

Análise de estabilidade de métodos de DF para BVPs

Callebe R. Reis

March 2024

1 Introdução

O problema de resolver equações diferenciais numericamente traz consigo o desafio da avaliação da solução obtida. Geralmente, a qualidade de uma solução para problemas de valor de contorno é quantificada pela análise da estabilidade do método e da convergência da solução.

Neste relatório, focaremos na resolução do problema de Poisson (1), definido no intervalo unitário, com condições de contorno de Neumann e Dirichlet. Investigaremos a convergência da solução obtida por meio de aproximações por diferenças finitas de segunda ordem no interior do domínio, além de examinarmos diferentes abordagens para as condições de contorno. Ademais, realizaremos um estudo da estabilidade dos métodos empregados.

$$\begin{cases} u'' &= f \\ u'(0) &= \sigma \\ u(1) &= \beta \end{cases} \quad (1)$$

2 Discretização da equação de Poisson

Conforme mencionado anteriormente, empregaremos o método das diferenças finitas para discretizar a equação de Poisson. Para tal, dividimos o intervalo $[0, 1]$ em segmentos, de modo que $0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n+1} = 1$, onde U_i representa a solução aproximada $u(x_i)$. Utilizaremos uma aproximação de segunda ordem para a segunda derivada:

$$D_h^2 u = \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} \quad 1 \leq i \leq n \quad (2)$$

2.1 Discretização das condições de contorno

A condição de contorno de Neumann, $u'(0) = \sigma$, envolve uma derivada que requer uma aproximação. Aqui, apresentamos três métodos para essa aproximação:

2.1.1 Primeiro método

Neste método de primeira ordem, cujo erro é $\mathcal{O}(h)$, aproximamos a derivada na condição de Neumann da seguinte forma:

$$u'(0) = \frac{U_1 - U_0}{h} = \sigma \quad (3)$$

Essa abordagem para a condição de contorno implica que a solução numérica obtida através do sistema de diferenças finitas é de ordem $\mathcal{O}(h)$.

O sistema aumentado obtido é da forma:

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -h & h & 0 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 0 & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \\ U_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \\ \beta \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.1.2 Segundo método

Podemos melhorar a aproximação da condição de Neumann utilizando um método de ordem $\mathcal{O}(h^2)$, considerando um ponto adicional U_{-1} fora do domínio e aplicando diferenças centradas às expressões de $u''(0) = f(x_0)$ e $u'(0) = \sigma$:

$$u''(0) = \frac{U_1 - 2U_0 + U_{-1}}{h^2} = f(x_0) \quad (5)$$

$$u'(0) = \frac{U_1 - U_{-1}}{2h} = \sigma \quad (6)$$

Através das equações (5) e (6), podemos derivar uma expressão que elimina a dependência do ponto U_{-1} fora do domínio:

$$\frac{U_1 - U_0}{h} = \sigma + \frac{h}{2}f(x_0) \quad (7)$$

O sistema aumentado obtido é da forma:

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -h & h & 0 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 0 & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \\ U_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma + \frac{h}{2}f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \\ \beta \end{bmatrix} \quad (8)$$

2.1.3 Terceiro método

Com os pontos U_0 , U_1 e U_2 , podemos derivar uma aproximação de ordem $\mathcal{O}(h^2)$ para a condição de contorno da seguinte forma:

$$\frac{1}{h} \left(\frac{3}{2}U_0 - 2U_1 + \frac{1}{2}U_2 \right) = \sigma \quad (9)$$

O sistema aumentado obtido é da forma:

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}h & -2h & \frac{1}{2}h & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 0 & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \\ U_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \\ \beta \end{bmatrix} \quad (10)$$

3 Resultados e Análise

Foram utilizados métodos diretos para a solução das matrizes relacionadas as discretizações. Além disso, em todos os métodos, o sistema foi resolvido aplicando a condição de Dirichlet diretamente. Os parâmetros utilizados foram $f = \exp(x)$, $\sigma = 0$ e $\beta = 0$, tornando assim o sistema (1) em (11):

$$\begin{cases} u'' &= \exp(x) \\ u'(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{cases} \quad (11)$$

Cuja solução analítica é dada por:

$$u(x) = -x + e^x - e + 1 \quad (12)$$

Para analisarmos os resultados quanto a convergência, avaliamos o erro em relação a solução analítica (12) utilizando a norma do máximo:

$$\|E\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |U_i - u(x_i)| \quad (13)$$

3.1 Convergência

Variando o refinamento da malha utilizada, é possível observar como o erro, definido pela equação (13), varia de acordo com o valor de h . Os valores obtidos para o erro são plotados em relação a diferentes valores de h na Figura 2.

Observa-se que, no caso em que aproximamos a condição de Neumann utilizando o método de primeira ordem, o erro exibe um comportamento de ordem

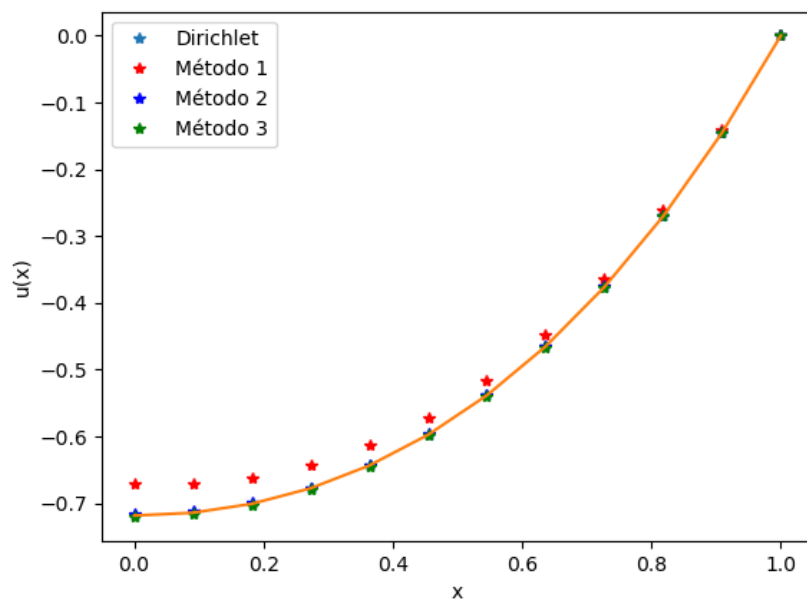


Figure 1: Resultados para diferentes métodos de aproximação das condições de contorno

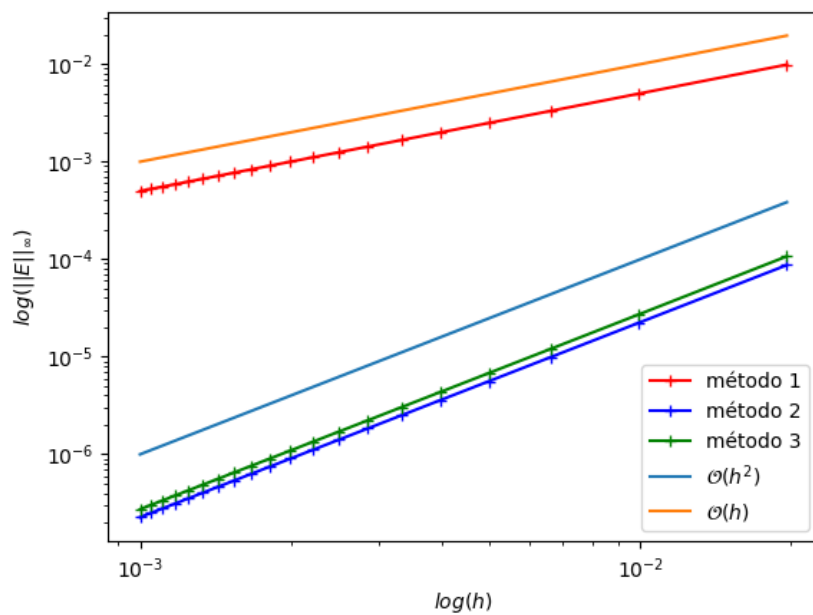


Figure 2: Convergência dos diferentes métodos de aproximação das condições de Neumann

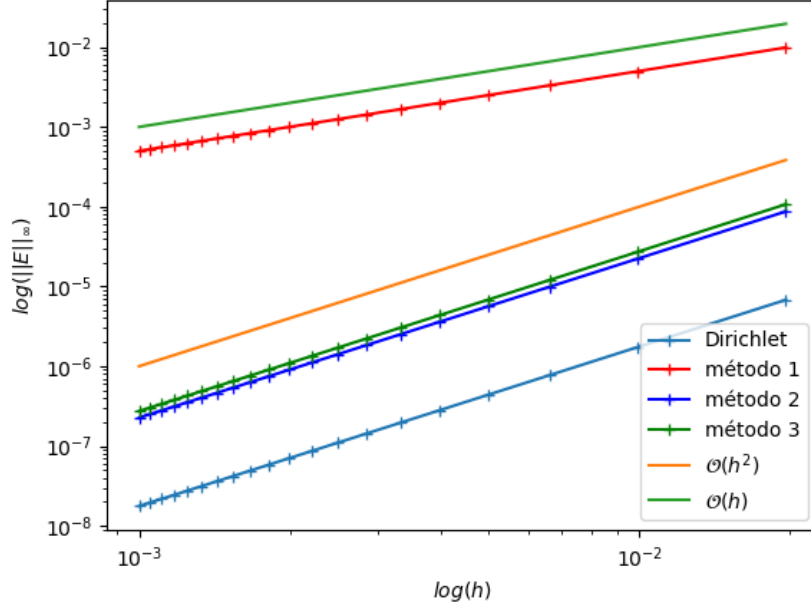


Figure 3: Taxas de convergência de diferentes aproximações para as condições de Neumann comparadas à convergência utilizando apenas condições de Dirichlet.

$\mathcal{O}(h)$ à medida que h se aproxima de zero. Enquanto nos demais casos, o erro tende a se aproximar mais de $\mathcal{O}(h^2)$.

Podemos, ainda, comparar esses resultados com a convergência obtida utilizando condições puramente de Dirichlet, especificamente $u(0) = 2 - e$ e $u(1) = 0$. É interessante notar, na Figura 3, que a aproximação por diferenças finitas centradas no interior do domínio e com condições de contorno de Dirichlet converge com ordem $\mathcal{O}(h)$ conforme $h \rightarrow 0$. Ou seja, o que causa a convergência em $\mathcal{O}(h)$ do primeiro método de aproximação das condições de Neumann é a ordem da aproximação na condição de contorno.

3.2 Análise de estabilidade

Para a avaliação da estabilidade dos métodos, utilizamos duas métricas, a norma 2 e a norma do máximo previamente apresentada. Na Figura 4, podemos perceber que os valores das normas se acumulam em torno de 1.5 conforme $h \rightarrow 0$, isto se dá por $\mathcal{O}(h^{3/2})$ ser um majorante superior para a norma do máximo, e como o gráfico está na escala log-log, o valor majorante é 1.5. Entretanto, a norma 2 para o inverso das matrizes de discretização não demonstra possuir um limitante superior. Este fator pode causar instabilidade numérica em processos

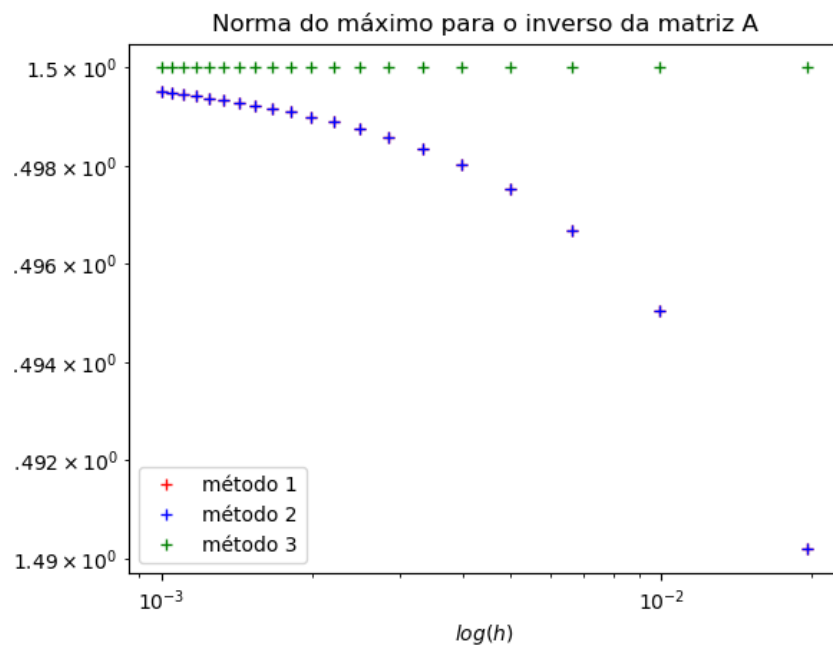


Figure 4: Norma do máximo aplicada a matriz inversa da discretização de diferentes métodos

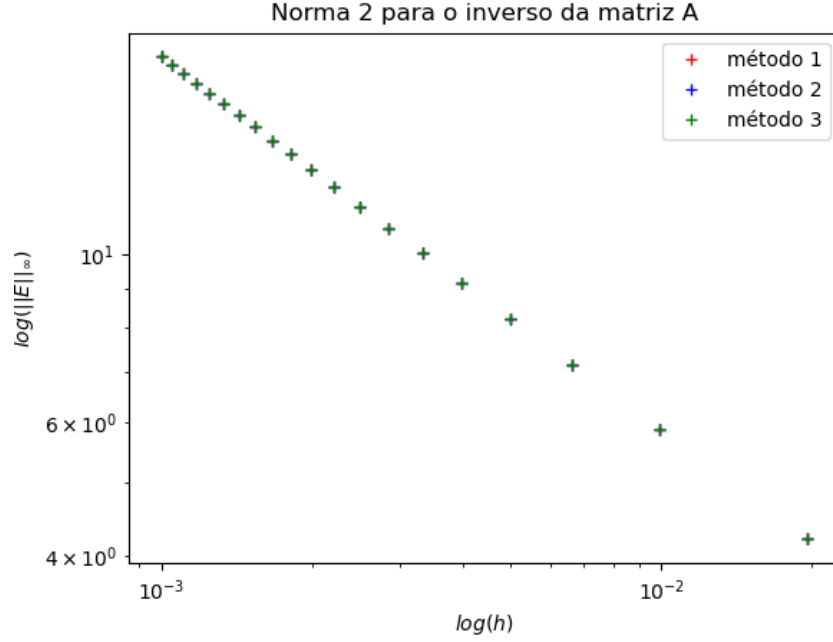


Figure 5: Resultado da norma 2 para diferentes valores de h da matriz inversa da discretização para diferentes métodos.

iterativos para a solução dos sistemas de equações.

4 Conclusão

Em relação a teoria desenvolvida no capítulo 2 do LeVeque, a análise de estabilidade se apresentou um desafio extra. A presença da condição de contorno de Neumann torna a matriz não simétrica, o que dificulta a análise dos autovalores da matriz, e consequentemente a estabilidade do método.

Entretanto, com relação a convergência, os métodos demonstram-se em acordo com a teoria apresentada e discutida no livro, sendo a interpretação dos resultados mais direta.