Лабораторная работа 1

1. Порядок точности всех формул, которые используются для численного дифференцирования.

В качестве приближенных выражений для первой производной для любой внутренней точки заданного интервала можно взять любую из следующих формул

$$\tilde{f}'(x_i) \approx (f_i - f_{i-1}) / h \quad , \qquad (1.1)$$

$$\tilde{f}'(x_i) \approx (f_{i+1} - f_i) / h \quad , \qquad (1.2)$$

$$\tilde{f}'(x_i) \approx (f_{i+1} - f_{i-1}) / 2h \quad , \qquad (1.3)$$

Сначала рассмотрим оценку точности определения левой разностной производной (1.1). Представим выражение (1.1) в виде

$$\tilde{f}'(x) \approx (f(x) - f(x-h)) / h \quad , \qquad (1.6)$$

где $x = x_i$, $f(x) = f_i$, $f(x-h) = f_{i-1}$.

Дальше нужно разложить функцию f(x) в ряд Тейлора в точке x.

получим оценку (с точностью до слагаемых порядка h^2)

$$\left| f'(x) - \tilde{f}'(x) \right| < \frac{h}{2} M \quad . \qquad (1.8)$$

Иногда оценку (1.8) записывают по другому, используя символ порядка $O(h)$

$$\left| f'(x) - \tilde{f}'(x) \right| = O(h) \quad . \qquad (1.9)$$

Точность оценки первой производной с помощью правой разностной производной та же.

Центральная разностная схема (1.3) в общем случае дает большую точность при численном вычислении первой производной, чем формулы (1.1),(1.2).

Оценка точности вычисления второй производной

Аналогично может быть получена оценка точности вычисления второй производной (1.4)

$$\left| f''(x) - \tilde{f}''(x) \right| = O(h^2) \quad .$$

Оценка точности вычисления производных К ПОРЯДКА

$$\left| f^{(k)}(x) - \tilde{f}^{(k)}(x) \right| = O(h^k) \quad ,$$

2. Что такое порядок точности и что он определяет?

Порядок точности является показателем того, насколько точно численное решение приближает аналитическое решение. Он определяет скорость уменьшения ошибки при приближении к истинному решению. Чем выше порядок точности, тем более точным будет численное решение.

3. Как зависит от порядка точности погрешность используемых формул?

погрешность численного вычисления производной k-ого порядка убывает при уменьшении шага h со скоростью пропорциональной h^p. Так, например, при уменьшении шага в два раза погрешность численного вычисления производной должна уменьшится в 2^{-p} раз. Однако оценка (1.15) учитывает только методическую погрешность

4. Как определяется порядок точности используемых формул? УЧИТЬ 1Й.

5. Как получена формула для приближенного определения второй производной?

Вычитая правые части выражений для правой и левой разностных производных (1.2) и (1.1) друг из друга и разделив на шаг h , получим

$$\tilde{f}''(x_i) \approx (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) / h^2 \quad .$$

6. Определение производных любого порядка (высшая математика)

Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю(при условии, что такой предел существует).

7. Геометрическая интерпретация первой производной.

если к графику функции y = f(x) в некоторой точке x0 проведена касательная, непараллельная оси y, то значение производнойв точке касания есть тангенс угла α, образованного этой касательной с положительным направлением оси абсцисс.

8. Геометрическая интерпретация формул: левая, правая, центральная разность.

Геометрическая интерпретация приведенных соотношений достаточно проста. Если существует некоторая функция $y = f(x)$, то производная этой функции $f'(x)$ представляет собой тангенс угла наклона касательной в точке x. Приближенное равенство (5.2) заменяет касательную на секущую графика функции, проходящую через точки $(x+h, f(x+h))$ и $(x, f(x))$, а равенство (5.3) – на секущую, проходящую через $(x, f(x))$ и $(x-h, f(x-h))$. Так же из геометрических соображений ясно, что можно провести секущую графика функции и через точки $(x-h, f(x-h))$ и $(x+h, f(x+h))$. В этом случае получаем, так называемую, центральную разностную формулу вычисления производной

9. Источник методической погрешности.

Методическая погрешность обусловлена несовершенством метода измерений или упрощениями, допущенными при измерениях. Так, она возникает из-за использования приближенных формул при расчете результата или неправильной методики измерений.

10. Источник вычислительной погрешности.

Вычислительная погрешность возникает в основном из-за округления чисел при
вводе-выводе, а также при выполнении арифметических операций в ЭВМ.

данных в памяти машины.

11. Что такое параметр дискретизации.
Параметр дискретизации - это параметр, определяющий размер шага сетки или интервалов, на которые разбивается область решения при численном решении дифференциальных уравнений или других математических задач. Чем меньше значение параметра дискретизации, тем более точным будет численное решение, но при этом возрастает вычислительная сложность задачи.

12. Параметр дискретизации h0. Что это и как он определяется.
В общем случае существует некоторый минимальный шаг дискретизации
ho, при котором методическая и вычислительная погрешности приблизительно равны. Этот минимальный шаг дискретизации можно
оценить, соответствующие погрешности.

13. Как зависит вычислительная погрешность всех используемых формул от параметра дискретизации.
Вычислительная погрешность всех используемых формул зависит от параметра дискретизации следующим образом: чем меньше значение параметра дискретизации, тем меньше вычислительная погрешность. Это связано с тем, что при уменьшении шага сетки или интервалов увеличивается количество точек, на которых производятся вычисления, что позволяет получить более точное приближенное решение.

$$h_o \approx 2\sqrt{\frac{\delta}{M}} = O(\sqrt{\delta}) \quad .$$

14. ***Как зависит h0 от порядка производной и почему?***

Чем выше порядок производной, тем меньше значение h0 (минимальный шаг дискретизации) должно быть выбрано, чтобы обеспечить достаточную точность вычислений. Это связано с тем, что при вычислении производной более высокого порядка требуется учитывать более мелкие изменения функции, которые могут быть упущены при большом значении h0.

$$h_o \approx= O(\delta^{1/2k}) \ ,$$