6.4. Метод FPP (Fuzzy Preference Programming)

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com
Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming)

<u>Дано:</u> $D = \{(d_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}]) \mid i, j = 1,\dots,n\}$ $\quad 0 < l_{ij} \le u_{ij}$

- обернено симетрична ІМПП

<u>Знайти:</u> $w = \{w_i \mid i = 1,\dots,n\}$ - вектор чітких ваг альтернатив

$w_i \in \Re \quad w_i > 0$

ІМПП називається <u>**нечітко узгодженою**</u>, якщо

$\exists\, w = (w_1,\dots,w_n),\, w_i > 0,\, w_i \in \Re \qquad \sum_i w_i = 1$

такий що $\quad l_{ij} \underset{\sim}{\le} w_i / w_j \underset{\sim}{\le} u_{ij}$ $\quad$ для $\quad i < j$

де $\underset{\sim}{\le}$ - нечітке відношення нестрогої переваги

Допускаємо порушення чітких нерівностей з деяким ступенем

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming)

$$\begin{cases} w_i - u_{ij} w_j \underset{\sim}{\leq} 0 & i < j \\ -w_i + l_{ij} w_j \underset{\sim}{\leq} 0 \end{cases} \qquad R w \underset{\sim}{\leq} 0 \qquad R \in \Re^{m \times n} \qquad m = n(n-1)$$

k-ий рядок системи: $R_k w \underset{\sim}{\leq} 0 \qquad k = 1,2,\ldots,m$

$$\mu_k(R_k w) = \begin{cases} 1, & R_k w \leq 0, \\ 1 - \dfrac{R_k w}{d_k}, & 0 < R_k w \leq d_k, \\ 0, & R_k w > d_k, \end{cases}$$

d_k - параметр наближеного задоволення чіткої нерівності $R_k w \leq 0$

- функції приналежності нечітких обмежень на множині:

$$T^{n-1} = \left\{ (w_1,\ldots,w_n) \mid w_i > 0, \ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}$$

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming)

Нечіткою допустимою областю $\widetilde{A}$ на множині T^{n-1} називається нечітка множина, яка є перетином всіх нечітких обмежень:

$$\tilde{A} = \bigcap_{k=1}^{m} \underset{\sim k}{\leq} \qquad \mu_{\tilde{A}}(w) = \left\{ \min\{\mu_1(R_1 w), \ldots, \mu_m(R_m w)\} \mid w_i \in R^+, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}$$

Максимізуючим розв’язком називається вектор

$$w^* = \arg\max_{w} \mu_{\tilde{A}}(w)$$

$$w^* = \arg\max_{w} \left\{ \min\{\mu_1(R_1 w), \ldots, \mu_m(R_m w)\} \mid \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}$$

$$\min\{\mu_1(R_1 w), \ldots, \mu_m(R_m w)\} = \lambda \qquad \lambda \leq \mu_k(R_k w) \qquad k = 1,2,\ldots,m$$

$$d_k \lambda + R_k w \leq d_k$$

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming)

$$\max \lambda$$

при обмеженнях

$$d_k \lambda + R_k w \le d_k \qquad k = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i > 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

розв'язок : (w^*, λ^*)

w^* - максимізуючий розв'язок

$\lambda^* = \mu_{\tilde{A}}(w^*)$ - рівень задоволення розв'язком

Індексом узгодженості $CI\ (FPP)$ називається $\lambda^* = \mu_{\tilde{A}}(w^*)$,

де w^* - максимізуючий розв'язок.

$CI = \lambda^* \ge 1$ т.т.т.к. ІМПП узгоджена

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming)
Дослідження властивостей

Твердження. Якщо ІМПП узгоджена, то $\lambda^* \geq 1$

Доведення

ІМПП узгоджена $\Rightarrow \exists w = \{w_i \in R^+\} : l_{ij} \leq w_i / w_j \leq u_{ij} \Rightarrow$

$\forall k = 1,2,...,2m : R_k w \leq 0 \Rightarrow \forall k = 1,2,...,2m : \mu_k(R_k w) \geq 1 \Rightarrow$

$\mu_{\tilde{P}}(w) = \min(\mu_1(R_1 w),...,\mu_{2m}(R_{2m} w) \,|\, w_i \in R^+, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1) \geq 1 \Rightarrow \lambda^* \geq 1,$ де $w^* = w$

Твердження. Якщо ІМПП неузгоджена, то $\lambda^* \in (0,1)$

Доведення

ІМПП неузгоджена $\Rightarrow \exists w = \{w_i \in R^+\} : l_{ij} \,\tilde{\leq}\, w_i / w_j \,\tilde{\leq}\, u_{ij} \quad \forall i < j \Rightarrow$

$\exists (i,j) : w_i - w_j u_{ij} > 0$ або $-w_i + w_j l_{ij} > 0 \Rightarrow \exists k \in \{1,2,...,2m\} : R_k w > 0 \Rightarrow$

$\exists k \in \{1,2,...,2m\} : \mu_k(R_k w) < 1 \Rightarrow \mu_{\tilde{P}}(w) = \min(\mu_1(R_1 w),...,\mu_{2m}(R_{2m} w)\,) < 1$

$\lambda^* \in (0,1)$, де $w^* = w$

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

$A = \{a_1, a_2\}$ $\qquad \tilde{d}_{12} = (l_{12}, m_{12}, u_{12})$ – трикутне нечітке число (ТНЧ)

$l_{12}(\alpha) \le w_1 / w_2 \le u_{12}(\alpha)$ $\qquad l_{12}(\alpha) = \alpha(m_{12} - l_{12}) + l_{12}$

$$u_{12}(\alpha) = \alpha(m_{12} - u_{12}) + u_{12}$$

Задача розрахунку ваг на кожному α - рівні:

$$\begin{cases} \lambda \to \max \\ d_1\lambda + R_1 w \le d_1 \\ d_2\lambda - R_2 w \le d_2 \\ w_1 + w_2 = 1 \\ w_1, w_2 > 0 \end{cases} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & -u_{12}(\alpha) \\ -1 & l_{12}(\alpha) \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \lambda \to \max \\ d_1\lambda + w_1 - u_{12}(\alpha) w_2 \le d_1 \\ d_2\lambda - w_1 + l_{12}(\alpha) w_2 \le d_2 \\ w_1 + w_2 = 1 \\ w_1, w_2 > 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Твердження. Якщо $\tilde{d}_{12} = (l_{12}, m_{12}, u_{12})$ - симетричне ТНЧ і параметри $d_1 = d_2 = d$,

то розв’язок задачі (*) не залежить від значення d.

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

Твердження. Нехай $\tilde{d}_{12} = (l_{12}, m_{12}, u_{12})$ - симетричне ТНЧ і параметри $d_1 = d_2 = d$. Розв'язок задачі (*) не залежить від значення d.

Доведення.

$$\lambda \to \max; \;\; d_1\lambda + w_1 - u_{12}w_2 \le d; \;\; d_2\lambda - w_1 + l_{12}w_2 \le d; \;\; w_1 + w_2 = 1, w_1, w_2 > 0$$

$$2d\lambda + l_{12}w_2 - u_{12}w_2 \le 2d; \qquad \lambda \to \max \Rightarrow \lambda = \frac{u_{12} - l_{12}}{2d} w_2 + 1$$

$$1.\, d + w_2 \frac{u_{12} - l_{12}}{2d} + w_1 - u_{12}w_2 \le d \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} \le \frac{u_{12} - l_{12}}{2}$$

$$2.\, d + w_2 \frac{u_{12} - l_{12}}{2d} - w_1 + l_{12}w_2 \le d \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} \ge \frac{u_{12} - l_{12}}{2} \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \frac{u_{12} - l_{12}}{2}$$

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

$A = \{a_1, a_2\}$ $\quad \tilde{d}_{12} = (1,2,3)$ - симетричне ТНЧ

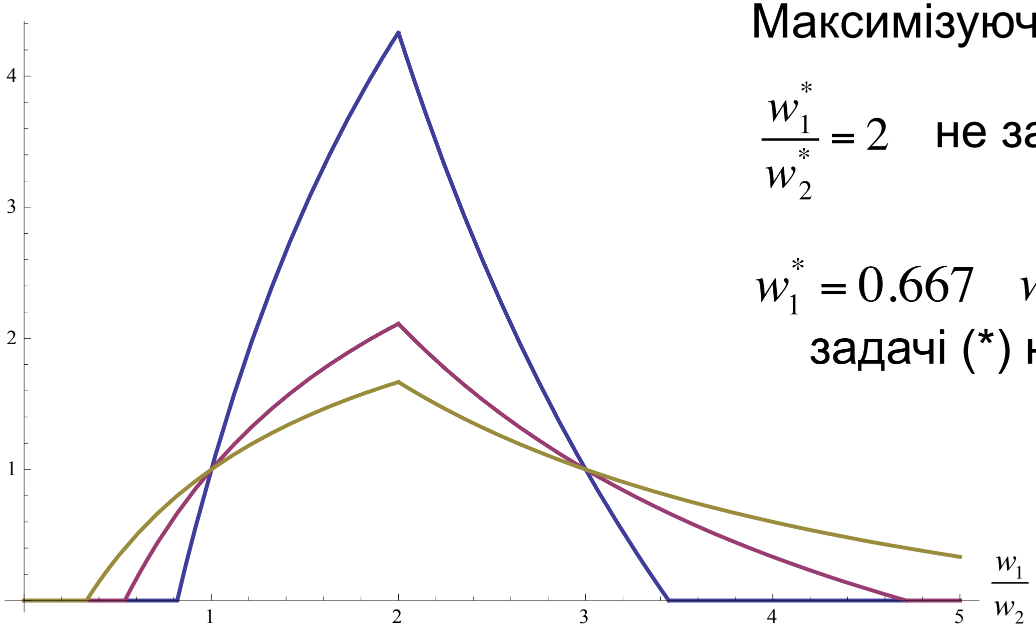
$\alpha = 0$ $\quad d_{12}(\alpha) = [1,3]$ $\quad$ параметри $d_1 = d_2 = d$

$\mu_{\tilde{A}}(w) = \lambda$

$d = 0.1$

$d = 0.3$

$d = 0.5$



Максимізуючий розв'язок w^* :

$\frac{w_1^*}{w_2^*} = 2$ не залежить від значення d.

$w_1^* = 0.667 \quad w_2^* = 0.333$ - розв'язок задачі (*) на кожному α - рівні

$w_1^* / w_2^* = 2$ задовольняє обмеженням $l_{ij} \le w_i / w_j \le u_{ij}$

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

Твердження. Нехай $\tilde{d}_{12} = (l_{12}, m_{12}, u_{12})$ - несиметричне ТНЧ, $d_1 = d_2 = d$. Відношення w_1^* / w_2^* дорівнюють середнім значенням інтервалів α – рівнів .

Доведення.

$$\lambda \to \max; \;\; d_1\lambda + w_1 - u_{12}(\alpha)w_2 \le d; \;\; d_2\lambda - w_1 + l_{12}(\alpha)w_2 \le d; \;\; w_1 + w_2 = 1, w_1, w_2 > 0$$

$$2d\lambda + l_{12}(\alpha)w_2 - u_{12}(\alpha)w_2 \le 2d; \qquad \lambda \to \max \Rightarrow \lambda = \frac{u_{12}(\alpha) - l_{12}(\alpha)}{2d} w_2 + 1$$

$$1.\, d + w_2 \frac{u_{12}(\alpha) - l_{12}(\alpha)}{2d} + w_1 - u_{12}(\alpha)w_2 \le d \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} \le \frac{u_{12}(\alpha) - l_{12}(\alpha)}{2}$$

$$2.\, d + w_2 \frac{u_{12}(\alpha) - l_{12}(\alpha)}{2d} - w_1 + l_{12}(\alpha)w_2 \le d \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} \ge \frac{u_{12}(\alpha) - l_{12}(\alpha)}{2} \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \frac{u_{12}(\alpha) - l_{12}(\alpha)}{2}$$

Розв'язок задачі (*) не залежить від значення d.

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

$A = \{a_1, a_2\}$ $\tilde{d}_{12} = (0.5, 1, 3)$ - несиметричне ТНЧ

параметри $d_1 = d_2 = d = 1$

α	l_{12}	u_{12}	w_1^*	w_2^*	w_1^* / w_2^*	λ^*
0	0.50	3.0	0.636	0.364	1.75	1.455
0.3	0.65	2.4	0.604	0.396	1.525	1.347
0.5	0.75	2.0	0.579	0.421	1.375	1.263
0.5 ($d_1 = 1$, $d_2 = 0.5$)	0.75	2.0	0.579	0.421	1.375	1.132
0.8	0.90	1.4	0.535	0.465	1.150	1.116
1.0	1.00	1.0	0.5	0.5	1	1

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ $d_{12} = (1.5, 2, 2.5)$ $d_{13} = (4, 5, 6)$ $d_{23} = (2.5, 3, 3.5)$

Задача розрахунку ваг на α - рівні:

$$\begin{cases} \lambda \to \max \\ d_1\lambda + w_1 - u_{12}(\alpha)w_2 \le d_1 \\ d_2\lambda - w_1 + l_{12}(\alpha)w_2 \le d_2 \\ d_3\lambda + w_2 - u_{23}(\alpha)w_3 \le d_3 \\ d_4\lambda - w_2 + l_{23}(\alpha)w_3 \le d_4 \\ d_5\lambda + w_1 - u_{13}(\alpha)w_3 \le d_5 \\ d_6\lambda - w_1 + l_{13}(\alpha)w_3 \le d_6 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \\ w_1, w_2, w_3 > 0 \end{cases}$$

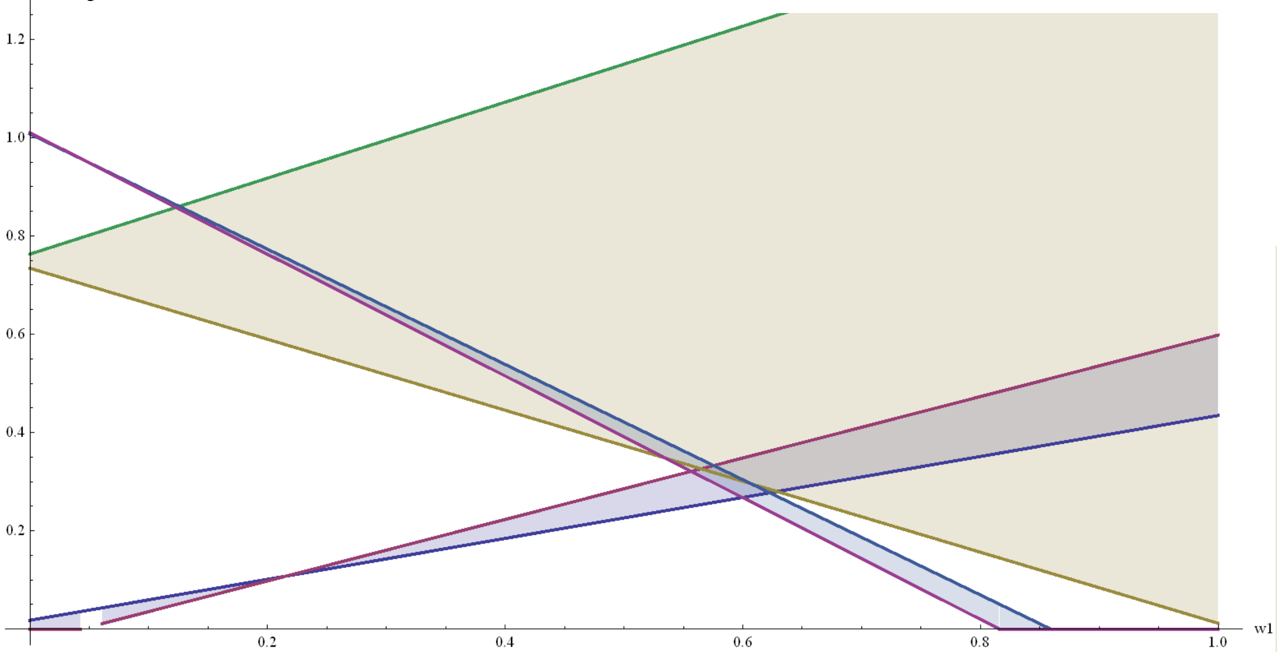
Максимізуючий розв'язок :

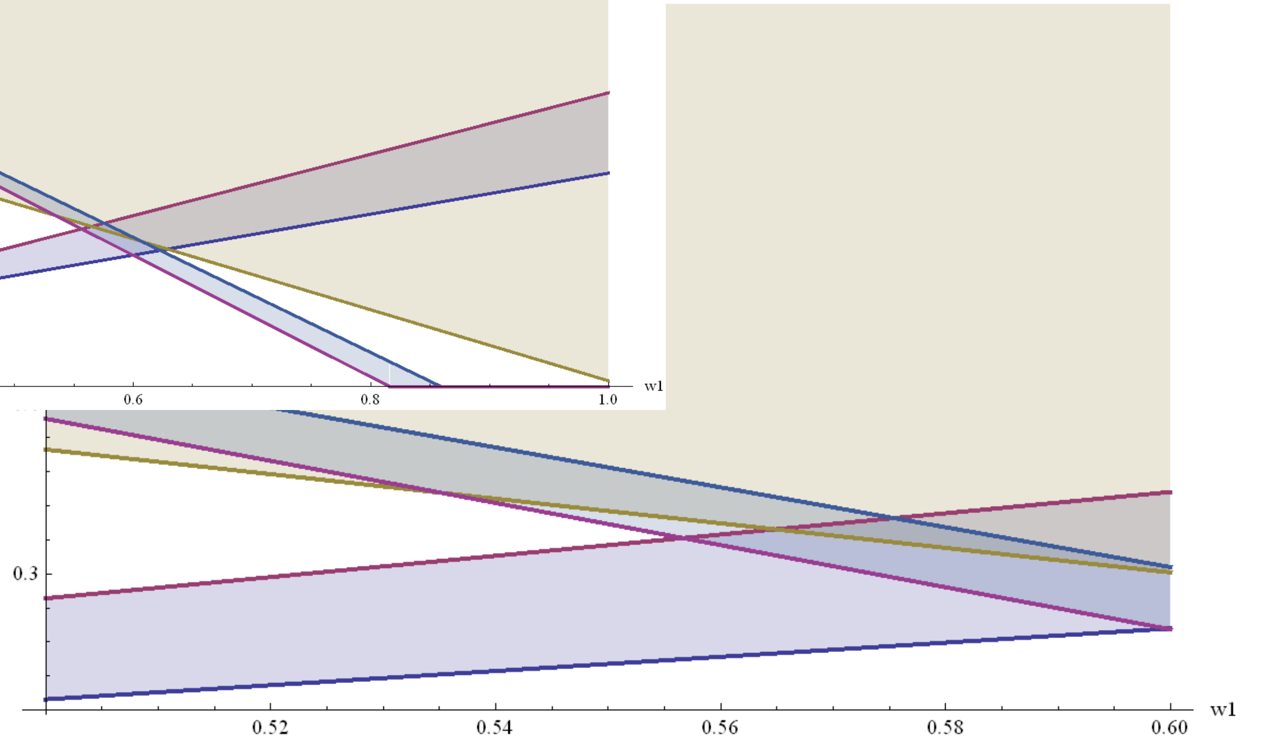
α	w_1^*	w_2^*	w_3^*	λ^*
0	0.5556	0.3333	0.1111	1.056
0.3	0.5699	0.3226	0.1075	1.038
0.5	0.5748	0.3171	0.1081	1.020
0.8	0.5802	0.3099	0.1099	0.991
1.0	0.5833	0.3056	0.1111	0.972

параметри $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = 1$

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

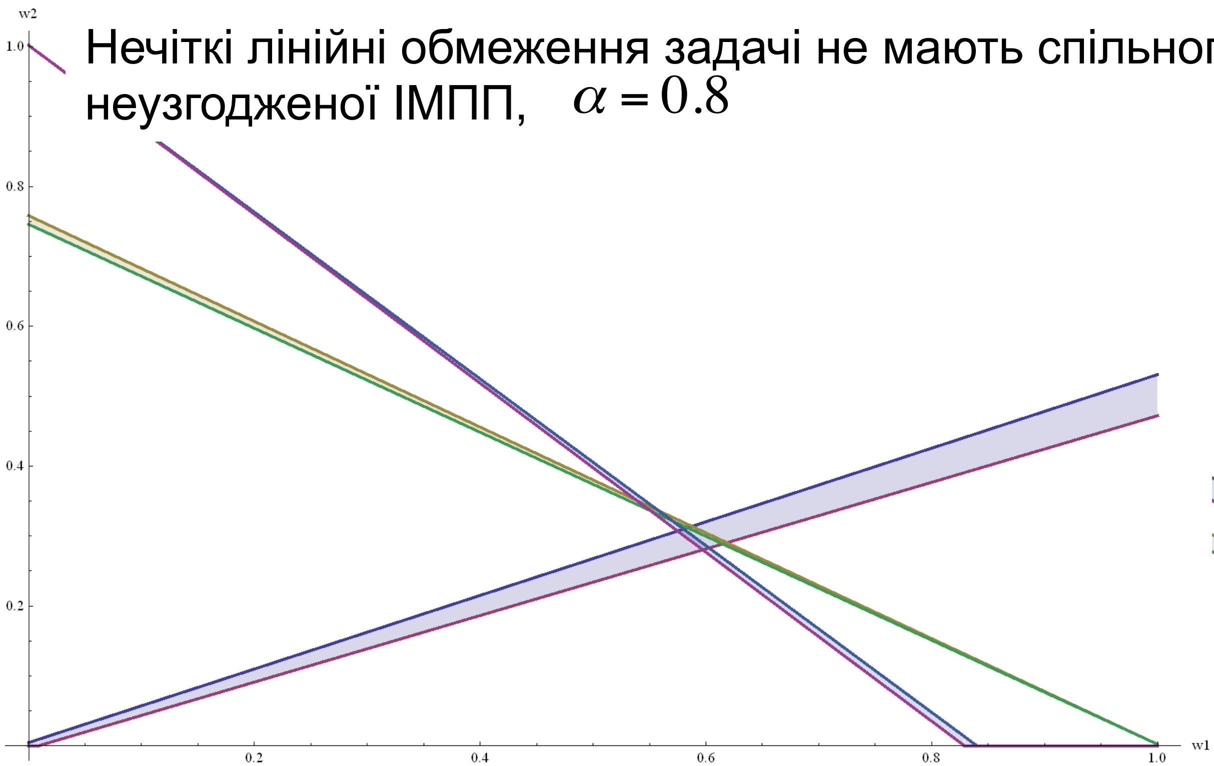
Нечіткі лінійні обмеження задачі мають спільний перетин, випадок узгодженої ІМПП, $\alpha = 0.2$

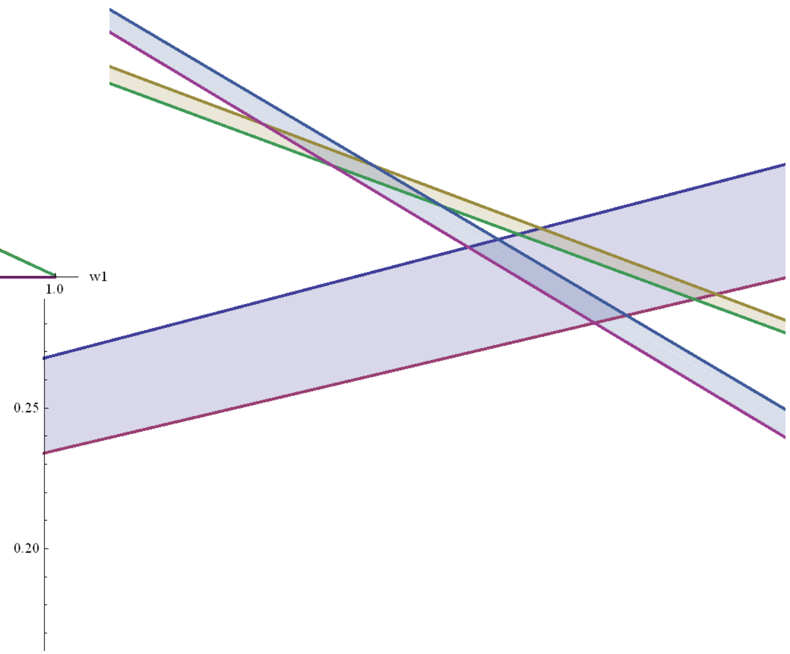




Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

Нечіткі лінійні обмеження задачі не мають спільного перетину, випадок неузгодженої ІМПП, $\alpha = 0.8$





Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Приклад 1

$d_{12} = (1, 2, 3)$ - симетричне трикутне нечітке число

$\alpha = 0$ параметри $d_1 = d_2 = d$ = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 10

	a1	a2	Ваги
a1	1	[1, 3]	0.667
a2		1	0.333

$\alpha = 1$ параметри $d_1 = d_2 = d$ = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 10

	a1	a2	Ваги
a1	1	2	0.667
a2		1	0.333

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Приклад 1 (продовження)

$d_{12} = (1, 2, 3)$ - симетричне трикутне нечітке число

$\alpha = 0.5$ параметри $d_1 = d_2 = d$ = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 10

	a1	a2	Ваги
a1	1	[1.5, 2.5]	0.667
a2		1	0.333

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Приклад 2

$d_{12} = (1.5, 2, 2.5)$ симетричні трикутні нечіткі числа

$d_{23} = (2.5, 3, 3.5)$ $d_{13} = (4, 5, 6)$

$\alpha = 0$ ІМПП узгоджена

параметри $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = 1$

	a1	a2	a3	Ваги (максимізуючий розв'язок)
a1	1	[1.5, 2.5]	[4, 6]	0.5556
a2		1	[2.5, 3.5]	0.3333
a3			1	0.1111

6.5. Метод GPM
(Goal Programming Method)

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Метод GPM

Дано: $A = \{(a_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}]) \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ $\quad 0 < l_{ij} \leq u_{ij}$

- обернено симетрична ІМПП

Знайти: $w = \{(w_i) \mid w_i = [w_i^L, w_i^U], i = \overline{1, n}\}$ - вектор інтервальних ваг

$$0 < w_i^L \leq w_i^U$$

ІМПП A представимо двома додатними матрицями:

$$A_L = \{(l_{ij})\} \qquad A_U = \{(u_{ij})\}$$

Існує нормований вектор $w = \{(w_i) \mid w_i = [w_i^L, w_i^U], i = \overline{1, n}\}$, близький до A:

$$a_{ij} = \frac{[w_i^L, w_i^U]}{[w_j^L, w_j^U]} \varepsilon_{ij} \qquad \forall i, j = \overline{1, n}$$

Метод GPM

Розглянемо узгоджену ІМПП $\tilde{a}_{ij} = \dfrac{[w_i^L, w_i^U]}{[w_j^L, w_j^U]} = \left[\dfrac{w_i^L}{w_j^U}, \dfrac{w_i^U}{w_j^L}\right]$

Представимо її за допомогою двох чітких додатних матриць

$$\tilde{A}_L = \left[\frac{w_i^L}{w_j^U}\right] \qquad \tilde{A}_U = \left[\frac{w_i^U}{w_j^L}\right]$$

$$\tilde{A}_L W_U = W_U + (n-1) W_L$$

$$\tilde{A}_U W_L = W_L + (n-1) W_U$$

Для неузгодженої ІМПП A введемо вектори відхилень:

$$\mathrm{E} = (A_L - I) W_U - (n-1) W_L \qquad \Gamma = (A_U - I) W_L - (n-1) W_U$$

ІМПП A узгоджена тттк $\varepsilon_i = \gamma_i = 0$ для всіх $i = \overline{1, n}$

Метод GPM

Модель 1

Мінімізувати $J = \sum_{i=1}^{n} (|\varepsilon_i| + |\gamma_i|)$

при обмеженнях

$$\mathrm{E} = (A_L - I)W_U - (n-1)W_L$$

$$\Gamma = (A_U - I)W_L - (n-1)W_U$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} w_j^U + w_i^L \geq 1$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} w_j^L + w_i^U \leq 1$$

умови нормування інтервального вектору ваг

$$W_U - W_L \geq 0$$

$$W_L \geq 0$$

Заміна змінних:

$$\varepsilon_i^+ = \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2}$$

$$\varepsilon_i^- = \frac{-\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2}$$

$$\gamma_i^+ = \frac{\gamma_i + |\gamma_i|}{2}$$

$$\gamma_i^- = \frac{-\gamma_i + |\gamma_i|}{2}$$

$$\varepsilon_i^+ \geq 0,\ \varepsilon_i^- \geq 0,\ \gamma_i^+ \geq 0 \text{ и } \gamma_i^- \geq 0,\ i = \overline{1,n}$$

Метод GPM

Модель 2

Мінімізувати $J = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^- + \gamma_i^+ + \gamma_i^-) = e^T (\mathrm{E}^+ + \mathrm{E}^- + \Gamma^+ + \Gamma^-)$

при обмеженнях

$$\mathrm{E}^+ + \mathrm{E}^- = (A_L - I)W_U - (n-1)W_L$$

$$\Gamma^+ + \Gamma^- = (A_U - I)W_L - (n-1)W_U$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} w_j^U + w_i^L \geq 1$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} w_j^L + w_i^U \leq 1$$

умови нормування інтервального вектору ваг

$$W_U - W_L \geq 0$$

$$W_L, \mathrm{E}^+, \mathrm{E}^-, \Gamma^+, \Gamma^- \geq 0$$

ІМПП узгоджена тттк $J^* = 0$

6.6. Метод LUAM
(Lower and Upper Approximation Models)

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Метод LUAM

Дано: $A=\{(a_{ij}=[l_{ij},u_{ij}])\,|\,i,j=1,\ldots,n\}$ $\quad 0<l_{ij}\le u_{ij}$

- обернено симетрична ІМПП

Знайти: $w=\{(w_i)\,|\,w_i=[w_i^L,w_i^U],\,i=\overline{1,n}\}$ - вектор інтервальних ваг

$$0<w_i^L\le w_i^U$$

Існує нормований вектор $w=\{(w_i)\,|\,w_i=[w_i^L,w_i^U],\,i=\overline{1,n}\}$, близький до А:

$$a_{ij}=\frac{[w_i^L,w_i^U]}{[w_j^L,w_j^U]}\varepsilon_{ij} \qquad \forall i,j=\overline{1,n}$$

Побудуємо: $c_{ij}\subseteq a_{ij}$ - нижню апроксимацію ІМПП А

$a_{ij}\subseteq d_{ij}$ - верхню апроксимацію ІМПП А

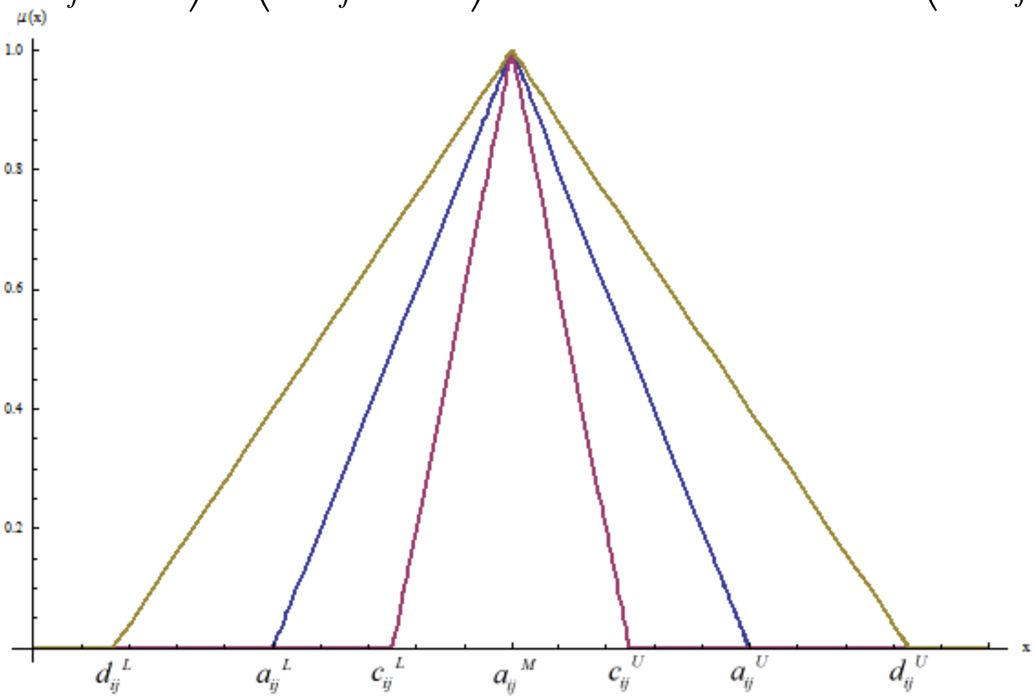
де $c_{ij},\ d_{ij}$ - оцінки лівого і правого кінців інтервальних оцінок для відношень ваг

Метод LUAM

Позначимо: $w1_i = [w1_i^L, w1_i^U]$ - нижні інтервальні ваги

$w2_i = [w2_i^L, w2_i^U]$ - верхні інтервальні ваги

$$(c_{ij} \subseteq a_{ij}) \Leftrightarrow \left(\frac{w1_i^L}{w1_j^U} \geq l_{ij} \right) \wedge \left(\frac{w1_i^U}{w1_j^L} \leq u_{ij} \right) \qquad (d_{ij} \supseteq a_{ij}) \Leftrightarrow \left(\frac{w2_i^L}{w2_j^U} \leq l_{ij} \right) \wedge \left(\frac{w2_i^U}{w2_j^L} \geq u_{ij} \right)$$



Метод LUAM

Нижня модель

$$J1 = \sum_{i=1}^{n} (w1_i^U - w1_i^L) \rightarrow \max$$

при обмеженнях:

$$w1_i^L \geq l_{ij} w1_j^U, \ \forall i, j, i \neq j$$

$$w1_i^U \leq u_{ij} w1_j^L, \ \forall i, j, i \neq j$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} w1_j^U + w1_i^L \geq 1 \quad i = \overline{1,n}$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} w1_j^L + w1_i^U \leq 1 \quad i = \overline{1,n}$$

умови нормування інтервального вектору ваг

$$w1_i^U - w1_i^L \geq 0 \quad i = \overline{1,n}$$

$$w1_i^L > 0 \quad i = \overline{1,n}$$

Верхня модель

$$J2 = \sum_{i=1}^{n} (w2_i^U - w2_i^L) \rightarrow \min$$

при обмеженнях:

$$w2_i^L \leq l_{ij} w2_j^U, \ \forall i, j, i \neq j$$

$$w2_i^U \geq u_{ij} w2_j^L, \ \forall i, j, i \neq j$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} w2_j^U + w2_i^L \geq 1 \quad i = \overline{1,n}$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} w2_j^L + w2_i^U \leq 1 \quad i = \overline{1,n}$$

$$w2_i^U - w2_i^L \geq 0 \quad i = \overline{1,n}$$

$$w2_i^L > 0 \quad i = \overline{1,n}$$

6.7. Двохетапна модель TLGP

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Модель TLGP

Якщо ІМПП узгоджена, то існує вектор ваг:

$$l_{ij} \le w_i / w_j \le u_{ij} \qquad \ln l_{ij} \le \ln w_i - \ln w_j \le \ln u_{ij}$$

В загальному випадку: $\ln l_{ij} - p_{ij} \le \ln w_i - \ln w_j \le \ln u_{ij} + q_{ij}$

$p_{ij} \ge 0 \quad q_{ij} \ge 0$ — величини відхилень

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(p_{ij} + q_{ij}\right) \to \min$$

$$\ln w_i - \ln w_j + p_{ij} \ge \ln l_{ij} \quad i, j = 1, \ldots, n$$

$$\ln w_i - \ln w_j - q_{ij} \le \ln u_{ij} \quad i, j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln w_i = 0$$

$$p_{ij} \ge 0 \quad q_{ij} \ge 0 \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

Заміна змінних:

$$x_i = \frac{\ln w_i + \left|\ln w_i\right|}{2}$$

$$y_i = \frac{-\ln w_i + \left|\ln w_i\right|}{2}$$

Модель TLGP

Етап 1:

$$J = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(p_{ij} + q_{ij} \right) \to \min$$

$$x_i - y_i - x_j + y_j + p_{ij} \ge \ln l_{ij} \qquad i < j$$

$$x_i - y_i - x_j + y_j - q_{ij} \le \ln u_{ij} \qquad i < j$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - y_i \right) = 0$$

$$x_i, y_i \ge 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$p_{ij} \ge 0 \quad q_{ij} \ge 0 \qquad i < j$$

Шукані інтервальні ваги:

$$w_i^L = \exp\left(\ln w_i^L \right) \quad w_i^U = \exp\left(\ln w_i^U \right)$$

Етап 2:

$$\ln w_i = x_i - y_i \to \min/\max \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(p_{ij} + q_{ij} \right) = J^*$$

$$x_i - y_i - x_j + y_j + p_{ij} \ge \ln l_{ij} \qquad i < j$$

$$x_i - y_i - x_j + y_j - q_{ij} \le \ln u_{ij} \qquad i < j$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - y_i \right) = 0$$

$$x_i, y_i \ge 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$p_{ij} \ge 0 \quad q_{ij} \ge 0 \qquad i < j$$

Приклад

$$A = \begin{pmatrix} 1 & [1,3] & [3,5] & [5,7] & [5,9] \\ [\frac{1}{3},1] & 1 & [1,4] & [1,5] & [1,4] \\ [\frac{1}{5},\frac{1}{3}] & [\frac{1}{4},1] & 1 & [\frac{1}{5},5] & [2,4] \\ [\frac{1}{7},\frac{1}{5}] & [\frac{1}{5},1] & [\frac{1}{5},5] & 1 & [1,2] \\ [\frac{1}{9},\frac{1}{5}] & [\frac{1}{4},1] & [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] & [\frac{1}{2},1] & 1 \end{pmatrix}$$

Модель Ваги	GPM	LUAM нижня модель	LUAM верхня модель	EM
w1	0.4527	[0.4225, 0.5343]	[0.2909, 0.4091]	0.4771
w2	[0.1397, 0.3321]	[0.1781, 0.2817]	[0.1364, 0.2909]	0.2199
w3	[0.0818, 0.2097]	0.1409	[0.0273, 0.1818]	0.1306
w4	[0.0591, 0.1347]	[0.0763, 0.0845]	[0.0364, 0.1364]	0.1001
w5	0.0633	0.0704	[0.0455, 0.1364]	0.0724
Показник узгодженості	J* = 0.4442	J* = 0.2235	J* =0.6182	CR = 0.0264
Слабке збере- ження порядку	+	+	-	+