

# Тема 5

## Аналіз чутливості розв'язку

багатокритеріальної задачі ППР

# Задача аналізу чутливості (АЧ)

Для дослідження достовірності отриманого рішення доцільно визначити залежність між результатами MAI та ступенем неточності початкових даних — експертних оцінок.

Ця задача відноситься до більш узагальненого класу задач аналізу чутливості (АЧ) розв'язку до зміни початкових даних.

# Ефективність АЧ в МАІ

- ❑ перевірити обґрунтованість числових значень та необхідність у більш високій точності обчислень,
- ❑ допомагає краще зрозуміти природу проблеми, що розглядається,
- ❑ виявити можливості взаємозв'язку з іншими подібними ситуаціями

# Постановка задачі аналізу чутливості

Дано:

$A = \{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$  - множина альтернатив рішень,

$C = \{c_j \mid j = 1, \dots, m\}$  - множина критеріїв,

$W^C = \{w_j^C\}$  - ваги критеріїв,  $\sum_{j=1}^m w_j^C = 1$

$V = \{v_{ij}\}$  - вага  $a_i$  відносно  $C_j$ ,

$W^{\text{глоб}} = \{w_i^{\text{глоб}}\}$  - глобальні ваги альтернатив,  $\sum_{i=1}^n w_i^{\text{глоб}} = 1$

Потрібно:

- оцінити чутливість глобальних ваг альтернатив до змін у вагах критеріїв

## 5.1. Графічні методи аналізу чутливості

# Графічні методи аналізу чутливості (методи “ what-if ”)

- ❑ АЧ виконання
- ❑ градієнтний АЧ
- ❑ динамічний АЧ
- ❑ різницевий АЧ

## Приклад. Оцінювання чутливості розв'язку задачі визначення відносної привабливості альтернативних варіантів інвестицій (розподіл ресурсів)

### Варіанти інвестицій

- ☐ відкритий пайовий інвестиційний фонд (ПІФ) (a1)
- ☐ депозит (a2)
- ☐ готівка (a3)

### Критерії (цілі)

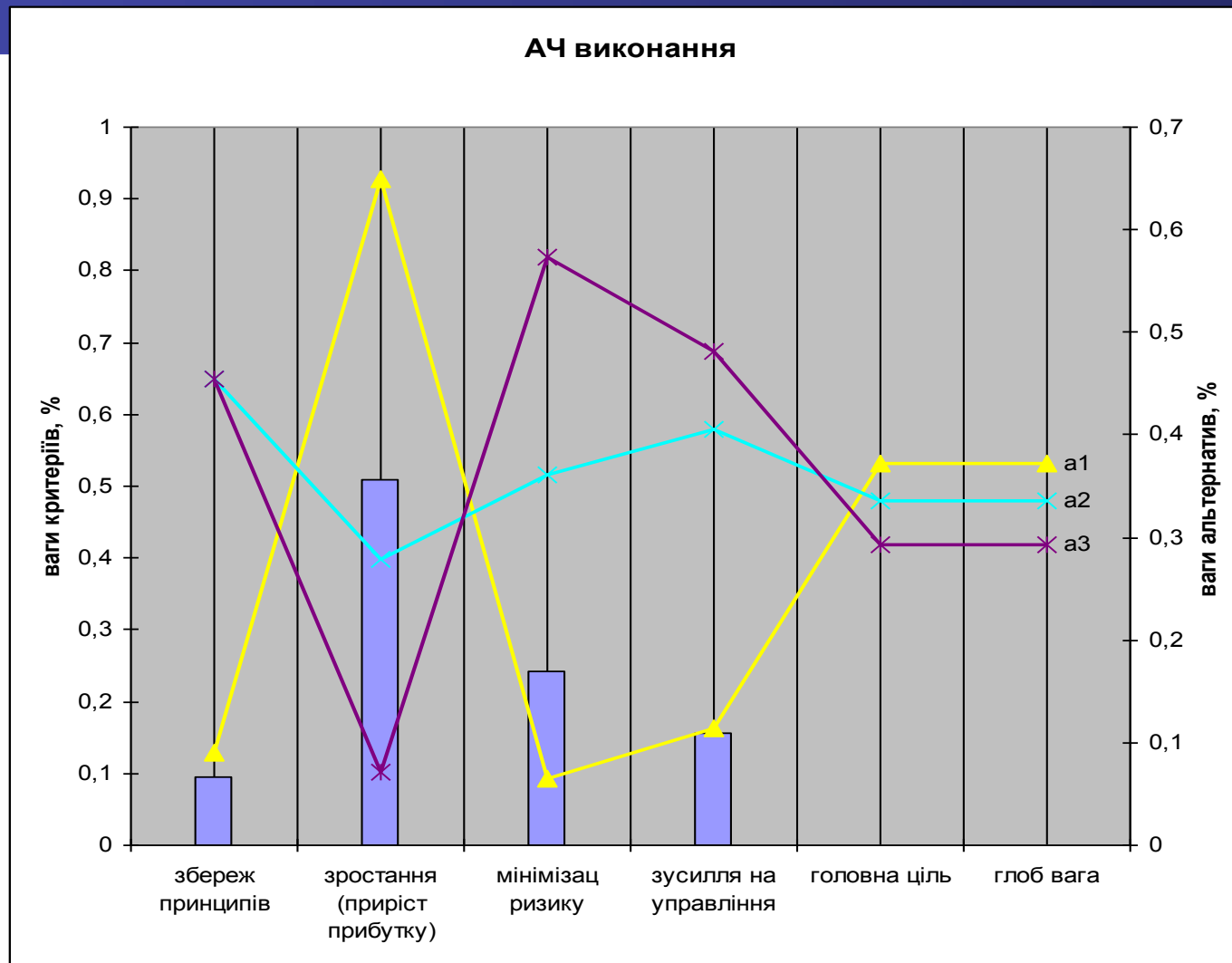
- ☐ збереження принципів (c1)
- ☐ зростання (приріст прибутку) (c2)
- ☐ мінімізація ризику (c3)
- ☐ зусилля на управління (c4)

# Приклад. Ваги альтернатив інвестицій відносно часткових цілей і головної цілі прийняття рішення

	с1 (0.094)	с2 (0.509)	с3 (0.243)	с4 (0.154)	Ваги відносно головної цілі	
					Дистрибутивний синтез	Мультиплікативний синтез
а1	0.090	0.649	0.065	0.114	<b>0.372</b>	<b>0.312</b>
а2	0.455	0.279	0.361	0.405	<b>0.335</b>	<b>0.436</b>
а3	0.455	0.072	0.574	0.481	<b>0.293</b>	<b>0.252</b>



# АЧ виконання



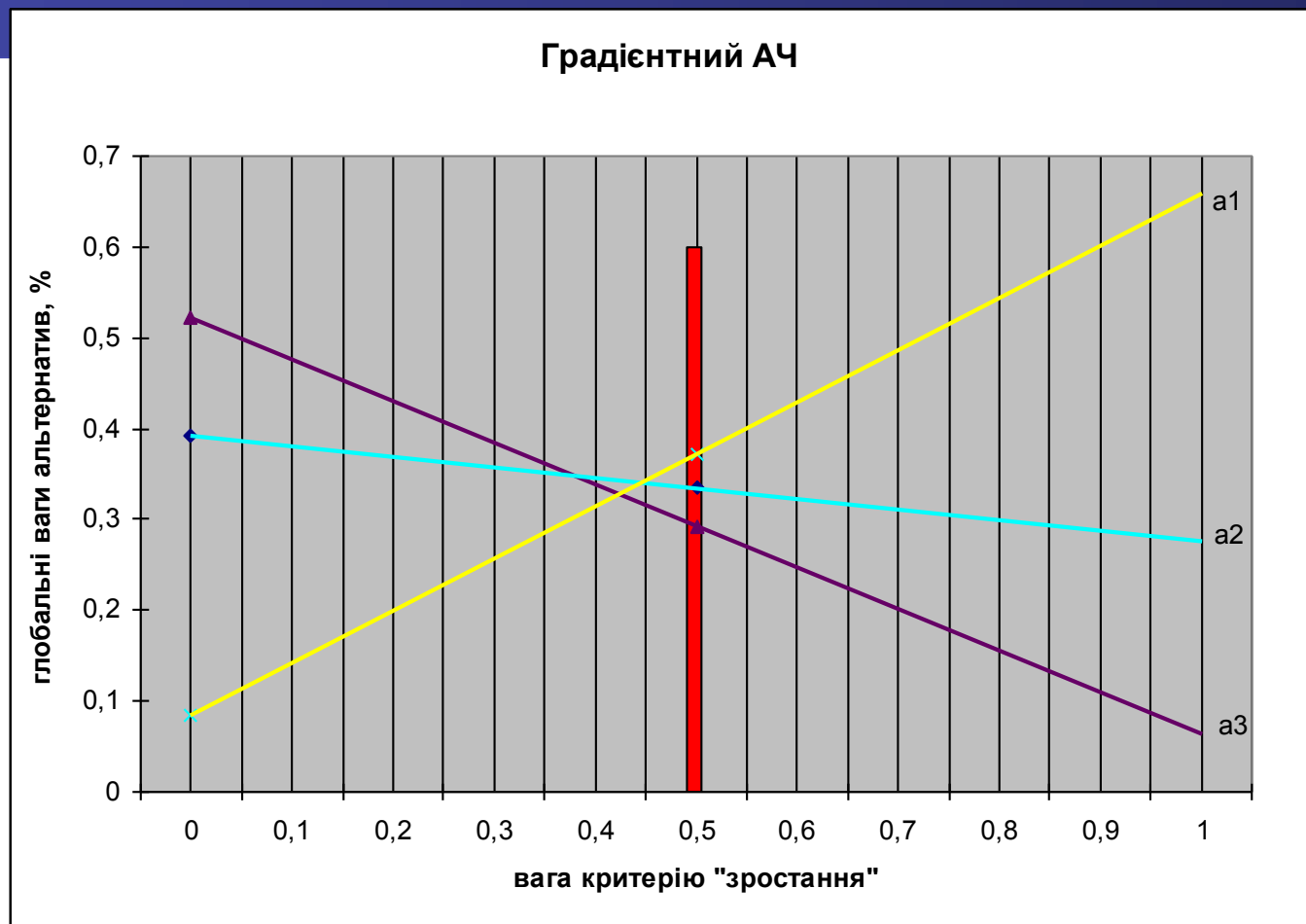
0.094

0.509

0.243

0.154

# Градiєнтний АЧ



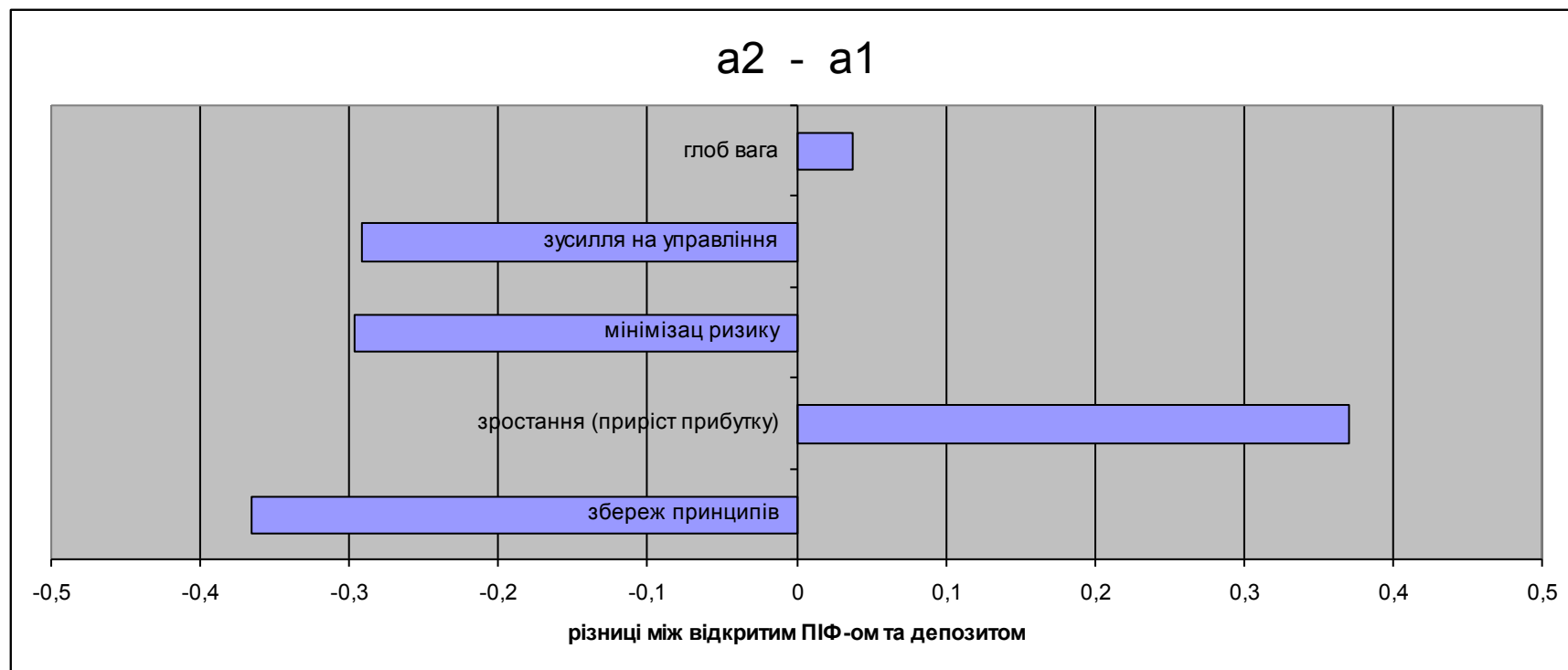
0.094

0.509

0.243

0.154

# Різницевий АЧ



## 5.2. Поняття критичного і стійкого критеріїв

# Постановка задачі

## Поняття критичного і стійкого критеріїв

### Постановка задачі

$$w_1^{\text{глоб}} \geq w_2^{\text{глоб}} \geq \dots \geq w_n^{\text{глоб}}$$

$$(w_l^C)' = w_l^C - \Delta_{i,j,l} \quad \delta_{i,j,l} = \frac{\Delta_{i,j,l}}{w_l^C}$$

$$(w_i^{\text{глоб}})' < (w_j^{\text{глоб}})' \quad i < j \quad (w_l^C)' \geq 0 \quad \begin{aligned} \Delta_{i,j,l} &\leq w_l^C \\ \delta_{i,j,l} &\leq 1 \end{aligned}$$

**Означення:** Критичним критерієм для зміни ранжування

між  $a_i$  і  $a_j$ :  $|\delta_{i,j,l_{\text{crit}}}| = \min_{l=1,\dots,m} \{ |\delta_{i,j,l}| \}$

**Означення:** Критерій наз. стійким

# Поняття ступеня критичності і чутливості критерію

**Означення:** Ступенем критичності критерію  $c_l$  ,  $l = 1, \dots, m$  :

$$CritVal(C_l) = \min_{i < j} \{ |\delta_{i,j,l}| \}$$

**Означення:** Чутливістю критерію  $c_l$  ,  $l = 1, \dots, m$  :

$$SensVal(C_l) = 1 / CritVal(C_l)$$

$$\delta_{i,j,l} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad CritVal(C_l) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad SensVal(C_l) \geq 1$$

$$SensVal(C_l) \overset{\Delta}{=} 0 \quad \text{для стійкого критерію}$$

# Визначення діапазонів змін ваг критеріїв, які призводять до змін рангів альтернатив: дистрибутивний синтез

$$w_1^{glob} \geq w_2^{glob} \geq \dots \geq w_n^{glob}$$

$$(w_l^C)' = w_l^C - \Delta_{i,j,l} = w_l^C - \delta_{i,j,l} w_l^C$$

$$(w_l^C)^* = \frac{(w_l^C)'}{(w_l^C)' + \sum_{l_1=1, l_1 \neq l}^m w_{l_1}^C}$$

$$(w_{l_1}^C)^* = \frac{w_{l_1}^C}{(w_l^C)' + \sum_{l_2=1, l_2 \neq l}^m w_{l_2}^C} \quad \forall l_1 = 1, \dots, m, \quad l_1 \neq l$$

$$(w_i^{glob})' = \sum_{l_1=1}^m w_{il_1} (w_{l_1}^C)^*$$

$$(w_i^{glob})' < (w_j^{glob})' \quad \sum_{l_1=1}^m w_{il_1} (w_{l_1}^C)^* < \sum_{l_1=1}^m w_{jl_1} (w_{l_1}^C)^*$$

$$w_{il} (w_l^C)^* + \sum_{\substack{l_1=1, \\ l_1 \neq l}}^m w_{il_1} (w_{l_1}^C)^* < w_{jl} (w_l^C)^* + \sum_{\substack{l_1=1, \\ l_1 \neq l}}^m w_{jl_1} (w_{l_1}^C)^*$$

# Визначення діапазонів змін ваг критеріїв, які призводять до змін рангів альтернатив: дистрибутивний синтез

$$w_{il}(w_l^C)' + \sum_{l_1=1, l_1 \neq l}^m w_{il_1} w_{l_1}^C < w_{jl}(w_l^C)' + \sum_{l_1=1, l_1 \neq l}^m w_{jl_1} w_{l_1}^C$$

$$(w_l^C)' = w_l^C - \Delta_{i,j,l} \quad -\Delta_{i,j,l} w_{il} + \sum_{l_1=1}^m w_{il_1} w_{l_1}^C < -\Delta_{i,j,l} w_{jl} + \sum_{l_1=1}^m w_{jl_1} w_{l_1}^C$$

$$-\Delta_{i,j,l} w_{il} + w_i^{glob} < -\Delta_{i,j,l} w_{jl} + w_j^{glob}$$

$$w_i^{glob} - w_j^{glob} < (w_{il} - w_{jl}) \Delta_{i,j,l}$$

$$\Delta_{i,j,l} > \frac{w_i^{glob} - w_j^{glob}}{w_{il} - w_{jl}} \quad \text{якщо} \quad w_{il} > w_{jl}$$

$$\Delta_{i,j,l} < \frac{w_i^{glob} - w_j^{glob}}{w_{il} - w_{jl}} \quad \text{якщо} \quad w_{il} < w_{jl}$$



# Визначення діапазонів змін ваг критеріїв, які призводять до змін рангів альтернатив: дистрибутивний синтез

## Твердження

$$\delta_{i,j,l} = w_l^C \cdot \frac{a_i - a_j}{a_i + a_j} \quad 1 \leq i < j \leq n \quad l = 1, \dots, m$$

$$\delta_{i,j,l} > \delta_{i,j,l}^{porog} \quad \text{якщо} \quad w_{il} > w_{jl}$$

$$\delta_{i,j,l} < \delta_{i,j,l}^{porog} \quad \text{якщо} \quad w_{il} < w_{jl}$$

$$\delta_{i,j,l}^{porog} = \frac{w_i^{glob} - w_j^{glob}}{w_{il} - w_{jl}} \cdot \frac{1}{w_l^C}$$

за умов:

$$1) \quad w_i^{glob} \geq w_j^{glob} \quad \text{для} \quad i < j$$

$$2) \quad \delta_{i,j,l}^{porog} \leq 1$$

# Визначення діапазонів змін ваг критеріїв, які призводять до змін рангів альтернатив: мультиплікативний синтез

$$(w_l^C)' = w_l^C - \Delta_{i,j,l} = w_l^C - \delta_{i,j,l} w_l^C \quad w_i^{\text{глоб}} \geq w_j^{\text{глоб}} \quad i < j$$

$$P\left(\frac{a_i}{a_j}\right) = \prod_{l_1=1}^m \left(\frac{w_{il_1}}{w_{jl_1}}\right)^{w_{l_1}^C} \geq 1$$

$$(w_i^{\text{глоб}})' < (w_j^{\text{глоб}})' \quad i < j$$

$$P'\left(\frac{a_i}{a_j}\right) = \prod_{l_1=1}^m \left(\frac{w_{il_1}}{w_{jl_1}}\right)^{(w_{l_1}^C)^*} < 1$$

$$(w_l^C)^* = \frac{(w_l^C)'}{\text{sum}} \quad \text{sum} = (w_l^C)' + \sum_{l_1=1, l_1 \neq l}^m w_{l_1}^C > 0$$

$$(w_{l_1}^C)^* = \frac{w_{l_1}^C}{\text{sum}}$$

$$\forall l_1 = 1, \dots, m \quad l_1 \neq l$$

$$P'\left(\frac{a_i}{a_j}\right) = \left(\frac{w_{il}}{w_{jl}}\right)^{\frac{w_l^C - \Delta_{i,j,l}}{\text{sum}}} \prod_{l_1 \neq l}^m \left(\frac{w_{il_1}}{w_{jl_1}}\right)^{\frac{w_{l_1}^C}{\text{sum}}} < 1$$

# Визначення діапазонів змін ваг критеріїв, які призводять до змін рангів альтернатив: мультиплікативний синтез

$$P' \left( \frac{a_i}{a_j} \right) = \left( \frac{w_{il}}{w_{jl}} \right)^{\frac{-\Delta_{i,j,l}}{sum}} \prod_{l_1=1}^m \left( \frac{w_{il_1}}{w_{jl_1}} \right)^{\frac{w_{l_1}^C}{sum}} < 1$$

$$\ln \left( \frac{w_i^{глоб}}{w_j^{глоб}} \right) - \Delta_{i,j,l} \ln \left( \frac{w_{il}}{w_{jl}} \right) < 0$$

$sum > 0$

## Твердження

$$a_i \quad a_j \quad w_l^C \quad 1 \leq i < j \leq n \quad l = 1, \dots, m$$

$$\delta_{i,j,l} > \delta_{i,j,l}^{порог} \quad \text{якщо} \quad \delta_{i,j,l}^{порог} \geq 0$$

$$\delta_{i,j,l} < \delta_{i,j,l}^{порог} \quad \text{якщо} \quad \delta_{i,j,l}^{порог} < 0$$

$$\delta_{i,j,l}^{порог} = \frac{\ln(w_i^{глоб}) - \ln(w_j^{глоб})}{\ln(w_{il}) - \ln(w_{jl})} \frac{1}{w_l^C}$$

за умов:

$$1) \quad w_i^{глоб} \geq w_j^{глоб} \quad \text{для} \quad i < j$$

$$2) \quad \delta_{i,j,l}^{порог} \leq 1$$

## 5.3. Критичні та стійкі альтернативи

# Постановка задачі

$$w_1^{\text{глоб}} \geq w_2^{\text{глоб}} \geq \dots \geq w_n^{\text{глоб}}$$

$$w'_{ir} = w_{ir} - \Delta_{i,j,r}^a \quad \delta_{i,j,r}^a = \frac{\Delta_{i,j,r}^a}{w_{ir}} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ 1 \leq r \leq m \end{array}$$

$$(w_i^{\text{глоб}})' < (w_j^{\text{глоб}})' \quad i < j \quad \Delta_{i,j,r}^a < w_{ir} \quad \delta_{i,j,r}^a < 1$$

$$CritVal_{ir}^a = \min_{j \neq i} \left\{ |\delta_{i,j,r}^a| \right\} - \text{ступінь критичності } a_i \text{ відносно } C_r$$

$$a_{crit} = \arg \min_{i,r} \left\{ CritVal_{ir}^a \right\} - \text{критична альтернатива}$$

$$SensVal_{ir}^a = 1 / CritVal_{ir}^a - \text{чутливість } a_i \text{ відносно } C_r$$

Якщо  $a_i$  стійка відносно  $C_r$ , то  $SensVal_{ir}^a = 0$

# Визначення діапазонів змін локальних ваг альтернатив : дистрибутивний синтез

$$w'_{ir} = w_{ir} - \Delta_{i,j,r}^a \quad \sum_{i=1}^n w_{ir} = 1 \quad \forall r = 1, \dots, m$$

$$w_{ir}^* = \frac{w'_{ir}}{w'_{ir} + \sum_{i_1=1, i_1 \neq i}^n w_{i_1 r}} \quad w_{jr}^* = \frac{w_{jr}}{w'_{ir} + \sum_{i_1=1, i_1 \neq i}^n w_{i_1 r}} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$j \neq i$$

$$w'_{ir} + \sum_{i_1=1, i_1 \neq i}^n w_{i_1 r} = 1 - \Delta_{i,j,r}^a$$

$$w_{ir}^* = \frac{w_{ir} - \Delta_{i,j,r}^a}{1 - \Delta_{i,j,r}^a} \quad w_{jr}^* = \frac{w_{jr}}{1 - \Delta_{i,j,r}^a} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$j \neq i$$

# Визначення діапазонів змін локальних ваг альтернатив : дистрибутивний синтез

$$(w_i^{glob})' < (w_j^{glob})' \Rightarrow \sum_{r_1=1}^m w_{ir_1}^* w_{r_1}^C < \sum_{r_1=1}^m w_{jr_1}^* w_{r_1}^C \quad i < j$$

$$w_{ir}^* w_r^C + (w_{ir} - w_{ir}) w_r^C + \sum_{\substack{r_1=1, \\ r_1 \neq r}}^m w_{ir_1} w_{r_1}^C < w_{jr}^* w_r^C + (w_{jr} - w_{jr}) w_r^C + \sum_{\substack{r_1=1, \\ r_1 \neq r}}^m w_{jr_1} w_{r_1}^C$$

$$w_{ir}^* w_r^C - w_{ir} w_r^C + w_i^{glob} < w_{jr}^* w_r^C - w_{jr} w_r^C + w_j^{glob}$$

$$\frac{w_{ir} - \Delta_{i,j,r}^a}{1 - \Delta_{i,j,r}^a} w_r^C - w_{ir} w_r^C + w_i^{glob} < \frac{w_{jr}}{1 - \Delta_{i,j,r}^a} w_r^C - w_{jr} w_r^C + w_j^{glob}$$

... ..

$$\Delta_{i,j,r}^a > \frac{w_i^{glob} - w_j^{glob}}{w_i^{glob} - w_j^{glob} + w_r^C (w_{jr} - w_{ir} + 1)} \quad i < j$$

# Визначення діапазонів змін ваг альтернатив, які призводять до змін рангів альтернатив: дистрибутивний синтез

## Твердження

$$a_i \quad a_j \quad w_{ir} \quad r = 1, \dots, m$$

дистрибутивний синтез

$$\delta_{i,j,r}^a > \delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}} \quad \text{якщо} \quad i < j$$

$$\delta_{i,j,r}^a < \delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}} \quad \text{якщо} \quad i > j$$

$$\delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}} = \frac{w_i^{\text{глоб}} - w_j^{\text{глоб}}}{w_i^{\text{глоб}} - w_j^{\text{глоб}} + w_r^C (w_{jr} - w_{ir} + 1)} \frac{1}{w_{ir}}$$

за умов:

$$1) \quad w_i^{\text{глоб}} \geq w_j^{\text{глоб}} \quad \text{для} \quad i < j$$

$$2) \quad \delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}} < 1$$



# Визначення діапазонів змін ваг альтернатив, які призводять до змін рангів альтернатив: мультиплікативний синтез

$$P\left(\frac{a_i}{a_j}\right) = \prod_{l_1=1}^m \left(\frac{w_{il_1}}{w_{jl_1}}\right)^{w_{j1}^C} \geq 1 \quad i < j \quad (w_i^{\text{злог}})' < (w_j^{\text{злог}})' \Rightarrow P'(a_i / a_j) < 1$$

$$P'\left(\frac{a_i}{a_j}\right) = \left(\frac{w_{i1}}{w_{j1}}\right)^{w_1^C} \dots \left(\frac{w'_{ir}}{w_{jr}}\right)^{w_r^C} \dots \left(\frac{w_{im}}{w_{jm}}\right)^{w_m^C} < 1$$

$$P'\left(\frac{a_i}{a_j}\right) = \left(\frac{w_{i1}}{w_{j1}}\right)^{w_1^C} \dots \left(\frac{w_{ir} - \Delta_{i,j,r}^a}{w_{jr}}\right)^{w_r^C} \left(\frac{w_{ir}}{w_{ir}}\right)^{w_r^C} \dots \left(\frac{w_{im}}{w_{jm}}\right)^{w_m^C} < 1$$

$$P\left(\frac{a_i}{a_j}\right) \cdot \left(\frac{w_{ir} - \Delta_{i,j,r}^a}{w_{ir}}\right)^{w_r^C} < 1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\Delta_{i,j,r}^a > w_{ir} \left( 1 - P\left(\frac{a_i}{a_j}\right)^{-1/w_r^C} \right) = w_{ir} \left( 1 - P\left(\frac{a_j}{a_i}\right)^{1/w_r^C} \right) \quad i < j$$

# Визначення діапазонів змін ваг альтернатив, які призводять до змін рангів альтернатив: мультиплікативний синтез

## Твердження

---

$$a_i \quad a_j \quad w_{ir} \quad r = 1, \dots, m$$

мультиплікативний синтез

$$\delta_{i,j,r}^a > \delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}} \quad \text{якщо} \quad i < j$$

$$\delta_{i,j,r}^a < \delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}} \quad \text{якщо} \quad i > j$$

$$\delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}} = 1 - \left( \frac{w_j^{\text{глоб}}}{w_i^{\text{глоб}}} \right)^{1/w_r^C}$$

за умов:

$$1) \quad w_i^{\text{глоб}} \geq w_j^{\text{глоб}} \quad \text{для} \quad i < j$$

$$2) \quad \delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}} < 1$$