1.4. Розрахунок глобальних ваг елементів ієрархії

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Постановка задачі розрахунку глобальних ваг альтернатив (для ієрархії з двома рівнями)

Дано:

$A = \{A_i \mid i = \overline{1,n}\}$ - множина альтернатив рішень,

$C = \{C_j \mid j = \overline{1,m}\}$ - множина критеріїв,

$V = \{(v_{ij}) \mid i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\}$ - локальні ваги альтернатив відносно критеріїв, ненормовані,

$w^C = \{(w_j^C) \mid j = \overline{1,m}\}$ - ваги критеріїв: $\sum_{j=1}^{m} w_j^C = 1$.

Знайти:

$w^{glob} = \{(w_i^{glob}) \mid i = \overline{1,n}\}$ - глобальні ваги альтернатив, нормовані.

Дистрибутивний синтез

$$w_i^{glob} = \sum_{j=1}^{m} w_j^C \cdot r_{ij} \qquad i = \overline{1,n}$$

$$r_{ij} = \frac{v_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} v_{kj}} \qquad \sum_{i=1}^{n} r_{ij} = 1 \qquad j = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^{glob} = 1$$

Ідеальний синтез

$$v_i^{glob} = \sum_{j=1}^{m} w_j^C \cdot r_{ij} \qquad i = \overline{1,n}$$

$$r_{ij} = \frac{v_{ij}}{\max\limits_{k=1,\dots,n} v_{kj}} \qquad j = \overline{1,m}$$

$$w_i^{glob} = \frac{v_i^{glob}}{\sum\limits_{k=1}^{n} v_k^{glob}} \qquad i = \overline{1,n}$$

Мультиплікативний синтез

$$v_i^{glob} = \prod_{j=1}^{m} (v_{ij})^{w_j^C} \qquad i = \overline{1,n}$$

$$w_i^{glob} = \frac{v_i^{glob}}{\sum_{k=1}^{n} v_k^{glob}} \qquad i = \overline{1,n}$$

Максимінний синтез

$$v_i^{glob} = \min_{j=1,\dots,m} v_{ij} w_j^C \qquad i = \overline{1,n}$$

$$w_i^{glob} = \frac{v_i^{glob}}{\sum_{k=1}^{n} v_k^{glob}} \qquad i = \overline{1,n}$$

Приклад. Дистрибутивний синтез

	Локальні ваги альтернатив	
	C_1 (0.6)	C_2 (0.4)
A_1	$v_{11}=2.52$	$v_{12}=0.38$
A_2	$v_{21}=0.31$	$v_{22}=2.29$
A_3	$v_{31}=1.26$	$v_{32}=1.15$

	r_{ij}	
	C_1	C_2
A_1	$r_{11}=0.62$	$r_{12}=0.10$
A_2	$r_{21}=0.08$	$r_{22}=0.60$
A_3	$r_{31}=0.30$	$r_{32}=0.30$

$$r_{ij} = \frac{v_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} v_{kj}}$$

$$w_i^{glob} = \sum_{j=1}^{m} w_j^C \cdot r_{ij}$$

$$w_1^{glob} = 0.41$$
$$w_2^{glob} = 0.29$$
$$w_3^{glob} = 0.30$$

Приклад. Ідеальний синтез

	Локальні ваги альтернатив	
	C_1 (0.6)	C_2 (0.4)
A_1	v_{11}=2.52	v_{12}=0.38
A_2	v_{21}=0.31	v_{22}=2.29
A_3	v_{31}=1.26	v_{32}=1.15

	r_{ij}	
	C_1	C_2
A_1	r_{11}=1.00	r_{12}=0.17
A_2	r_{21}=0.12	r_{22}=1.00
A_3	r_{31}=0.50	r_{32}=0.50

$$r_{ij} = \frac{v_{ij}}{\max\limits_{k=1,\dots,n} v_{kj}}$$

$$v_i^{glob} = \sum_{j=1}^{m} w_j^C \cdot r_{ij}$$

$$v_1^{glob} = 0.67$$
$$v_2^{glob} = 0.47$$
$$v_3^{glob} = 0.50$$

Ненормовані глобальні ваги альтернатив

Приклад. Мультиплікативний синтез

	Локальні ваги альтернатив	
	C_1 (0.6)	C_2 (0.4)
A_1	v_{11}=2.52	v_{12}=0.38
A_2	v_{21}=0.31	v_{22}=2.29
A_3	v_{31}=1.26	v_{32}=1.15

$$v_i^{glob} = \prod_{j=1}^{m} (v_{ij})^{w_j^C}$$

$$v_1^{glob} = 1.18$$
$$v_2^{glob} = 0.69$$
$$v_3^{glob} = 1.21$$

Ненормовані глобальні ваги альтернатив

Приклад. Максимінний синтез

	Локальні ваги альтернатив	
	C_1 (0.6)	C_2 (0.4)
A_1	v_{11}=2.52	v_{12}=0.38
A_2	v_{21}=0.31	v_{22}=2.29
A_3	v_{31}=1.26	v_{32}=1.15

$$v_i^{glob} = \min_{j=1,\ldots,m} v_{ij} w_j^C$$

$$v_1^{glob} = 0.152$$
$$v_2^{glob} = 0.186$$
$$v_3^{glob} = 0.46$$

Ненормовані глобальні ваги альтернатив

Приклад. Результати

Метод синтезу	Глобальні ваги альтернатив		
	A_1	A_2	A_3
Дистрибутивний	0.41	0.29	0.30
Ідеальний	0.67	0.47	0.50
Мультиплікативний	1.18	0.69	1.21
Максимінний	0.15	0.19	0.46

ГВББВПА

$n(n-1)/2$ підзадач (a_i, a_k) (w_i^{ik}, w_k^{ik})

w_i^{ik} - глобальна вага a_i при розгляді тільки пари (a_i, a_k) $i = 1,\ldots,n$

$k = 1,\ldots,(n-1)/2$

$$w_i^{ik} = \sum_{j=1}^{m} w_j^C \cdot r_{ij}$$ дистрибутивний синтез

$$r_{lj} = \frac{v_{lj}}{v_{ij}+v_{kj}}$$ $l \in \{i,k\}$ $r_{ij} + r_{kj} = 1$

$$P = \left(w_i^{ik} / w_k^{ik}\right)$$ $i,k = 1,\ldots,n$ результуючі глобальні ваги – методами ЕМ, RGMM з МПП P

Приклад. ГВББВПА

	Локальні ваги альтернатив	
	C_1 (0.6)	C_2 (0.4)
A_1	v_{11}=2.52	v_{12}=0.38
A_2	v_{21}=0.31	v_{22}=2.29
A_3	v_{31}=1.26	v_{32}=1.15

(A_1, A_2) дистрибутивний синтез

	Нормовані ваги	
	C_1 (0.6)	C_2 (0.4)
A_1	2.52 / (2.52+0.31)=0.89	0.38 / (0.38+2.29) =0.14
A_2	0.31 / (2.52+0.31)=0.11	2.29 / (0.38+2.29) =0.86

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0.59/0.41 & \\ 0.41/0.59 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1^{12} = 0.89 \cdot 0.6 + 0.14 \cdot 0.4 = 0.59$$

$$w_2^{12} = 0.11 \cdot 0.6 + 0.86 \cdot 0.4 = 0.41$$

$$w_1^{13}, w_3^{13} \qquad w_2^{23}, w_3^{23}$$

Порівняння синтезів

Арифметична середня:

- мале значення альтернативи за одним критерієм компенсується великим її значенням за іншим критерієм
- вибирає крайню альтернативу
- всі критерії повинні мати одну і ту ж розмірність

  ⇨ *попереднє нормування оцінок*, отриманих за різними критеріями

Геометрична середня:

- не потребує нормування
- вибирає середню альтернативу

Транзитивність переваг в різних синтезах

<u>Тв 1.</u> Ранжування, отримані мультиплікативним синтезом з узгоджених МПП, задовольняють властивості транзитивності:

$$(A_i \succ A_j) \wedge (A_j \succ A_k) \Rightarrow (A_i \succ A_k) \qquad \forall i, j, k$$

$$(v_i^{глоб} > v_j^{глоб}) \wedge (v_j^{глоб} > v_k^{глоб}) \Rightarrow (v_i^{глоб} > v_k^{глоб})$$

Транзитивність переваг в різних синтезах

<u>Доведення.</u> A_1, A_2, A_3 оцінюються за *M* критеріями

Нехай $A_1 \succ A_2$ $\Longleftrightarrow$ $\prod_{j=1}^{M} \left(v_{1j}\right)^{w_j^C} > \prod_{j=1}^{M} \left(v_{2j}\right)^{w_j^C}$

Нехай $A_2 \succ A_3$ $\Longleftrightarrow$ $\prod_{j=1}^{M} \left(v_{2j}\right)^{w_j^C} > \prod_{j=1}^{M} \left(v_{3j}\right)^{w_j^C}$

Об'єднуючи ці дві нерівності,

$$\prod_{j=1}^{M} \left(v_{1j}\right)^{w_j^C} > \prod_{j=1}^{M} \left(v_{3j}\right)^{w_j^C} \Longleftrightarrow A_1 \succ A_3$$

$$(A_1 \succ A_2) \wedge (A_2 \succ A_3) \Rightarrow (A_1 \succ A_3)$$

Твердження 1 (продовження)

N альтернатив

Мультиплікативний синтез <u>не призводить</u> до нетранзитивного ранжування $A_1 \succ A_2 \succ \ldots \succ A_k \succ \ldots \succ A_1$

Транзитивність переваг в різних синтезах. Приклад

<u>Приклад</u> (в якому ранжування за дистрибутивним та ідеальним синтезом з узгоджених МПП **<u>не задовольняють</u>** властивості транзитивності).

$$\exists i, j, k$$
$$(A_i \succ A_j) \wedge (A_j \succ A_k) \wedge (A_k \succ A_i)$$

$A_1 - A_3$ $C_1 - C_4$

	Локальні ваги			
	C_1 (0.27)	C_2 (0.41)	C_3 (0.05)	C_4 (0.27)
A_1	1.92	7.59	1.27	6.13
A_2	3.12	4.31	8.57	7.11
A_3	7.70	4.77	7.45	3.29

Приклад (продовження)

ідеальний синтез (A_1, A_2)

	Нормовані локальні ваги			
	C_1 (0.27)	C_2 (0.41)	C_3 (0.05)	C_4 (0.27)
A_1	1.92 / 3.12	1	1.27 / 8.57	6.13 / 7.11
A_2	1	4.31 / 7.59	1	1

$$w_1^{12} = \tfrac{1.92}{3.12} \cdot 0.27 + 1 \cdot 0.41 + \tfrac{1.27}{8.57} \cdot 0.05 + \tfrac{6.13}{7.11} \cdot 0.27 = 0.8163$$

$$w_2^{12} = 1 \cdot 0.27 + \tfrac{4.31}{7.59} \cdot 0.41 + 1 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.27 = 0.8228$$

Тому $A_2 \succ A_1$

Приклад (продовження)

(A_1, A_3) ідеальний синтез (A_2, A_3)

$$w_1^{13} = 0.7558$$

$$w_3^{13} = 0.7226$$

$$A_1 \succ A_3$$

$$w_2^{23} = 0.7999$$

$$w_3^{23} = 0.8484$$

$$A_3 \succ A_2$$

$\Rightarrow$ транзитивність переваг порушується

Аналогічно – при використанні дистрибутивного синтезу.

Приклад (продовження):мультипліка-тивний синтез

	Локальні ваги			
	C_1 (0.27)	C_2 (0.41)	C_3 (0.05)	C_4 (0.27)
A_1	1.92	7.59	1.27	6.13
A_2	3.12	4.31	8.57	7.11
A_3	7.70	4.77	7.45	3.29

(A_1, A_2) $\quad$ $A_2 \succ A_1$

$$R\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \left(\frac{1.92}{3.12}\right)^{0.27} \cdot \left(\frac{7.59}{4.31}\right)^{0.41} \cdot \left(\frac{1.27}{8.57}\right)^{0.05} \cdot \left(\frac{6.13}{7.11}\right)^{0.27} = 0.966 < 1.000$$

Приклад (продовження):мультипліка-тивний синтез

$(A_1, A_3) \qquad A_3 \succ A_1$

$$R\left(\frac{A_1}{A_3}\right) = \left(\frac{1.92}{7.70}\right)^{0.27} \cdot \left(\frac{7.59}{4.77}\right)^{0.41} \cdot \left(\frac{1.27}{7.45}\right)^{0.05} \cdot \left(\frac{6.13}{3.29}\right)^{0.27} = 0.9 < 1.0$$

$(A_2, A_3) \qquad A_3 \succ A_2$

$$R\left(\frac{A_2}{A_3}\right) = \left(\frac{3.12}{7.70}\right)^{0.27} \cdot \left(\frac{4.31}{4.77}\right)^{0.41} \cdot \left(\frac{8.57}{7.45}\right)^{0.05} \cdot \left(\frac{7.11}{3.29}\right)^{0.27} = 0.932 < 1.0$$

$\Rightarrow$ транзитивність виконується

1.5. Явище реверсу рангів при використанні методів синтезу

(для ієрархії з двома рівнями)

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Реверс рангів

Реверс рангів - це зміна рангів альтернатив при їх оцінюванні за багатьма критеріями при додаванні / вилученні альтернативи

(при незмінності множини критеріїв, їх ваг та оцінок "старих" альтернатив).

Оптимальна - альтернатива, яка має найбільшу глобальну вагу.

Оптимальна за одним з критеріїв - альтернатива, яка має найбільшу локальну вагу за цим критерієм.

Постановка задачі моделювання реверсу рангів

<u>Дано:</u>

$A = \{A_i \mid i = 1,\ldots,n\}$ - множина альтернатив рішень,

$C = \{C_j \mid j = 1,\ldots,m\}$ - множина критеріїв,

w_j^C - вага критерію C_j , $\sum_{j=1}^{m} w_j^C = 1$

$D^j = (d_{ik}^j)$ - узгоджена МПП n альтернатив відносно C_j

$D^{*j} = (d_{ik}^{*j})$ - узгоджена МПП $n+1$ альтернатив відносно C_j

$i,k = 1,\ldots,n+1$

$$d_{ik}^{*j} = d_{ik}^j \text{ при } i,k = 1,\ldots,n$$

Постановка задачі моделювання реверсу рангів (продовження)

Потрібно:

- встановити, чи має місце реверс рангів,
- знайти частоту появи реверсу рангів

$w_i^{глоб}$ - глобальні ваги альтернатив, $i = 1, \ldots, n$

$w_i^{*глоб}$ - глобальні ваги альтернатив, $i = 1, \ldots, n+1$

Види реверсу рангів

1) зміна оптимальної альтернативи $i \neq i^*$

$$i : w_i^{глоб} = \max_{k=1,\dots,n} w_k^{глоб}$$

$$i^* : w_{i^*}^{глоб} = \max_{k=1,\dots,n,n+1} w_k^{*глоб}$$

Види реверсу рангів

2) зміна знаку переваги між старими альтернативами

$$A_1 \succ A_2 \succ \ldots \succ \boldsymbol{A_i} \succ \boldsymbol{A_k} \succ \ldots \succ A_n \qquad A_1 \succ A_2 \succ \ldots \succ \boldsymbol{A_k} \succ \boldsymbol{A_i} \succ \ldots \succ A_n$$

після додавання (n+1)–ї альтернативи

$$(\Delta w_{ik}^{глоб} \cdot \Delta w_{ik}^{*глоб} < 0) \vee ((\Delta w_{ik}^{глоб} = 0) \wedge (\Delta w_{ik}^{*глоб} \neq 0)) \vee ((\Delta w_{ik}^{глоб} \neq 0) \wedge (\Delta w_{ik}^{*глоб} = 0))$$

$$\Delta w_{ik}^{глоб} = w_i^{глоб} - w_k^{глоб} \qquad \Delta w_{ik}^{*глоб} = w_i^{*глоб} - w_k^{*глоб}$$

3) зміна рангів альтернатив при їх попарному розгляді

в порівнянні з розглядом всіх альтернатив одночасно

Приклад реверсу рангів. Вибір квартири

C_1 – ціна квартири (0.5), C_2 – умови проживання (0.5)

A1: Смт.Буча, ціна 265 тис. грн, площа 132,59/66,40/22,64
A2: м.Лівобережна, ціна 1 млн.грн., площа 130,65/78,74/14,37
A3: Позняки, ціна 350 тис.грн., площа 130,68/81,07/15,68

$$M_{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1/7 & 1 & 3/7 \\ 1/3 & 7/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

A4: ціна 300 тис.грн., умови гірші ніж у A1

$$M_{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 1/7 & 1 & 3/7 & 2/7 \\ 1/3 & 7/3 & 1 & 2/3 \\ 1/2 & 7/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/3 & 3/2 \\ 6 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 1/2 & 1 & 9/2 \\ 2/3 & 1/9 & 2/9 & 1 \end{pmatrix}$$

Приклад реверсу рангів. Вибір квартири (продовження)

	Глобальні ваги альтернатив			
	A_1	A_2	A_3	A_4
Дистрибутивний	0.300	0.317	0.225	0.158
Ідеальний	0.311	0.304	0.222	0.163
ГВББПА	0.285	0.255	0.280	0.181
Мультиплікативний	0.285	0.264	0.285	0.165

Вправа: Розрахувати глобальні ваги альтернатив до і після додавання A_4 за усіма синтезами.

Приклад реверсу рангів. Вибір квартири (продовження)

	Ранжування		РР
	до додавання А4	після додавання А4	
Дистрибутивний	$A_1 \succ A_2 \succ A_3$	$A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$	+
Ідеальний	$A_1 \succ A_2 \succ A_3$	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$	-
ГВББВПА	$A_3 \succ A_1 \succ A_2$	$A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4$	+
Мультиплікативний	$A_1 \sim A_3 \succ A_2$	$A_1 \sim A_3 \succ A_2 \succ A_4$	-