $\varepsilon_m^I$  определяет точность интегрирования на  $m$ -ом шаге при условии, что  $x_m$  вычислено точно. В общем случае задача состоит в том, чтобы оценить глобальную ошибку интегрирования системы (2.1) на отрезке  $t_o \leq t \leq t_N = T$ , то есть

$$\varepsilon_N^I = x(t_N) - x_N , \quad (2.13)$$

с учетом накапливающихся от шага к шагу погрешностей интегрирования.

Не получая подробно данную оценку заметим, что если на отрезке укладывается большое количество шагов (обычно больше 10-20), то возможно уменьшения порядка точности интегрирования путем “суммирования” локальных погрешностей. Так как количество шагов интегрирования равно  $N = (T - t_o) / h$ , то “суммирование”  $N$  слагаемых может привести к уменьшению порядка точности формулы интегрирования (2.3) (одно  $h$  сокращается). Поэтому оценка погрешности (2.13) на отрезке  $t_o \leq t \leq t_N = T$  будет иметь вид

$$\left| \varepsilon_N^I \right| < O(h^p) . \quad (2.14)$$

Практическим следствием оценки (2.14) является ожидание того, что при уменьшении шага  $h$  численное решение будет все более точным и при  $h \rightarrow 0$  будет стремиться к точному решению со скоростью порядка  $O(h^p)$ .

Так, для метода Эйлера  $\left| \varepsilon_N^I \right| < O(h)$ . Поэтому в этом случае при уменьшении шага  $h$  в два раза методическая погрешность тоже уменьшается в два раза.

Для классического метода Рунге-Кутты 4-ого порядка точности (2.6)  $|\varepsilon_N^{\Pi}| < O(h^4)$ , поэтому при уменьшении  $h$  в два раза можно ожидать уменьшения погрешности в  $2^4 = 16$  раз. В общем случае для метода порядка точности  $p$  погрешность должна уменьшиться в  $2^p$  раз. Медленная сходимость метода Эйлера и других методов невысокого порядка точности при уменьшении  $h$  объясняет тот факт, что в настоящее время на практике используются методы 4-ого порядка точности и выше. Кроме того, существует тенденция увеличения порядка точности применяемых методов особенно в тех областях науки и технике, где требуется большая точность вычислений или интегрирование производится на больших интервалах времени.

Приведенные оценки методической погрешности интегрирования (2.11), (2.12), (2.14) относятся к классу априорных оценок (они получены до проведения вычислительного эксперимента). Определение таких оценок называется прямым анализом погрешностей. Прямой анализ погрешностей позволяет установить лишь порядок возникающих погрешностей.

### ***Влияние вычислительной погрешности на точность интегрирования систем ОДУ***

Выше была произведена оценка полной погрешности интегрирования  $\varepsilon_N^{\Pi}$  без учета вычислительной погрешности ( $\varepsilon_m^B = 0$ ), возникающей в результате ограниченности разрядной сетки ЭВМ. Ошибку  $\varepsilon_N^{\Pi}$  в соответствии с полученными оценками можно сделать сколь угодно малой при уменьшении шага интегрирования  $h$ . Причем скорость, с которой стремится к нулю погрешность  $|\varepsilon_N^{\Pi}| \rightarrow 0$  определяется порядком точности  $p$  метода интегрирования (2.14). Однако истинная скорость сходимости метода на практике всегда меньше теоретической. Это объясняется влиянием вычислительной погрешности (округление чисел, ограниченностью

диапазона представляемых чисел и т.д.). Чем меньше шаг  $h$ , тем больше потребуется шагов для интегрирования системы на отрезке  $[t_0, T]$  и тем больше скажутся на получении решения вычислительные ошибки. Вычислительная погрешность может возрастать со скоростью  $h^{-1}$ . На практике при численном интегрировании на ЭВМ всегда существует такая величина шага  $h_0$ , меньше которой вклад ошибок округления начинает доминировать в полной ошибке. Полная ошибка интегрирования, определенная с учетом вычислительной погрешности, в зависимости от шага дискретизации  $\varepsilon_N^I(h)$  ведет себя аналогично погрешности численного дифференцирования, рассмотренной в первой лабораторной работе. Минимальную величину шага  $h_0$  очень трудно установить заранее, но в задачах, где не требуется слишком высокая точность, необходимый шаг будет значительно больше, чем  $h_0$ , и основной вклад обычно вносит методическая ошибка интегрирования.

### **Обратный анализ погрешностей численного интегрирования систем ОДУ**

Наряду с прямым анализом погрешностей, который позволяет определить порядок методической ошибки интегрирования, в практических вычислениях используется обратный анализ погрешностей. Обратный анализ погрешностей относится к классу апостериорных оценок, так как он проводится по результатам проведенного вычислительного эксперимента. При обратном анализе погрешностей возникающие ошибки интегрирования интерпретируются как результат возмущения исходных данных задачи. Проводя несколько расчетов на ЭВМ численным методом с различными исходными данными (обычно варьируют шагом интегрирования), проводят оценку величины погрешности.

Простейшим способом оценки погрешности по результатам вычислительного эксперимента является правило Рунге, которое требует



всего двух численных расчетов системы (2.1) на ЭВМ. Для вычисления полной погрешности интегрирования воспользуемся оценкой (2.14), которую при достаточно малых  $h$  можно представить в виде приближенного равенства

$$\varepsilon_N^{\Pi} = x(t_N) - x_N \approx C_p h^p, \quad (2.15)$$

где  $C_p$  - некоторая константа,  $x(t_N)$  - точное решение,  $p$  - порядок точности метода,  $x_N$  - численное решение, которое зависит от шага  $x_N(h)$ .

Для оценки неизвестных значений  $x(t_N)$  и  $C_p$  в выражении (2.15) достаточно провести два численных расчета с шагами  $h_1$  и  $h_2$ , тогда

$$x(t_N) - x_N(h_1) \approx C_p h_1^p, \quad (2.16)$$

$$x(t_N) - x_N(h_2) \approx C_p h_2^p, \quad (2.17)$$

где  $x_N(h_1)$  и  $x_N(h_2)$  - вычисленные значения переменных интегрирования при  $t = T$ .

Из системы (2.16)-(2.17) нетрудно определить  $x(t_N)$  и  $C_p$

$$C_p \approx \frac{x_N(h_2) - x_N(h_1)}{h_1^p - h_2^p}, \quad (2.18)$$

$$x(t_N) \approx \frac{x_N(h_2)h_1^p - x_N(h_1)h_2^p}{h_1^p - h_2^p}. \quad (2.19)$$

В этом случае полная погрешность интегрирования  $\varepsilon_N^{\Pi}$  при  $h = h_1$  и  $h = h_2$  равна

$$\varepsilon_N^{\Pi}(h_1) \approx C_p h_1^p, \quad \varepsilon_N^{\Pi}(h_2) \approx C_p h_2^p, \quad (2.20)$$

где  $C_p$  определяется по формуле (2.18).

Применяя правило Рунге, обычно полагают  $h_1 = h$ ,  $h_2 = h/2$ . В этом случае

$$\varepsilon_N^{\Pi}(h) \approx C_p h^p = \frac{x_N(h/2) - x_N(h)}{2^p - 1} 2^p . \quad (2.21)$$

### ***Порядок выполнения второй лабораторной работы***

1. Записать обыкновенное дифференциальное уравнение для численного интегрирования

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) , \quad (2.22)$$

где  $x$  - скаляр, а функция  $f(x)$  соответствует индивидуальному заданию.

2. Предварительно выбрать величину отрезка интегрирования  $[0, T]$  и начальную точку  $x(0) = x_0$ .

Замечание. Если решение уравнения (2.22)  $x(t)$  окажется неустойчивым, то возможен его выход за пределы диапазона представимых чисел. Поэтому отрезок интегрирования  $[0, T]$  и начальную точку  $x(0) = x_0$  в этом случае необходимо будет подобрать в процессе выполнения работы.

3. Составить фрагмент программы численного интегрирования уравнения (2.22) методом Эйлера (2.4).

4. Составить фрагмент программы численного интегрирования уравнения (2.22) методом, соответствующим индивидуальному заданию.

5. Следуя приведенному ниже примеру составить фрагмент программы интегрирования уравнения (2.22) классическим методом Рунге-Кутты 4-ого порядка точности.

6. По каждому из перечисленных выше трех методов пользуясь правилом Рунге выбрать шаг интегрирования  $h$ , соответствующий заданной погрешности интегрирования на отрезке  $[0, T]$ .

Замечание 1. Для выбора шага  $h$  необходимо интегрировать уравнение (2.22) дважды с шагом  $h$  и с шагом  $h/2$  и по формуле (2.21) оценивать погрешность интегрирования  $\varepsilon_N^{\Pi}(h)$ .

### Пример численного интегрирования различными методами

На рис. 5-7 показаны примеры использования методов различных порядков точности для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned}t_0 &:= 0 & T &:= 2 \\ n &:= 150 \\ h &:= \frac{(T - t_0)}{n} & x_0 &:= 0 & t_0 &:= 0\end{aligned}$$

$$h = 0.0133$$

$$f(x, t) := \exp(-1.1 \cdot t) \cos(2 \cdot \pi \cdot t)$$

#### Метод Эйлера

$$k := 0..n$$

$$t_k := k \cdot h$$

$$x_{k+1} := x_k + h \cdot f(x_k, t_k)$$

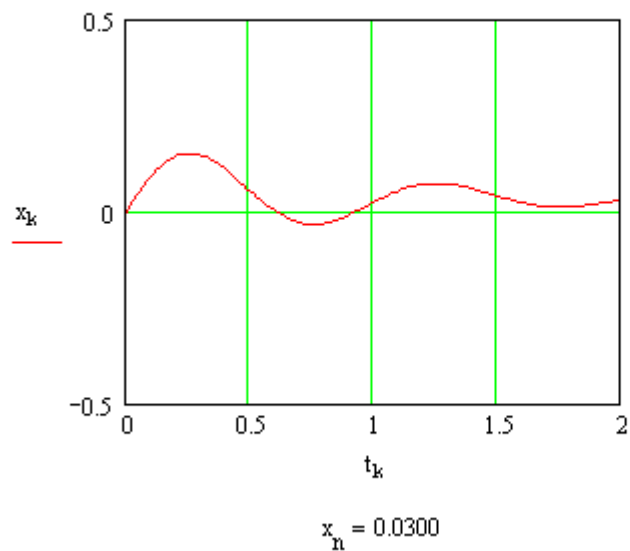


Рис. 5

## Метод второго порядка точности

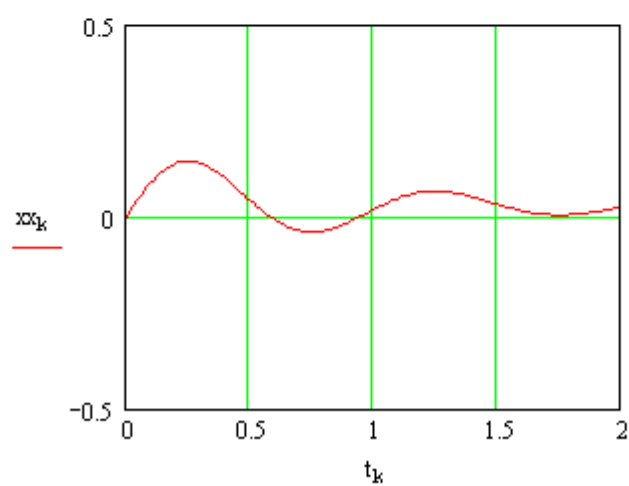
$$t_0 := 0 \quad t_k := 2 \quad n := 150$$

$$h := \frac{(T - t_0)}{n} \quad x_0 := 0 \quad t_0 := 0$$

$$k := 0..n$$

$$t_k := k \cdot h$$

$$x_{k+1} := x_k + h \cdot \frac{\left( f(x_k, t_k) + f\left(x_k + h \cdot f(x_k, t_k), t_k + h\right) \right)}{2}$$



$$x_n = 0.0241$$

**Рис. 6**

## Метод Рунге-Кутты 4-ого порядка точности

Начальная точка

$$xxx := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Правые части

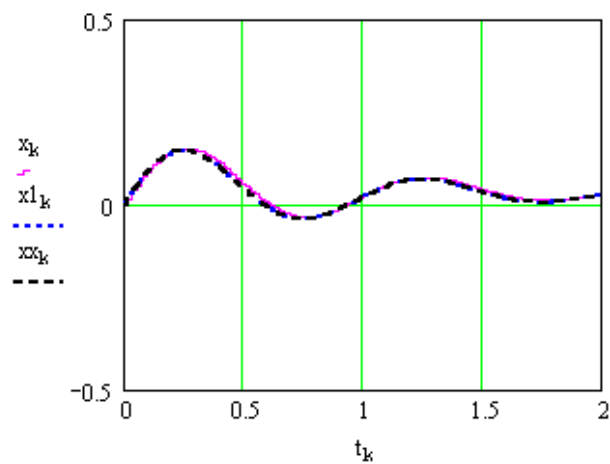
$$D(t, xxx) := \begin{pmatrix} \exp(-1.1 \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Интегрирование

$$Z := \text{rkfixed}(xxx, 0, T, 150, D)$$

$$k := 0..150$$

$$t_k := Z_{k,0} \quad x1_k := Z_{k,1} \quad x2_k := Z_{k,2}$$



Метод Рунге-Кутты

$$x1_n = 0.0240$$

Метод второго порядка точности

$$xx_n = 0.0241$$

Метод Эйлера

$$x_n = 0.0300$$

**Рис. 7**

## **Отчет к второй лабораторной работе**

Отчет к лабораторной работе должен включать в себя: название, задание, постановку задачи, основные используемые формулы, распечатку программы, выводы по работе.

### **Контрольные вопросы к второй лабораторной работе**

1. Постановка начальной задачи Коши численного интегрирования систем ОДУ.
2. Чем отличается одношаговый метод интегрирования от многошагового?
3. Чем отличается явный метод интегрирования от неявного?
4. Метод Эйлера, его геометрическая интерпретация.
5. Сущность методов Рунге-Кутты.
6. Чем определяется порядок точности методов численного интегрирования?
7. Составляющие полной ошибки численного интегрирования систем ОДУ.
8. Как производится оценка методической погрешности интегрирования? От чего она зависит?
9. Причины возникновения вычислительной погрешности.
10. В чем состоит прямой и обратный анализ погрешностей при численном интегрировании?
11. В чем заключается правило Рунге?
12. Какова зависимость полной погрешности интегрирования от шага интегрирования?
13. Как выбрать шаг интегрирования, соответствующий заданной погрешности интегрирования?

## Интерполирование функций

### *Постановка задачи интерполирования функций*

Дана таблица значений функции  $f(x_k)$ , где  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) - узловые значения аргумента. Необходимо найти многочлен

$$Q_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (3.1)$$

степени  $n = m$ , значения которого в узловых точках совпадают со значениями функции

$$Q_n(x_k) = f(x_k) . \quad (3.2)$$

Для непрерывной функции сформулированная задача имеет единственное решение, если среди узловых точек  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) нет совпадающих. В этом случае задача определения коэффициентов полинома (3.1) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + \dots + a_nx_k^n = f(x_k) , \quad (3.3)$$

где  $k = 0, 1, \dots, m$ . Причем определитель этой системы отличен от нуля, если  $x_i = x_j$ , где  $i \neq k$ .

Многочлен (полином), найденный из условий (3.3), называется интерполяционным многочленом (полиномом) для функции  $f(x)$ .

### *Интерполяционная формула Лагранжа*

Решение системы (3.3) может быть найдено в различных формах. Рассмотрим решение этой системы в виде формулы Лагранжа

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^n C_i(x) f(x_i) , \quad (3.4)$$

где многочлен определяется как линейная комбинация значений  $f(x_i)$ .

Найдем выражения для функций  $C_i(x)$  из условий (3.3)

$$\sum_{i=0}^n C_i(x_k) f(x_i) = f(x_k) , \quad (3.5)$$

где  $k = 0, 1, \dots, m$ .

Условия (3.5) будут выполнены, если

$$C_i(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k \\ 1 & \text{при } i = k \end{cases}, \quad (3.6)$$

которые означают, что каждая из функций  $C_i(x)$  имеет  $n$  корней на множестве узловых значений  $k = 0, 1, \dots, m$ .

Поскольку многочлен  $Q_n(x)$  есть многочлен степени  $n$ , то функции  $C_i(x)$  также ищутся в виде многочленов степени  $n$ . Причем из условий (3.6) следует, что каждая из функций  $C_i(x)$  имеет  $n$  корней. Поэтому они могут быть записаны в виде

$$C_i(x) = \lambda_i (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n).$$

Из условия  $C_i(x_i) = 1$  получаем

$$\lambda_i^{-1} = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n).$$

Следовательно

$$C_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

Таким образом, окончательно формула Лагранжа принимает вид

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)} f(x_k). \quad (3.7)$$

### **Интерполяционная формула Ньютона**

Другая форма решения системы (3.3), получившая название формулы Ньютона, основывается на вычислении так называемых конечных разностей. Конечная разность первого порядка имеет вид



$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} . \quad (3.8)$$

Конечная разность второго порядка вычисляется через конечные разности первого порядка

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} . \quad (3.9)$$

Аналогично вычисляется конечная разность  $k + 1$ -ого порядка

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k+1}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k+1}) - f(x_i, \dots, x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i} . \quad (3.10)$$

Используя разделенные разности (3.8)-(3.10) формулу (3.7) можно записать в виде формулы Ньютона

$$Q_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + \dots + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})f(x_0, \dots, x_n). \quad (3.11)$$

Доказательство идентичности формул (3.7) и (3.11) приводится, например, в работе [3]. Интерполяционный полином Ньютона удобно применять, когда число узлов необходимо увеличивать для достижения заданной точности интерполяции. В этом случае учет каждого дополнительного слагаемого в формуле (3.11) не требует пересчета предыдущих слагаемых. Интерполяционную формулу Лагранжа (3.7) удобно применять тогда, когда имеется большое количество интерполируемых функций, а число узлов фиксировано.

### ***Погрешность интерполирования***

Если функция  $f(x)$  является дифференцируемой, то погрешность интерполирования в точке, отличной от узлов интерполяции  $x \neq x_k$ , определяется формулой [3]

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{n+1!} |\omega(x)| , \quad (3.12)$$

где  $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$ , а константа  $M_{n+1}$  ограничивает производную  $n+1$ -ого порядка функции  $f(x)$ , то есть  $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M_{n+1}$ , ( $\xi$  - любая точка из области интерполяции).

### ***Выбор узлов интерполирования***

Самый простой выбор узлов интерполирования заключается в равномерном разбиении области, на которой строится интерполяционный полином. Если задается некоторый отрезок интерполирования  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , то при равномерном разбиении узловые точки определяются по формуле

$$x_k = x_{\min} + k \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n}, \quad (3.13)$$

где  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Величину погрешности (3.12) можно уменьшить за счет специального выбора узлов интерполяции. Задачу минимизации функции  $\min_{x_0, \dots, x_n} |\omega(x)|$  на интервале  $[x_{\min}, x_{\max}]$  решил русский математик П.Л. Чебышёв. Оказалось, что в общем случае минимальная погрешность интерполирования достигается, если в качестве узлов выбираются корни полиномов Чебышёва. В этом случае точки интерполирования определяются по формуле [3]

$$x_k = x^o + \Delta \cos\left(\frac{2k+1}{n+1} \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.14)$$

где  $x^o = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$ ,  $\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

При использовании формулы (3.14) узловые точки на отрезке интерполирования расположены неравномерно (их больше ближе к концам заданного отрезка).

### ***Порядок выполнения третьей лабораторной работы***

1. Задать таблицу значений функции  $f(x_k)$  и значений аргумента  $x_k$ , где  $k = 0, 1, \dots, n$ . Положить  $n = 10$ . Значения аргумента задать как возрастающую последовательность.

2. С помощью программных средств пакета MATHCAD, реализуя формулу Лагранжа (3.7), провести интерполирование функции  $f(x_k)$ .

3. Построить график для интерполяционного полинома  $Q_n(x)$ , на который необходимо нанести точки, соответствующие заданной таблице значений функции.

4. Для исследования зависимости погрешности интерполирования от количества узлов разбиения отрезка построить график другой функции  $f(x)$ , соответствующей индивидуальному заданию.

5. Выбрать отрезок  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , на котором будет строиться интерполяционный полином (область интерполирования функции  $f(x)$ ).

Замечание. Отрезок интерполирование не должен включать точек разрыва функции.

6. С помощью программных средств пакета MATHCAD, реализуя формулу Лагранжа (3.7), провести интерполирование функции при равномерном разбиении заданного интервала узлами интерполяции (3.13).

4. Исследовать зависимость погрешности интерполяции от количества узлов разбиения отрезка, увеличивая количество узлов до тех пор, пока не проявиться погрешность на краях отрезка. Приблизительно определить критическое количество узлов, при котором проявляются краевые эффекты.

5. Провести интерполирование функции при неравномерном разбиении отрезка, когда в качестве узлов интерполяции берутся корни полиномов Чебышёва (3.14). Убедиться, что краевые эффекты (погрешности) уменьшились.

6. Построить графики функций  $f(x)$  и  $Q_n(x)$  для характерных случаев интерполяции, показывающих возрастание погрешности при малом и большом количествах узлов разбиения отрезка.

Замечание. Возрастание погрешности интерполирования при большом количестве узлов разбиения отрезка объясняется возникающей вычислительной погрешностью при использовании формулы Лагранжа (3.7).

***Пример и результаты выполнения третьей лабораторной работы*** приводятся на рис. 8-11

Пример выполнения интерполяции функции,  
заданной в виде таблицы

Формула Лагранжа

$$i := 0..n \quad j := 0..n$$

$$f(x) := \sum_i y_i \cdot \prod_j \text{if } i = j, 1, \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j} \Bigg]$$

Представление результатов интерполирования

$$x := 0, 0.01 \dots 20$$

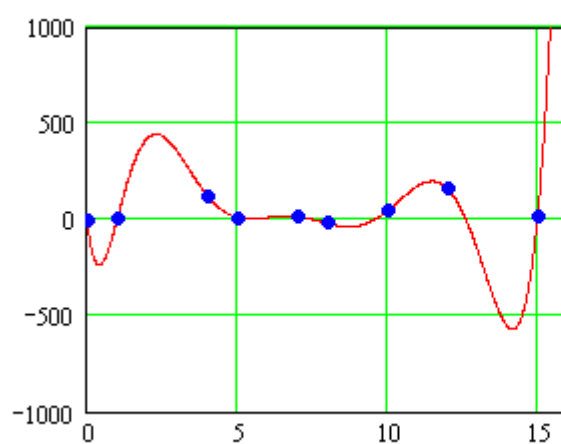


Рис. 8

## Пример исследования зависимости погрешности интерполирования от количества узлов

### Заданная функция

$$FX(x) := \exp(0.7x) \cdot \sin(x)$$

$$n := 4 \quad a := 0 \quad b := 6.5$$

$$ii := 0..n \quad h := \frac{(b - a)}{n}$$

$$xi_{ii} := a + ii \cdot h$$

$$yi_{ii} := FX(xi_{ii})$$

$$i := 0..n \quad j := 0..n$$

$$\gamma(x) := \sum_i yi_i \cdot \prod_j \text{if} \left[ i = j, 1, \frac{(x - xi_j)}{xi_i - xi_j} \right]$$

Количество узлов 5 (небольшое количество узлов)

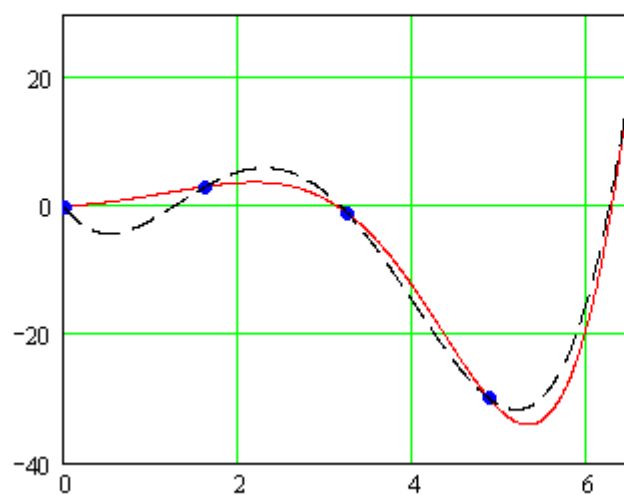


Рис. 9

$$\begin{aligned}
 n &:= 70 \\
 ii &:= 0..n & h &:= \frac{(b-a)}{n} \\
 xi_{ii} &:= a + ii \cdot h \\
 yi_{ii} &:= FX(xi_{ii}) \\
 i &:= 0..n & j &:= 0..n \\
 f(x) &:= \sum_i yi_i \cdot \prod_j \left[ \text{if } i = j, 1, \frac{(x - xi_j)}{xi_i - xi_j} \right]
 \end{aligned}$$

Количество узлов 71 (влияние вычислительной погрешности)

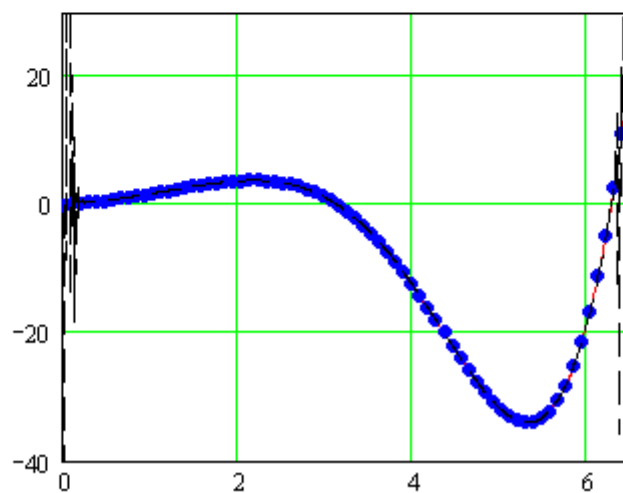
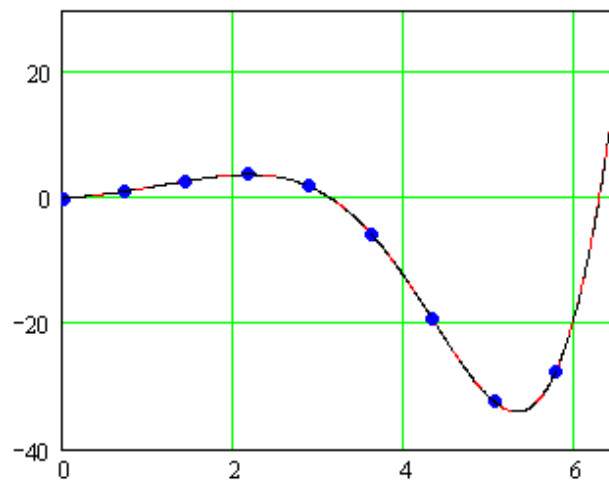


Рис. 10

$$\begin{aligned}
 nn &:= 9 \\
 i &:= 0..nn & h &:= \frac{(b-a)}{nn} \\
 xxi_1 &:= a + i \cdot h \\
 yyi_1 &:= FX(xxi_1) \\
 i &:= 0..nn & j &:= 0..nn \\
 f(x) &:= \sum_i yyi_1 \cdot \prod_j \left[ i = j, 1, \frac{(x - xxi_j)}{xxi_1 - xxi_j} \right]
 \end{aligned}$$

Количество узлов 10 (рациональное количество узлов)



Узлы Чебышева

Количество узлов 71

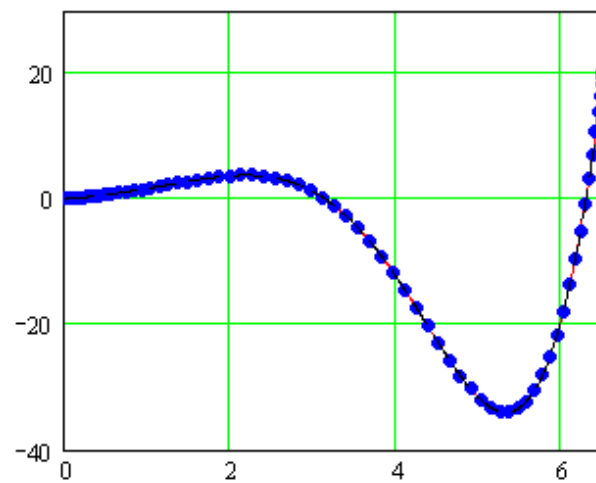


Рис. 11

### ***Отчет к третьей лабораторной работе***

Отчет к лабораторной работе должен включать в себя: название, задание, постановку задачи, основные используемые формулы, распечатку программы, выводы по работе.

### ***Контрольные вопросы к третьей лабораторной работе***

1. Постановка задачи интерполирования функций.
2. Интерполяционная формула Лагранжа.
3. Интерполяционная формула Ньютона.
4. Оценка погрешности интерполирования.
5. От чего зависит погрешность интерполирования?
6. Влияние вычислительной погрешности на точность интерполирования.



## Метод наименьших квадратов

### *Описание метода наименьших квадратов*

Одним из основных методов обработки результатов экспериментов, решения задач параметрической идентификации динамических и статических математических моделей является метод наименьших квадратов (МНК). Под задачей параметрической идентификации понимается определение коэффициентов математической модели заданной структуры по результатам эксперимента. В частности, МНК применяется для обработки результатов эксперимента, когда измерения выходной характеристики изучаемого объекта производятся со случайной ошибкой.

При использовании МНК результаты эксперимента описываются в общем случае обобщенным полиномом вида

$$Q_n(x) = C_0\varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n C_k\varphi_k(x), \quad (4.1)$$

где  $n$  - степень полинома,  $C_0, \dots, C_n$  - определяемые коэффициенты,  $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$  - заданные линейно независимые функции,  $x$  - скалярный аргумент.

Пусть имеются результаты эксперимента, то есть задана таблица значений  $y_0 = f(x_0), \dots, y_m = f(x_m)$ , где  $y_0, \dots, y_m$  - значения выходной характеристики,  $x_0, \dots, x_m$  - соответствующие значения аргумента,  $N = m + 1$  - количество экспериментов. Причем при применении МНК в отличие от задачи интерполяции полагается, что  $n < m$ , то есть количество экспериментов больше количества определяемых коэффициентов. Тогда МНК сводится к определению коэффициентов модели из условия минимума функции

$$S_m(C_0, \dots, C_n) = \sum_{i=0}^m [Q_n(x_i) - y_i]^2, \quad (4.2)$$

где  $Q_n(x_i)$  определяется формулой (4.1).

Замечание. Обобщенный полином (4.1) совпадает с обычным полиномом, используемым, в частности, в задаче интерполяции, если

$$Q_0(x) = 1, Q_1(x) = x, \dots, Q_n(x) = x^n.$$

*Сведение метода наименьших квадратов к решению системы  
линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)*

Необходимые условия минимума функции (4.2) будут иметь вид

$$\frac{\partial S_m}{\partial C_j} = 2 \sum_{i=0}^m \left[ \sum_{k=0}^n C_k \varphi_k(x_i) - y_i \right] \varphi_j(x_i) = 0, \quad (4.3)$$

где  $j = 0, \dots, n$ .

Введем обозначения

$$\left(\varphi_k, \varphi_j\right)=\sum_{i=0}^m \varphi_k\left(x_i\right) \varphi_j\left(x_i\right) \quad .$$

Используя данные обозначения, уравнения (4.3) можно записать в виде стандартной СЛАУ

[illegible]

Если  $n \leq m$  и среди точек  $x_o, x_1, \dots, x_m$  нет совпадающих, то определитель системы (4.4) отличен от нуля и СЛАУ имеет единственное решение. В частном случае, когда  $n = m$ , МНК дает обычный интерполяционный полином, то есть решает задачу интерполяции: проведения обобщенного полинома через все экспериментальные точки  $y_o, y_1, \dots, y_m$ .

### Определение погрешности МНК

По методу наименьших квадратов строится полином из условия минимума функции (4.2). Поэтому в узловых точках  $x_0, x_1, \dots, x_m$  неизбежно возникает погрешность аппроксимации. За меру погрешности могут быть приняты, например, следующие величины.

1. Максимальная погрешность аппроксимации в узловых точках

$$\varepsilon_{\max} = \max_i |Q_n(x_i) - y_i| . \quad (4.5)$$

2. Средняя погрешность аппроксимации

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\sum_{i=0}^m |Q_n(x_i) - y_i|}{m+1} . \quad (4.6)$$

3. Остаточная дисперсия

$$D_m = \frac{\sum_{i=0}^m [Q_n(x_i) - y_i]^2}{m-n} . \quad (4.7)$$

### ***Порядок выполнения четвертой лабораторной работы***

1. Вычислить массив значений опорной функции  $f(x)$ , соответствующей индивидуальному заданию, с добавлением случайной величины, распределенной по равномерному закону, на некотором интервале  $[a, b]$ .

Замечание. Массив значений функции должен включать достаточно большое количество точек (больше 100).

2. Произвести аппроксимацию заданного массива обычным полиномом с помощью МНК с использованием стандартных средств математического пакета Mathcad (см. пример выполнения задания).

3. Исследовать зависимость погрешности аппроксимации от задаваемой степени полинома. За меру погрешности можно выбрать остаточную дисперсию (4.7). Найти степень полинома, соответствующую минимуму остаточной дисперсии.

4. Произвести аппроксимацию заданного массива значений с использованием обобщенного полинома, выбрав совокупность из трех известных элементарных линейно независимых функций, применяя программные средства пакета Mathcad (см. пример выполнения задания).

Замечание. Аппроксимацию провести для двух случаев с различным набором элементарных функций, выбрав наилучший с точки зрения погрешности аппроксимации.

*Пример аппроксимации методом наименьших квадратов* представлен на рис. 12-

#### ***Отчет к четвертой лабораторной работе***

Отчет к лабораторной работе должен включать в себя: название, задание, постановку задачи, основные используемые формулы, распечатку программы, выводы по работе.

## Пример аппроксимации методом наименьших квадратов

Опорная функция:  $FX(x) := \exp(0.7 \cdot x) \sin(x)$

$$a := 0 \quad b := 6.5$$

Количество точек:  $m := 255$

$$p := \frac{\pi}{2 \cdot (m + 1)} \quad s := \frac{(a + b)}{2} \quad d := \frac{(b - a)}{2} \quad h := \frac{(b - a)}{m}$$

$$ii := 0..m \quad xi_{ii} := a + ii \cdot h$$

$$yi_{ii} := FX(xi_{ii}) + \text{rnd}(10)$$

$\text{rnd}(x)$  - функция генерирования равномерно распределенной величины на интервале  $(0, x)$

$n := 10$  - степень полинома

$$nn := m + 1$$

$z := \text{regress}(xi, yi, n)$  - коэффициенты полинома

$$ff(x) := \text{interp}(z, xi, yi, x)$$

$$j := 0..m \quad tx_j := \min(xi) + j \cdot \frac{(\max(xi) - \min(xi))}{m + 1}$$

$fff_j := ff(tx_j)$  - вычисление значений полинома

$$i := 0..m$$

## Результаты расчетов

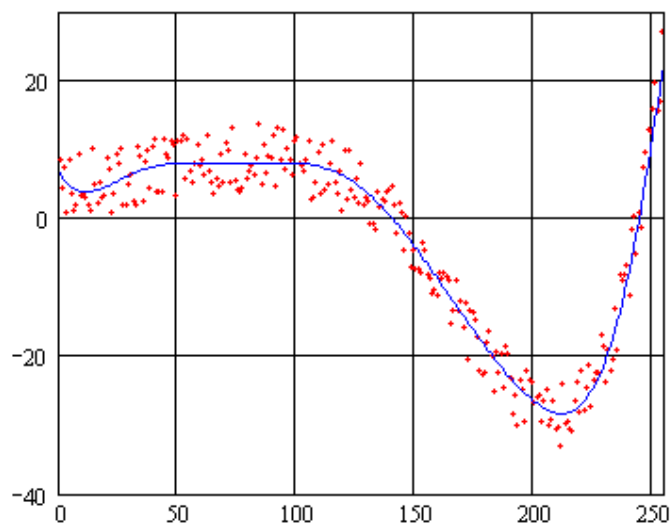


Рис. 12

$$j := 0..m \quad DD_j := |y_j - \hat{f}_j|$$

$$DDD := \sum_{kk=0}^m (y_{kk} - \hat{f}_{kk})^2$$

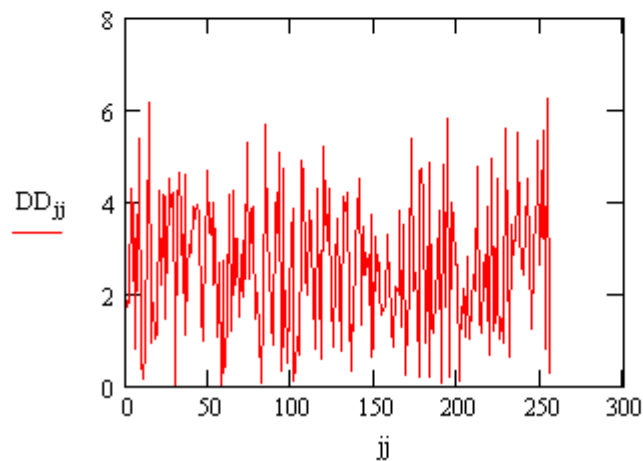
$$DDD := \frac{DDD}{m - n} \quad DDD = 9.048 \quad \text{- остаточная дисперсия}$$

$$\text{еср} := \text{mean}(DD) \quad \text{еср} = 2.558 \quad \text{- средняя ошибка}$$

$$\text{emax} := \text{max}(DD) \quad \text{emax} = 6.23 \quad \text{- максимальная ошибка}$$

$$jj := 0..m$$

**График ошибок**



**Рис. 13**

### **Контрольные вопросы к четвертой лабораторной работе**

1. Сущность метода наименьших квадратов.
3. Как определяются коэффициенты полинома в МНК?
4. Чем отличается обобщенный полином от обычного полинома?
5. Какие величины можно принять за меру погрешности в МНК?
6. Как осуществляется аппроксимация по МНК в пакете Mathcad?

## Приближение рядами Фурье

### *Приближение ортогональными функциями*

Если порядок системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), к которой приводится метод наименьших квадратов, велик, то применение МНК становится громоздким. В этом случае рациональным становится использование ортогональных функций.

**Определение.** Функции  $\varphi_k(x)$  и  $\varphi_j(x)$ , где  $k \neq j$ , называются ортогональными на множестве значений  $x_0, x_1, \dots, x_m$ , если

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{i=0}^m \varphi_k(x_i) \varphi_j(x_i) = 0 \quad . \quad (5.1)$$

Причем узлы  $x_0, x_1, \dots, x_m$  не являются корнями функций  $\varphi_k(x)$  и  $\varphi_j(x)$ , поэтому при  $k = j$  имеем  $(\varphi_k, \varphi_k) = \sum_{i=0}^m \varphi_k^2(x_i) > 0$ .

Если функции  $\varphi_k(x)$  и  $\varphi_j(x)$  ортогональны на множестве  $x_0, x_1, \dots, x_m$ , то СЛАУ метода наименьших квадратов (4.4), записанная в матричной форме

$$\bullet \quad AC = F \quad , \quad (5.2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\varphi_1, \varphi_1) & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \dots \\ (f, \varphi_n) \end{pmatrix}$$

имеет диагональную матрицу  $A$  и, следовательно, простое аналитическое решение

$$C_k = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \quad . \quad (5.3)$$

Коэффициенты (5.3) получили название коэффициентов Фурье.

### *Интегральный метод наименьших квадратов*

При интегральном методе наименьших квадратов (ИМНК) за меру отклонения обобщенного полинома от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  принимается величина

$$J_m(C_o, \dots C_n) = \int_a^b W(x) [Q_n(x) - f(x)]^2 dx, \quad (5.4)$$

где  $W(x) \geq 0$  - некоторая весовая функция,  $Q_n(x)$  - обобщенный полином (4.1).

Неизвестные коэффициенты  $C_o, \dots, C_n$  обобщенного полинома определяются из условия минимума функции (5.4). Записывая необходимые условия экстремума этой функции, получим

$$\frac{\partial J_m}{\partial C_j} = 2 \int_a^b W(x) \left( \sum_{k=0}^n C_k \varphi_k(x) - f(x) \right) \varphi_j(x) dx = 0, \quad (5.5)$$

где  $j = 0, \dots, n$ .

Вводя обозначение  $(\varphi_k, \varphi_j)_J = \int_a^b W(x) \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx$ , систему уравнений

(5.5) можно представить в стандартном виде СЛАУ метода наименьших квадратов (4.4)

$$\begin{aligned} C_o(\varphi_o, \varphi_o)_J + C_1(\varphi_1, \varphi_o)_J + ... + C_n(\varphi_n, \varphi_o)_J &= (f, \varphi_o)_J \quad , \\ C_o(\varphi_o, \varphi_1)_J + C_1(\varphi_1, \varphi_1)_J + ... + C_n(\varphi_n, \varphi_1)_J &= (f, \varphi_1)_J, \\ ..... \\ C_o(\varphi_o, \varphi_n)_J + C_1(\varphi_1, \varphi_n)_J + ... + C_n(\varphi_n, \varphi_n)_J &= (f, \varphi_n)_J . \end{aligned} \tag{5.6}$$

**Определение.** Система интегрируемых функций  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  называется ортогональной с весом  $W(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , если

$$\left(\varphi_k, \varphi_j\right)_J = \int_a^b W(x) \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx = 0 \quad , \quad (5.7)$$



при  $j \neq k$ . Причем, если функции  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  не обращаются в ноль на отрезке  $[a, b]$  тождественно, то при  $j = k$  имеем

$$\bullet \quad (\varphi_k, \varphi_k)_J = \int_a^b W(x) \varphi_k^2(x) dx > 0 \quad .$$

Для ортогональных функций решения СЛАУ (5.6) записываются в виде

$$C_k = \frac{(f, \varphi_k)_J}{(\varphi_k, \varphi_k)_J} \quad , \quad (5.8)$$

где  $k = 0, 1, \dots, n$ .

### **Ряды Фурье**

В качестве примера ортогональной системы функций можно привести систему тригонометрических функций

$$1, \sin x, \cos x, \dots, \sin \nu x, \cos \nu x, \dots \quad ,$$

где  $\nu = 1, 2, \dots$ , которая ортогональна с весом  $W(x) = 1$  на любом отрезке  $[a, a + 2\pi]$ , в частности, на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

Тригонометрический полином записывается в виде

$$Q_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\mu} (c_{\nu} \cos \nu x + d_{\nu} \sin \nu x) \quad , \quad (5.9)$$

где  $n = 2\mu + 1$ .

Учитывая, что для системы тригонометрических функций справедливы соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\nu x) dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\nu x) dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

из формул (5.8) получаем следующие выражения для определения коэффициентов Фурье для тригонометрического полинома (5.9)

$$c_{\nu} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\nu x) dx, \quad \text{где } \nu = 0, 1, \dots, \mu, \quad (5.10)$$

$$d_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(\nu x) dx, \text{ где } \nu = 1, \dots, \mu. \quad (5.11)$$

Ряды Фурье особенно хорошо приближают периодические функции.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется периодической с периодом  $T$ , если существует такое число  $T \neq 0$ , что  $f(x) = f(x + T)$  при  $f(x) \neq \text{const}$ .

Для периодической функции ряд Фурье сходится к функции  $f(x)$  и можно положить  $\mu = \infty$ , тогда

$$Q(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (c_\nu \cos \nu x + d_\nu \sin \nu x), \quad (5.12)$$

Замечание. Любой конечный отрезок  $[a, b]$  можно свести к отрезку  $[-\pi, \pi]$  с помощью линейного преобразования аргумента

$$x = \frac{1}{2} \left( \frac{b-a}{\pi} x_* + a + b \right), \text{ где } x_* \in [-\pi, \pi].$$

Слагаемые одного порядка в ряде (5.12)  $c_\nu \cos \nu x + d_\nu \sin \nu x$  называются гармониками ряда Фурье.

Если функция не периодична, но обладает заданными свойствами, то погрешность аппроксимации рядом Фурье можно сделать сколь угодно малой, взяв надлежащее количество слагаемых, однако в этом случае погрешность вблизи концов интервала существенно больше, чем вдали от них (так называемый краевой эффект). Существует большое количество теорем, устанавливающих условия сходимости рядов Фурье [1] в общем случае для непериодических функций. Приведем здесь одну из них.

**Теорема Жордана.** Если функция  $f(x)$  имеет ограниченную вариацию (приращение) на отрезке  $[a, b]$ , то ее ряд Фурье сходится для всех  $x \in [a, b]$ , причем в точках непрерывности сходится к  $f(x)$ , а точках разрыва – к значению  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ .

Если ряд Фурье сходится, то он имеет вид (5.12), то есть  $\mu = \infty$ .

Существует более компактная комплексная форма ряда Фурье (5.12). В частности, она используется в математическом пакете MATHCAD. Чтобы преобразовать ряд (5.12) к комплексной форме необходимо применить для тригонометрических функций формулы Эйлера

$$\cos vx = \frac{e^{ivx} + e^{-ivx}}{2}, \quad \sin vx = \frac{e^{ivx} - e^{-ivx}}{2i}, \quad (5.13)$$

где  $i$  - мнимая единица.

Подставляя выражения (5.13) в ряд (5.12), получим

$$Q(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} A_{\alpha} e^{i\alpha x}. \quad (5.14)$$

Вещественные и комплексные коэффициенты Фурье связаны формулами [1]

$$c_v = A_v + A_{-v}, \quad d_v = i(A_v - A_{-v}), \\ A_v = (c_v - id_v)/2, \quad A_{-v} = (c_v + id_v)/2,$$

где  $v = 0, 1, 2, \dots$ ;  $d_0 = 0$ .

**Определение.** Вычисление коэффициентов Фурье по формулам (5.10)-(5.11) для функции  $f(x)$  называется прямым преобразованием Фурье функции  $f(x)$ .

**Определение.** Вычисление ряда Фурье (5.9) по значениям коэффициентов называется обратным преобразованием Фурье функции  $f(x)$ .

### ***Порядок выполнения пятой лабораторной работы***

1. Вычислить массив значений опорной функции  $f(x)$ , соответствующей индивидуальному заданию, с добавлением случайной величины, распределенной по равномерному закону, на некотором интервале  $[a, b]$ .

Замечание. Массив значений функции должен включать достаточно большое количество точек (больше 200). Обычно количество точек для

быстрого преобразования Фурье (оно используется в пакете Mathcad) выбирается как  $2^n$ , где  $n$  - целое положительное число, например,  $n = 8, 9, \dots$

2. Произвести аппроксимацию заданного массива рядом Фурье с использованием стандартных средств математического пакета Mathcad (см. пример выполнения задания).

3. Исследовать зависимость погрешности аппроксимации от количества гармоник, выбрав это количество из условия минимальной погрешности (см. пример выполнения задания). Контроль погрешности осуществляется путем сравнения графиков исходной функции и ряда Фурье.

4. Произвести аппроксимацию заданной непериодической ступенчатой функции рядом Фурье (без случайной ошибки), применяя программные средства пакета Mathcad (см. пример выполнения задания). Исследовать зависимость величины наблюдаемого краевого эффекта от количества учтенных гармоник.

**Пример выполнения лабораторной работы в MATHCAD** представлен на

### Приближение рядами Фурье

**n** - максимальное количество слагаемых  
в ряде Фурье

**n** должно быть равно 2 в степени **m**,  
где **m** - целое число

$$m := 8 \quad n := 2^m \quad nn := n - 1 \quad n = 256$$

Приближение функции, соответствующей  
индивидуальному заданию, с добавлением  
случайной величины

$$FX(x) := \exp(0.7 \cdot x) \sin(x)$$

#### Задание отрезка

$$a := 0 \quad b := 6.5$$

Формирование массива значений функции

$$ii := 0..nn \quad h := \frac{(b - a)}{nn}$$
$$xi_{ii} := a + ii \cdot h$$

$$yi_{ii} := FX(xi_{ii}) + rnd(10)$$

#### Прямое преобразование Фурье

$$A := fft(yi)$$

**A** - массив комплексных коэффициентов Фурье

**k** - количество учитываемых гармоник

$$k := 5$$

$$j := 0.. \frac{n}{2} \quad g_j := if(j \leq k, A_j, 0)$$

#### Обратное преобразование Фурье

$$f := ifft(g)$$

$$i := 0..n$$

Количество гармоник **k=5** (малое число)

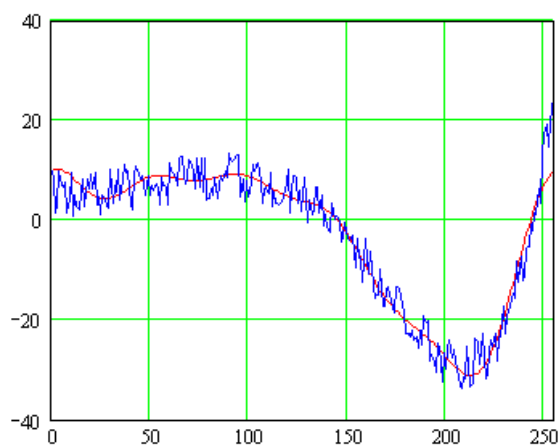


Рис. 14

$k := 100$

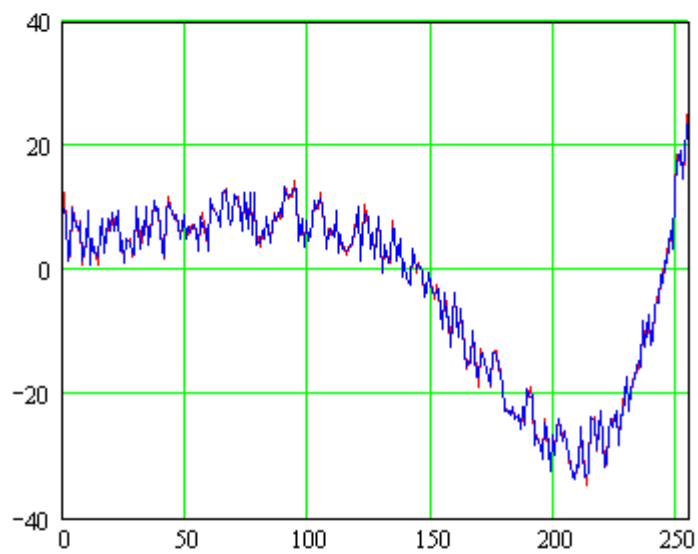
$j := 0.. \frac{n}{2} \quad g_j := \text{if}(j \leq k, A_j, 0)$

### Обратное преобразование Фурье

$f := \text{ifft}(g)$

$i := 0..n$

Количество гармоник  $k=100$   
(большое число, графики практически совпали).



### Коэффициенты Фурье

$i := 0..k$

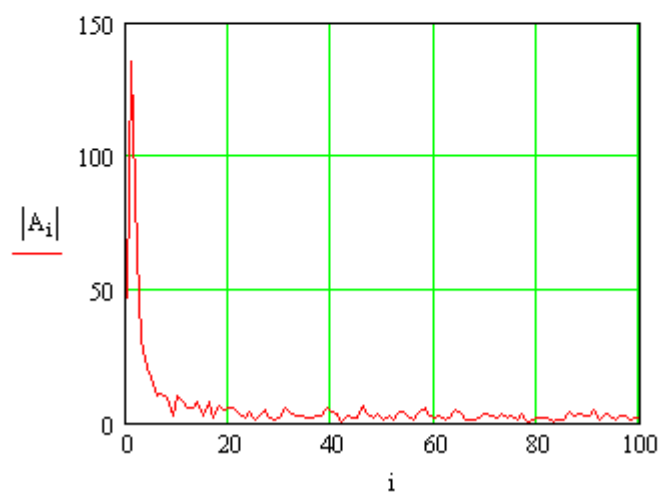


Рис. 15

### Приближение ступенчатой функции

$i := 0 \dots 50$      $y_{i_1} := 10$      $i := 51 \dots 255$      $y_{i_2} := 20$

### Прямое преобразование Фурье

$A := \text{fft}(y_i)$

$A$  – массив комплексных коэффициентов Фурье

$k$  – количество учитываемых гармоник

$k := 15$

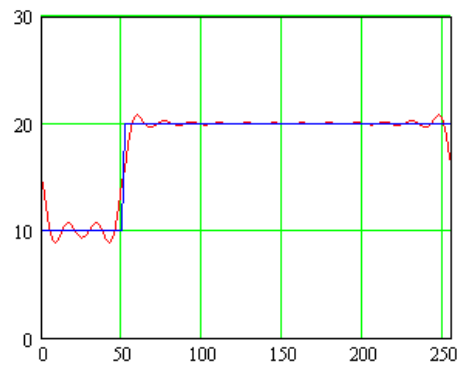
$j := 0 \dots \frac{n}{2}$      $g_j := \text{if}(j \leq k, A_j, 0)$

### Обратное преобразование Фурье

$f := \text{ifft}(g)$

$i := 0 \dots n$

**Количество гармоник  $k=15$**   
(малое число, наблюдается краевой эффект)



$k := 100$

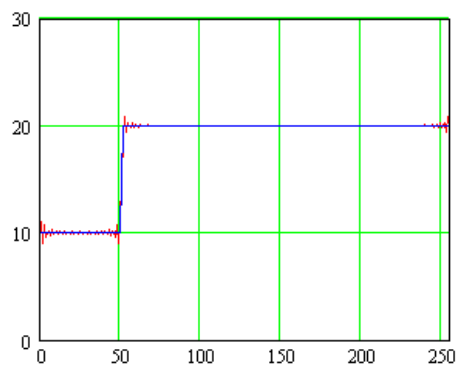
$j := 0 \dots \frac{n}{2}$      $g_j := \text{if}(j \leq k, A_j, 0)$

### Обратное преобразование Фурье

$f := \text{ifft}(g)$

$i := 0 \dots n$

**Количество гармоник  $k=100$**   
(большое число, погрешность значительно меньше)



**Рис. 16**

### ***Отчет к пятой лабораторной работе***

Отчет к лабораторной работе должен включать в себя: название, задание, постановку задачи, основные используемые формулы, распечатку программы, выводы по работе.

### ***Контрольные вопросы к пятой лабораторной работе***

1. Определение ортогональных функций.
2. В чем заключаются особенности приближения ортогональными функциями?
3. Примеры систем ортогональных функций.
4. Сущность интегрального метода наименьших квадратов.
5. Особенности приближения рядами Фурье.
6. Сформулируете теорему Жордана.
7. В чем заключается прямое и обратное преобразование Фурье?
8. В чем заключается краевой эффект? При аппроксимации каких функций он проявляется?



## Приближенное вычисление определенных интегралов

### *Постановка задачи о приближенном вычислении интегралов*

Ставится задача о приближенном вычислении определенного интеграла вида

$$J = \int_a^b f(x)dx, \quad (6.1)$$

где  $f(x)$  - подынтегральная функция,  $a$  и  $b$  - нижний и верхний пределы интегрирования.

Если один из пределов интегрирования  $a$  и  $b$  (или оба предела вместе) равен бесконечности, или функция  $f(x)$  имеет точки разрыва второго рода (то есть в этих точках обращается в бесконечность), то такой определенный интеграл называется несобственным. При приближенном вычислении несобственных интегралов предполагается, что они сходятся, то есть в этом случае существуют соответствующие пределы. Так, например, интеграл

$$J = \int_a^{\infty} f(x)dx, \quad (6.2)$$

сходится, если существует предел

$$J = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx < \infty. \quad (6.3)$$

Из математического анализа известно, что задача вычисления определенного интеграла эквивалентна вычислению площади плоской фигуры, ограниченной кривой  $f(x)$  и осью абсцисс на отрезке  $[a, b]$ .

### *Методы прямоугольников*

Рассмотрим сначала случай, когда пределы интегрирования  $a$  и  $b$  являются конечными числами, а функция  $f(x)$  не имеет точек разрыва на отрезке  $[a, b]$ . Определение интеграла (6.1) основывается на построении некоторой интегральной суммы. При этом отрезок  $[a, b]$  разбивается на

отдельные отрезки. Например, можно использовать равномерное разбиение на  $n$  отрезков  $x_0 = a$ ,  $x_i = x_{i-1} + h$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),  $x_n = b$ , где  $h = \frac{b-a}{n}$ . В

этом случае интегральная сумма принимает вид

$$J_n = h \sum_{i=1}^n f(\xi_i), \quad (6.4)$$

где  $\xi_i = [x_{i-1}, x_i]$ .

Поэтому самые простые методы приближенного вычисления интеграла основываются на использовании соответствующих интегральных сумм  $J \approx J_n$  при некотором фиксированном  $n$ . Так, если  $\xi_i = x_{i-1}$ , получаем формулу левых прямоугольников

$$J_n = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}). \quad (6.5)$$

В случае, когда  $\xi_i = x_i$ , имеем формулу правых прямоугольников

$$J_n = h \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (6.6)$$

Формулы (6.5) и (6.6) дают двухстороннюю оценку для величины интеграла (6.1) в случае, когда функция  $f(x)$  является монотонной на отрезке  $[a, b]$ .

Однако, как показано в [6], большую точность вычислений дает формула средних прямоугольников

$$J_n = h \sum_{i=1}^n f\left(x_i - \frac{h}{2}\right). \quad (6.7)$$

Формула (6.7) определяет метод приближенного вычисления интеграла (6.1) второго порядка точности [6]. Поэтому методическая погрешность этого метода есть величина порядка  $h^2$ , то есть

$$\varepsilon_{np} = |J - J_n| = O(h^2). \quad (6.8)$$

**Методы Ньютона – Котеса**

Если для приближенного вычисления интеграла (6.1) вместо функции  $f(x)$  подставить интерполяционный полином Лагранжа (или Ньютона) и взять интеграл обычными методами математического анализа через определение первообразной, то получим методы Ньютона – Котеса. В этом случае представим функцию  $f(x)$  в виде

$$f(x) = Q_m(x) + R_m(x), \quad (6.9)$$

где  $m$  - степень интерполяционного многочлена,  $Q_m$  - интерполяционный полином,  $R_m(x)$  - функция, определяющая погрешность интерполяции.

Подставив выражение (6.9) в интеграл (6.1), получим

$$J = \int_a^b Q_m(x)dx + \int_a^b R_m(x)dx = J_m + \varepsilon_m, \quad (6.10)$$

где  $J_m$  определяет приближенное значение интеграла, а  $\varepsilon_m$  - погрешность приближенной формулы.

### ***Метод трапеций***

Если в формуле (6.10) положить  $m=1$ , то получается формула метода трапеций. В этом случае интерполяционный полином представляет собой линейную функцию. Разобьем, как и раньше, весь отрезок на  $n$  равных частей и вычислим приближенное значение интеграла на первом отрезке  $[x_0, x_1]$ . Тогда заменив функцию  $f(x)$  линейным полиномом в форме Ньютона (см. лабораторную работу 3),

$$Q_1^{(0)}(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1), \quad (6.11)$$

получим

$$J_1^{(0)} = \int_{x_0}^{x_1} Q_1^{(0)}(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]. \quad (6.12)$$

Формула (6.12) определяет площадь элементарной трапеции на отрезке  $[x_0, x_1]$ , ограниченной прямой (6.11). Суммируя площади всех трапеций, соответствующих  $n$  отдельным отрезкам, получим

$$J_n = \sum_{i=1}^n J_1^{(i)} = h \left[ \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]. \quad (6.13)$$

Формула метода трапеций (6.13) имеет на отрезке  $[a, b]$  второй порядок точности [6], то есть

$$\varepsilon_{mp} = |J - J_n| = O(h^2). \quad (6.14)$$

### **Метод Симпсона**

Если в формуле (6.10) положить  $m = 2$ , то получается формула метода Симпсона. В этом случае интерполяционный полином представляет собой параболу. Тогда на первых двух отрезках разбиения имеем

$$Q_2^{(0)}(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2), \quad (6.15)$$

$f(x_0, x_1)$ ,  $f(x_0, x_1, x_2)$  - конечные разности первого и второго порядка, определенные в лабораторной работе 3.

Вычисляя интеграл от функции  $Q_2^{(0)}(x)$  на отрезке  $[x_0, x_2]$ , получим

$$J_2^{(0)} = \int_{x_0}^{x_2} Q_2^{(0)}(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]. \quad (6.16)$$

Формула (6.16) определяет площадь, ограниченную параболой (6.15) на отрезке  $[x_0, x_2]$ . Группирую все отдельные отрезки по два и суммирую все элементарные площади, получаем формулу метода Симпсона

$$J_n = \sum_{i=1}^{n/2} J_2^{(i)} = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) \right], \quad (6.17)$$

где количество отдельных отрезков  $n \geq 2$  является четным.

Формула Симпсона на отрезке  $[a, b]$  является формулой четвертого порядка точности [6], то есть

$$\varepsilon_{сим} = |J - J_n| = O(h^4). \quad (6.18)$$

Таким образом, переход от линейного интерполяционного полинома к квадратичному полиному сразу в два раза повышает порядок точности приближенной формулы. Это обстоятельство явилось причиной особой популярности метода Симпсона по сравнению с другими методами.

### ***Обратный анализ погрешностей численного интегрирования***

Для любого из рассмотренных методов приближенного вычисления определенного интеграла (6.1) имеем

$$\varepsilon = |J - J_n| = O(h^p), \quad (6.19)$$

где  $p$  - порядок точности формулы численного интегрирования.

Поэтому для оценки погрешностей приближенного вычисления определенных интегралов, также как и для оценки погрешностей численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (лабораторная работа 2), может быть использовано правило Рунге. Вывод формулы оценки аналогичен.

Запишем оценку (6.19) в несколько другой форме

$$J \approx J_n + C_p h^p, \quad (6.20)$$

предполагая, что константа может принимать значения обоих знаков.

Тогда, проводя два приближенных вычисления интеграла с шагом  $h$  и с шагом  $\frac{h}{2}$ , получим

$$J(h) \approx J_n + C_p h^p, \quad J\left(\frac{h}{2}\right) \approx J_n + C_p \left(\frac{h}{2}\right)^p, \quad (6.21)$$

где  $J(h)$  и  $J\left(\frac{h}{2}\right)$  - приближенные значения интеграла, вычисленные при шаге  $h$  и при шаге  $\frac{h}{2}$ .

Определяя из системы (6.21) константу  $C_p$  и вычисляя погрешность  $\varepsilon \approx |C_p h^p|$ , получим для любого метода порядка точности  $p$  следующую оценку, аналогичную оценке (2.21) (из лабораторной работы 2)

$$\varepsilon \approx C_p h^p = \frac{|J(h/2) - J(h)|}{2^p - 1} 2^p. \quad (6.22)$$

### ***Методы приближенного вычисления несобственных интегралов***

При приближенном вычислении несобственных интегралов сначала они приводятся к некоторому стандартному виду. Обычно рассматриваются следующие стандартные формы несобственных интегралов

$$J = \int_a^{\infty} f(x) dx, \quad (6.23)$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad (6.24)$$

$$J = \int_a^b f(x) dx, \quad (6.25)$$

где в последнем интеграле функция  $f(x)$  имеет точки разрыва второго рода на концах отрезка  $[a, b]$  (или на одном из них). Приведение интеграла (6.1) к нескольким стандартным формам заключается в разбиение первоначального отрезка  $[a, b]$  на несколько отрезков, на которых интеграл имеет стандартный вид (6.23)-(6.25). Так, например, если внутри отрезка  $[a, b]$  имеется точка разрыва  $c$  функции  $f(x)$  второго рода, то отрезок разбивается на два и интеграл представляется в виде суммы двух интегралов

$$J = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (6.26)$$

которые имеют точку разрыва на конце отрезка интегрирования.

Одним из способов получения приближенных значений несобственных интегралов (6.23)-(6.25) является использование формул Гаусса –

Кристоффеля [6], приспособленных для вычисления несобственных интегралов для конкретных особенностей подынтегральной функции  $f(x)$ . Например, если подынтегральная функция  $f(x)$  стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$  со скоростью порядка  $e^{-x}$ , то интеграл (6.23) преобразуется к виду

$$J = \int_a^{\infty} e^{-x} e^x f(x) dx = \int_a^{\infty} e^{-x} f_1(x) dx. \quad (6.27)$$

В этом случае приближенные формулы применяются к интегралу (6.27), где функция  $q(x) = e^{-x}$  рассматривается как весовая функция для функции  $f_1(x)$ . Для таких функций построены приближенные формулы, которые получили название формул Лагерра, и они имеют вид

$$J_n = \sum_{i=1}^n A_i e^{x_i} f(x_i), \quad (6.28)$$

причем для весовых коэффициентов  $A_i$  и для узловых значений  $x_i$  определены соответствующие таблицы [6]. Аналогично, существуют приближенные формулы для других особенностей функции  $f(x)$  [6].

Другой подход к вычислению несобственных интегралов заключается в применении обычных формул численного интегрирования (6.7), (6.13) и (6.17). В этом случае, например для интеграла (6.23), можно использовать формулу (6.3) и приближенное равенство

$$J \approx J_b = \int_a^b f(x) dx < \infty \quad (6.29)$$

при достаточно больших  $b$ .

В этом случае можно использовать следующий алгоритм вычисления интеграла с заданной погрешностью:

1. Задается некоторое значение  $b$  и подбирается с помощью правила Рунге число отдельных отрезков  $n$  (или  $h$ ), которое соответствует заданной погрешности  $\varepsilon$  вычисления интеграла  $J_b$ .

2. Верхний предел увеличивается в два раза и вычисляется новое значение  $J_{2b}$ , при этом количество отдельных отрезков также увеличивается в два раза  $2n$ .

3. Увеличение верхнего предела происходит до тех пор, пока  $|J_b - J_{2b}| < \varepsilon$ .

4. Для последнего значения  $b$  для контроля можно опять применить правило Рунге оценки погрешности.

### ***Порядок выполнения шестой лабораторной работы***

1. Построить график подынтегральной функции  $f(x)$ , соответствующей индивидуальному заданию.

2. Выбрать отрезок  $[a, b]$ , для которого будет вычисляться определенный интеграл (6.1).

Замечание. Отрезок должен быть конечным и не содержать точек разрыва функции  $f(x)$ .

3. Применяя формулу средних прямоугольников (6.7) и правило Рунге (6.22) провести ряд вычислений интеграла (6.1) и определить его значение с точностью до четвертого знака после запятой включительно. Результаты вычислений оформить в виде таблицы.

4. Для сравнения вычислить значения того же интеграла по формулам левых и правых прямоугольников (6.5) и (6.6). Вычисления провести для одного значения  $n$  (или  $h$ ), определенного для формулы средних прямоугольников.

5. Аналогично, применяя методы трапеций (6.13), Симпсона (6.17) и правило Рунге (6.22) провести ряд вычислений интеграла (6.1) и определить его значение с точностью до четвертого знака после запятой включительно. Результаты вычислений также оформить в виде таблицы.

6. Умножив подынтегральную функцию на экспоненту  $e^{kx}$ , где  $k < 0$  - малое отрицательное целое число, вычислить несобственный интеграл вида (6.23) с точностью до четвертого знака после запятой методом Симпсона,



используя алгоритм, описанный выше. Результаты вычислений оформить в виде таблицы.

***Пример выполнения шестой лабораторной работы*** представлен на рис. 17-

В качестве примера выполнения работы рассматривается вычисления определенного интеграла (6.1) с подынтегральной функцией  $f(x) = e^x \sin(2x)$  на отрезке  $[0, 2\pi]$ . При вычислении несобственного интеграла подынтегральная функция умножается на  $e^{-2x}$ , то есть получается несобственный интеграл вида  $J = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(2x) dx$ .

### ***Отчет к шестой лабораторной работе***

Отчет к лабораторной работе должен включать в себя: название, задание, постановку задачи, основные используемые формулы, распечатку программы, выводы по работе.

**Метод средних  
прямоугольников**

n	$\varepsilon$
20	4.41100
40	1.09998
80	0.27481
160	0.06869
320	0.01717
640	0.00429
1280	0.00107
2560	0.00027

**Для средних  
прямоугольников**

$$J_n = -213.79673$$

**Для левых  
прямоугольников**

$$J_n = -213.79613$$

**Для правых  
прямоугольников**

$$J_n = -213.79613$$

**Метод трапеций**

$$J_n = -213.79613$$

n	$\varepsilon$
20	8.80925
40	2.19913
80	0.54957
160	0.13738
320	0.03434
640	0.00859
1280	0.00215
2560	0.00054

**Метод Симпсона**

$$J_n = -213.79668$$

n	$\varepsilon$
20	0.0034
40	0.00022

**Несобственный интеграл –  
метод Симпсона**

$$b = 2 \quad n = 2 \quad \varepsilon = 0.00022 \quad J_n = 0.45588$$

b	$\varepsilon$
4	0.05794
8	0.00263
16	0.00015

**Окончательное значение  
несобственный интеграла**

$$J_n = 0.40022$$

**Рис. 17**

### ***Контрольные вопросы к шестой лабораторной работе***

1. Постановка задачи о приближенном вычислении определенных интегралов.
2. В чем заключаются особенности вычисления несобственных интегралов?
3. Методы прямоугольников, их сущность.
4. Метод трапеций, его сущность.
5. Метод Симпсона, его сущность.
6. Порядок точности формул численного интегрирования, используемых в работе.
7. Как применить правило Рунге для оценки погрешности численного интегрирования?
8. Как обеспечить требуемую погрешность вычисления несобственных интегралов?
9. В чем сущность методов Ньютона-Котеса?

### **Список использованных источников**

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1973.
2. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж.Холла, Дж.Уатта, М.: Мир, 1979.
3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. Т.1. – М.: Наука, 1976.
4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Наука, 1967.
5. Дьяконов В.П. MATHCAD 8/2000: специальный справочник. - СПб: Питер, 2001.
7. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002.
8. Коварцев А.Н. Вычислительная математика: учебное пособие / А.Н. Коварцев. - Самара: ООО «Офорт», 2011. - 230 с.