САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

Кафедра программных систем

Заболотнов Юрий Михайлович

Самара 2021

Ряды Фурье

В качестве примера ортогональной системы функций можно привести систему тригонометрических функций

$$1, \sin x, \cos x, \ldots \sin \nu x, \cos \nu x, \ldots ,$$

где $\nu = 1, 2, \ldots$, которая ортогональна с весом $W(x) = 1$ на любом отрезке $[a, a+2\pi]$, в частности, на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Тригонометрический полином записывается в виде

$$P_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\mu} \left(c_\nu \cos \nu x + d_\nu \sin \nu x\right) ,$$

где $n = 2\mu + 1$.

Для определения коэффициентов используются формулы

$$C_k = \frac{(f, \varphi_k)_J}{(\varphi_k, \varphi_k)_J}$$

где $$(f, \varphi_k)_J = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi_k(x) dx, \quad (\varphi_k, \varphi_k)_J = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k^2(x) dx$$

Здесь $\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=\cos x,\ \varphi_2(x)=\sin x,\ldots$

Определим $(\varphi_0,\varphi_0)_J=\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi,$

$$(\cos\nu x,\cos\nu x)_J=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2\nu x\,dx=\pi,\ (\sin\nu x,\sin\nu x)_J=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2\nu x\,dx=\pi$$

Поэтому

$$c_\nu=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(\nu x)dx,\ \text{где}\ \nu=0,1,\ldots\mu, \qquad d_\nu=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(\nu x)dx,\ \text{где}\ \nu=1,\ldots\mu.$$

Теорема Жордана. Если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию (приращение) на отрезке $[a,b]$, то ее ряд Фурье сходится для всех $x\in[a,b]$, причем в точках непрерывности сходится к $f(x)$, а точках разрыва – к значению $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Комплексная форма ряда Фурье

Компактная комплексная форма ряда Фурье используется в математическом пакете MATHCAD. Чтобы преобразовать ряд Фурье к комплексной форме необходимо применить для тригонометрических функций формулы Эйлера

$$\cos\nu x = \frac{e^{i\nu x} + e^{-i\nu x}}{2}, \ \sin\nu x = \frac{e^{i\nu x} - e^{-i\nu x}}{2i},$$

где i - мнимая единица.
Тогда

$$P(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} A_\alpha e^{i\alpha x}.$$

Вещественные и комплексные коэффициенты Фурье связаны формулами /1/

$$c_\nu = A_\nu + A_{-\nu},\ d_\nu = i(A_\nu - A_{-\nu}),$$

$$A_\nu = (c_\nu - id_\nu)/2,\ A_{-\nu} = (c_\nu + id_\nu)/2,$$

где $\nu = 0, 1, 2, ...;\ d_0 = 0$.

Замечание 1. Вычисление коэффициентов Фурье для функции $f(x)$ называется прямым преобразованием Фурье функции $f(x)$.

Замечание 2. Вычисление ряда Фурье по значениям коэффициентов называется обратным преобразованием Фурье функции $f(x)$.

Типичные функции, которые приближаются рядами Фурье

1. Периодические функции. Функция $f(x)$ называется периодической с периодом T, если существует такое число $T \neq 0$, что $f(x) = f(x+T)$ при $f(x) \neq const$.

2. Почти периодические функции. Функция $f(x)$ называется почти периодической с почти периодом $\tau(\varepsilon)$, если для любого $\forall \varepsilon > 0$ существует $\exists \tau(\varepsilon)$ такое, что $\left| f(x) - f\left(x + \tau(\varepsilon)\right) \right| < \varepsilon$.

Пример. $f(x) = \sin 2x + \sin \pi x$. Здесь слагаемые имеют некратные периоды

($T_1 = \pi$ и $T_2 = 2$), поэтому общего периода не существует.

3. Функции с точками разрыва первого рода.

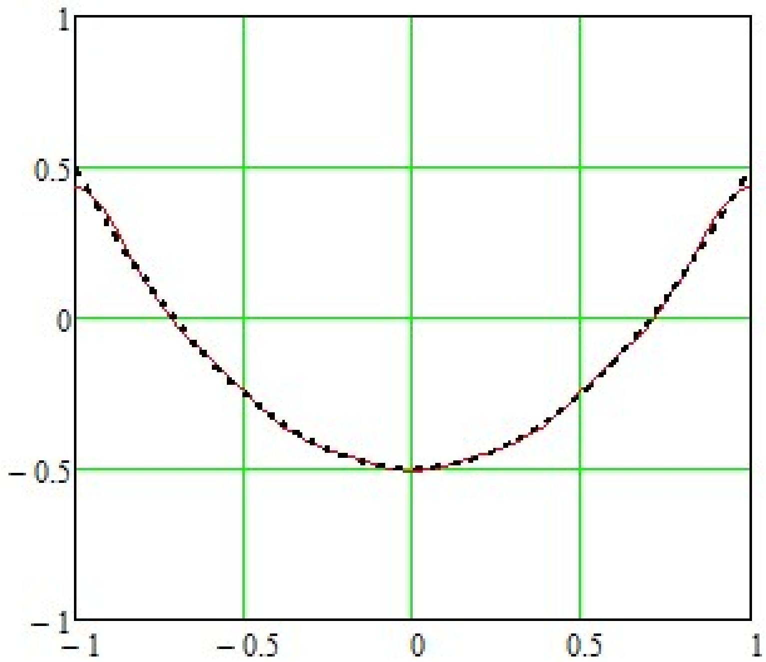
Замечание. К таким функциям также можно отнести непериодические функции на любом конечном отрезке $[a, b]$. При этом условие $f(a) \neq f(b)$ аналогично разрыву первого рода. При приближении этих функций наблюдаются краевые эффекты.

Замечание 3. При приближении периодических и почти периодических функции при заданной погрешности требуется существенно меньшее число членов ряда, чем для функций с разрывами первого рода.

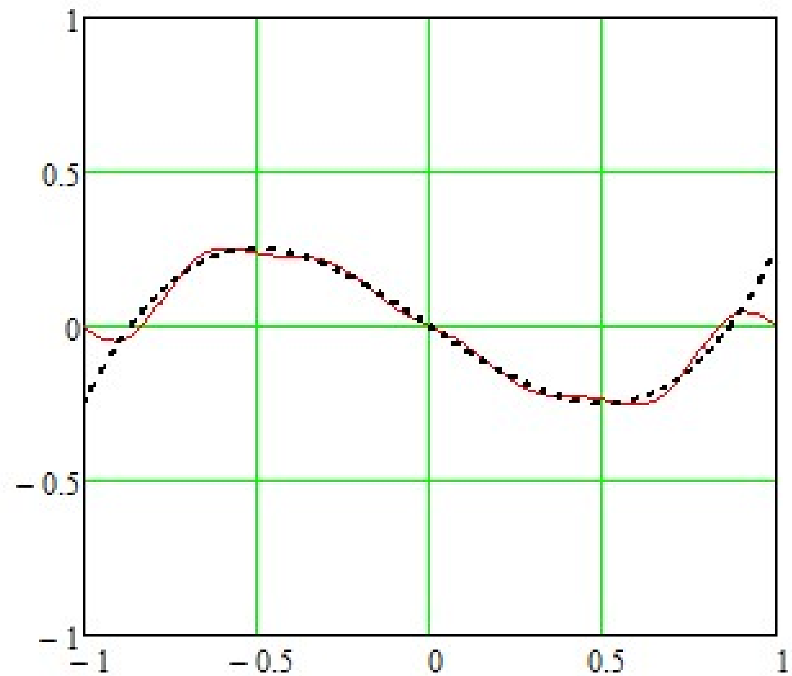
ул. Московское шоссе, д.34, г.Самара, 443086, тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36, сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru

Примеры приближения функций
1. Периодическая и непериодическая функции

$$f(x) = x^2 - 0.5$$

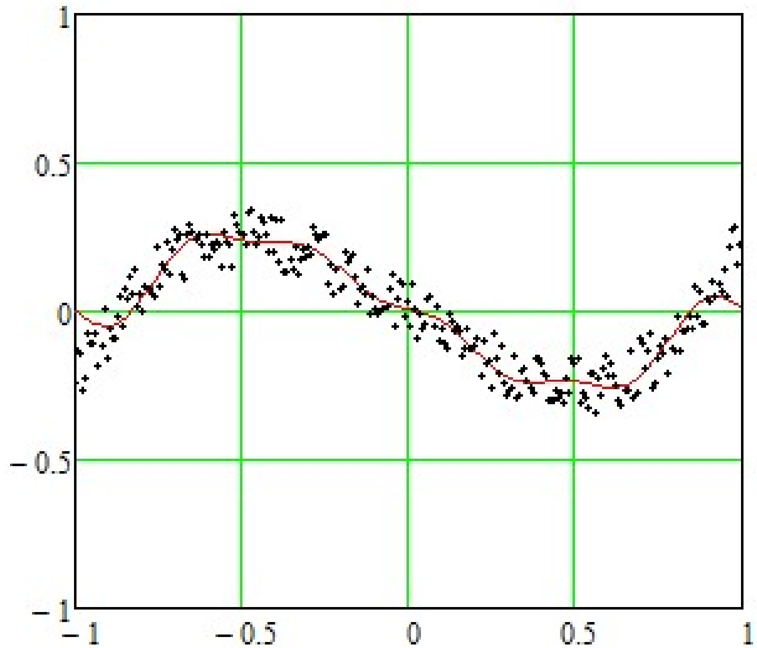


$$f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$$

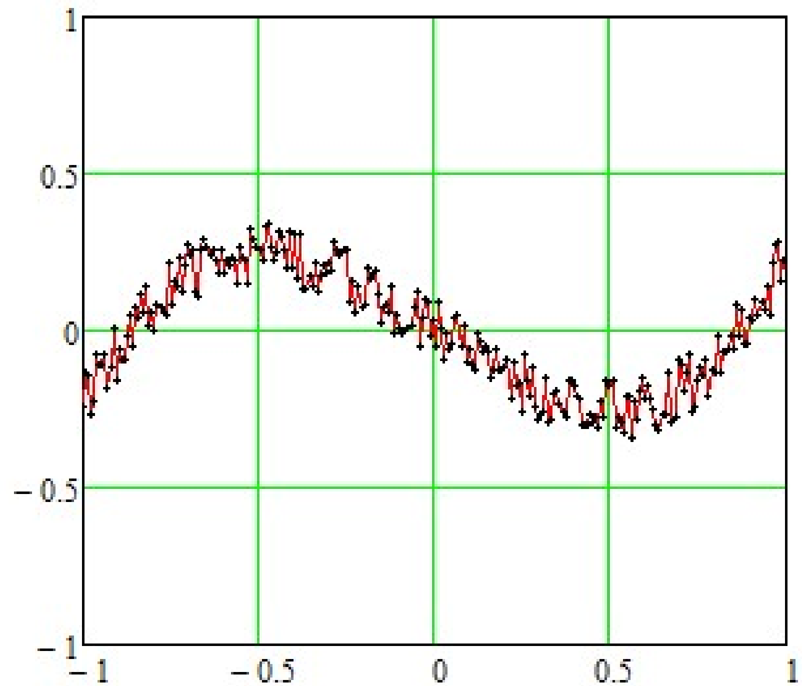


Количество гармоник N=5

Примеры приближения функций
2. Сложная функция

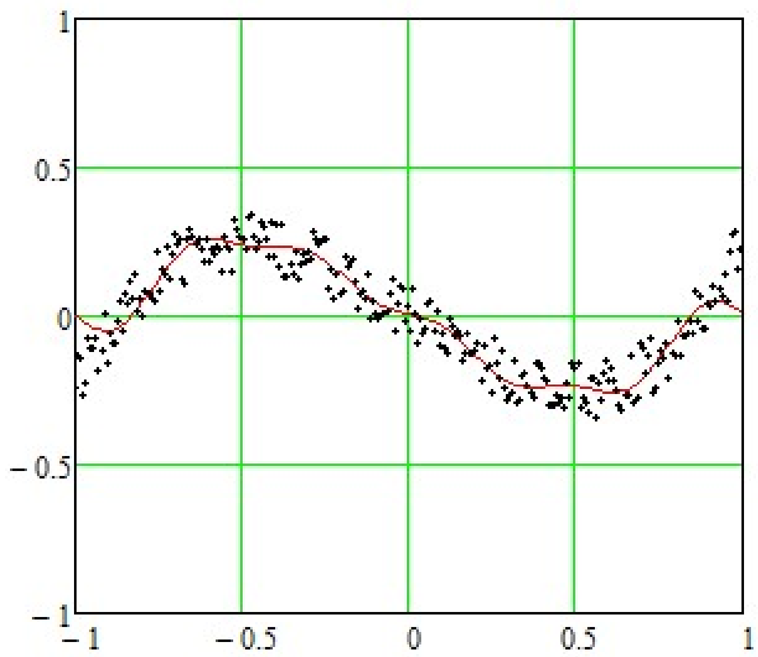


Количество гармоник N=5

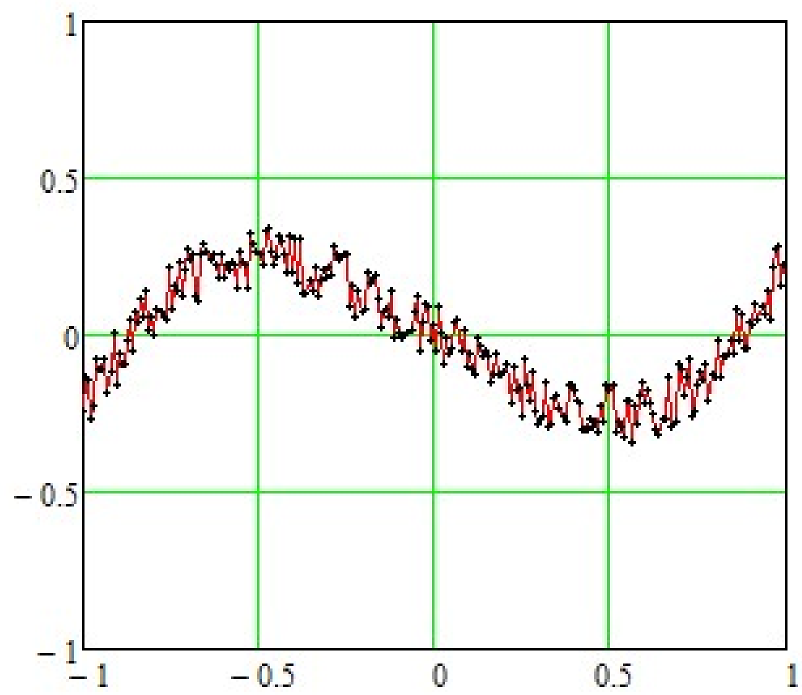


Количество гармоник N=150

Примеры приближения функций
2. Сложная функция



Количество гармоник N=5



Количество гармоник N=150

САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

Спасибо
за внимание

e-mail: yumz@yandex.ru

ул. Московское шоссе, д. 34, г. Самара, 443086
Тел.: +7 (846) 335-18-26 , факс: +7 (846) 335-18-36
Сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru