# Тема 2
# Оцінювання альтернатив рішень за одним критерієм

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

# Постановка задачі

**Пріоритет**
**Коефіцієнт відносної важливості (вага)** $w \in R,\ w > 0$

більше значення свідчить про більшу важливість відповідного об’єкту

Ваги $\{w_i \mid i = 1,\ldots,n\}$ називаються **нормованими** (до одиниці), якщо

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

<u>Дано:</u>

$A = \{a_i \mid i = 1,\ldots,n\}$ - множина альтернатив рішень

$C$ - критерій

<u>Знайти:</u>

$W = \{w_i \mid i = 1,\ldots,n\}$ - ваги альтернатив

# Методи розв’язання задачі

# Метод безпосереднього оцінювання

1. Експерт привласнює кожній альтернативі $a_i$ число $v_i$ (ранг, бал, вага), яке, на його думку, відбиває ступінь властивості, представленої критерієм $C$

$$\forall i \quad a_i \to v_i \in [1, n]$$

2. Нормування $w_i = v_i / \sum_{i=1}^{n} v_i$

Недолік: значні похибки, коли альтернативи досить близькі

# 2.1. Методи парних порівнянь

# Матриця парних порівнянь

$$A = \{a_i \mid i = 1,\dots,n\}$$

$D = \{d_{ij} \mid i, j = 1,\dots,n\}$ **- матриця парних порівнянь (МПП)**

$d_{ij} \in R$

$d_{ij}$ - величина переваги $a_i$ над $a_j$ відносно заданого критерію

# Шкала вербальних суджень

Шкала вербальних суджень $(S, X, f)$

$S = \{s_k \mid k = 1, \dots, K\}$ - градації шкали (судження)

$X = \{x_k \mid k = 1, \dots, K\}$ - кількісні вираження градацій $x_k \in R$

$d_{ij} = x_k$ , якщо порівняння $a_i$ з $a_j$ описується судженням $s_k$

# Фундаментальна шкала

| Кількісні вираження градацій $x_k$ | Градації шкали (судження $s_k$) | Пояснення |
|---|---|---|
| 1 | Однаково важливі | Елементи рівні за своїм значенням |
| 3 | Слабка перевага | Існують вербальні висловлювання щодо пріоритету одного елементу над іншим, але ці висловлювання досить непереконливі |
| 5 | Сильна перевага | Існують добрі докази та логічні критерії, які можуть показати, що один з елементів більш важливий |
| 7 | Дуже сильна перевага | Існує переконливий доказ великої значущості одного елемента в порівнянні з іншим |
| 9 | Абсолютна перевага | Усвідомлення пріоритету одного елементу над іншим максимально підтверджується |
| 2, 4, 6, 8 | Проміжні оцінки | Потрібен певний компроміс |

# Функціональна залежність ваг від величин переваг

$$d_{ij} = f(w_i, w_j)$$ напр, $$d_{ij} = \frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij} \qquad \varepsilon_{ij} > 0, \quad \varepsilon_{ii} = 1$$

---

$$f(w_i, w_j) = w_i / w_j$$

**мультиплікативні**

парні порівняння

$$f(w_i, w_j) = w_i - w_j$$

**адитивні**

парні порівняння

---

$$d_{ji} = 1/d_{ij}$$

$$d_{ij} > 0$$

властивість оберненої симетричності

$$d_{ji} = -d_{ij}$$

---

# Узгоджена МПП

**Мультиплікативна** | **Адитивна**

$$d_{ij} = d_{ik} d_{kj} \quad \forall i, j, k$$

**властивість узгодженості**

$$d_{ij} = d_{ik} + d_{kj} \quad \forall i, j, k$$

**Твердження**. МПП $d_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ є узгодженою.

$$d_{ij} = \frac{w_i}{w_j} = \frac{w_i}{w_k} \frac{w_k}{w_j} = d_{ik} d_{kj}$$

**Твердження**. МПП $d_{ij} = w_i - w_j$ є узгодженою.

$$d_{ij} = w_i - w_j =$$

$$= (w_i - w_k) + (w_k - w_j) = d_{ik} + d_{kj}$$

# Приклади

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

# Приклад: перевірка узгодженості матриці парних порівнянь **за означенням**

**Матриця** $D = \{d_{ij} \mid i, j = 1,\dots,n\}$ **є узгодженою, якщо** $d_{ij} = d_{ik} d_{kj}$

для всіх $i, j, k = 1,\dots,n$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

Потрібно перебрати всі значення $i, j, k = 1,\dots,3$

$i = 1, j = 3, k = 2:$ $d_{13} = d_{12} d_{23} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$

$i = 1, j = 2, k = 3:$ $d_{12} = d_{13} d_{32} = 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

$i = 2, j = 3, k = 1:$ $d_{23} = d_{21} d_{13} = 5 \cdot 1 = 5$

$i = 1, j = 2, k = 1:$ $d_{12} = d_{11} d_{12} = 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

… … …

на практиці це зайві перевірки.
**Достатньо перевірити різні між**
\- **собою значення i, j, k =1,…,*n*.**
Наприклад, для n=3 достатньо перевірити
i=1, j=3, k=2 або i=1, j=2, k=3

# 2.2. Метод ЕМ парних порівнянь

# Метод EM (eigenvector method) розрахунку ваг альтернатив

**Вектором ваг $w$ є власний вектор заповненої експертом мультиплікативної МПП $D$, який відповідає її найбільшому власному числу.**

$$Dw = \lambda_{\max} w$$

# Неприводимі матриці

**Означення**

$A = \{(a_{ij}) \mid i, j = 1,...,n\}$ називається <u>неприводимою</u>, якщо вона <u>не може</u> бути представлена у вигляді

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}$$

де $A_1, A_3$ - квадратні матриці, $0$- нульова.

# Неприводимі матриці

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

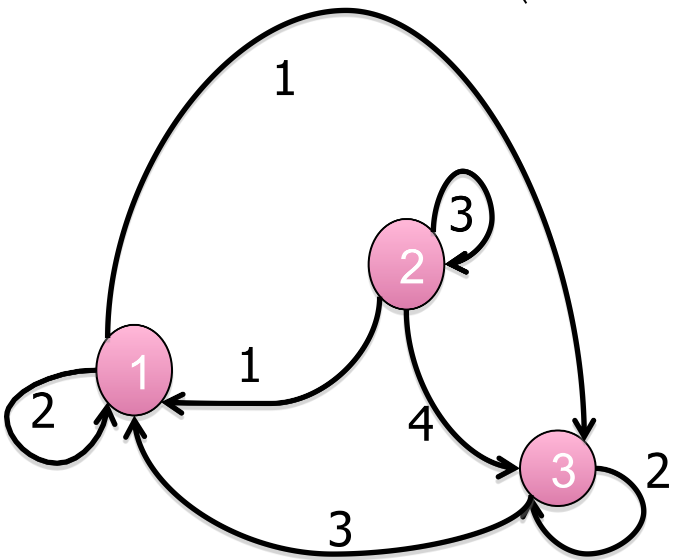
Мультиплікативні МПП – неприводимі

(не містять нульових елементів)

# Неприводимі матриці

**Приклад**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ - приводима




Перехід в другу вершину – неможливий.

**Теорема**

Матриця неприводима т.т.т.к.
її направлений граф є сильно зв’язним.

# Теорема Перрона-Фробеніуса

Нехай А – неприводима і $A \geq 0$ ( $A > 0$ ) .

Тоді:

1. А має просте власне число $\lambda \in R$, $\lambda > 0$ , яке за модулем не менше (більше) за всі інші власні числа А.

2. Власний вектор, що відповідає $\lambda$, має *додатні* , з точністю до постійного множника, елементи.
3. Число $\lambda$ (корінь Перрона матриці):

$$\lambda = \max_{x \geq 0} \min_{i} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \min_{x \geq 0} \max_{i} \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

# Примітивні матриці

**Означення.**

A≥0 неприводима називається примітивною

якщо $\exists m \in Z,\ m \geq 1 \quad : \quad A^m > 0$

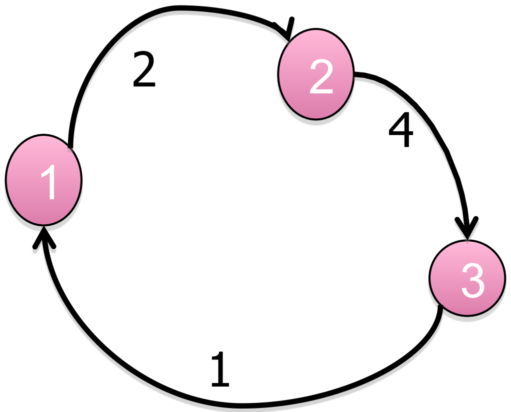
Інакше матрицю називають імпримітивною (циклічною).

**Твердження.** В графі примітивної матриці довжина шляху між будь-якими двома вершинами ≥ m.

# Примітивні матриці

**Теорема.** Неприводима $A \geq 0$ примітивна т.т.т.к. $A$ має єдиний (кратності = 1) характеристичний корінь з максимальним модулем.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ - неприводима, циклічна,




$\lambda_{\max}$ кратності 3

# Примітивні матриці

**Теорема.** Нехай $A$ - примітивна

Тоді $$\lim_{k\to\infty}\frac{A^k e}{\|A^k\|} = cw, \qquad \|A^k\| = e^T A^k e$$

$c = const$, $w$ - власний вектор, який відповідає $\lambda_{\max}$

# Приклад

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- неприводима,

циклічна,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{A^k e}{\|A^k\|} = cw,$$

$$\| A^k \| = e^T A^k e$$

$$Ae = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2/7 & 4/7 & 1/7 \end{pmatrix}^T$$

$$Ax_1 = \begin{pmatrix} 8/7 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}^T$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 4/7 & 2/7 & 1/7 \end{pmatrix}^T$$

$$Ax_2 = \begin{pmatrix} 4/7 & 4/7 & 4/7 \end{pmatrix}^T$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}^T$$

$$Ax_3 = \begin{pmatrix} 2/3 & 4/3 & 1/3 \end{pmatrix}^T$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 2/7 & 4/7 & 1/7 \end{pmatrix}^T$$

# Метод ЕМ для узгодженої МПП

$a_1, a_2, \dots, a_n$ - апельсини , $w_1, w_2, \dots, w_n$ - ваги апельсинів (відомі)

$$Dw = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = nw$$

$$Dw = nw \quad \Leftrightarrow \quad (D - nI)w = 0 \qquad (1)$$

$\det(D - nI) = 0 \quad \Leftrightarrow$ система рівнянь (1) має нетривіальний розв'язок

$Dw = nw$ - вироджена система рівнянь

$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$ - додаткова умова для єдиності розв'язку

# Метод ЕМ парних порівнянь:
## властивості узгодженої мультиплікативної МПП

1) Якщо додатна матриця $A$ узгоджена, то всі її рядки лінійно залежні між собою.

2) Власні числа додатної узгодженої матриці: $\lambda_1 = n$ ( кратності 1 )

$\lambda_2 = 0$ ( кратності n -1 )

3) Якщо $A$ - додатна та узгоджена матриця, то $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$ і $a_{ii} = 1$.

4) Додатна матриця $A$ узгоджена т. т. т. к. $rang(A) = 1$ та $a_{ii} = 1$

# Метод ЕМ :
## побудова міри узгодженості МПП

$D = \{d_{ij} \mid i, j = 1,\ldots,n\}$ - МПП, заповнена експертом

$$d_{ij} = \frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij} \qquad \varepsilon_{ij} > 0, \quad \varepsilon_{ii} = 1$$

**Твердження**. $D$ - узгоджена $\Leftrightarrow$ $\varepsilon_{ij} = 1 \quad \forall i, j = 1,\ldots,n$

$$CI = -\tfrac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\lambda_i$$

$$\sum_i \lambda_i = trD = n \qquad \Rightarrow \qquad CI = \frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$$

<u>**Теорема.**</u> Нехай A – додатна, обернено симетрична матриця $n$x$n$.

Тоді $\lambda_{\max} \geq n$ і рівність має місце т.т.т.к. A – узгоджена

# Відношення узгодженості CR

$$CR = \frac{CI}{MRCI} \qquad CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$$

$CR$ - відношення узгодженості МПП, заповненої експертом

$CI$ - індекс узгодженості МПП, заповненої експертом

$MRCI$ - індекс випадкової узгодженості (табличне значення)

**Порогові значения CR**

| $n$ | порог. $CR$ |
|---|---|
| 3 | 0.05 |
| 4 | 0.08 |
| ≥5 | 0.1 |

# Розрахунок $MRCI$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $MRCI$ | **0** | **0** | **0.52** | **0.89** | **1.11** | **1.25** | **1.35** | **1.40** | **1.45** | **1.49** | **1.52** | **1.54** | **1.56** | **1.58** | **1.59** |

1. Елементи над головною діагоналлю МПП – випадковим чином з множини {1/9, 1/8, …, 1, 2, …, 8, 9}.
2. Елементи під головною діагоналлю – за властивістю оберненої симетричності МПП.
3. На діагоналі розташовані “1”.
4. Розрахунок $CI$ побудованої МПП.
5. Повторення пп.1 – 4 50000 разів.
6. Розрахунок середнього значення $CI$.

# Інтерпретація ваг за допомогою теорії графів

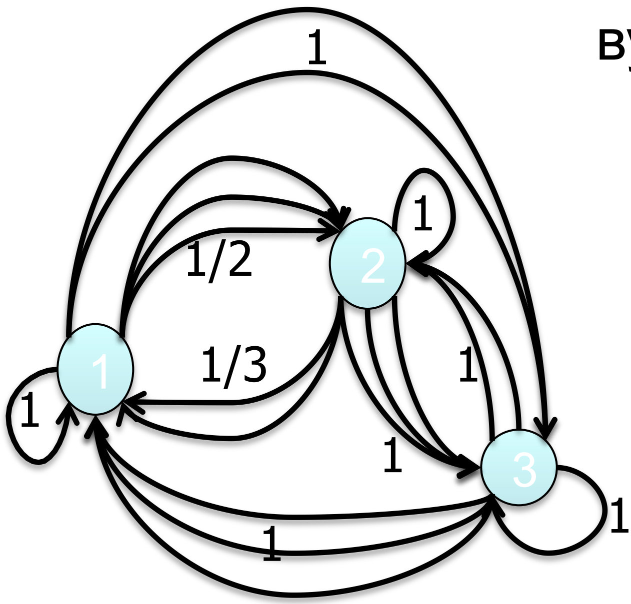
Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

# Інтерпретація ваг за допомогою теорії графів

Направлений граф $G$, $1, 2, \ldots, n$ – вузли.

Інтенсивність дуги $0 \leq q_{ij} \leq 1$

Кратність дуги $p_{ij} \in N$




вузли $i$, $j$

Маршрут

Довжина маршруту

Інтенсивність маршруту

Загальна інтенсивність маршрутів

*k* - маршрут

# Маршрут в графі

Маршрут в направленому графі – послідовність вузлів та дуг, при якій кожний вузол є кінцем дуги, яка знаходиться у послідовності безпосередньо перед ним, та джерелом наступної за ним дуги.

Довжина маршруту – кількість дуг у маршруті.

Інтенсивність маршруту – добуток інтенсивностей дуг у маршруті.

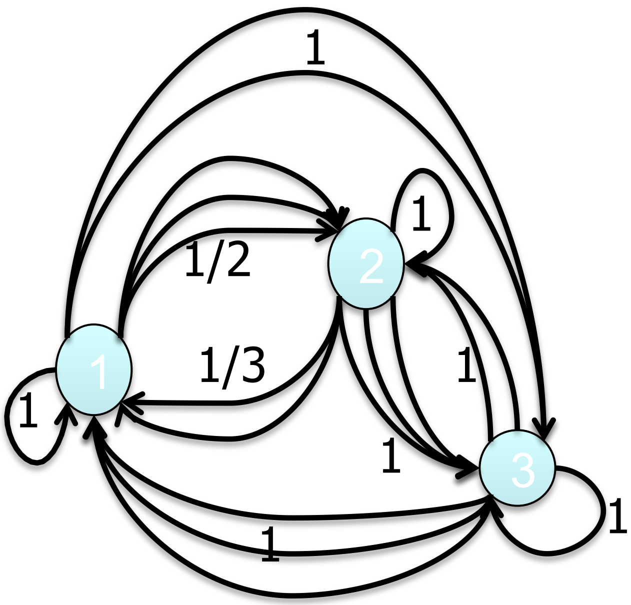
Загальна інтенсивність маршрутів – сума інтенсивностей маршрутів.

# Матриці інтенсивності-інцидентності

Матриця інтенсивності-інцидентності графа $G$

$U = \{(u_{ij}) \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ – загальні інтенсивності 1-маршрутів

$$u_{ij} = p_{ij} q_{ij}$$



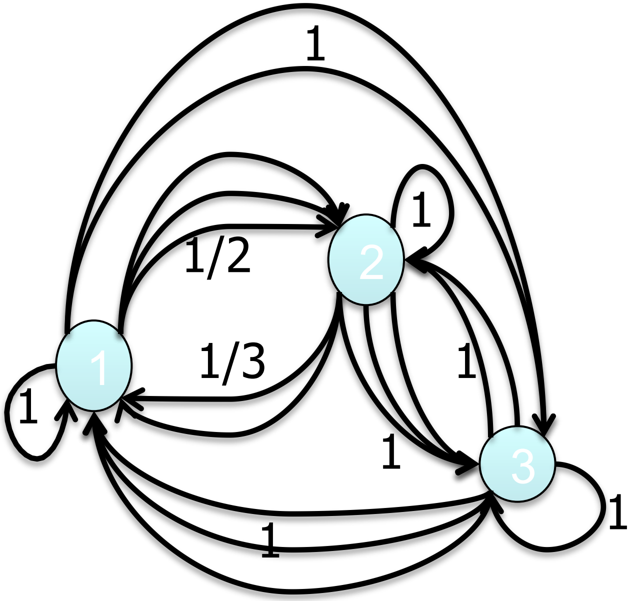

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 2/3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Загальна інтенсивність $k$-маршрутів від $i$ до $j$ - ?

# Загальні інтенсивності $k$-маршрутів

**Твердження.** Загальні інтенсивності $k$-маршрутів

$$U^k = \underbrace{U \cdot U \cdot \ldots \cdot U}_{k\ times} = \{(u_{ij}(k)) \mid i, j = 1, \ldots, n\}$$




**Приклад.** $i = 1,\ \ j = 3$

Загальна інтенсивність 2-маршрутів:

(1, 2, 3): 9/2
(1, 1, 3): 2
(1, 3, 3): 2
17/2

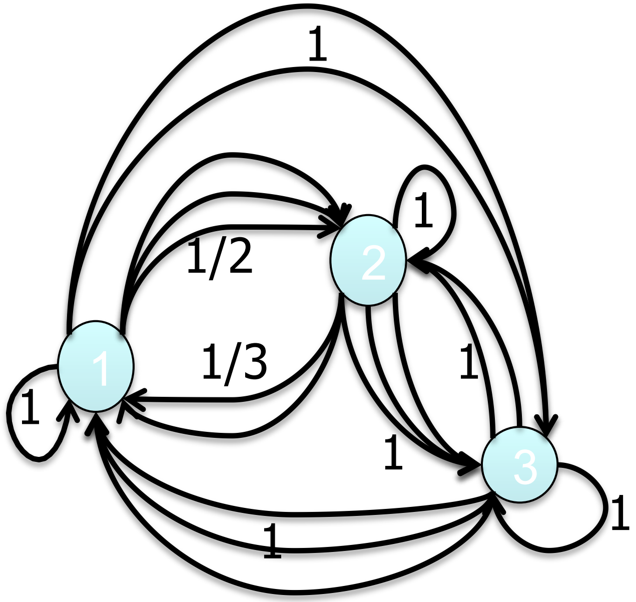
$$U^2 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 17/2 \\ 31/3 & 8 & 22/3 \\ 22/3 & 17/2 & 13 \end{pmatrix}$$

# Загальні інтенсивності $k$-маршрутів

**Приклад.**
Загальна інтенсивність 2-маршрутів між вузлами 1 і 3:

(1,2), (2,3): 9/2
(1,1), (1,3): 2
(1,3),(3,3): 2
17/2

$$U^2 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 17/2 \\ 31/3 & 8 & 22/3 \\ 22/3 & 17/2 & 13 \end{pmatrix}$$




**Теорема.** $U^k = \{(u_{ij}(k)) \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ загальні інтенсивності $k$-маршрутів від вузла $i$ до вузла $j$.

# Матриці парних порівнянь

Нехай мультиплікативна МПП $D = \{(d_{ij}) \mid i, j = 1, \dots, n\}$ – це матриця інтенсивності-інцидентності.

$$d_{ij} = \frac{p_{ij}}{q_{ij}}$$

$p_{ij}$ – кратність дуги

$1 / q_{ij}$ – інтенсивність дуги

$d_{ij}$ – інтенсивність важливості (перевага) $i$ відносно $j$ за 1 крок

$$\frac{\sum_j d_{ij}}{\sum_i \sum_j d_{ij}}$$ – перевага $i$ над всіма іншими об'єктами за 1 крок

# Матриці парних порівнянь

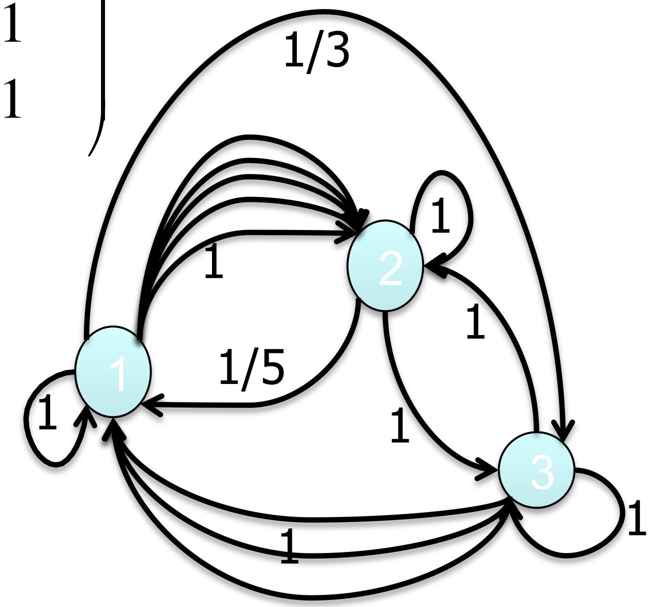
Нехай мультиплікативна МПП $D = \{(d_{ij}) \mid i, j = 1,\dots,n\}$ – це матриця інтенсивності-інцидентності.

$$d_{ij} = \frac{p_{ij}}{q_{ij}}$$

$p_{ij}$ – кратність дуги

$1/q_{ij}$ – інтенсивність дуги

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1/3 \\ 1/5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$




$d_{ij}$ – інтенсивність важливості (перевага) $i$ відносно $j$

$$\frac{\sum_j d_{ij}}{\sum_i \sum_j d_{ij}}$$ – перевага $i$ відносно всіх інших $j$

# Інтерпретація ваг за допомогою теорії графів

**Твердження**

$D^k = \{(d_{ij}(k)) \mid i, j = 1,\dots,n\}$ - інтенсивності важливості (перевага) за $k$ кроків.

**Індекс переваги** $w_i(k)$ об' єкту $i$ над усіма іншими об' єктами за $k$ кроків :

$$w_i(k) = \frac{\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(k)}{\sum_{p=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{pj}(k)}$$

# Загальний індекс переваги

**Загальний індекс переваги** $w_i$

об' єкту $i$ над всіма іншими об' єктами :

$$w_i = \lim_{k \to \infty} w_i(k)$$