6.7. Методи нормалізації інтервальних ваг

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Методи нормалізації інтервальних ваг

$w_i = [w_i^L, w_i^U]$ - вага альтернативи a_i $\quad 0 \le w_i^L \le w_i^U \quad i = \overline{1, n}$

Означення 1. $\hat{w}_i = [\hat{w}_i^L, \hat{w}_i^U]$ $\quad \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{w}_i^L\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{w}_i^U\right) = 1$

Метод 1 $\quad \hat{w}_i^L = \dfrac{w_i^L}{\sum_{k=1}^{n} w_k^U} \qquad \hat{w}_i^U = \dfrac{w_i^U}{\sum_{k=1}^{n} w_k^L}$

Метод 2

$$\hat{w}_i^L = \frac{w_i^L}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} w_k^L\right)\left(\sum_{k=1}^{n} w_k^U\right)}} \qquad \hat{w}_i^U = \frac{w_i^U}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} w_k^L\right)\left(\sum_{k=1}^{n} w_k^U\right)}}$$

Методи нормалізації інтервальних ваг

Означення 2. $\hat{w}_i = [\hat{w}_i^L, \hat{w}_i^U]$ $\sum_{i=1}^{n} (\hat{w}_i^L + \hat{w}_i^U) = 2$ нормалізація середніх значень інтервалів

Метод 3

$$k_i = \frac{(w_i^L + w_i^U)/2}{\sum_{k=1}^{n} (w_k^L + w_k^U)/2}$$

$$\hat{w}_i^L = \frac{w_i^L}{\sum_{k=1}^{n} (w_k^L + w_k^U)/2} = \frac{k_i w_i^L}{(w_i^L + w_i^U)/2}$$

$$\hat{w}_i^U = \frac{w_i^U}{\sum_{k=1}^{n} (w_k^L + w_k^U)/2} = \frac{k_i w_i^U}{(w_i^L + w_i^U)/2}$$

Методи нормалізації інтервальних ваг

Метод 4 (метод досяжності).

$N=\{x=(x_1,\dots,x_n)\,|\,w_i^L \le x_i \le w_i^U,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ - множина нормованих векторів ваг

Означення 3. $w=\{(w_i)\,|\,0 \le w_i^L \le w_i \le w_i^U,\ i=\overline{1,n}\}$

називається **нормованим вектором ваг,** якщо

1) $\exists\, x=(x_1,\dots,x_n)\in N$ $\quad N \ne \varnothing$ т.т.т.к. $\sum_{i=1}^{n} w_i^L \le 1 \land \sum_{i=1}^{n} w_i^U \ge 1$

2) $w_i^L, w_i^U,\ i=\overline{1,n}$ досяжні в N

y досяжний в N, якщо $\exists x: \sum_{i=1}^{n} x_i = y + \sum_{i \ne j} x_i = 1$

Методи нормалізації інтервальних ваг

Теорема. $w = \{(w_1,...,w_n) \mid 0 \le w_i^L \le w_i \le w_i^U,\ i = 1,...,n\}$

задовольняє умовам

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^L + \max_j (w_j^U - w_j^L) \le 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i^U - \max_j (w_j^U - w_j^L) \ge 1$$

т.т.т.к. він є нормованим.

$$w_j^U + \sum_{i \ne j} w_i^L \le 1 \qquad w_j^L + \sum_{i \ne j} w_i^U \ge 1 \qquad i = \overline{1,n}$$

Методи нормалізації інтервальних ваг

Теорема. $w = \{(w_1,...,w_n) \mid 0 \le w_i^L \le w_i \le w_i^U,\ i = 1,...,n\}$

задовольняє умовам

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^L + \max_j (w_j^U - w_j^L) \le 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i^U - \max_j (w_j^U - w_j^L) \ge 1$$

т.т.т.к. він є нормованим.

Доведення (достатність). Нехай умови теореми задовольняються.

$\max_j (w_j^U - w_j^L) \ge 0$ тоді $\sum_{i=1}^{n} w_i^L \le 1 \ \wedge \sum_{i=1}^{n} w_i^U \ge 1$

Тому умова 1) означення 3 задовольняється.

Методи нормалізації інтервальних ваг

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^L + (w_j^U - w_j^L) \le 1 \qquad j = 1,\dots,n \qquad \text{тоді} \quad w_j^U + \sum_{i \ne j} w_i^L \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^U - (w_j^U - w_j^L) \ge 1 \qquad j = 1,\dots,n \qquad \text{тоді} \quad w_j^L + \sum_{i \ne j} w_i^U \ge 1$$

Хочемо довести:

$$\exists x: \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = w_j^U + \sum_{i \ne j} x_i = 1 \qquad \exists x: \sum_{i=1}^{n} x_i = w_j^L + \sum_{i \ne j} x_i = 1$$

Нехай $x: \quad x_j = w_j^U \qquad x_i \ge w_i^L \qquad i = 1,\dots,n \quad i \ne j \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

$w_j^U + \sum_{i \ne j} w_i^L \le 1$, тому w_j^U досяжне в N

Нехай $x: \; x_j = w_j^L \qquad x_i \le w_i^U \qquad i = 1,\dots,n \quad i \ne j \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

$w_j^L + \sum_{i \ne j} w_i^U \ge 1$, тому w_j^L досяжне в N

Тому умова 2) задовольняється. Достатність доведена.

Методи нормалізації інтервальних ваг

Необхідність

Нехай $w = \{(w_1,\ldots,w_n) \mid 0 \le w_i^L \le w_i \le w_i^U,\ i = 1,\ldots,n\}$ нормований.

(w_j^U досяжний в N) $\Rightarrow$ $\exists x:\ \sum_{i=1}^{n} x_i = w_j^U + \sum_{i \ne j} x_i = 1$

$$x_i \ge w_i^L \quad \Rightarrow \quad 1 = w_j^U + \sum_{i \ne j} x_i \ge w_j^U + \sum_{i \ne j} w_i^L \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} w_i^L + (w_j^U - w_j^L) \le 1$$

$$j = 1,\ldots,n$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} w_i^L + \max_j (w_j^U - w_j^L) \le 1$$

(w_j^L досяжний в N) $\Rightarrow$ $\exists x:\ \sum_{i=1}^{n} x_i = w_j^L + \sum_{i \ne j} x_i = 1$

$$x_i \le w_i^U \quad \Rightarrow \quad 1 = w_j^L + \sum_{i \ne j} x_i \le w_j^L + \sum_{i \ne j} w_i^U \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} w_i^U - (w_j^U - w_j^L) \ge 1$$

$$j = 1,\ldots,n$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} w_i^U - \max_j (w_j^U - w_j^L) \ge 1$$

Доведено

6.8. Методи ранжування інтервальних ваг

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Методи ранжування інтервальних ваг. Постановка задачі

Дано:

$A = \{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$ - множина альтернатив рішень

$w = \left\{ \left[w_i^L, w_i^U \right] \middle| \, 0 < w_i^L \le w_i^U, i = \overline{1, n} \right\}$ - вектор ваг альтернатив

Знайти: ранжування альтернатив (ваг)

Методи ранжування:

I. порівняння кінців інтервалів

II. розрахунок ступеня переваги

III. базується на нечітких відношеннях переваги

IV. розрахунок відстані між інтервальними числами

I. Порівняння кінців інтервалів

$a = [l_a, u_a] \qquad b = [l_b, u_b]$

I.1. Нестрога перевага $a \succeq b$ *має місце, якщо*

$$(l_a \geq l_b) \wedge (u_a \geq u_b)$$

Приклад 1. $a = [0.2, 0.4] \quad d = [0.1, 0.6]$ – непорівнянні

I.2. Нестрога перевага $a \succeq b$ *має місце, якщо*

$$(l_a + u_a \geq l_b + u_b) \wedge (u_a - l_a \leq u_b - l_b)$$

Приклад 2. $a = [0.2, 0.4] \quad b = [0.1, 0.4] \quad c = [0.2, 0.6]$

$a \succeq b$, пари c, a і c, b – непорівняні

II. Метод ступенів переваги

Розраховується ступінь переваги $p(a \succeq b) \in [0,1]$

II.1. Аксіоми:

$$p(a \succeq b) = 1 \qquad u_b < l_a$$

$$p(a \succeq b) = \max\left(\frac{u_a - l_b}{(u_a - l_a) + (u_b - l_b)}, 0 \right)$$

$$p(a \succeq b) = 0 \qquad u_a < l_b$$

$$p(a \succeq b) = \frac{u_a - l_b}{(u_a - l_a) + (u_b - l_b)} \qquad (u_a \geq l_b) \wedge (u_b \geq l_a)$$

$$\frac{u_a - l_b}{(u_a - l_a) + (u_b - l_b)} = 1 - \frac{u_b - l_a}{(u_a - l_a) + (u_b - l_b)}$$

$$p(a \succeq b) \geq \frac{1}{2}$$

тттк

$$\frac{l_a + u_a}{2} \geq \frac{l_b + u_b}{2}$$

$$p(a \succeq b) = \max\left(1 - \max\left(\frac{u_b - l_a}{(u_a - l_a) + (u_b - l_b)}, 0 \right), 0 \right)$$

$$\left(p(a \succeq b) \geq \frac{1}{2} \right) \wedge \left(p(b \succeq c) \geq \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \left(p(a \succeq c) \geq \frac{1}{2} \right)$$

II. Метод ступенів переваги

II.1. Метод ранжування:

1) Формування матриці ступенів переваг $P = \{(p_{ij}) \mid i, j = 1, \dots, n\}$

$$p_{ij} = p(w_i \succeq w_j) \qquad p_{ij} \in [0,1] \qquad p_{ij} + p_{ji} = 1 \qquad p_{ii} = \tfrac{1}{2}$$

2) Розрахунок суми ступенів переваг ваги w_i над всіма іншими вагами $p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$

$$\theta_i = \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} + \frac{n}{2} - 1\right)$$

3) Ранжування ваг w_i - у спадаючому порядку значень p_i (θ_i)

$a = [0.2, 0.4]$

$b = [0.1, 0.4]$

$c = [0.2, 0.6]$

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.33 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \\ 0.67 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$p_a = 1.43$

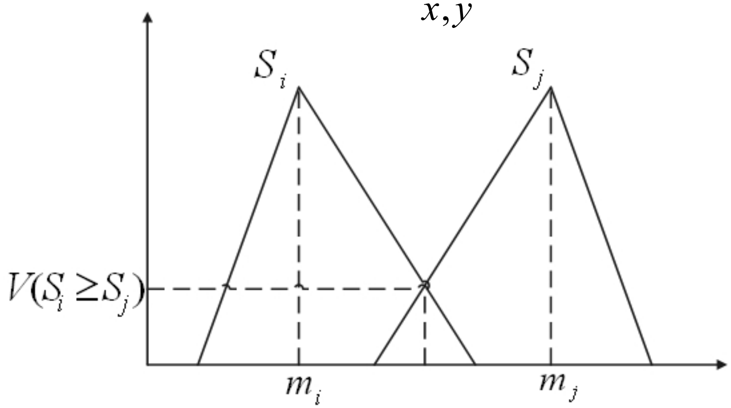
$p_b = 1.2$

$p_c = 1.87$

$c \succeq a \succeq b$

III. Метод ранжування нечітких ваг, що базується на нечітких відношеннях переваги

Нечітке відношення нестрогої переваги задається функцією приналежності $\nu(w_i, w_j) = \sup_{x,y} \min(\mu_{w_i}(x), \mu_{w_j}(y))$



Нечітке відношення строгої переваги

$$\nu_s(w_i, w_j) = \max((\nu(w_i, w_j) - \nu(w_j, w_i)), 0)$$

Нечітке відношення еквівалентності

$$\nu_e(w_i, w_j) = \min(\nu(w_i, w_j), \nu(w_j, w_i))$$

III. Метод ранжування нечітких ваг, що базується на нечітких відношеннях переваги

Вага w_i

строго переважає вагу w_j , якщо $\nu_s(w_i, w_j) \geq \gamma_s$

$(w_i > w_j)$

є *еквівалентною* вазі w_j , якщо $\nu_e(w_i, w_j) \geq \gamma_e$

$(w_i \sim w_j)$

нестрого переважає вагу w_j , якщо

$(w_i \geq w_j)$

$$(\nu_s(w_i, w_j) \geq \gamma_s) \vee (\nu_e(w_i, w_j) \geq \gamma_e)$$

$0 < \gamma_s < 1$ $\qquad$ $0 < \gamma_e < 1$

III. Метод ранжування нечітких ваг, що базується на нечітких відношеннях переваги

Метод ранжування нечітких ваг $w_i \in W$, $i = 1,\ldots,N$:

1) $M_1 = \left\{ w_{j_1} \middle| \neg\exists\, w_i : w_i > w_{j_1}, i \neq j_1, w_i, w_{j_1} \in W \right\}$

$J_1 = \left\{ j_1 \in J \middle| w_{j_1} \in M_1 \right\}$ $\quad J = [1, N]$

a_{j_1} мають перший (найвищий) ранг, $j_1 \in J_1$

2) $M_2 = \left\{ w_{j_2} \middle| \neg\exists\, w_i : w_i > w_{j_2}, i \neq j_2, w_i, w_{j_2} \in W \setminus M_1 \right\}$

$J_2 = \left\{ j_2 \in J \middle| w_{j_2} \in M_2 \right\}$

a_{j_2} мають другий ранг, $j_2 \in J_2$

3) $M_3,\ldots,M_m$ - аналогічно

6.9. Розрахунок інтервальних глобальних ваг

альтернатив рішень

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Синтез інтервальних ваг
Постановка задачі

Дано:

$A = \{a_i \mid i = \overline{1,N}\}$ - множина альтернатив рішень

$C = \{c_k \mid k = \overline{1,K}\}$ - множина критеріїв рішень

$w = \left\{\left[w_{ik}^L, w_{ik}^U\right] \middle| i = \overline{1,N}, k = \overline{1,K}\right\}$ - інтервальні локальні ваги альтернатив

$w^{crit} = \left\{\left[w_k^{crit\,L}, w_k^{crit\,U}\right] \middle| k = \overline{1,K}\right\}$ - інтервальні ваги критеріїв

Знайти: інтервальні глобальні ваги альтернатив

$$w^{glob} = \left\{\left[w_i^{glob\,L}, w_i^{glob\,U}\right] \middle| 0 < w_i^{glob\,L} \le w_i^{glob\,U}, i = \overline{1,N}\right\}$$

Дистрибутивний синтез інтервальних ваг

$$Min \quad w_i^{L\,glob} = \sum_{k=1}^{K} w_{ik}^{L} w_k^{crit}$$

при обмеженнях

$$w_k^{crit} \le w_k^{crit\,U}$$

$$w_k^{crit} \ge w_k^{crit\,L}$$

$$\sum_{k=1}^{K} w_k^{crit} = 1$$

$$Max \quad w_i^{U\,glob} = \sum_{k=1}^{K} w_{ik}^{U} w_k^{crit}$$

при обмеженнях

$$w_k^{crit} \le w_k^{crit\,U}$$

$$w_k^{crit} \ge w_k^{crit\,L}$$

$$\sum_{k=1}^{K} w_k^{crit} = 1$$

розрахунок $w_i^{glob\,L}$

розрахунок $w_i^{glob\,U}$ $\quad i = \overline{1, N}$

Мультиплікативний синтез інтервальних ваг

$$Min \quad w_i^{глоб\,L} = \prod_{k=1}^{K} \left(w_{ik}^{L} \right)^{w_k^{crit}}$$

при обмеженнях

$$w_k^{crit} \le w_k^{crit\,U}$$

$$w_k^{crit} \ge w_k^{crit\,L}$$

$$\prod_{k=1}^{K} w_k^{crit} = 1$$

$$Max \quad w_i^{глоб\,U} = \prod_{k=1}^{K} \left(w_{ik}^{U} \right)^{w_k^{crit}}$$

при обмеженнях

$$w_k^{crit} \le w_k^{crit\,U}$$

$$w_k^{crit} \ge w_k^{crit\,L}$$

$$\prod_{k=1}^{K} w_k^{crit} = 1$$

розрахунок $w_i^{глоб\,L}$

розрахунок $w_i^{глоб\,U}$ $\quad i = \overline{1, N}$