<u>שאלה 1</u>

צ״ל: אם S,T אופרטורים נילפוטנטים אזי ההרכבה $S\circ T$ נילפוטנטית גם היא.

<u>הטענה נכונה</u>. נוכיח באמצעות מטריצות מייצגות. לכל אופרטור יש מטריצה מייצגת והרכבת אופרטורים היא הפעלת אופרטור אחד על אופרטור אחר. כלומר $T(S(v)) = T\circ S$. או בשפה של מטריצות - כפל מטריצות.

<u>צ״ל</u>: כפל של 2 מטריצות נילפוטנטיות יחזיר מטריצה נילפוטנטית.

<u>הוכחה</u>: מכיוון ש S,T שניהם אופרטורים מעל V, שניהם מיוצגים ע״י מטריצות נילפוטנטיות ממימדים שווים. נניח $\dim(V)=n$ אזי

$$M_T \in M_{n\times n}(V) \quad \text{וגם} \quad M_S \in M_{n\times n}(V)$$

את המטריצות הנילפוטנטית ניתן להציג בצורת ז'ורדן קנונית כפי שלמדנו בהרצאות. מכאן ניתן להסיק מסקנה מעניינת - גם M_T וגם M_S דומות למטריצות בצורת ז'ורדן (נילפוטנטי) כלומר הן משולשיות עליונות עם 0 על האלכסון.

$$M_S \approx \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

לכן, לפי כפל מטריצות:

$$M_T \approx \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \approx M_{T\circ S}$$

אני רואה כי ההרכבה של $T\circ S$ מיוצגת לפי מטריצה נילפוטנטית. לכן האופרטור $T\circ S$ הוא נילפוטנטי. $\blacksquare$

שאלה 2

צ"ל עבור אופרטור T לכסין $\ker(T)$ ו $\mathrm{Im}(T)$ מהווים סכום ישר.

$\boxed{\text{לא יודע לפתור את השאלה 2}}$

שאלה 3

צורת ז'ורדן: דרך קנונית להציג מטריצות דומות. הצגה זו הינה קבועה ויחידה עבור כל זוג מטריצות דומות A,B.

מטריצה בצורת ז'ורדן: המטריצה המייצגת של AB מההגדרה הקודמת. המטריצה בצורת ז'ורדן מורכבת מבלוקים הנקראים בלוקי ז'ורדן. בלוקים אלו מייצגים בצורה קנונית מרחבים עצמיים של המטריצה.

הוכחה: כפי שראינו מההגדרה, כל בלוק ז'ורדן מייצג מרחב עצמי נפרד, ואין כל תלות בין המרחבים העצמיים של A. לכן A^2 תגרור פעולת "בריבוע" על כל בלוק בנפרד. דבר שבפועל לא משנה את מספר הבלוקים.

המקרה היחיד בו זה לא מתרחש, הוא המקרה בו ישנו ע"ע 0 על האלכסון של אחד הבלוקים. אך מצב זה אינו אפשרי מהנתון מכיוון ש A הפיכה. מטריצה הפיכה, לפי ההגדרה, לא יכולה להכיל ע"ע 0.

(זאת מכיוון שע"ע 0 יגרור דטרמיננטה $\det(A)=0$, מה שבלתי אפשרי עבור מטריצות הפיכות).