2.3. Метод RGMM парних порівнянь

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com
Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Методи оптимізації парних порівнянь

Задача 1

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (d_{ij} - w_i / w_j)^2$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Задача 2

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (d_{ij} w_j - w_i)^2$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Задача 3

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\ln d_{ij} - \ln w_i + \ln w_j)^2$$

при обмеженнях

$$\prod_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n$$

методи найменших квадратів

метод логарифмічних найменших квадратів

Метод RGMM (row geometric mean method)парних порівнянь

<u>Твердження. </u> Розв’язок задачі 3

$$v_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}$$

ненормовані ваги

$$w_i = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}}$$

Метод RGMM

$$m(D,C) = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} (\ln d_{ij} - \ln c_{ij})^2 \right]^{1/2}$$ - метрика в просторі МПП nxn

Твердження. D – МПП, С – узгоджена МПП: $c_{ij} = \dfrac{v_i}{v_j}$,

$$v_i = \left(\prod_{j=1}^{n} d_{ij} \right)^{1/n} \qquad i = 1,\dots,n$$

Тоді $m(D,C)$ - мінімальне значення.

Метод RGMM

Доведення. $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}(\ln d_{ij}-(\ln v_i-\ln v_j))^2 \to \min \quad (1)$$

при умовах $$\prod_{j=1}^{n} v_j = 1 \quad (2)$$

$$v_i > 0 \qquad i=1,\dots,n$$

$$y_{ij} = \ln d_{ij} \qquad b_i = \ln v_i \qquad i,j=1,2,\dots,n$$

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-(b_i-b_j))^2 \quad (3)$$

за умови $$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0 \quad (4)$$

$$y_{ji} = -y_{ij} \qquad y_{ii} = 0$$

Метод RGMM

$$\frac{\partial S}{\partial b_k} = 0 \qquad k = 1,2,\ldots,n \qquad S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - (b_i - b_j))^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial b_k} = -2\sum_{j=1}^{n}(y_{kj} - b_k + b_j) + 2\sum_{i=1}^{n}(y_{ik} - b_i + b_k) = -4\sum_{j=1}^{n}(y_{kj} - b_k + b_j) = 0$$

$$k = 1,2,\ldots,n$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} y_{kj} - nb_k + \sum_{j=1}^{n} b_j\right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{kj} - nb_k = 0$$

$$b_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_{kj}}{n} \qquad \ln w_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} \ln d_{kj}}{n}$$

Доведено.

Методи EM і RGMM

Вправи

1. Якщо мультиплікативна МПП D узгоджена, тоді ваги, розраховані за RGMM і EM, співпадають.

2. Для будь-якої мультиплікативної МПП 3x3 ваги, розраховані за RGMM і EM, співпадають.

Геометричний індекс узгодженості

Метод RGMM

$$v_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}$$

ненормовані ваги

$$w_i = \frac{v_i}{\sum_{k=1}^{n} v_k}$$

нормовані ваги

$$s^2 = \frac{S}{d.f} = \frac{2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(\ln d_{ij} - \ln\frac{v_i}{v_j}\right)^2}{(n-1)(n-2)}$$

$$d.f = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\ln^2 e_{ij}$$

геометричний індекс узгодженості

$$e_{ij} = d_{ij} v_j / v_i$$

Порогові значення GCI

Порогові значення GCI		
n=3	n=4	n≥5
0.1573	0.3526	0.370

2.4. Метод AN парних порівнянь

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com
Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Метод AN парних порівнянь

$D = \{d_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ - мультипл.МПП, заповнена експертом

$\widetilde{D} = \{\widetilde{d}_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$

$$s_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}$$

$$\widetilde{d}_{ij} = \frac{d_{ij}}{s_j}$$

<u>Метод AN:</u> $v_i = 1 / s_i$

Метод AN парних порівнянь

<u>Твердження.</u> МПП D **узгоджена т.т.т.к.**

$$\tilde{d}_{ij} = \tilde{d}_{i1} \qquad \forall i, j$$

<u>Доведення.</u> D узгоджена $\Rightarrow$ $d_{ij} = d_{i1} d_{1j} \quad \forall i, j$

$$\Rightarrow \sum_i d_{ij} = \sum_i d_{i1} d_{1j} \quad \Leftrightarrow \quad s_j = s_1 d_{1j}$$

$$\tilde{d}_{ij} = \frac{d_{ij}}{s_j} = \frac{d_{i1} d_{1j}}{s_j} = \frac{d_{i1}}{s_1} = \tilde{d}_{i1}$$

Метод AN парних порівнянь: доведення твердження

<u>Доведення (в зворотний бік</u>

$$p_k = s_k^{-1}$$

w - будь-який з стовпчиків $\widetilde{D}$

$$\Rightarrow \quad w_i = \frac{d_{ij}}{s_j} = d_{ij} p_j \qquad w_i = p_i$$

$$\Rightarrow \quad d_{ij} = \frac{p_i}{p_j} \qquad \Rightarrow \quad d_{ik} d_{kj} = \frac{p_i}{p_k} \frac{p_k}{p_j} = \frac{p_i}{p_j} = d_{ij}$$

Доведено

Гармонічне відношення узгодженості HCR

Гармонічна середня

$$s = \left\{ s_j \,\middle|\, j \in [1; n] \right\}$$

$$HM(s) = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad HM(s) \ge n$$

Гармонічний індекс узгодженості

$$HCI(n) = \frac{\left(HM(s) - n\right)(n+1)}{n(n-1)}$$

Гармонічне відношення узгодженості

$$HCR(n) = \frac{HCI(n)}{HRCI(n)}$$

Нерівність Йенсена

1) Якщо $\sum_{i=1}^{n} p_i \leq 1$ φ - випукла на $[0;\infty)$ $\varphi(0)=0$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i\varphi(x_i) \leq \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \quad \forall x_i > 0$$

2) Якщо $\sum_{i=1}^{n} p_i < 1$ φ - строго зростаюча випукла функція $\varphi(0)=0$

$$\Rightarrow \quad \nexists x_i > 0 \quad \sum_{i=1}^{n} p_i\varphi(x_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$$

3) Якщо $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ $p_i > 0$ φ - строго зростаюча випукла функція

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\varphi(x_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \Rightarrow$$ $\forall x_i$ рівні між собою

Метод AN парних порівнянь

<u>Твердження.</u> $\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1} \le 1.$ **Рівність т.т.т.к. МПП узгоджена.**

<u>Доведення.</u> за індукцією по n

$n = 1 \quad s_1 = 1$

Припустимо, що має місце для n

$$A_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} & b_1 \\ A_n & \vdots \\ & b_n \\ \hline 1/b_1 \cdots 1/b_n & 1 \end{array} \right)$$

Довести, що

$$R = \sum_j (s_j + b_j^{-1})^{-1} + (1 + \sum_i b_i)^{-1} \le 1 \qquad \forall \quad b_i > 0$$

Метод AN парних порівнянь доведення твердження

$$p_j = s_j^{-1} \qquad x_j = b_j / p_j$$

$$R = \sum_j p_j \frac{x_j}{1 + x_j} + \frac{1}{1 + \sum_i p_i x_i}$$

$$\sum_j p_j \frac{x_j}{1 + x_j} \le \frac{\sum_i p_i x_i}{1 + \sum_i p_i x_i} \qquad \forall x_i > 0$$

$$\varphi(x) = x/(1 + x)$$

задовольняє

нерівності Йенсена

при $\sum_j p_j \le 1$

<u>Доведено</u>

Гармонічне відношення узгодженості HCR

HCR = 0 т.т.т.к. МПП узгоджена

Порогові значения HCR

n	**порогове** CR
3	0.05
4	0.08
≥5	0.1

2.5. Метод “лінія” парних порівнянь

Метод “лінія” парних порівнянь

1. Експерт вибирає еталонну альтернативу $a_e \in A$

   і порівнює з нею всі інші альтернативи $a_i \in A,\ i \neq e$

   $D_e = \{d_{ie} \mid i = 1,..,n,\ i \neq e\}$ - величини переваг a_i над a_e

2. .$a_e \to v_e$

3. $v_i = \varphi(v_e, d_{ie}) \qquad i \neq e$

   $\left.\begin{array}{l} \text{2.} \\ \text{3.} \end{array}\right\}$ - ненормовані ваги

монотонна функція

$v_i = v_e \varphi_{mult}(d_{ie}) \quad \varphi_{mult}(1) = 1$ - мультиплікативні порівняння

$v_i = v_e + \varphi_{ad}(d_{ie}) \quad \varphi_{ad}(0) = 0$ - адитивні порівняння

4. Нормування $\quad w_i = v_i / \sum_{i=1}^{n} v_i$