

הוכחה של 7g:

נוכיח בהוכחה דו-כיוונית תנאי של אם ורק אם.

1. אם $(X - a)^2$ מחלק ללא שארית – אז a שורש של f וגם $D(f)$

$$\begin{aligned}(X - a)^2 \mid f &\rightarrow f = (X - a)^2 * q \\ f(a) &= (a - a)^2 * q = 0 \\ D(f)(a) = f'(a) &= 2(X - a) * q + (X - a)^2 q' \rightarrow f'(a) = 0\end{aligned}$$

צד אחד הוכחנו. אם $(X - a)^2$ מחלק ללא שארית אזי a שורש של f וגם $D(f)$

2. אם a שורש של f וגם $D(f)$ – אז $(X - a)^2$ מחלק ללא שארית

$$\begin{aligned}f(a) = 0 &\rightarrow f = (X - a) * q \\ D(f) = f' &= q + (X - a) * q' \\ D(f)(a) = 0 &\rightarrow f'(a) = q(a) + 0 * q' = 0 \rightarrow q(a) = 0 \\ f'(a) = q(a) = 0 &\rightarrow q = (X - a) * p \\ f &= (X - a) * (X - a) * p = (X - a)^2 * p \\ D(f) &\text{ וגם } f \text{ שורש של } f \text{ וגם } D(f) \text{ מחלק ללא שארית אזי } a \text{ שורש של } f \text{ וגם } D(f)\end{aligned}$$

מכיוון שההוכחה מתקיימת משני הכיוונים, ניתן להסיק שמתקיים תנאי של אם ורק אם.