Тема 6
Методи аналізу ієрархій при нечітких експертних оцінках

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Постановка задачі

Дано:

$A = \{a_i \mid i = 1,\dots,n\}$ - множина альтернатив рішень

C - критерій

$D^{fuz} = \{(d_{ij}^{fuz}) \mid i, j = 1,\dots,n\}$ - нечітка МПП

Знайти:

$w^{fuz} = \{(w_i^{fuz}) \mid i = 1,\dots,n\}$ - нечіткий вектор ваг альтернатив

$w_i^{fuz} = (x, \mu_i(x))$ - нечітка множина, $x \in R$

Нечітка МПП

Нечітка матриця парних порівнянь (НМПП)

$$D^{fuz} = \{(d_{ij}^{fuz}) \mid i, j = 1,\ldots,n\}$$

$d_{ij}^{fuz} = (x, \mu_{ij}(x))$ - нечітке число

$\mu_{ij}(x)$ - ступінь виконання переваги $a_i \succeq a_j$

- **Нечітке число** – нечітка множина, визначена на $U{=}R$

  $\mu_A : R \to [0,1]$, яка задовольняє умовам:

- нечітка множина нормована
- нечітка множина випукла

$$\lambda \in [0,1]$$

$$\mu_A(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \geq \min(\mu_A(u_1), \mu_A(u_2)) \qquad \forall\, u_1, u_2 \in U$$

6.1. Декомпозиційний підхід

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

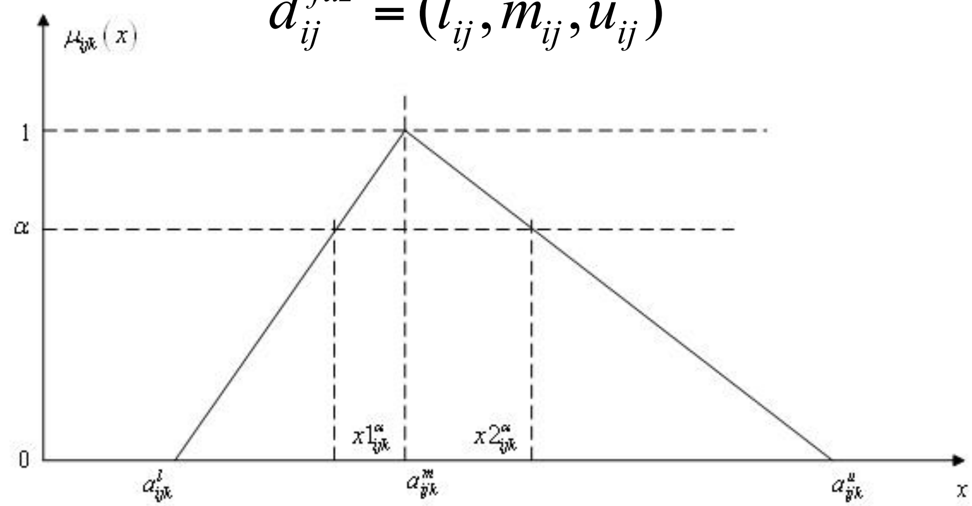
Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Декомпозиційний підхід

Розкладемо НМПП $D^{fuz} = \{(d_{ij}^{fuz}) \mid i, j = 1,\ldots,n\}$ за множинами рівня:

$$D^{fuz} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha D(\alpha)$$

$$d_{ij}^{fuz} = (l_{ij}, m_{ij}, u_{ij})$$



$$D(\alpha) = \{(d_{ij}(\alpha)) \mid i, j = 1,\ldots,n\}$$

$$d_{ij}(\alpha) = \{x : \mu_{ij}(x) \geq \alpha\}$$

$$d_{ij}^{fuz} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha d_{ij}(\alpha) \quad \forall i, j = \overline{1,n}$$

$$d_{ij}(\alpha) = [l_{ij}(\alpha),\ u_{ij}(\alpha)]$$

$$l_{ij}(\alpha) = \alpha(m_{ij} - l_{ij}) + l_{ij}$$

$$u_{ij}(\alpha) = \alpha(m_{ij} - u_{ij}) + u_{ij}$$

Приклад

Нечітка множина A на X , множина рівня $A_\alpha = \{x : \mu_A(x) \geq \alpha\}$

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha$$ - розкладення за множинами рівня

Приклад. $X = \{1,2,3,4,5\}$

x	1	2	3	4	5
$\mu_A(x)$	0	0.1	0.3	0.8	1.0

$A_{0.1} = \{2,3,4,5\}$ $A_{0.3} = \{3,4,5\}$ $A_{0.8} = \{4,5\}$ $A_{1.0} = \{5\}$

Нечітку множину A можна представити у вигляді:

$$A = 0.1\{2,3,4,5\} \cup 0.3\{3,4,5\} \cup 0.8\{4,5\} \cup 1.0\{5\}$$

Узгоджена ІМПП

$D = \{(d_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}]) \mid 0 < l_{ij} \le u_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n\}$ - ІМПП

ІМПП - **обернено симетрична інтервальна матриця**:

$$l_{ij} u_{ji} = 1 \qquad \forall\ i = \overline{1, n} \quad j = \overline{1, n}$$

ІМПП A називається **узгодженою**, якщо

$\exists\, \bar{w} \in R_n^+ \quad \sum_i w_i = 1$, такий що $\quad l_{ij} \le w_i / w_j \le u_{ij} \qquad i < j$

ІМПП A **узгоджена** т.т.т.к. $\quad \max_k (l_{ik} l_{kj}) \le \min_k (u_{ik} u_{kj}) \quad \forall i, j = 1, \ldots, n,\ i < j$

1	[2, 5]	[2, 4]	[1, 3]
[1/5, 1/2]	1	[1, 3]	[1, 2]
[1/4, 1/2]	[1/3, 1]	1	[1/2, 1]
[1/3, 1]	[1/2, 1]	[1, 2]	1

$w = (0.4 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.2)$

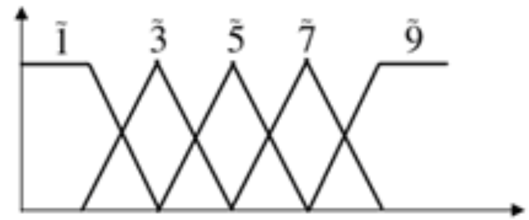
Критерій узгодженості ІМПП
Приклад

1	[2, 5]	[2, 4]	[1, 3]
[1/5, 1/2]	1	[1, 3]	[1, 2]
[1/4, 1/2]	[1/3, 1]	1	[1/2, 1]
[1/3, 1]	[1/2, 1]	[1, 2]	1

$$w = (0.4 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.2)$$

i	j	k	$l_{ik}l_{kj}$	$u_{ik}u_{kj}$	$\max\limits_k(l_{ik}l_{kj}) \le \min\limits_k(u_{ik}u_{kj})$
1	2	3	2*1/3	4*1	
		4	1*1/2	3*1	так
1	3	2	2*1	5*3	
		4	1*1	3*2	так
1	4	2	2*1	5*2	
		3	2*1/2	4*1	так
...	...	...			

Нечіткі фундаментальні шкали



	Нечіткі числа					
Лінгвістична змінна	ФП 1 [6, 7]	ФП 2 [8]	ФП 3 [9]	ФП 4 [10]	ФП 5 [11]	ФП 6 [12]
Рівна важливість $\tilde{1}$	$\tilde{1}=(1,1,3)$	$\tilde{1}=(1,1,1)$	$\tilde{1}=(1,1,1)$	$\tilde{1}=(1,1,2)$	$\tilde{1}=(1,1,1)$	$\tilde{1}=(1/2,1,3/2)$
Слабка перевага $\tilde{3}$	$\tilde{3}=(1,3,5)$	$\tilde{3}=(2,3,4)$	$\tilde{3}=(2,3,4)$	$\tilde{3}=(2,3,4)$	$\tilde{3}=(1,3,5)$	$\tilde{3}=(1,3/2,2)$
Сильна перевага $\tilde{5}$	$\tilde{5}=(3,5,7)$	$\tilde{5}=(4,5,6)$	$\tilde{5}=(4,5,6)$	$\tilde{5}=(4,5,6)$	$\tilde{5}=(3,5,7)$	$\tilde{5}=(3/2,2,5/2)$
Дуже сильна перевага $\tilde{7}$	$\tilde{7}=(5,7,9)$	$\tilde{7}=(6,7,8)$	$\tilde{7}=(6,7,8)$	$\tilde{7}=(6,7,8)$	$\tilde{7}=(5,7,9)$	$\tilde{7}=(2,5/2,3)$
Абсолютна перевага $\tilde{9}$	$\tilde{9}=(7,9,9)$	$\tilde{9}=(9,9,9)$	$\tilde{9}=(8,9,10)$	$\tilde{9}=(8,9,9)$	$\tilde{9}=(7,9,11)$	$\tilde{9}=(5/2,3,7/2)$
Проміжні значення між двома сусідніми судженнями: $\tilde{2}$, $\tilde{4}$, $\tilde{6}$, $\tilde{8}$	$\tilde{2}=(1,2,4)$ $\tilde{4}=(2,4,6)$ $\tilde{6}=(4,6,8)$ $\tilde{8}=(6,8,9)$	$\tilde{2}=(1,2,3)$ $\tilde{4}=(3,4,5)$ $\tilde{6}=(5,6,7)$ $\tilde{8}=(7,8,9)$	$\tilde{2}=(1,2,3)$ $\tilde{4}=(3,4,5)$ $\tilde{6}=(5,6,7)$ $\tilde{8}=(7,8,9)$	$\tilde{2}=(1,2,3)$ $\tilde{4}=(3,4,5)$ $\tilde{6}=(5,6,7)$ $\tilde{8}=(7,8,9)$	$\tilde{2}=(1,2,4)$ $\tilde{4}=(2,4,6)$ $\tilde{6}=(4,6,8)$ $\tilde{8}=(6,8,10)$	$\tilde{2}=(3/4,5/4,7/4)$ $\tilde{4}=(5/4,7/4,9/4)$ $\tilde{6}=(7/4,9/4,11/4)$ $\tilde{8}=(9/4,11/4,13/4)$

6.2. Нечіткий метод геометричної середньої

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Постановка задачі

Дано:

$D = \{(d_{ij} = [l_{ij}, m_{ij}, u_{ij}]) \mid i, j = 1,\ldots,n\}$ - трикутна НМПП

$$0 < l_{ij} \le m_{ij} \le u_{ij}$$

Знайти:

$w = \{w_i \mid i = 1,\ldots,n\}$ - вектор трикутних нечітких ваг альтернатив

$$w_i = [w_i^l, w_i^m, w_i^u]$$

Нечіткий метод геометричної середньої (Fuzzy Row Geometric Mean Method, FRGMM)

$$x = [x_1, x_2, x_3] \qquad x_i, y_i \in \Re$$

$$y = [y_1, y_2, y_3] \qquad x_1, y_1 > 0$$

$$v_i = \left(\prod_{j=1}^{n} d_{ij} \right)^{1/n} \qquad w_i = \frac{v_i}{\sum_{k=1}^{n} v_k}$$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$x * y = (x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3)$$

$$x / y = (x_1 / y_3, x_2 / y_2, x_3 / y_1)$$

$$x^n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n)$$

	a1	a2	a3	Ваги
a1	[1,1,3]	[1/5, 1/3, 1]	[1/5, 1/3, 1]	[0.06, 0.22, 1.05]
a2	[1, 3, 5]	[1/5, 1/3, 1]	[1, 3, 5]	[0.10, 0.46, 1.79]
a3	[1, 3, 5]	[1/5, 1/3, 1]	[1/5, 1/3, 1]	[0.08, 0.32, 1.37]

6.3. Метод FAHP

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com
Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Метод FAHP. Постановка задачі

Дано:

$D = \{(d_{ij} = [l_{ij}, m_{ij}, u_{ij}]) \mid i, j = 1,\ldots,n\}$ - трикутна НМПП

$$0 < l_{ij} \leq m_{ij} \leq u_{ij}$$

Знайти:

$w = \{w_i \mid i = 1,\ldots,n\}$ - вектор чітких ваг альтернатив $w_i \in \Re$ $w_i > 0$

Метод FAHP

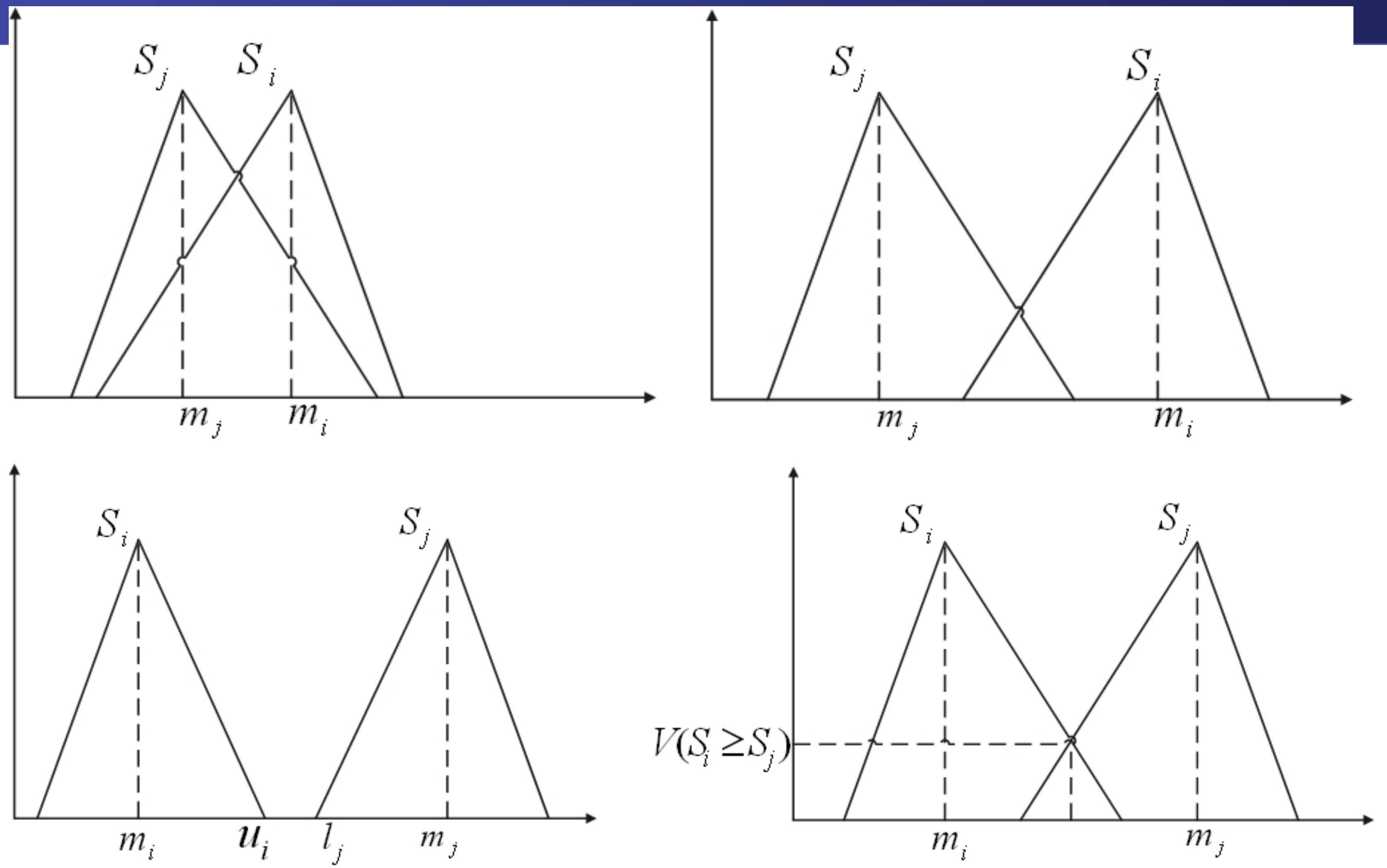
1 етап $$RS_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} = \left[\sum_{j=1}^{n} l_{ij}, \sum_{j=1}^{n} m_{ij}, \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\right] \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$S_i = \frac{RS_i}{\sum_{k=1}^{n} RS_k} = \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} l_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{kj}}, \frac{\sum_{j=1}^{n} m_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{kj}}, \frac{\sum_{j=1}^{n} u_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} l_{kj}}\right]$$

2 етап: Задамо нечітке відношення нестрогої переваги $S_i \geq S_j$

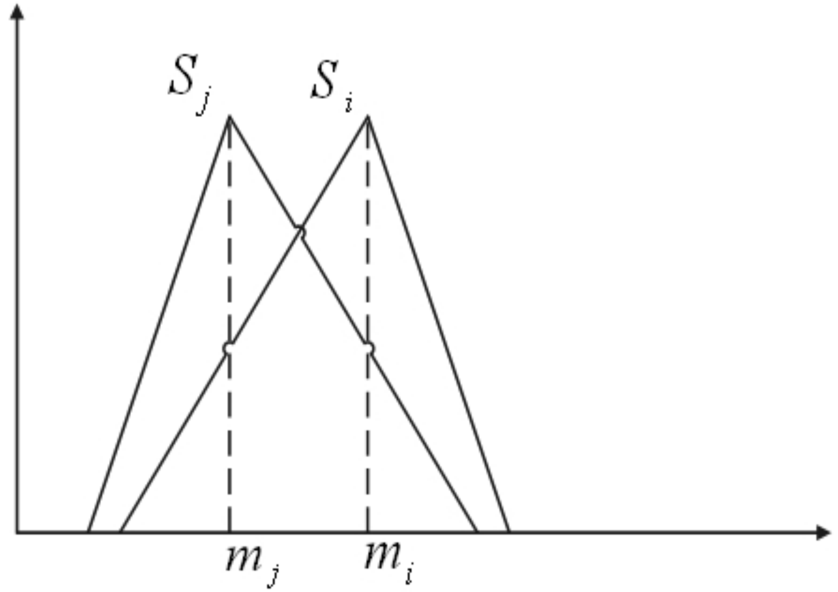
$$S_i = [l_i, m_i, u_i] \qquad S_j = [l_j, m_j, u_j]$$

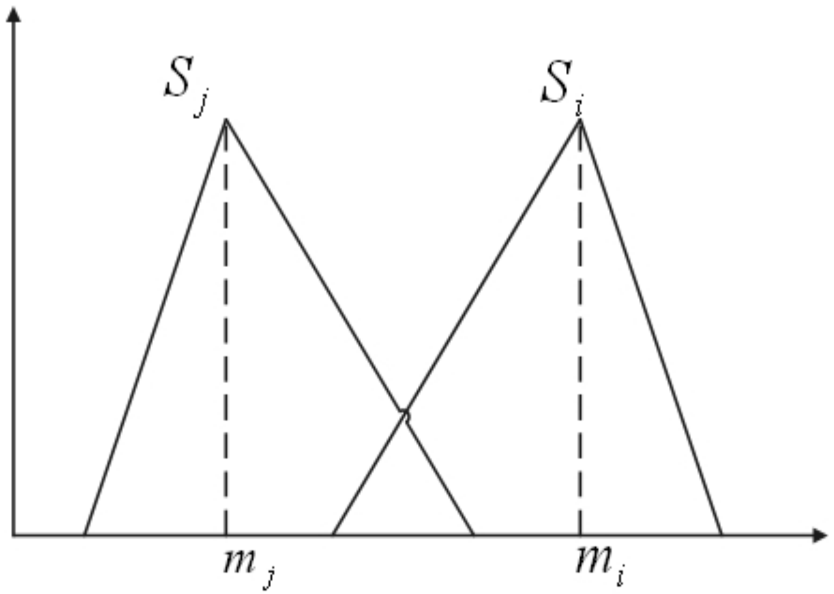
Метод FAHP



Метод FAHP

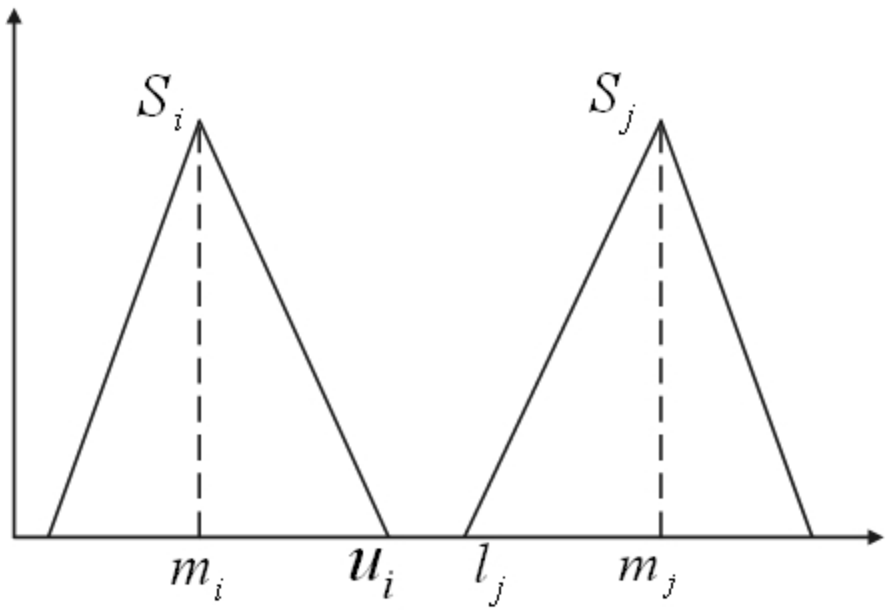
$$V(S_i \geq S_j) = 1 \qquad m_i \geq m_j$$



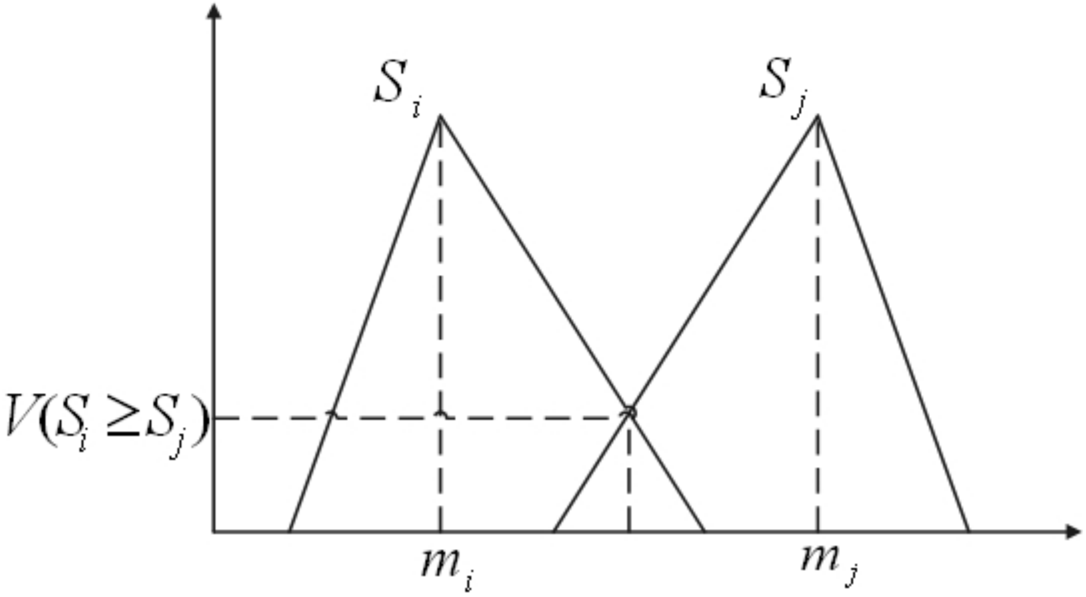


Метод FAHP

$$V(S_i \geq S_j) = 0 \qquad (l_j > u_i)$$



Метод FAHP



Метод FAHP

$$V(S_i \geq S_j) = \begin{cases} 1, & m_i \geq m_j \\ \dfrac{u_i - l_j}{(u_i - m_i) + (m_j - l_j)}, & (l_j \leq u_i) \wedge (m_i < m_j) \\ 0, & l_j > u_i \end{cases}$$

$$i, j = 1, \ldots, n; \quad j \neq i$$

Метод FAHP

3 етап: Розраховується ступінь переваги S_i над усіма $S_j,\ j = 1,..,n$

$$V(S_i) = V(S_i \geq S_j \mid j = \overline{1,n}) = \min_{j=\overline{1,n}} V(S_i \geq S_j)$$

4 етап: Розраховується нормований вектор ваг

$$w_i = \frac{V(S_i)}{\sum_{k=1}^{n} V(S_k)} \qquad i = \overline{1,n}$$

Метод FAHP
Приклад

Дано:

$A = \{a_i \mid i = 1,\dots,8\}$ - множина альтернатив рішень

C - критерій

$D = \{(d_{ij} = [l_{ij}, m_{ij}, u_{ij}]) \mid i, j = 1,\dots,n\}$ - ІМПП

$$L = \{(l_{ij}) \mid i, j = 1,\dots,8\}$$

$$M = \{(m_{ij}) \mid i, j = 1,\dots,8\}$$

$$U = \{(u_{ij}) \mid i, j = 1,\dots,8\}$$

Метод FAHP
Приклад

$$L = \{(l_{ij}) \mid i, j = 1,\ldots,8\}$$

1	4	6	1	7	2	5	3
0.167	1	3	0.2	5	0.25	2	0.333
0.125	0.2	1	0.143	2	0.167	0.333	0.2
0.333	3	5	1	6	1	4	2
0.111	0.143	0.25	0.125	1	0.143	0.2	0.143
0.25	2	4	0.333	5	1	3	1
0.143	0.25	1	0.167	3	0.2	1	0.25
0.2	1	3	0.25	5	0.333	2	1

Метод FAHP
Приклад

$$M = \{(m_{ij}) \mid i, j = 1,\ldots,8\}$$

1	5	7	2	8	3	6	4
1/5	1	4	1/4	6	1/3	3	1/2
1/7	1/4	1	1/6	3	1/5	1/2	1/4
1/2	4	6	1	7	2	5	3
1/4	1/6	1/3	1/7	1	1/6	1/4	1/6
1/3	3	5	1/2	6	1	4	2
1/6	1/3	2	1/5	4	1/4	1	1/3
1/4	2	4	1/3	6	1/2	3	1

Метод FAHP
Приклад

$$U = \{(u_{ij}) \mid i, j = 1,\dots,8\}$$

1	6	8	3	9	4	7	5
1/4	1	5	1/3	7	1/2	4	1
1/6	1/3	1	1/5	4	1/4	1	1/3
1	5	7	1	8	3	6	4
1/7	1/5	1/2	1/6	1	1/5	1/3	1/5
1/2	4	6	1	7	1	5	3
1/5	1/2	3	1/4	5	1/3	1	1/2
1/3	3	5	1/2	7	1	4	1

Метод FAHP
Приклад

$$S = \{(S_i) \mid i = 1, \dots, 8\}$$

	L	M	U
a1	0.173	0.267	0.410
a2	0.071	0.113	0.182
a3	0.025	0.041	0.069
a4	0.134	0.211	0.334
a5	0.013	0.017	0.026
a6	0.099	0.162	0.262
a7	0.036	0.061	0.103
a8	0.076	0.127	0.208

Метод FAHP
Приклад

$$V = \{(V(S_i \geq S_j)) \mid i, j = 1,\ldots,8\}$$

-	1	1	1	1	1	1	1
0.052	-	1	0.330	1	0.630	1	0.888
0	0	-	0	1	0	0.619	0
0.742	1	1	-	1	1	1	1
0	0	0.049	0	-	0	0	0
0.458	1	1	0.722	1	-	1	1
0	0.376	1	0	1	0.034	-	0.287
0.198	1	1	0.468	1	0.756	1	-

$$w = (0.408 \quad 0.021 \quad 0 \quad 0.303 \quad 0 \quad 0.187 \quad 0 \quad 0.081)$$

МЕТОДИ НЕЧІТКОГО МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Надія І. Недашківська
n.nedashkivska@gmail.com

ПІДХІД БЕЛМАНА-ЗАДЕ

Надія І. Недашківська
n.nedashkivska@gmail.com

Підхід Белмана-Заде (досягнення нечіткої цілі)

X - універсальна множина альтернатив

- Нечітка ціль прийняття рішень G - нечітка підмножина X

  $\mu_G(x)$ - ступінь досягнення цілі при виборі альтернативи x

- Нечітке обмеження C – нечітка підмножина X

- Розв’язок задачі – нечітка підмножина $D = G \cap C$

  $$\mu_D(x) = \min(\mu_G(x), \mu_C(x))$$

Підхід Белмана-Заде (продовження)

- $\mu_D(x) = \min(\mu_{G_1}(x), \ldots, \mu_{G_n}(x), \mu_{C_1}(x), \ldots, \mu_{C_m}(x))$

- $\mu_D(x) = \min(\lambda_1 \mu_{G_1}(x), \ldots, \lambda_n \mu_{G_n}(x), v_1 \mu_{C_1}(x), \ldots, v_m \mu_{C_m}(x))$

Вибір альтернативи з максимальним ступенем належності до нечіткого рішення:

$$x^* = \arg\max_x \mu_D(x)$$

Максимізуюча альтернатива

Приклад

X = {1, 2, …, 10} - універсальна множина альтернатив

G – x близьке до 5 C1 – x близьке до 4 C2 – x близьке до 6

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_G(x)$	0	0.1	0.4	0.8	1	0.7	0.4	0.2	0.1	0
$\mu_{C1}(x)$	0.3	0.6	0.7	1	0.9	0.8	0.5	0.3	0.2	0
$\mu_{C2}(x)$	0.2	0.4	0.6	0.7	0.9	1	0.8	0.6	0.4	0.2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_D(x)$	0	0.1	0.4	0.7	0.9	0.7	0.4	0.2	0.1	0

КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ НЕЧІТКОГО МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Надія І. Недашківська
n.nedashkivska@gmail.com

Задачі нечіткого математичного програмування

1) Максимізація звичайної функції

$f(x) \to \max$ $\qquad f(x) \geq 0$

на $\mu_C(x)$ - нечіткій множині допустимих альтернатив

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{\sup\limits_x f(x)}$$ - функція належності нечіткій множині цілі

Підхід Белмана-Заде $x_0 = \arg\max\limits_x \min(\tilde{f}(x), \mu_C(x))$

$\lambda \to \max$

при обмеженнях $\mu_C(x) \geq \lambda$ та $\tilde{f}(x) \geq \lambda$

Задачі нечіткого математичного програмування

2) Нечіткий варіант стандартної задачі математичного програмування

$$f(x) \to \max$$

$$g_i(x) \le 0 \qquad x \in X \qquad i = 1,\dots,m$$

$f(x) \underset{\sim}{\ge} z_0$ $\qquad z_0$ – задане значення

$f(x) < z_0 - a$ - сильне порушення умови $f(x) \ge z_0$

$g_i(x) \underset{\sim}{\le} 0$ $\qquad x \in X$ $\qquad$ допускаємо можливість порушення обмеження з певним ступенем

$g_i(x) > b_i$ - сильне порушення умови $g_i(x) \le 0$

Задачі нечіткого математичного програмування

$f(x) < z_0 - a$ - сильне порушення умови $f(x) \geq z_0$

$g_i(x) > b_i$ - сильне порушення умови $g_i(x) \leq 0$

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \leq z_0 - a \\ \mu(x,a), & z_0 - a < f(x) < z_0 \\ 1, & f(x) \geq z_0 \end{cases}$$

$$\mu_{C_i}(x) = \begin{cases} 0, & g_i(x) \geq b_i \\ \nu_i(x,b_i), & 0 < g_i(x) < b_i \\ 1, & g_i(x) \leq 0 \end{cases}$$

За підходом Белмана-Заде:

$$x^* = \arg\max_x \min(\mu_G(x), \mu_{C_1}(x), \ldots, \mu_{C_m}(x))$$