3.2. Підвищення узгодженості без участі експерта

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Автоматичне коригування МПП

<u>Теорема 1.</u> Нехай $D = \left\{ \left(d_{ij} \right) \middle| \, i, j = 1, \ldots, n \right\}$ - додатна обернено симетрична

$\lambda_{\max}$ - максимальне власне число D, $w = \left(w_1, \ldots, w_n \right)^T$ - власний вектор

$D^* = \left\{ \left(d_{ij}^* \right) \middle| \, i, j = 1, \ldots, n \right\}$ $\mu_{\max}$ - максимальне власне число D*

$$d_{ij}^* = \left(d_{ij} \right)^{\alpha} \left(\frac{w_i}{w_j} \right)^{1-\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1$$

Тоді $\mu_{\max} \le \lambda_{\max}$ і рівність т.т.т.к. D – узгоджена

Автоматичне коригування МПП

Теорема 2. Нехай $D = \{(d_{ij}) | i, j = 1,...,n\}$ - додатна обернено симетрична

$\lambda_{\max}$ - максимальне власне число D, $w = (w_1,...,w_n)^T$ - власний вектор

$D^* = \{(d_{ij}^*) | i, j = 1,...,n\}$ $\mu_{\max}$ - максимальне власне число D*

$$d_{ij}^* = \begin{cases} \alpha d_{ij} + (1-\alpha)\dfrac{w_i}{w_j}, & i = 1,2,\ldots,n; j = i, i+1,\ldots,n \\ \dfrac{1}{\alpha d_{ji} + (1-\alpha)\dfrac{w_j}{w_i}}, & i = 2,3,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,i-1 \end{cases} \qquad 0 < \alpha < 1$$

Тоді $\mu_{\max} \le \lambda_{\max}$ і рівність т.т.т.к. D – узгоджена

Автоматичне коригування МПП. Доведення теорем

<u>Лема 1</u>. Нехай $A = \{(a_{ij}) \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ - додатна матриця

Тоді $\lambda_{\max} = \min_{x>0} \max_{i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{x_j}{x_i}$

<u>Лема 2</u>. Нехай $x,\ y,\ u,\ v\ >0,\ \ u+v=1$

Тоді $x^u y^v \leq ux + vy$ і рівність т.т.т.к. $x=y$.

Лема 1. Нехай $A > 0$, $\lambda_{\max}$ - найбільше вл.число.

Тоді $$\lambda_{\max} = \min_{x>0} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{x_j}{x_i}$$

Доведення $\Rightarrow$ $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i} = \frac{1}{w_i} \lambda_{\max} w_i = \lambda_{\max} \qquad \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i} = \lambda_{\max}$$

$$\Rightarrow \quad \min_{x>0} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \le \lambda_{\max}$$

Доведемо, що $\min\limits_{x>0}\max\limits_{i}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{x_j}{x_i} \geq \lambda_{\max}$

Зафіксуємо $\vec{w} > 0$

$\{y(x) = (w_1 x_1, \ldots, w_n x_n)^T \mid x > 0\}$ $\quad y(x) > 0$

$$\min_{y>0}\max_{i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{y_j}{y_i} = \min_{x>0}\max_{i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{w_j x_j}{w_i x_i}$$

Зафіксуємо $x > 0$ $\quad x_{i^*} = \min\limits_{i} x_i \Rightarrow \max\limits_{i}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{x_j}{x_i} \geq \sum\limits_{j=1}^{n} c_{i^* j}\frac{x_j}{x_{i^*}}$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} c_{i^* j} = \lambda_{\max}$$

$$\min_{x>0}\max_{i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{x_j}{x_i} = \min_{x>0}\max_{i}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{x_j}{x_i} \geq \lambda_{\max}$$

Доведено

Автоматичне коригування МПП Теорема 1. Доведення

$$d_{ij}^* = \left(d_{ij}\right)^\alpha \left(\frac{w_i}{w_j}\right)^{1-\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1$$

$$d_{ij} = \frac{w_i}{w_j} e_{ij} \qquad d_{ij}^* = \frac{w_i}{w_j} e_{ij}^\alpha \qquad \lambda_{\max} = \sum_{j=1}^{n} e_{ij}$$

$$\lambda_{\max} \geq n$$

$$\mu_{\max} = \min_{x>0} \max_i \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^* \frac{x_j}{x_i} \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^* \frac{w_j}{w_i} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij}^\alpha \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} (\alpha e_{ij} + 1 - \alpha)$$

$$= \alpha\lambda_{\max} + (1-\alpha)n \leq \lambda_{\max}$$

рівність т.т.т.к. $\lambda_{\max} = n$ (D – узгоджена).

<u>Доведено</u>

Автоматичне коригування МПП
Теорема 2. Доведення

Вправа: $\dfrac{1}{\alpha e_{ji} + (1-\alpha)} \le \alpha e_{ij} + (1-\alpha)$

$$\mu_{\max} = \min_{x>0} \max_i \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^{*} \frac{x_j}{x_i} \le \max_i \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^{*} \frac{w_j}{w_i} =$$

$$= \max_i \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\alpha d_{ji} + (1-\alpha)(w_j / w_i)} + \sum_{j=i}^{n} (\alpha d_{ij} + (1-\alpha)(w_i / w_j)) \right) \left(\frac{w_j}{w_i} \right) =$$

$$\max_i \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\alpha e_{ji} + (1-\alpha)} + \sum_{j=i}^{n} (\alpha e_{ij} + (1-\alpha)) \right) \le \max_i \left(\sum_{j=1}^{i-1} (\alpha e_{ij} + (1-\alpha)) + \sum_{j=i}^{n} (\alpha e_{ij} + (1-\alpha)) \right) =$$

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} (\alpha e_{ij} + (1-\alpha)) = \alpha \lambda_{\max} + (1-\alpha) n \le \lambda_{\max}$$

рівність т.т.т.к. $\lambda_{\max} = n$ (D – узгоджена).

<u>Доведено</u>

Алгоритм автоматичного коригування МПП без участі експерта

1) $0 < \alpha < 1$ $\quad k = 0 \quad D^{(0)} = \left(d_{ij}^{(0)}\right) = \left(d_{ij}\right)$

2) $w^{(k)} = \left(w_1^{(k)}, \dots, w_n^{(k)}\right)^T \quad D^{(k)}$

3) $CR^{(k)}$ Якщо $CR^{(k)} \le CR^{porog}$, перейти на крок 6, інакше - на крок 4

4) $D^{(k+1)} = \left(d_{ij}^{(k+1)}\right) \quad d_{ij}^{(k+1)} = \left(d_{ij}^{(k)}\right)^{\alpha} \left(\frac{w_i^{(k)}}{w_j^{(k)}}\right)^{1-\alpha}$

$$d_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} \alpha d_{ij}^{(k)} + (1-\alpha)\frac{w_i^{(k)}}{w_j^{(k)}}, & i = 1,2,\dots,n; \quad j = i, i+1, \dots, n \\ \dfrac{1}{\alpha d_{ji}^{(k)} + (1-\alpha)\frac{w_j^{(k)}}{w_i^{(k)}}}, & i = 2,3,\dots,n; \quad j = 1,2,\dots,i-1 \end{cases}$$

5) $k := k+1$, перейти на крок 2

6) вивести $D^{(k)} \quad CR^{(k)} \le CR^{porog}$

Автоматичне коригування МПП. Збіжність алгоритму

Теорема 3 (Збіжність алгоритму). Для описаного алгоритму

$$CR^{(k+1)} \le CR^{(k)} \qquad \lim_{k\to+\infty} CR^{(k)} = 0$$

Доведення $\lambda_{\max}^{(k+1)} \le \lambda_{\max}^{(k)} \Rightarrow CR^{(k+1)} \le CR^{(k)}$

$$\lambda_{\max}^{(k)} \le \alpha\lambda_{\max}^{(k-1)} + (1-\alpha)n \le \alpha^2\lambda_{\max}^{(k-2)} + \alpha(1-\alpha)n + (1-\alpha)n \le \ldots$$

$$\le \alpha^k\lambda_{\max}^{(0)} + (1-\alpha)n\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^i = \alpha^k\lambda_{\max}^{(0)} + (1-\alpha)n\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} =$$

$$= \alpha^k\lambda_{\max}^{(0)} + (1-\alpha^k)n \xrightarrow[k\to\infty]{} n \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\lambda_{\max}^{(k)} = n$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} CR^{(k)} = \lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_{\max}^{(k)} - n}{(n-1)MRCI(n)} = 0$$

Доведено

Автоматичне коригування МПП. Критерії ефективності

Критерії ефективності підвищення узгодженості

$$\delta^{(k)} = \max_{i,j}\left\{\left|d_{ij}^{(k)} - d_{ij}^{(0)}\right|\right\}$$

$$0.5 \le \alpha < 1$$

$$\sigma^{(k)} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(d_{ij}^{(k)} - d_{ij}^{(0)}\right)^2}$$

прийнятне коригування - ?

3.3. Методи розрахунку ваг, стійкі до викидів в МПП

Означення

Означення. Стійким до викидів назвемо такий метод знаходження ваг з МПП, який призводить до ранжування, яке співпадає з ранжуванням, отриманим після знаходження викидів в цій МПП.

$$\begin{tikzcd}
\text{МПП} \arrow[rrr, "\text{Метод, стійкий до викидів}"] \arrow[dr] & & & \text{ваги} \arrow[r] & \text{ранжування} \\
& \text{викиди} \arrow[r] & \text{МПП*} \arrow[r, "\text{EM, RGMM, AN}"] & \text{ваги*} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Приклад

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 6 & 6 & 1/3 & 1/4 \\ 1/5 & 1 & 1/3 & 5 & 3 & 3 & 1/5 & 1/7 \\ 1/3 & 3 & 1 & 6 & 3 & 4 & 6 & 1/5 \\ 1/7 & 1/5 & 1/6 & 1 & 1/3 & 1/4 & 1/7 & 1/8 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 & 1/2 & 1/5 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/4 & 4 & 2 & 1 & 1/5 & 1/6 \\ 3 & 5 & 1/6 & 7 & 5 & 5 & 1 & 1/2 \\ 4 & 7 & 5 & 8 & 6 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

CR=0.170 > 0.1

GCI=0.529 > 0.370

Недопустимо висока неузгодженість МПП

EM	
0.173	3
0.054	5
0.188	2
0.018	8
0.031	7
0.036	6
0.167	4
0.333	1

RGMM	
0.175	2
0.063	5
0.149	4
0.019	8
0.036	7
0.042	6
0.167	3
0.350	1

Стійкі до викидів		
Метод 1	Метод 2	
0.150	0.114	3
0.054	0.045	5
0.141	0.097	4
0.022	0.022	8
0.037	0.036	7
0.041	0.038	6
0.163	0.134	2
0.392	0.512	1

Приклад

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 6 & 6 & 1/3 & 1/4 \\ 1/5 & 1 & 1/3 & 5 & 3 & 3 & 1/5 & 1/7 \\ 1/3 & 3 & 1 & 6 & 3 & 4 & 6 & 1/5 \\ 1/7 & 1/5 & 1/6 & 1 & 1/3 & 1/4 & 1/7 & 1/8 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 & 1/2 & 1/5 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/4 & 4 & 2 & 1 & 1/5 & 1/6 \\ 3 & 5 & 1/6 & 7 & 5 & 5 & 1 & 1/2 \\ 4 & 7 & 5 & 8 & 6 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$d_{73} := 6$ $\qquad$ $d_{37} := \frac{1}{6}$

CR=0.09 < 0.1

Знаходження викидів

k=1	**CI=0.201**
k=2	**CI=0.266**
k=3	**CI=0.124**
k=4	**CI=0.272**
k=5	**CI=0.280**
k=6	**CI=0.276**
k=7	**CI=0.121**
k=8	**CI=0.256**

$\Rightarrow$ d_{37} викид

ЕМ (після коригування)	
0.167	3
0.060	5
0.091	4
0.019	8
0.033	7
0.040	6
0.255	2
0.335	1

Стійкі до викидів (до коригування)		
Метод 1	Метод 2	
0.150	0.114	3
0.054	0.045	5
0.141	0.097	4
0.022	0.022	8
0.037	0.036	7
0.041	0.038	6
0.163	0.134	2
0.392	0.512	1

Метод 1

Означення:

Теоретичною матрицею парних пропорцій $U = \{(u_{ij}) \mid i, j = 1 \ldots n\}$

називається $u_{ij} = \dfrac{w_i}{w_i + w_j} = \dfrac{w_i / w_j}{1 + w_i / w_j}$

Означення:

Емпіричною матрицею парних пропорцій $Z = \{(z_{ij}) \mid i, j = 1 \ldots n\}$

називається $z_{ij} = \dfrac{d_{ij}}{1 + d_{ij}}$

Властивості Z **:** $z_{ij} \in (0,1)$ $z_{ij} + z_{ji} = 1$ $z_{ij} - z_{ii} = z_{ii} - z_{ji}$

$$z_{ij} + z_{ji} = \frac{d_{ij}}{1 + d_{ij}} + \frac{1 / d_{ij}}{(d_{ij} + 1) / d_{ij}} = 1$$

Твердження. Z менш чутлива до впливу викидів в МПП D .

Метод 1

$$w_i + w_i + \ldots + w_i = nw_i \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$\frac{w_i}{w_i + w_1}(w_i + w_1) + \frac{w_i}{w_i + w_2}(w_i + w_2) + \ldots + \frac{w_i}{w_i + w_n}(w_i + w_n) = nw_i \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$\begin{cases} \dfrac{w_1}{w_1 + w_1}(w_1 + w_1) + \dfrac{w_1}{w_1 + w_2}(w_1 + w_2) + \ldots + \dfrac{w_1}{w_1 + w_n}(w_1 + w_n) = nw_1 \\ \ldots \\ \dfrac{w_n}{w_n + w_1}(w_n + w_1) + \dfrac{w_n}{w_n + w_2}(w_n + w_2) + \ldots + \dfrac{w_n}{w_n + w_n}(w_n + w_n) = nw_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(u_{11} + \sum_{j=1}^{n} u_{1j}\right) w_1 + u_{12}w_2 + \ldots + u_{1n}w_n = nw_1 \\ \ldots \\ u_{n1}w_1 + u_{n2}w_2 + \ldots + \left(u_{nn} + \sum_{j=1}^{n} u_{nj}\right) w_n = nw_n \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left(U + diag(Ue)\right)w = nw}$$

$$e = (1 \quad \ldots \quad 1)^T$$

$$\boxed{\left(Z + diag\left(Ze\right)\right)\hat{w} = \lambda_{\max}\hat{w}}$$

Етапи методу 1

1 Побудувати матрицю парних пропорцій $Z = \{(z_{ij}) \mid i, j = 1 \ldots n\}$

$$z_{ij} = \frac{d_{ij}}{1 + d_{ij}}$$

2 Розв'язати систему $\left(Z + diag\left(Ze\right)\right)\hat{w} = \lambda_{\max}\hat{w}$

$\hat{w}$ - вектор ваг, стійкий до викидів

Метод 2

Оптимізаційний метод

$$u_{ij} = \frac{w_i}{w_i + w_j} = \frac{w_i / w_j}{1 + w_i / w_j} \qquad u_{ij}\left(w_i + w_j\right) = w_i$$

$$z_{ij} = \frac{d_{ij}}{1 + d_{ij}} \qquad \boxed{z_{ij}\left(w_i + w_j\right) = w_i + \varepsilon_{ij}}$$

Означення: Z - узгоджена, якщо $(z_{ij} = u_{ij}) \Leftrightarrow (\varepsilon_{ij} = 0) \quad \forall i, j = 1, \ldots, n$

$$\left\| \mathrm{E} \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left(z_{ij} \left(\hat{w}_i + \hat{w}_j \right) - \hat{w}_i \right)^2 \to \min$$

при обмеженні

$\hat{w}^T \hat{w} = 1$ - умова нормування до одиниці

$z_{ij} \in (0,1) \qquad z_{ij} + z_{ji} = 1$

Метод 2

$$\|\mathrm{E}\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(z_{ij}\left(\hat{w}_i + \hat{w}_j\right) - \hat{w}_i\right)^2 \to \min$$

Метод множників Лагранжа: $F = \|\mathrm{E}\|^2 - \lambda\left(\hat{w}^T\hat{w} - 1\right) = \|\mathrm{E}\|^2 - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{w}_i^2 - 1\right)$

$$F = \sum_{i,j=1}^{n}\left(z_{ij}\hat{w}_j - z_{ji}\hat{w}_i\right)^2 - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{w}_i^2 - 1\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{w}_k} = \sum_{i=1}^{n}(2z_{ik}^2\hat{w}_k - 2z_{ik}z_{ki}\hat{w}_i) + \sum_{j=1}^{n}(2z_{jk}^2\hat{w}_k - 2z_{jk}z_{kj}\hat{w}_j) - 2\lambda\hat{w}_k = 0$$

$$2\sum_{i=1}^{n}z_{ik}^2\hat{w}_k - 2\sum_{i=1}^{n}z_{ik}\left(1 - z_{ik}\right)\hat{w}_i = \lambda\hat{w}_k \qquad k = 1,\ldots,n$$

$$c_{ij} = z_{ij}z_{ji} = z_{ij}(1 - z_{ij}) \qquad C = Z^T * Z$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{2\left(diag\left(Z^T Z\right) - Z^T * Z\right)\hat{w} = \lambda\hat{w}}$$

Етапи методу 2

1 Побудувати матрицю парних пропорцій $Z = \{(z_{ij}) \mid i, j = 1...n\}$

$$z_{ij} = \frac{d_{ij}}{1 + d_{ij}}$$

2 Побудувати матрицю $C = \{(c_{ij}) \mid i, j = 1...n\}$

$$c_{ij} = z_{ij} z_{ji} = z_{ij}(1 - z_{ij})$$

3 Розв'язати систему $2\left(diag\left(Z^T Z\right) - C\right)\hat{w} = \lambda \hat{w}$

$\hat{w}$ - власний вектор, що відповідає **мінімальному** власному числу λ