МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Н.І. Недашківська

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМАХ

ПРАКТИКУМ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Київ

2018

УДК 519.816, 517.9

Недашківська Н.І. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМАХ: ПРАКТИКУМ. НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК для студентів спеціальностей 124 «Системний аналіз» і 122 «Комп'ютерні науки» освітніх програм «Системний аналіз і управління», «Системний аналіз фінансового ринку», «Системи штучного інтелекту» та «Інтелектуальний аналіз даних в управлінні проектами». К., 2018, 202 с.

Гриф надано Вченою радою ІПСА НТУУ “КПІ імені І.Сікорського”
(Протокол №___ від _________ 2018 р.)

Автор: *Н.І. Недашківська*

Відповідальний редактор: *Н.Д. Панкратова, член-кор. НАН України, професор*

Рецензент: *П.І. Бідюк, доктор техн. наук, професор*

© Н.І. Недашківська, 2018

Зміст

стор

Вступ

Задачі прийняття рішень зустрічаються в усіх сферах людської діяльності і характеризуються великою різноманітністю. Фахівець, який за родом своєї роботи пов'язаний з управлінням, обов’язково повинен бути ознайомлений з методами і системами підтримки прийняття рішень на основі ієрархічних моделей, їх використанням. На відміну від більшості існуючих методів і засобів теорії дослідження операцій, економетрики та інших, що розв’язують задачі прийняття рішень з кількісними значеннями змінних і відношень між ними, методи і системи підтримки прийняття рішень спрямовані на розв’язання слабко-структурованих і важко формалізованих задач, які потребують використання суб’єктивних експертних оцінок.

На сьогоднішній день метод аналізу ієрархій (МАІ) розглядається високо потенційним інструментом підтримки прийняття фінансових рішень на підприємствах та у банківському секторі. МАІ використовувався для розв’язання таких задач як встановлення процентних ставок за банківськими депозитами, цінова оцінка банківських вкладів, визначення ставки кредиту, вибору інвестиційних проектів, рішення щодо маркетингових стратегій банку, рішення про злиття та про призначення офісів банку, оцінювання банківських відділень, вибір інформаційних систем у банку, рішення в галузі кадрових ресурсів банку та інших.

Розглянемо декілька задач у фінансовій сфері, які було розв’язано на практиці, використовуючи методи аналізу ієрархій та їх узагальнення. Задачу вибору оптимальних моделей альянсів між банками і страховими компаніями було розв’язано в два етапи. Спочатку було визначено вісім критеріїв, такі як розробка продукції, логіка прибутку, управління зв’язками з клієнтом, співвідношення доходи-витрати, джерела конфліктів, необхідний кредитний капітал, інвестиційні можливості та управління продажами. Потім три критерії з найменшими вагами виключено з розгляду і додано наступні критерії: 1) економії, обґрунтовані зростаннями масштабів виробництва і портфеля послуг, та 2) ризик. До оцінювання залучалася панель експертів – представників топ-менеджменту банків і страхових компаній. Оцінювання проводилося згідно з консенсусним принципом – інтенсивність того чи іншого парного порівняння визначалася в результаті обговорюваннями всіма учасниками панелі. В результаті кожній альтернативі поставлено у відповідність два числа: вага цієї альтернативи за фінансовими критеріями і вага за критерієм «ризик». Остаточне рішення покладалося на особу, яка приймає рішення (ОПР) відповідно до встановлених ОПР ваг цих двох критеріїв.

Метод аналізу мереж використовувався для дослідження проблеми фінансової кризи. Ставилася задача знаходження заходів, які мають запровадити уряди, щоб уникнути рецесії, безробіття та інших наслідків кризи. Метою було оцінити як знайдені заходи будуть впливати на такі головні економічні індикатори, як капітальні інвестиції, зайнятість, інфляція, долі ринків і рівень виробництва, і який із заходів має найбільший ефект на вказані макропоказники. Розглядалися економічні аспекти і відношення, універсальні для кожної держави. Пріоритети заходів розраховувалися на основі розробленої мережевої моделі, яка показує як заходи урядів впливають на головні економічні індикатори. Модель включала множину атрибутів, об’єднаних в наступні кластери: уряд, банки, виробники, наука і технології, населення та макропоказники. МАІ використовувався для оцінювання Програми стабілізації економіки Латвії.

МАІ, як доповнення до інших статистичних методів, використовувався в процесі багатокритеріального аналізу кредитоспроможності підприємств. Ієрархічна система показників та МАІ пропонуються для підвищення ефективності управління капіталом на підприємстві. Нечіткий варіант МАІ було впроваджено під час оцінювання критичних факторів вибору облігацій з високим виходом. В останній час МАІ та МАМ об’єднуються з традиційними системами CAMEL для рейтингової оцінки банків та Basel II для управління кредитним ризиком і таке об'єднання дає більше інформації для якісного прийняття рішень. Зокрема, гібридний метод CCAF/MAI для оцінювання кредитного ризику має кращі прогнозні властивості ніж традиційний метод дерев рішень.

МАІ було використано для прогнозування цін акцій та опціонів, де альтернативами розглядалися величини зростання та спадання цін акцій/опціонів у процентах. Ваги цих альтернатив інтерпретувалися як значення щільності розподілу у відповідних точках. Для оцінювання інтелектуальних активів фірми використовувався інтегрований метод МАІ з теорією збалансованої системи показників (balance score card). Було побудовано дві ієрархії: одна містила критерії унікальності компанії на ринку, друга – критерії колективності компанії.

МАІ застосовувався для аналізу інвестиційних проектів. Інвестиційні проекти оцінювалися за двома класами критеріїв: прямі доходи (чиста приведена вартість, норма прибутку всередині країни, інвестиційна норма прибутку, період відновлення, загальна сума інвестицій та інші) та потенціал для реалізації майбутнього доходу. В іншій задачі для оцінювання альтернативних варіантів інвестицій в ієрархію включено рівень сценаріїв станів економіки країни. За допомогою МАІ розв'язувалась задача вибору варіантів розміщення фінансових ресурсів в банківському секторі.

Оцінка кредитного ризику здійснювалася на основі побудованої 4-х рівневої ієрархії факторів ризику; МАІ використовувався для оцінювання ризикованості кредитної угоди комерційного банку на основі методики використання експертних оцінок для кількісної оцінки ступеня впливу факторів кредитного ризику. Ця методика, яка включає комп'ютерну обробку інформації, дозволила врахувати всі основні фактори ризику та взаємозв'язки між ними. В результаті застосування цієї методики скорочувалися витрати часу кредитних працівників за рахунок уніфікації оцінки, автоматизації обробки інформації, а також використання наявних у банку даних пов'язаних з минулими операціями у вигляді вагових і нормуючих коефіцієнтів.

МАІ застосовувався в практичній діяльності банків при виборі оптимального виду акредитива; виділено і охарактеризовано критерії, за якими проводиться порівняння видів акредитива; побудовано математичну модель для оптимізації вибору ефективного виду акредитива за МАІ. Показано, що автоматизація побудованої моделі у вигляді внутрішньобанківського програмного продукту дозволяє скоротити час на ПР, зменшити міру відповідальності співробітника, який приймає рішення, та підвищити ефективність прийнятого рішення і ступінь довіри до нього. МАІ було використано для вибору варіантів формування ресурсного забезпечення банку, виходячи з потреб конкретних інвестиційних рішень.

МАІ пропонувався як ефективний спосіб прийняття рішення щодо реструктуризації та інвестування неплатоспроможних підприємств в умовах невизначеності. На практиці застосовано адаптований МАІ для прийняття рішень щодо вибору неплатоспроможного підприємства з метою реструктуризації та інвестування, що підвищує ефективність проведення санації і ризикових операцій. МАІ – це метод, який найбільш широко використовується у всьому світі при виборі стратегії фірми, оцінюванні ризику капіталовкладень, кредитоспроможності клієнтів і кандидатів у партнери. МАІ видається більш обгрунтованим шляхом вирішення багатокритеріальних задач у складній обстановці масового банкрутства підприємств і необхідності усвідомленого інвестування в умовах нестабільного економічного середовища. Розроблено метод побудови стратегічної карти розвитку підприємства.

Із застосуванням МАІ запропоновано методику оцінювання банкрутства на основі розгляду різних видів банкрутства підприємства: банкрутство бізнесу, банкрутство власника і банкрутство виробництва. Ця методика дозволила визначити інтегрований показник потенційного банкрутства в цілому і за видами. Розроблено методику визначення підсумкового рейтингу за рівнями економічної безпеки підприємства. Встановлено, що завдяки застосуванню МАІ для вирішення даної проблеми стає можливим охопити і оцінити ступінь впливу як чинників, за якими можливе проведення певних вимірювань, так і «невловимих факторів», які оцінюються з використанням суджень експертів.

З використанням МАІ запропоновано алгоритм вибору економічної стратегії розвитку корпоративних структур в чорній металургії. На основі цього алгоритму здійснюється аналіз та оцінювання варіантів залежно від зміни дивідендної стратегії, зміни стратегії управління капіталом та підвищення оборотності активів підприємства.

МАІ, як доповнення до інших методів, використовується в діяльності інвестиційних та консалтингових компаній, а також команд з антикризового управління підприємствами, при розв'язанні задач багатокритеріального аналізу кредитоспроможності підприємств, оцінювання банкрутства підприємства, підвищення ефективності управління капіталом на підприємстві, пошуку ефективних шляхів реструктуризації та інвестування неплатоспроможних підприємств в умовах невизначеності, оцінюванні інвестиційних проектів, при виборі стратегії фірми. Традиційні системи рейтингової оцінки банків CAMEL та управління кредитним ризиком Basel II в останній час об'єднуються з МАІ та МАМ і вважається, що таке об'єднання дає більше інформації для якісного прийняття рішень. МАІ застосовується при проведенні бенчмаркінгу. Використовуються поєднання МАІ з методами розгортання функції якості QFD, balanced scorecard та комплексного аналізу даних DEA.

В допомогу ОПР для збору і аналізу великого об'єму як кількісних так і якісних даних створено комп'ютерні системи підтримки прийняття рішень (СППР). До сучасних програмних засобів, які повністю або частково реалізують методи аналізу ієрархій або мереж, є найбільш розповсюдженими і універсальними, відносяться Decision Lens, СОЛОН (SOLON), Logical Decisions, Make It Rational, СВИРЬ (SVIR), Mpriority, Super Decisions і СППР "Вибір". Загальні риси цих СППР в основному включають наявність моделі предметної області у вигляді ієрархії критеріїв, підкритеріїв і альтернатив рішень, графічний інтерфейс користувача, графічні засоби аналізу чутливості, а також можливість обробки оцінок групи експертів (табл. 1 і 2).

Особливість СППР Super Decisions полягає у обробці мережевих моделей ППР, що містять критерії доходів, витрат, можливостей і ризиків.

Таблиця 1. Функціональні характеристики сучасних СППР, які реалізують методи аналізу ієрархій або мереж

Назва СППР	Парні порівняння	Підвищення узгодженості	Нечіткі ЕО	Неповні ЕО	Аналіз чутливості	Оцінювання ризиків	Групові ЕО	Мережеві моделі
Super Decisions	Так	-	-	-	Так	Так	Так	Так
Decision Lens	Так	-	-	-	Так	Так	Так	-
Logical Decisions	Так	-	-	-	Так	-	Так	-
Make It Rational	Так	Так	-	-	Так	-	Так	-
СОЛОН	Так	-	-	-	Так	Так	Так	Так
Mpriority	Так	Так	-	-	Так			-
ВЫБОР	Так	Так	-	-	Так	-		-
СВИРЬ	Так	-	-	-	Так	-	Так	-

Таблиця 2. Технічні характеристики сучасних СППР, які реалізують методи аналізу ієрархій або мереж

Назва СППР	Крос-плат-форменість	Програмне забезпечення з відкритим кодом	Візуалізація моделі в графічному режимі	Редагування моделі у графічному режимі	Шаблони моделей	Веб-інтерфейс
SuperDecisions	Так	-	Так	-	Так	Так
Decision Lens	Так	-	Так	-	Так	Так
Logical Decisions	-	-	Так	-		-
Make It Rational		-		-	Так	Так
СОЛОН	-	-	Так		Так	
Mpriority	-	-	-	-	Так	-
ВЫБОР	-	-	Так	-	Так	-
СВИРЬ	-	-	Так	-		-

Розглянуті СППР, які повністю або частково реалізують методи аналізу ієрархій або мереж, мають ряд обмежень, які впливають на ефективність їх використання. Так, в цих СППР експерт має обмежені можливості змінювати свої чіткі і нечіткі оцінки, підвищувати рівень їх узгодженості в процесі розв’язання задачі. Обмежено застосовуються в розглянутих СППР нечіткі методи обчислення локальних і глобальних ваг елементів ієрархії або мережі, а також методи на основі неповної множини експертних суджень. Практично не враховуються в таких СППР при обчисленні ваг особисті якості експерта типу песимізм і оптимізм, а також невизначеність шкали, що використовується експертом при виконанні оцінювання. При проведенні аналізу чутливості в розглянутих СППР не досліджується стійкість локального ранжування альтернатив рішень до змін в експертних оцінках, не обчислюються інтервали стійкості результуючого агрегованого ранжування альтернатив до змін у вагах критеріїв.

Метою лабораторних робіт з дисципліни «Прийняття рішень в ієрархічних системах» є порівняння різних методів підтримки прийняття рішень на основі ієрархічних моделей, дослідження з метою практичного підтвердження окремих властивостей цих методів, формування умінь та навичок практичного використання та створення програмних модулів для систем підтримки прийняття рішень на основі ієрархічних моделей. В результаті виконання лабораторних робіт студенти повинні вміти застосовувати сучасні методи збору і обробки знань експертів, застосовувати методи і моделі аналізу ієрархій для розрахунку пріоритетів альтернатив рішень за багатьма критеріями рішень, методи оцінювання і підвищення узгодженості експертних оцінок, підходи до аналізу чутливості отриманих результатів до збурень в експертних оцінках, а також набути практичних навичок у використанні і реалізації вказаних методів при вирішенні практичних задач підтримки прийняття рішень.

Практикум 1

Методи розрахунку ваг альтернатив рішень на основі експертних оцінок парних порівнянь

Мета роботи:

- *Обчислити оцінки коефіцієнтів відносної важливості (ваг) альтернатив для задач прийняття рішень з одиничним критерієм на основі експертних оцінок парних порівнянь цих альтернатив. Порівняти результати, отримані наступними методами*:
  - головного власного вектору;
  - оптимізаційними;
  - арифметичної нормалізації;
  - «лінія».
- *Оцінити узгодженість експертних оцінок з використанням наступних показників:*
  - відношення узгодженості CR;
  - геометричний індекс узгодженості GCI;
  - гармонічне відношення узгодженості HCR;
  - спектральний коефіцієнт узгодженості k_y.
- *Розв'язати модельну задачу ППР на основі експертних оцінок парних порівнянь в шкалі.*

1. Теоретичні відомості

Загальна характеристика методів парних порівнянь. Матриці парних порівнянь (МПП)

Нехай задана множина альтернатив $A = \{a_i\}$, $i = 1,...,n$. В методах парних порівнянь кожна альтернатива порівнюється в загальному випадку з усіма іншим альтернативами відносно заданого критерію і за результатами порівнянь формується матриця парних порівнянь (табл. 1.1).

Означення. Матрицею парних порівнянь називається квадратна матриця $D = \{d_{ij} \mid i, j = 1,...,n\}$, де елемент $d_{ij} \in R$ в кількісній формі виражає силу переваги альтернативи a_i над альтернативою a_j, і виконується властивість оберненої симетричності:

$d_{ji} = 1/d_{ij}$, $d_{ij} > 0$ (мультиплікативні парні порівняння),

$d_{ji} = -d_{ij}$ (адитивні парні порівняння).

Для надання елементам МПП конкретних числових значень перед початком процедури порівняння розробляються шкали вербальних експертних суджень з градаціями s_k і відповідних кількісних виражень цих градацій x_k, де $x_k \in R$, $k = 0,...,K$.

Таблиця 1.1. Матриця парних порівнянь

	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_n
a_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	$\cdots$	d_{1n}
a_2		d_{22}	d_{23}	$\cdots$	d_{2n}
a_3			d_{33}	$\cdots$	d_{2n}
$\vdots$				$\cdots$	$\vdots$
a_n					d_{nn}

Однією з широко розповсюджених вербальних шкал є фундаментальна шкала відносної важливості (табл. 1.2). Експериментально доведена ефективність цієї шкали над іншими шкалами.

Важливим моментом для подальшої обробки МПП є апріорний вибір інтерпретації елементів МПП в термінах ваг об’єктів. В загальному випадку

$$d_{ij} = f(w_i, w_j), \tag{1.1}$$

де f - монотонна функція.

Достатньо часто на практиці використовуються представлення:

$f(w_i, w_j) = \dfrac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij}$ (мультиплікативні парні порівняння),

$f(w_i, w_j) = (w_i - w_j) + \varepsilon_{ij}$ (адитивні парні порівняння).

Таблиця 1.2. Фундаментальна шкала експертних суджень

Інтенсивність важливості x_k	Якісна оцінка (судження s_k)	Пояснення
1	Однаково важливі	Елементи рівні за своїм значенням
3	Ненабагато важливіші	Існують вербальні висловлювання щодо пріоритету одного елементу над іншим, але ці висловлювання досить непереконливі
5	Суттєво важливіші	Існують добрі докази та логічні критерії, які можуть показати, що один з елементів є більш важливий
7	Значно важливіші	Існує переконливий доказ великої значущості одного елемента в порівнянні з іншим
9	Абсолютно важливіші	Усвідомлення пріоритету одного елементу над іншим максимально підтверджується
2,4,6,8	Проміжні оцінки	Потрібен певний компроміс

Якщо існує вектор ваг *w*, такий що $\varepsilon_{ij} = 1$ або $\varepsilon_{ij} = 0$ для всіх $i, j = 1,...,n$, то така МПП називається теоретичною,.

МПП $D = \{d_{ij} \mid i, j = 1,...,n\}$ називається *узгодженою,* якщо для всіх її елементів виконується властивість транзитивності:

$d_{ij} = d_{ik} d_{kj}$ для $\forall i, j, k$ (мультиплікативна МПП),

$d_{ij} = d_{ik} + d_{kj}$ для $\forall i, j, k$ (адитивна МПП).

Теоретична МПП завжди є узгодженою, оскільки

$d_{ij} = \frac{w_i}{w_j} = \frac{w_i}{w_k}\frac{w_k}{w_j} = d_{ik}d_{kj}$ (мультиплікативна МПП),

$d_{ij} = w_i - w_j = (w_i - w_k) + (w_k - w_j) = d_{ik} + d_{kj}$ (адитивна МПП).

При мультиплікативних парних порівняннях експерту ставиться питання «у скільки разів альтернатива a_i переважає альтернативу a_j відносно критерію», при адитивних порівняннях – «на скільки».

В загальному випадку заповнена експертом МПП відрізняється від теоретичної. Основними причинами цього є як неузгодженість оцінок експерта при виборі вербальних суджень, так і апріорна фіксація кількісних виражень градацій шкали.

Методи парних порівнянь – одні з найбільш теоретично обґрунтовані методи знаходження ваг альтернатив відносно певного критерію прийняття рішень. Результати багаточисленних досліджень показують, що парні порівняння дозволяють найкращим чином врахувати психофізіологічні особливості людини і тому призводять до більш точних оцінок експертів.

Постановка задачі

Дано:

- множина альтернатив $A = \{a_i\}$, $i = 1,...,n$,
- якісний критерій C.

Знайти:

- ваги альтернатив $W = \{w_i\}$, $w_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Метод головного власного вектору (eigenvector method, EM)

Ідея методу. Метод EM є методом мультиплікативних парних порівнянь. Експерт попарно порівнює альтернативи у фундаментальній шкалі і за результатами порівнянь заповнюється $n(n-1)/2$ елементів верхньої трикутної частини МПП D. Елементи нижньої трикутної частини розраховуються за правилом оберненої симетричності $d_{ji} = 1/d_{ij}$.

Метод ЕМ. Вектором ваг є власний вектор МПП D, що відповідає її найбільшому власному числу.

Індексом узгодженості (consistency index) МПП D називається величина

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}.$$

Відношенням узгодженості (consistency ratio) МПП називається

$$CR = \frac{CI}{MRCI},$$

де $MRCI$ - середнє значення індексів узгодженості для заповнених випадковим чином МПП (табл. 1.3).

Критерій допустимої неузгодженості. МПП узгоджена т.т.т.к. $CR = 0$. МПП допустимо неузгоджена і може використовуватися для розрахунку ваг, якщо значення CR не перевищує встановлений поріг (табл. 1.4).

Якщо МПП узгоджена, то всі її рядка лінійно залежні між собою.

Ранг узгодженої МПП дорівнює одиниці.

Спектр узгодженої МПП складається з двох власних чисел: $\lambda_1 = n$ кратності 1 і $\lambda_2 = 0$ кратності n-1.

Таблиця 1.3. Значення $MRCI$ в залежності від розмірності n МПП

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$MRCI$	0	0	0,52	0,89	1,11	1,25	1,35	1,40	1,45	1,49	1,52	1,54	1,56	1,58	1,59

Таблиця 1.4. Порогові значення CR залежно від розмірності n МПП

n	Порогове значення CR
3	0.05
4	0.08
≥5	0.1

Існує два чисельних методи знаходження головного власного вектору МПП D: граничний і степеневий методи.

Граничний метод

1. задати довільний вектор $x_0 > 0$;
2. розрахувати $D^k x_0$, $k \geq 1$;
3. визначити норму вектору $\|y\| \equiv \sum |y_i|$, тоді $\frac{D^k x_0}{\|D^k x_0\|}$ збігається до головного власного вектору матриці D при $k \to \infty$, а $\frac{\|D^k x_0\|}{\|D^{k-1} x_0\|}$ - до її максимального власного числа.

Степеневий метод

1. визначити норму вектору $\|y\| \equiv \sum |y_i|$; задати довільний вектор $x_0 > 0$, $\| x_0 \| = 1$;
2. розрахувати послідовність скалярних значень $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ і векторів $x_1, x_2, \ldots$, які задовольняють умовам $\|x_1\| = \|x_2\| = \ldots = 1$ і $Dx_{k-1} = \lambda_k x_k$. Ці значення розраховуються за формулами: $x_k = \frac{Dx_{k-1}}{\|Dx_{k-1}\|}$, $\lambda_k = \|Dx_{k-1}\|$.

   Тоді x_k збігається до головного власного вектору матриці D при $k \to \infty$, а λ_k - до її максимального власного числа.

Обидва наведені методи залежать від співвідношення між максимальним і наступним найбільшим власними числами і мають порядок збіжності $O\left(1/\lambda_{max}^2\right)$. Відмінність між ними полягає в тому, що в степеневому методі нормалізація стовпчиків степені МПП відбувається після кожної ітерації, а в граничному методі проводиться нормалізація граничної МПП (МПП у великій степені).

Метод геометричної середньої (row geometric mean method, RGMM)

Крім методу ЕМ для знаходження ваг використовують й інші методи, які в основному базуються на мінімізації відхилення елементів заданої експертом МПП від невідомої узгодженої МПП.

Нехай маємо мультиплікативну модель парних порівнянь $d_{ij} \approx w_i / w_j$, що еквівалентно $d_{ij} w_j \approx w_i$, $w_j \neq 0$, де "$\approx$" означає наближену рівність. Ваги w можуть бути знайдені з однієї з наступних задач математичного програмування:

<u>Задача 1</u>

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (d_{ij} - w_i / w_j)^2$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w_i > 0, \; i = 1, ..., n.$$

<u>Задача 2</u>

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (d_{ij} w_j - w_i)^2$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w_i > 0, i = 1, ..., n.$$

Задачі 1 і 2 є не випуклими задачами нелінійного програмування, тому є практично неефективними. Тому на практиці для знаходження ваг формулюють і розв’язують наступну задачу лінійного програмування:

<u>Задача 3</u>

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\ln d_{ij} - \ln w_i + \ln w_j)^2$$ при обмеженнях $\prod_{i=1}^{n} w_i = 1$, $w_i > 0, i = 1, ..., n$.

За умови мультиплікативної нормалізації $\prod_{i=1}^{n} w_i = 1$ розв’язком задачі 3 є ваги, розраховані за методом *RGMM:*

$$v_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}.$$

Нормовані до одиниці ваги альтернатив розраховуються за формулою

$$w_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}} \ .$$

Метод геометричної середньої дуже широко використовується на практиці як наближення до методу ЕМ. Однак, лише при гарній узгодженості МПП ваги, знайдені за цими двома методами, є близькими. Якщо ж заповнена експертом МПП має високий рівень неузгодженості, то ці ваги будуть значно відрізнятися між собою.

При використанні методу RGMM мірою неузгодженості МПП слугує незміщена оцінка дисперсії збурень:

$$s^2 = \frac{S}{d.f} = \frac{2\sum_{i<j}\left(\ln d_{ij} - \ln\frac{v_i}{v_j}\right)^2}{(n-1)(n-2)},$$

де S - квадрат відстані між $\ln d_{ij}$ і $\ln\frac{v_i}{v_j}$, $d.f$ - (скорочено від degree of freedom) - кількість ступенів свободи, яка дорівнює різниці між кількістю оцінок $n(n-1)/2$ і кількістю оцінюваних параметрів $n-1$.

З точки зору детермінованого методу, менше значення s^2 свідчить про коротшу відстань між d_{ij} і $\frac{v_i}{v_j}$, тому кращою є відповідність між оцінками експертів і вектором ваг v, і, як наслідок, більш узгодженою є МПП D.

<u>Геометричним індексом узгодженості</u> (geometric consistency index, GCI) МПП D при використанні методу RGMM знаходження ваг називається:

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}\log^2 e_{ij} \quad ,$$

де $e_{ij} = d_{ij}v_j / v_i$ - помилка апроксимації відношення ваг v_i / v_j за допомогою елемента МПП d_{ij}.

Математичне сподівання GCI для заповненої випадковим чином МПП D при умові, що елементи МПП є незалежними у сукупності, обернено симетричними і мають однаковий розподіл, є постійною величиною, рівною $E(GCI) = Var(\ln d_{ij})$.

Для малих помилок e_{ij} геометричний індекс узгодженості GCI пропорційний відношенню узгодженості CR. Використовуючи імітаційне моделювання, оцінено регресію GCI від CR для різних інтервалів CR в межах $CR \le 0.1$. Отримані порогові значення для GCI наведені в табл. 1.5.

Таблиця 1.5. Порогові значення GCI, n - розмірність МПП

Порогове значення GCI		
$n = 3$	$n = 4$	$n \ge 5$
0.1573	0.3526	0.370

Якщо значення GCI, розраховані для заданих експертами МПП, перевищують вказані в табл. 1.5 пороги, то це свідчить про високу неузгодженість оцінок експертів.

Критерій допустимої неузгодженості. МПП узгоджена т.т.т.к. GCI=0. МПП допустимо неузгоджена і може використовуватися для розрахунку ваг, якщо значення GCI не перевищує встановлений поріг (табл. 1.5).

Метод адитивної нормалізації (additive normalization, AN)

Метод AN розглядається як апроксимація методу EM, що не потребує розрахунку власних векторів. При гарній узгодженості МПП в межах інтервалів для CR ваги, отримані методом AN, є близькими до ваг, отриманих методом EM.

Нехай $s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ - сума j-го стовпчика заданої експертом МПП A.

Метод AN. Вагами є величини $(s_1^{-1},...,s_n^{-1})$, обернені до сум стовпчиків МПП.

Для будь-якої обернено симетричної матриці B розмірності $n \times n$ виконується $\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1} \le 1$, де s_j - сума j-го стовпчика B. Рівність має місце тоді і тільки тоді коли B є узгодженою.

Гармонічним індексом узгодженості (harmonic consistency index, HCI) заповненої експертом МПП називається

$$HCI(n) = \frac{\left(HM(s) - n\right)(n+1)}{n(n-1)},$$

де $HM(s) = n\left(\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1}\right)^{-1}$ - гармонічна середня для $s = \left\{ s_j \,\middle|\, j \in [1;n] \right\}$.

Гармонічним відношенням узгодженості називається

$$HCR(n) = \frac{HCI(n)}{HRCI(n)},$$

де $HRCI(n)$ - середнє значення *HCI(n)* для випадкових МПП.

Значення HCI близькі до CI, тому порогові значення для HCR встановлені такі ж, як і для CR (див. табл.1.4).

Критерій допустимої неузгодженості. МПП узгоджена т.т.т.к. HCR=0. МПП допустимо неузгоджена і може використовуватися для розрахунку ваг, якщо значення HCR не перевищує встановлений поріг (табл. 1.4).

Метод «лінія» парних порівнянь

Ідея методу. Метод «лінія» є методом парних порівнянь за припущення, що оцінки експерта узгоджені. Вибирається адитивна чи мультиплікативна модель залежності ваг від величин переваг і розраховуються ваги альтернатив.

Метод «лінія» складається з наступних етапів:

1. Експерт вибирає a_e - еталонну альтернативу і порівнює з нею всі інші альтернативи a_i, $i \neq e$. При мультиплікативних порівняннях експерту ставиться питання «у скільки разів a_i переважає над a_e відносно критерію C», при адитивних порівняннях – «на скільки».

За результатами формується матриця $D_e = \{d_{ie} \mid i = 1,...,n\}$ ступенів переваг a_i над a_e.

2. Еталону a_e присвоюється вага v_e, під якою розуміється кількісна міра ступеня вираженості у альтернативи a_e властивості, що описується критерієм C.

3. Вага кожної альтернативи виражається через вагу еталона. Обчислюються ненормовані ваги $v_i = \varphi(v_e, d_{ie})$, $\forall\ i \neq e$, де φ - монотонна функція. При мультиплікативних порівняннях $v_i = v_e \varphi_{mult}(d_{ie})$, $\varphi_{mult}(1) = 1$, при адитивних порівняннях $v_i = v_e + \varphi_{ad}(d_{ie})$, $\varphi_{ad}(0) = 0$.

4. Здійснюється нормування ваг і знаходяться відносні ваги $w_i = v_i / \sum_{i=1}^{n} v_i$.

Трудомісткість: $n-1$ порівнянь.

В методі «лінія» експерт визначає лише один рядок МПП, тобто порівнює всі альтернативи з однією вибраною, еталонною альтернативою. У методі «трикутник» (до якого відносяться, зокрема, методи ЕМ, RGMM та AN) треба виконати порівняння кожного об'єкту з кожним, тобто всього $\frac{n(n-1)}{2}$ порівнянь, інші елементи МПП обчислюються за допомогою певних розрахунків. В методі «трикутник» експертна інформація надлишкова і використовується для оцінювання її узгодженості, суперечливості.

В i-му рядку МПП альтернатива a_i виступає еталоном. Тому МПП – це результат порівнянь всіх альтернатив з різними еталонними альтернативами. Відносні ваги визначаються як результати обробки МПП.

Порівняння методів парних порівнянь «лінія» і EM, RGMM, AN

Для методів EM, RGMM і AN необхідно виконати достатньо велику кількість парних порівнянь $n(n-1)/2$, де n - кількість порівнюваних елементів. Отримана в результаті експертна інформація є надлишковою і використовується для підвищення достовірності оцінювання ваг. В умовах обмеженості часових і фінансових ресурсів використовують метод «лінія», який потребує лише $n-1$ порівнянь.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Необхідно вибрати оптимальний канал для розміщення реклами на телебаченні. Експерт виконав порівняння каналів у фундаментальній шкалі. В результаті отримано наступні оцінки: перший канал однаковий з другим і четвертим каналами і ненабагато кращий за третій; другий канал слабо переважає третій і однаковий з четвертим каналом. Третій ненабагато гірший за четвертий.

Побудувати мультиплікативну матрицю парних порівнянь. Встановити, чи мають експертні оцінки допустимий рівень неузгодженості за означенням.

Розв'язання

Згідно з фундаментальною шкалою відносної важливості МПП дорівнює: $D^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Перевіримо узгодженість МПП за означенням. Оскільки $n=4$, то кількість транзитивностей, які потрібно перевірити, дорівнює $n!/(3!(n-3)!)=4$:

i	j	k	$d_{ij}=d_{ik}d_{kj}$
1	2	3	виконується
1	2	4	виконується
1	3	4	виконується
2	3	4	виконується

Таким чином, МПП за означенням є узгодженою.

Приклад 2. Чи є наступна матриця парних порівнянь слабко узгодженою:

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & \frac{1}{4} \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{6} \\ 1 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}?$$

Розв'язання. Відношення узгодженості цієї МПП дорівнює $CR=0.344$, воно значно перевищує порогове значення 0.08 для $n=4$ і тому МПП D недопустимо неузгоджена.

Для перевірки слабкої узгодженості МПП треба шукати в ній нетранзитивні ранжування (цикл). Дійсно, нетранзитивне ранжування існує: $a_1 \succ a_2$ (оскільки d_{12}>1), $a_2 \succ a_3$ (d_{23}>1), але $a_1 \prec a_3$ (d_{13}<1). Тому *задана МПП є слабко неузгодженою*.

Приклад 3. Чи є наступна матриця парних порівнянь слабко узгодженою:

$$D1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так, матриця парних порівнянь D1 слабко узгоджена.

Приклад 4. Вибрати одного з трьох кандидатів на деяку посаду за критерієм «досвід». В результаті порівняння у фундаментальній шкалі першого кандидата з усіма іншими виявилося, що його досвід не набагато кращий за досвід другого, але сильно переважає досвід третього. Досвід другого кандидата практично такий же як і у третього, тільки трохи кращий.

Для розрахунку коефіцієнтів відносних важливостей альтернатив рішень використати методи головного власного вектору (EM) і геометричної середньої (RGMM) парних порівнянь. Розрахувати індекси узгодженості CI і GCI оцінок особи, що приймає рішення. Чи є оцінки допустимо неузгодженими?

Розв'язання

Побудуємо матрицю парних порівнянь (МПП) за заданими оцінками, використовуючи фундаментальну шкалу відносної важливості:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1/3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1/5} & \mathbf{1/2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

За означенням ця МПП неузгоджена.

Згідно з методом головного власного вектору, коефіцієнти відносних важливостей альтернатив рішень – це елементи головного власного вектору матриці парних порівнянь. Розрахуємо найбільше власне число та відповідний йому власний вектор МПП.

$$\det(D-\lambda I)=\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 5 \\ 1/3 & 1-\lambda & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1-\lambda \end{pmatrix}=(1-\lambda)^3-3(1-\lambda)+\tfrac{61}{30}$$

Значення $\lambda_{\max}$ розраховується як найбільший дійсний корінь рівняння $(1-\lambda)^3-3(1-\lambda)+\frac{61}{30}=0$. Єдиний дійсний корінь дорівнює $\lambda=3.004$, це і є максимальне власне число МПП.

Тоді індекс узгодженості CI дорівнює

$$CI=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}=\frac{3.004-3}{3-1}=0.002\,.$$

Відношення узгодженості $CR=\dfrac{CI}{MRCI}=\dfrac{0.002}{0.51}=0.004$ не перевищує порогове значення 0.05 (для $n=3$). Тому *МПП D допустимо неузгоджена* (для повністю узгодженої МПП $CR=0$) і, як наслідок, може використовуватися для знаходження ваг.

Ваги v розраховуються на основі системи лінійних рівнянь $\boldsymbol{D\nu}=\boldsymbol{\lambda}_{\max}\mathbf{v}$, в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} 1\cdot v_1+3\cdot v_2+5\cdot v_3=3.004\cdot v_1 \\ \frac{1}{3}\cdot v_1+1\cdot v_2+2\cdot v_3=3.004\cdot v_2 \\ \frac{1}{5}\cdot v_1+\frac{1}{2}\cdot v_2+1\cdot v_3=3.004\cdot v_3 \end{cases}.$$

Система має безліч розв’язків, оскільки її детермінант дорівнює нулю. Один з ненульових розв’язків: $v_1=5.2891$, $v_2=1.8815$, $v_3=1$.

Нормовані ваги: $w_1=0.648$, $w_2=0.230$, $w_3=0.122$.

Наближеним до методу головного власного вектора є метод геометричної середньої. Згідно з цим методом ненормовані ваги дорівнюють

$$v_1=\sqrt[3]{1\cdot 3\cdot 5}=2.4662\,,\ v_2=\sqrt[3]{\tfrac{1}{3}\cdot 1\cdot 2}=0.8736\,,\ v_3=\sqrt[3]{\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 1}=0.4642\,.$$

Після нормування отримаємо ваги $w_1=0.648$, $w_2=0.230$, $w_3=0.122$.

Геометричний індекс узгодженості дорівнює

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i<j} (ln d_{ij} - ln \frac{v_i}{v_j})^2 = 0.011.$$

Цей індекс не перевищує порогового значення 0.1573 (для $n = 3$ і $CR^{порог} = 0.05$), тому *МПП D має допустиму неузгодженість* (для повністю узгодженої МПП $GCI = 0$).

Результати показують, що ваги, отримані точним та наближеним методами, співпадають з точністю $\mathbf{10^{-3}}$. Це є результатом гарної узгодженості МПП D. В загальному випадку, при більшому рівні неузгодженості МПП ці ваги відрізняються в більшій мірі.

Приклад 5. Розрахувати ваги альтернатив рішень, якщо матриця парних порівнянь альтернатив наступна:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки задана матриця парних порівнянь (МПП) є узгодженою (перевірити за означенням!), то *вектором ваг є будь-який вектор-стовпчик МПП.*

Нормовані ваги – це нормований будь-який стовпчик МПП.

Знайдемо ваги w1, w2, w3, w4, пронормувавши, наприклад, останній вектор-стовпчик МПП шляхом ділення на суму елементів стовпчика, отримаємо: w1=6/15=0.4, w2=w1=0.4, w3=2/15=0.13, w4=1/15=0.07.

Приклад 6. Розрахувати коефіцієнти відносної важливості альтернатив рішень, використовуючи методи геометричної середньої (RGMM) та головного власного вектору (EM), якщо матриця парних порівнянь альтернатив дорівнює:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1/7} & \mathbf{1/4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Згідно з методом геометричної середньої:

ненормовані ваги

$$v = \left(\sqrt[3]{1\cdot 2\cdot 7},\ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 4},\ \sqrt[3]{\tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot 1}\right) = (2.4101,\ 1.2599,\ 0.3293),$$

нормовані ваги

$$w = \left(\tfrac{2.4101}{2.4101+1.2599+0.3293},\ \tfrac{1.2599}{2.4101+1.2599+0.3293},\ \tfrac{0.3293}{2.4101+1.2599+0.3293}\right) = (0.6026,\ 0.3150,\ 0.0823).$$

Розрахуємо геометричний індекс узгодженості

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}\ln^2 e_{ij}\text{ , де } e_{ij} = d_{ij}v_j / v_i .$$

$$E = (e_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1.0455 & 0.9560 \\ \frac{1}{1.0455} & 1 & 1.0451 \\ \frac{1}{0.9560} & \frac{1}{1.0451} & 1 \end{pmatrix}\text{, тоді}$$

$$GCI = \frac{2}{(3-1)(3-2)}\left(\ln^2(1.0455) + \ln^2(0.9560) + \ln^2(1.0451)\right) = \frac{2\cdot 0.006}{2} = 0.006$$

Отримане GCI менше за порогове значення 0.1573 (для $n = 3$, $CR^{порог} = 0.05$). Тому МПП D має допустимий рівень неузгодженості.

Згідно з методом головного власного вектору, коефіцієнти відносних важливостей альтернатив рішень – це елементи головного власного вектору матриці парних порівнянь (МПП).

Розрахуємо найбільше власне число та відповідний йому власний вектор МПП одним з чисельних методів, а саме степеневим методом.

Визначимо норму вектора $\|y\| \equiv \sum|y_i|$.

Нехай $x_0 = \left(\tfrac{1}{3}\quad \tfrac{1}{3}\quad \tfrac{1}{3}\right)^T$, $\| x_0 \| = 1$.

$$Dx_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{38}{84} \end{pmatrix}, \ \left\| Dx_0 \right\| = \tfrac{10}{3} + \tfrac{11}{6} + \tfrac{38}{84} = \tfrac{472}{84} = \tfrac{118}{21},$$

$$\text{тому } x_1 = \frac{Dx_0}{\left\| Dx_0 \right\|} = \begin{pmatrix} \frac{140}{236} & \frac{77}{236} & \frac{19}{236} \end{pmatrix}^T, \ \lambda_1 = \left\| Dx_0 \right\| = \tfrac{118}{21} = 5.6190 .$$

$$Dx_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{140}{236} \\ \frac{77}{236} \\ \frac{19}{236} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{427}{236} \\ \frac{223}{236} \\ \frac{233}{4\cdot 236} \end{pmatrix}, \ \left\| Dx_1 \right\| = \tfrac{2833}{944},$$

$$\text{тому } x_2 = \frac{Dx_1}{\left\| Dx_1 \right\|} = \begin{pmatrix} 0.6029 & 0.3149 & 0.0822 \end{pmatrix}^T, \ \lambda_2 = \left\| Dx_1 \right\| = \tfrac{2833}{944} = 3.0011 .$$

$$Dx_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6029 \\ 0.3149 \\ 0.0822 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8081 \\ 0.9452 \\ 0.2471 \end{pmatrix}, \ \left\| Dx_2 \right\| = 3.0004 ,$$

$$\text{тому } x_3 = \frac{Dx_2}{\left\| Dx_2 \right\|} = \begin{pmatrix} 0.6026 & 0.3150 & 0.0824 \end{pmatrix}^T, \ \lambda_3 = \left\| Dx_2 \right\| = 3.0004 .$$

Задамо практичну точність обчислень 10^{-3}.

$\| x_3 - x_2 \| < \varepsilon = 10^{-3}$, тому x_3 - шуканий вектор ваг, λ_3 - максимальне власне число МПП D.

$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{3.0004-3}{2} = 0.0002$, $CR = \frac{CI}{MRCI} = \frac{0.0002}{0.52} = 0.0004$

Отримане *CR* практично дорівнює нулю, тому МПП D близька до узгодженої.

Результуючий вектор ваг $x_3 = \begin{pmatrix} 0.6026 & 0.3150 & 0.0824 \end{pmatrix}^T$.

Приклад 7. Використовуючи метод "лінія", розрахувати коефіцієнти відносної важливості альтернатив рішень $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, якщо еталоном є $\mathbf{a_1}$, залежність між вагами має вигляд $v_i = v_j d_{ij}$, де d_{ij} - величина переваги альтернативи a_i над альтернативою a_j, $\mathbf{d_{21} = 1/3}$, $\mathbf{d_{31} = 1/5}$.

Розв'язання

Виразимо ненормовані ваги альтернатив через вагу еталону: $v_2 = v_1/3$, $v_3 = v_1/5$. Пронормуємо ваги альтернатив $w_1 = \frac{v_1}{v_1+v_1/3+v_1/5} = \frac{15}{23} = 0.652$, $w_2 = \frac{v_1/3}{v_1+v_1/3+v_1/5} = \frac{5}{23} = 0.217$, $w_3 = \frac{v_1/5}{v_1+v_1/3+v_1/5} = \frac{3}{23} = 0.131$. Це і є результуючі ваги.

2 Порядок виконання роботи

2.1 Уважно прочитати теоретичні відомості, наведені в п.1.

2.2 Розрахувати коефіцієнти відносної важливості (ваги) альтернатив для задач прийняття рішень (варіанти 1 –27). Для цього:

2.2.1 Побудувати мультиплікативну матрицю парних порівнянь (МПП) за умови, що експерт дає оцінки у фундаментальній шкалі.

2.2.2 Знайти ваги альтернатив рішень методами парних порівнянь згідно з варіантом: EM, RGMM, AN, «лінія» (розглянути всі еталони, використати гіперболічну залежність між вагами $v_i = v_e d_{ie}$).

2.2.3 Розрахувати відношення узгодженості CR, геометричний індекс узгодженості GCI чи гармонічне відношення узгодженості HCR. Чи допустима неузгодженість оцінок експертів?

2.2.4 Згідно з варіантом, оцінити узгодженість МПП за спектральним коефіцієнтом узгодженості k_y:

- Побудувати множину породжених МПП.

- Знайти спектральний коефіцієнт узгодженості ваг, розрахованих на основі породжених МПП методом «лінія».
- Знайти пороги виявлення і застосування.

2.3 Порівняти ваги, знайдені різними методами. Зробити висновки.

2.4 Відповісти на контрольні питання, наведені в кінці роботи.

Варіанти

№ варіанту	**Метод розрахунку ваг**	**№ задачі ППР**
1	EM, CR	1
2	RGMM, GCI	2
3	AN, HCR	3
4	«лінія», Ку	4
5	SVD	5
6	EM, CR	6
7	RGMM, GCI	7
8	AN, HCR	8
9	«лінія», Ку	9
10	SVD	10
11	EM, CR	11
12	RGMM, GCI	12
13	AN, HCR	13
14	«лінія», Ку	14
15	SVD	15
16	EM, CR	16
17	RGMM, GCI	17
18	AN, HCR	18
19	«лінія», Ку	19
20	SVD	20

21	EM, CR	21
22	RGMM, GCI	22
23	AN, HCR	23
24	«лінія», Ку	24
25	SVD	25
26	EM, CR	26

Задача 1

Задача прийняття рішення полягає в оцінюванні чотирьох варіантів деякого інноваційного товару за критерієм «перспективність попиту». Результати парних порівнянь варіантів товару наступні: другий варіант ненабагато кращий за перший і третій варіанти і суттєво кращий за четвертий, перший варіант ненабагато кращий за третій і практично такий самий як і четвертий варіант, третій варіант переважає четвертий і ступінь переваги між рівною важливістю і несуттєвою перевагою.

Задача 2

Нехай задача полягає в оцінюванні наступних чотирьох варіантів вкладення коштів: придбання акцій, оформлення депозиту, придбання облігацій, придбання дорогоцінних металів за критерієм «надійність вкладення коштів». За результатами парних порівнянь цих варіантів встановлено, що другий варіант ненабагато кращий за перший і третій варіанти і суттєво кращий за четвертий, перший варіант має однакову надійність, що і третій, і ненабагато кращий за четвертий варіант, перевага третього варіанту над четвертим – між слабкою і суттєвою.

Задача 3

Нехай інвестор оцінює акції деякої компаній і хоче спрогнозувати, яким буде розподіл ймовірностей зміни ціни на них. Він розглядає наступні можливі варіанти зміни ціни: впаде на 20%, впаде на 10%, залишиться незмінною, зросте на 10%. Використовуючи результати фундаментального аналізу, парні порівняння варіантів зміни ціни наступні:

- імовірність події, що ціна акцій зросте на 10% ненабагато перевищує імовірність події, що ціна акцій залишиться незмінною на протязі визначеного періоду часу і суттєво перевищує імовірності того, що ціна акцій впаде як на 10%, так і на 20%;
- імовірність події, що ціна акцій залишиться незмінною ненабагато перевищує імовірності подій, що ціна акцій впаде як на 10%, так і на 20%;
- імовірність події, що ціна акцій впаде на 10% ненабагато перевищує імовірність події, що ціна акцій впаде на 20%.

Задача 4

Нехай потрібно порівняти чотирьох кандидатів на посаду за критерієм «освіта» і знайти коефіцієнти відносної важливості кожного кандидата. В результаті порівняння першого кандидата з усіма іншими виявилося, що його освіта практично така ж як і у другого, суттєво краща за освіту третього і суттєво гірша за четвертого. Освіта другого кандидата краща за освіту третього, ступінь переваги – між слабкою і суттєвою перевагою і сильно гірша за четвертого. Третій кандидат значно гірший за четвертий.

Задача 5

Задача полягає у виборі оптимального каналу для розміщення реклами на телебаченні за критерієм «популярність каналу». Результати парних порівнянь чотирьох каналів наступні: перший канал не набагато гірший за другий, слабо переважає третій канал і має однакову популярність з четвертим каналом. Другий канал суттєво переважає третій і має однакову популярність з четвертим каналом. Популярність третього каналу суттєво гірша за четвертого.

Звіт має містити:

1. Завдання і формулювання задачі прийняття рішення.
2. Результати виконання роботи згідно з варіантом і п. 2.2 порядку виконання роботи:
    - для EM – 1) всі ітерації степеневого методу, результуючі значення головного власного числа і відповідного йому власного вектору; значення індексу та відношення узгодженості; 2)висновок щодо узгодженості МПП;
    - для RGMM – 1) значення ваг і геометричного індексу узгодженості; 2) висновок щодо узгодженості МПП;
    - для AN – 1) значення ваг і гармонічного відношення узгодженості; 2) висновок щодо узгодженості МПП;
    - для «лінії» – 1) значення ваг при кожному з еталонів; 2)множина породжених матриць, спектральний коефіцієнт узгодженості ваг, розрахованих з кожної породженої матриці, значення порогів виявлення і застосування; 3) висновок щодо узгодженості МПП; порівняння ваг, отриманих при кожному з еталонів, чи задають ці ваги однакові ранжування альтернатив.
3. Текст програми, яка реалізує заданий метод парних порівнянь і розрахунок показника узгодженості. Вікна програми.
4. Висновки по роботі.

Контрольні запитання для підготовки до роботи:

1. Дайте означення матриці парних порівнянь (МПП). Як інтерпретуються елементи МПП?
2. Наведіть приклади мультиплікативних та адитивних МПП.

3. Сформулюйте метод головного власного вектору розрахунку ваг. Наведіть властивості узгодженої матриці парних порівнянь.
4. Дайте означення неприводимої матриці та сформулюйте теорему Перрона-Фробеніуса.
5. Наведіть обґрунтування методу RGMM на основі розв’язання задачі математичного програмування.
6. Сформулювати і обгрунтувати метод арифметичної нормалізації AN розрахунку ваг. Як розраховується показник узгодженості HCR?
7. Сформулюйте метод «лінія» парних порівнянь.
8. Означення і властивості узгодженої та слабко узгодженої МПП.
9. Які показники використовуються для оцінювання узгодженості експертних оцінок парних порівнянь? Наведіть розрахункові формули.
10. Опишіть степеневий метод розрахунку найбільшого власного числа і відповідного йому власного вектору МПП.
11. Опишіть граничний метод розрахунку найбільшого власного числа і відповідного йому власного вектору МПП.
12. Сформулюйте відомі вам задачі математичного програмування розрахунку ваг на основі МПП.
13. Як розраховується спектральний коефіцієнт узгодженості МПП?
14. Що таке спектр ваг і як він будується? Як будуються пороги виявлення і застосування?
15. МПП як матриця інтенсивності-інцидентності графу певної структури.
16. Як інтерпретуються ваги на основі МПП, використовуючи теорію графів?

Практикум 2

Дослідження методів агрегування ваг альтернатив рішень за ієрархічною моделлю критеріїв

Мета роботи:

для модельної задачі ППР:

- *порівняти ваги альтернатив, отримані різними методами агрегування локальних ваг на основі множини критеріїв рішень:*
  - *дистрибутивним та його модифікаціями,*
  - *мультиплікативним,*
  - *за функцією мінімуму,*
  - *групового врахування бінарних відношень переваг альтернатив;*
- *виявити умови появи реверсу рангів в задачі ППР при використанні наведених вище методів та зміни множин критеріїв та альтернатив рішень:*
  - *вилученні найменш вагомого критерію,*
  - *додаванні альтернатив з різними властивостями:*
    - *еквівалентної до однієї з існуючих альтернатив,*
    - *неоптимальної за усіма критеріями,*
    - *оптимальної за одним з критеріїв;*
- *порівняти ваги, отримані різними методами агрегування, та оцінити чутливість результуючого ранжування до зміни множин критеріїв та альтернатив рішень.*

1 Теоретичні відомості

Методи аналізу альтернатив рішень на основі ієрархічної моделі критеріїв (МАІ, analytic hierarchy process, AHP) складаються з наступних чотирьох загальних етапів:

1. Побудова ієрархічної моделі критеріїв, цілей та інших факторів, які впливають на головну ціль прийняття рішення; побудова множини альтернативних варіантів рішень.

2. Отримання суджень експертів щодо парних порівнянь елементів одного рівня ієрархії відносно спільного елементу вищого рівня. Парні порівняння проводяться у вибраній шкалі і за результатами будуються матриці парних порівнянь (МПП), які є обернено симетричними.

3. Математична обробка суджень експертів:

- розрахунок локальних ваг елементів кожного рівня ієрархії відповідно до батьківських елементів вищого рівня на основі МПП; побудова локальних ранжувань;
- аналіз узгодженості експертних оцінок;
- розрахунок глобальних ваг елементів ієрархії відносно головної цілі прийняття рішення, використовуючи методи агрегування; побудова ранжування на основі глобальних ваг.

4. Аналіз чутливості отриманих ранжувань.

<u>Локальною вагою</u> елемента ієрархії називається вага елемента відносно батьківського елементу, розрахована на основі МПП.

<u>Глобальною вагою</u> елемента ієрархії називається вага відносно вершини ієрархії (в більшості випадків – це головна ціль прийняття рішення), розрахована на основі локальних ваг одним з методів агрегування.

Залежно від використання тих чи інших методів розрахунку локальних та глобальних ваг маємо різні модифікації методів аналізу ієрархій.

Детальніше розглянемо етап розрахунку глобальних ваг елементів ієрархії для ієрархії, що складається з двох рівнів: критерії та альтернативи.

Постановка задачі

<u>Дано</u>: $A = \left\{ A_i \middle| i = \overline{1, N} \right\}$ - множина альтернативних варіантів рішень;

- $C = \{C_j \mid j = \overline{1,M}\}$ - множина критеріїв оцінювання альтернатив;
- a_{ij} - ненормована вага альтернативи A_i за критерієм C_j;
- w_j^C - вага критерію C_j, $\sum_{j=1}^{M} w_j^C = 1$.

<u>Потрібно:</u>

- знайти глобальні ваги $w_i^{глоб}$ альтернатив A_i, $i = \overline{1,N}$.

Існує декілька методів агрегування на ієрархічній моделі.

Дистрибутивний метод

Глобальна вага альтернативи A_i розраховується за формулою

$$w_i^{глоб} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C \cdot r_{ij} \ ,$$

де $r_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{N} a_{kj}}$ - нормовані значення ваг a_{ij}, $\sum_{i=1}^{N} r_{ij} = 1 \ \ \forall j = \overline{1,M}$.

Модифікований дистрибутивний метод (правило ідеальної точки)

Ненормована глобальна вага альтернативи A_i розраховується так само, як і в дистрибутивному методі за допомогою адитивної функції згортки:

$$v_i^{глоб} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C \cdot r_{ij} \ ,$$

але нормовані значення ваг a_{ij} – по-іншому, а саме, $r_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\max\limits_{k=1,\ldots,N} a_{kj}}$.

Результуючі глобальні ваги дорівнюють

$$w_i^{глоб} = \frac{v_i^{глоб}}{\sum_{k=1}^{N} v_k^{глоб}} .$$

Мультиплікативний метод

Ненормована глобальна вага альтернативи A_i дорівнює

$$v_i^{глоб} = \prod_{j=1}^{M} (a_{ij})^{w_j^C}, \ i = \overline{1,N}.$$

Результуючі глобальні ваги дорівнюють

$$w_i^{глоб} = \frac{v_i^{глоб}}{\sum_{k=1}^{N} v_k^{глоб}}.$$

Метод на основі функції мінімуму

Ненормована глобальна вага альтернативи A_i

$$v_i^{глоб} = \min_{j=1,\dots,M} (a_{ij} w_j^C), \ i = \overline{1,N}.$$

Результуючі глобальні ваги дорівнюють

$$w_i^{глоб} = \frac{v_i^{глоб}}{\sum_{k=1}^{N} v_k^{глоб}}.$$

Групове врахування бінарних відношень переваг альтернатив (ГВБВПА)

Проводиться декомпозиція множини альтернатив і задача розв'язується окремо для кожної пари альтернатив. Розглядаються $N(N-1)/2$ підзадач і розраховуються $N(N-1)/2$ пар глобальних ваг альтернатив (w_i^{ik}, w_k^{ik}), де w_i^{ik} - глобальна вага альтернативи A_i при одночасному розгляді тільки пари A_i та A_k, $i = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,(N-1)/2}$. При використанні дистрибутивного методу значення w_i^{ik} розраховується за формулою:

$$w_i^{ik} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C \cdot r_{ij},$$

де $r_{lj} = \frac{a_{lj}}{a_{ij} + a_{kj}}$, $l \in \{i,k\}$, $r_{ij} + r_{kj} = 1$.

Для об'єднання часткових розв'язків будується матриця $P = \left(w_i^{ik} / w_k^{ik} \right)$, $i,k = \overline{1,N}$, яка задовольняє всім властивостям традиційної матриці парних порівнянь, є обернено симетричною. Ваги, отримані на основі P – шукані глобальні ваги альтернатив.

В загальному випадку ієрархія складається з p рівнів, $p \geq 2$ (рис. 3.1).

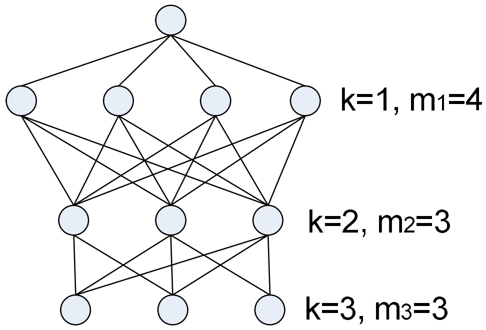

Рис.3.1 Повна ієрархія з $p = 3$ рівнями

Розглянемо <u>повні</u> ієрархії, які описуються числом $p \in N$ і вектором $m = \{(m_k) \mid k = 1,...,p\}$, де $m_k \in N$ - кількість елементів на k-му рівні ієрархії.

Для розрахунку глобальних ваг елементів такої ієрархії розглянуті вище методи агрегування використовуються рекурсивно на кожному рівні ієрархії.

Поняття реверсу рангів

При використанні методів агрегування ваг в ієрархічній моделі ППР може виникнути реверс рангів альтернатив, який для багатьох практичних задач є небажаним.

Реверс рангів – це зміна рангів альтернатив при їх оцінюванні за багатьма критеріями при додаванні/вилученні альтернативи. Множина критеріїв, ваги критеріїв і оцінки «старих» альтернатив за критеріями не змінюються.

Існує декілька видів реверсу рангів:

1. зміна знаку переваги між «старими» альтернативами

Наприклад, при розгляді n альтернатив ранжування дорівнює $A_1 \succ A_2 \succ ... \succ \boldsymbol{A_i} \succ \boldsymbol{A_k} \succ ... \succ A_n$, а після додавання до розгляду ще однієї альтернативи A_{n+1} ранжування стало $A_1 \succ A_2 \succ ... \succ \boldsymbol{A_k} \succ \boldsymbol{A_i} \succ ... \succ A_n$. Реверс рангів також має місце, якщо ваги деяких альтернатив були рівні (відрізнялися) в межах практичної точності при розгляді n альтернатив і стали відрізнятися (співпадати) після додавання альтернативи A_{n+1}.

В загальному випадку умова появи цього виду реверсу рангів для пари альтернатив A_i та A_k, $i,k = 1,...,n$ наступна:

$$(\Delta v_{ik}^{глоб} \cdot \Delta \tilde{v}_{ik}^{глоб} < 0) \vee ((\Delta v_{ik}^{глоб} = 0) \wedge (\Delta \tilde{v}_{ik}^{глоб} \neq 0)) \vee ((\Delta v_{ik}^{глоб} \neq 0) \wedge (\Delta \tilde{v}_{ik}^{глоб} = 0)), \qquad (3.1)$$

де $\Delta v_{ik}^{глоб} = v_i^{глоб} - v_k^{глоб}$; $\Delta \tilde{v}_{ik}^{глоб} = \tilde{v}_i^{глоб} - \tilde{v}_k^{глоб}$;

$\tilde{v}_i^{глоб}$ - ваги альтернатив при розгляді $n+1$ альтернативи,

Рівність нулю в (3.1) слід розуміти наступним чином:

$(\Delta v_{ik}^{глоб} = 0) \Leftrightarrow (|\Delta v_{ik}^{глоб}| < \varepsilon)$, де ε - задана точність, наприклад, $\varepsilon = 10^{-3}$.

Аналогічно, $(\Delta v_{ik}^{глоб} \neq 0) \Leftrightarrow (|\Delta v_{ik}^{глоб}| \geq \varepsilon)$.

2. зміна оптимальної альтернативи

Оптимальна альтернатива – яка має найбільшу глобальну вагу. Альтернатива, оптимальна за одним з критеріїв – це альтернатива, яка має найбільшу локальну вагу за цим критерієм.

Умова появи цього виду реверсу рангів:

$$i \neq k,$$

де i - номер оптимальної альтернативи при розгляді n альтернатив, $i: v_i^{глоб} = \max\limits_{l=1,...,n} v_l^{глоб}$, k - номер оптимальної альтернативи при розгляді $n+1$

альтернативи, $k: v_k^{глоб} = \max\limits_{l=1,\ldots,n,n+1} \tilde{v}_l^{глоб}$, $\tilde{v}_l^{глоб}$ - ваги альтернатив при розгляді $n+1$ альтернативи.

3. <u>зміна рангів альтернатив при їх попарному розгляді в порівнянні з розглядом всіх альтернатив одночасно.</u>

Нехай ранжування при одночасному розгляді n альтернатив наступне: $A_1 \succ A_2 \succ \ldots \succ \boldsymbol{A_i} \succ \boldsymbol{A_k} \succ \ldots \succ A_n$. Виконаємо декомпозицію задачі прийняття рішень. Будемо розраховувати глобальні ваги лише для пари альтернатив. Потім об'єднаємо знайдені часткові розв'язки у загальне ранжування. Якщо отримане ранжування не співпадає із початковим (при одночасному розгляді всіх альтернатив), наприклад, об'єднане ранжування дорівнює $A_1 \succ A_2 \succ \ldots \succ \boldsymbol{A_k} \succ \boldsymbol{A_i} \succ \ldots \succ A_n$, то має місце реверс рангів.

Моделювання явища реверсу рангів

Випадковим чином згенерувати задачу прийняття рішень з n альтернативами і двома критеріями ($m = 2$):

- згенерувати узгоджені мультиплікативні матриці парних порівнянь (МПП) D^j, $j = 1,\ldots,m$ альтернатив за критеріями у фундаментальній шкалі $[1/9, 9]$, розмірність кожної з цих МПП $n \times n$. Для цього достатньо випадковим чином задати один рядок (стовпчик) МПП і побудувати всі інші елементи цієї МПП за правилами оберненої симетричності ($d_{ik} = 1/d_{ki}$) і транзитивності ($d_{ik} = d_{il}d_{lk}$);

- задати нормовані до одиниці ваги критеріїв w_j^c: $\sum\limits_{j=1}^{m} w_j^c = 1$.

Розрахувати локальні ваги альтернатив за кожним з критеріїв.

Розрахувати глобальні ваги альтернатив одним з методів:

- дистрибутивним
- ідеальної точки

- мультиплікативним
- ГВБВПА з дистрибутивним синтезом
- ГВБВПА з ідеальним синтезом
- ГВБВПА з мультиплікативним синтезом.

Додати до розгляду ще одну альтернативу: побудувати розширені МПП $D^{*j}, j=1,...,m$ альтернатив за критеріями у фундаментальній шкалі $[1/9, 9]$, їх розмірність $(n+1)\times(n+1)$. Оцінки відносно старих альтернатив не змінюються! В D^{*j} випадковим чином задати величину переваги нової альтернативи в тому рядку (стовпчику), за яким генерувалася МПП. Розширена МПП D^{*j} має бути узгодженою, тому слід побудувати $(n+1)$-й рядок і $(n+1)$-й стовпчик цієї матриці за правилами оберненої симетричності і транзитивності.

Додати альтернативу із властивостями:

- неоптимальну за обома критеріями;
- оптимальну за одним із критеріїв;
- еквівалентну до альтернативи з найменшою глобальною вагою;
- еквівалентну до оптимальної альтернативи.

Виконати для розширених МПП D^{*j} наведені вище кроки, розрахувати локальні і глобальні ваги.

Встановити, чи має місце реверс рангів видів 1 – 3.

Виконати моделювання появи реверсу рангів. Для цього експеримент повторити 10 000 разів, знайти відносну кількість появ реверсу.

Моделювання появи реверсу виконати для різної кількості альтернатив n=2, 3, …, 15 і для різних наборів ваг критеріїв: 0.1 і 0.9; 0.2 і 0.8; 0.3 і 0.7; 0.4 і 0.6; 0.5 і 0.5.

Результати оформлюються у вигляді графіків залежності частоти реверсу рангів від кількості альтернатив.

Приклад 1

Керівництво міської державної адміністрації оцінює чотири варіанти підсистем системи автоматизованого керування дорожнім рухом. Розглядаються наступні цілі впровадження системи: c1=”зменшення затримок транспорту”, c2=”зниження рівня аварійності на дорогах”, c3=”покращення екології в місті”.

Експерт виконав порівняння варіантів підсистем за вказаними критеріями у фундаментальній шкалі відносної важливості. В результаті за критерієм c1 другий варіант слабко переважає перший, третій і четверий варіанти; перший варіант має таку ж вартість як третій і четвертий; третій варіант кращий за четвертий, ступінь переваги – між рівною важливістю і слабкою перевагою.

За критерієм c2 перший варіант однаковий з третім, слабко переважає четвертий і суттєво переважає другий; другий варіант ненабагато гірший за третій і четвертий варіанти; третій слабко переважає четвертий.

За критерієм c3 перший варіант однаковий з четвертим, слабко переважає другий і третій; другий однаковий з третім; четвертий слабко переважає другий і третій варіанти.

Відомо, що критерій c2 так само важливий як і c1, критерій c3 ненабагато менш важливий за c1 і c2.

Розрахувати глобальні ваги альтернатив рішень методом групового врахування бінарних відношень переваг з ідеальною згорткою.

Локальні ваги альтернатив рішень та ваги критеріїв розрахувати методом арифметичної нормалізації. Встановити, чи мають оцінки допустимий рівень неузгодженості за означенням, показником HCR та спектральним показником. За необхідності скоригувати оцінки.

Розв’язання

1) Побудуємо матриці парних порівнянь (МПП) альтернатив за кожним з критеріїв, використовуючи фундаментальну шкалу:

Інтенсивність важливості x_k	Якісна оцінка (судження s_k)
1	Однаково важливі
3	Ненабагато важливіший, Слабка перевага
5	Суттєво важливіший, Сильна перевага
7	Значно важливіший, Дуже сильна перевага
9	Абсолютно важливіший, Абсолютна перевага
2,4,6,8	Проміжні оцінки

МПП альтернатив за критеріями c1, c2 і c3 відповідно дорівнюють:

$$D^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1/3 & 3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \ D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

МПП критеріїв: $D^c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$

<u>2) Проведемо оцінювання узгодженості експертних парних порівнянь</u>

Перевіримо узгодженість МПП за означенням.

Оцінимо узгодженість МПП D^1. Оскільки $n=4$, то кількість транзитивностей, які потрібно перевірити, дорівнює $n!/(3!(n-3)!)=4$.

i	j	k	$d_{ij} = d_{ik}d_{kj}$
1	2	3	виконується
1	2	4	виконується
1	3	4	не виконується
2	3	4	не виконується

Для МПП D^2 і D^3 перевіряються аналогічні транзитивності.

Отримали, що *за означенням МПП D^1 і D^2 не є узгодженими,* D^3-*узгоджена. Циклів в МПП D^1, D^2 і D^3 немає.*

Оскільки кількість критеріїв $m = 3$, то кількість транзитивностей, які потрібно перевірити, дорівнює $m!/(3!(m-3)!) = 1$:

i	j	k	$d_{ij} = d_{ik} d_{kj}$
1	2	3	виконується

Тому МПП критеріїв D^c – узгоджена.

Показник узгодженості HCR розраховується за формулою

$$HCR(n) = \frac{HCI(n)}{HRCI(n)}, \qquad HCI(n) = \frac{\left(HM(s) - n\right)(n+1)}{n(n-1)},$$

де $HM(s) = n\left(\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1}\right)^{-1}$ - гармонічна середня для $s = \left\{ s_j \middle| j \in 1,...,n \right\}$,

$s_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}$, $HRCI(n)$ - середнє значення HCI(n) для випадкових МПП (таблична величина).

Знайдемо показник узгодженості HCR для оцінок альтернатив рішень за критерієм c1: $HCI = 0.015$, $HRCI = 0.89$, $HCR = 0.016$.

За критерієм c2: $HCI = 0.018, HRCI = 0.89, HCR = 0.020$.

За критерієм c3: $HCI = 0, HCR = 0$.

Для МПП критеріїв: $HCI = 0, HCR = 0$.

Отримані HCR менші за порогове значення 0.08 (для $n = 4$). Тому МПП D^1 і D^2 оцінок альтернатив за критеріями c1 і c2 мають допустимий рівень неузгодженості. D^3 - узгоджена.

Таким чином, за показником HCR всі надані експертом оцінки мають допустимий рівень неузгодженості або є узгодженими.

За критерієм c1 спектральні коефіцієнти узгодженості породжених МПП: Ку=(0.835, 0.835, 0.835, 0.79). Спектральний коефіцієнт узгодженості МПП D^1 Ку_1=0.79.

За критерієм c2: Ку=(1, 0.835, 0.835, 0.769). Спектральний коефіцієнт узгодженості МПП D^2 Ку_2=0.769.

За критерієм c3: Ку=(1, 1, 1, 1). Спектральний коефіцієнт узгодженості МПП D^3 Ку_3=1.

Для МПП критеріїв: Ку=(1, 1, 1), Ку_c=1.

Показник Ку_2 є меншим за поріг застосування Tu=0.79, тому за спектральним показником експертні оцінки за критерієм c2 мають бути повернуті експерту для перегляду.

Згідно з Ку_1 експертні оцінки за критерієм c1 мають допустимий рівень неузгодженості і не потребують повернення експерту.

Експертні оцінки альтернатив за критерієм c3 узгоджені.

<u>3) Знайдемо локальні ваги альтернатив рішень та ваги критеріїв за</u> методом арифметичної нормалізації AN

Ненормовані ваги за методом AN дорівнюють $v_i = \left(s_i\right)^{-1}$, $s_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ji}$.

Нормовані ваги розраховуються за формулою $w_i = v_i / \sum_{k=1}^{n} v_k$.

В даній задачі $n = 4$, вектор ненормованих локальних ваг альтернатив рішень за критерієм c1 дорівнює: $v^1 = (0.167 \quad 0.5 \quad 0.182 \quad 0.143)$,

вектор нормованих ваг: $w^1 = (0.168 \quad 0.504 \quad 0.183 \quad 0.144)$.

Вектор ненормованих локальних ваг альтернатив рішень за критерієм c2 дорівнює: $v^2 = (0.395 \quad 0.083 \quad 0.375 \quad 0.136)$,

вектор нормованих ваг: $w^2 = (0.399 \quad 0.084 \quad 0.379 \quad 0.138)$.

Вектор ненормованих локальних ваг альтернатив рішень за критерієм с3 дорівнює: $v^3 = (0.375 \quad 0.125 \quad 0.125 \quad 0.375)$,

вектор нормованих ваг: $w^3 = (0.375 \quad 0.125 \quad 0.125 \quad 0.375)$.

Вектор ваг критеріїв: $w^C = (0.429 \quad 0.429 \quad 0.142)$.

4) Знайдемо глобальні ваги альтернатив рішень методом групового врахування бінарних відношень переваг з ідеальною згорткою

Відповідно до методу групового врахування бінарних відношень переваг проводиться декомпозиція множини альтернатив і задача розв'язується окремо для кожної пари альтернатив. Розглядаються $n(n-1)/2$ підзадач, де n – кількість альтернатив, і визначаються $n(n-1)/2$ пар глобальних ваг альтернатив (w_i^{ik}, w_k^{ik}), де w_i^{ik} - глобальна вага альтернативи A_i при одночасному розгляді тільки пари A_i та A_k, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, (n-1)/2}$. При використанні методу ідеальної точки значення w_i^{ik}:

$w_i^{ik} = \sum_{j=1}^{m} w_j^C \cdot r_{ij}$, де $r_{pj} = \dfrac{v_{pj}}{\max(v_{ij}, v_{kj})}$, $p \in \{i, k\}$, v_{ij} - вага альтернативи A_i за критерієм c_j.

Для об'єднання часткових розв'язків будується матриця $P = \left(w_i^{ik} / w_k^{ik} \right)$, $i, k = \overline{1, n}$, яка задовольняє всім властивостям традиційної матриці парних порівнянь. Ваги, отримані з P (будь-яким з відомих методів!) – шукані глобальні ваги альтернатив.

Матриця $P = \left(w_i^{ik} / w_k^{ik} \right)$ для даної задачі:

$$P = \begin{matrix} 1 & 1.262 & 1.092 & 1.521 \\ 0.792 & 1 & 0.916 & 1.063 \\ 0.915 & 1.092 & 1 & 1.425 \\ 0.657 & 0.941 & 0.702 & 1 \end{matrix}$$

Шукані глобальні ваги альтернатив, отримані на основі P:

$$w^{глоб} = \quad 0.298 \quad 0.232 \quad 0.270 \quad 0.201.$$

Таким чином, найкращим варіантом за множиною критеріїв є перший варіант підсистеми системи автоматизованого керування дорожнім рухом.

2 Порядок виконання роботи

2.1. Уважно прочитати теоретичні відомості, наведені в п.1.

2.2. Розрахувати глобальні ваги альтернатив для ієрархії з p рівнями, $p \geq 2$, використовуючи методи ієрархічного синтезу (агрегування) згідно з варіантом:

- дистрибутивний,
- ідеальної точки,
- мультиплікативний,
- на основі функції мінімуму,
- групового врахування бінарних відношень переваг;

2.3.1) задати МПП елементів ієрархії,

2.3.2) розрахувати локальні ваги елементів ієрархії, використовуючи метод з лабораторної роботи № 1,

2.3.3) розрахувати глобальні ваги елементів ієрархії,

2.3.4) порівняти результати, отримані різними методами агрегування,

2.3. Виявити умови появи реверсу рангів в задачі ППР при використанні заданих згідно з варіантом методів та зміни множин критеріїв та альтернатив рішень:

2.3.1) вилучити з розгляду найменш вагомий критерій і виконати етапи 2.2.3 і 2.2.4,

2.3.2) по черзі додати декілька альтернатив-копій еквівалентних до однієї з існуючих альтернатив, в кожному з експериментів виконати етапи 2.2.3 і 2.2.4 для множини з N+1 альтернатив,

2.3.3) по черзі додати декілька неоптимальних за усіма критеріями альтернатив, в кожному з експериментів виконати етапи 2.2.3 і 2.2.4 для множини з N+1 альтернатив,

2.3.4) додати альтернативу, оптимальну за одним з критеріїв, в кожному з експериментів виконати етапи 2.2.3 і 2.2.4 для множини з N+1 альтернатив,

2.4. Порівняти ваги, отримані різними методами агрегування, та оцінити чутливість результуючого ранжування до зміни множин критеріїв та альтернатив рішень.

2.5. Зробити висновки по роботі

2.6. Дати відповіді на контрольні питання, наведені в кінці роботи.

Звіт має містити:

1. Завдання: ієрархія, методи розрахунку локальних ваг і агрегування.

2. Текст програми, яка реалізує описані вище кроки 2.2 і 2.3.

3. Числові приклади або вікна програми, які детально ілюструють результати за пп.2.2 і 2.3. Це включає МПП елементів ієрархії, локальні, глобальні ваги елементів, ранжування альтернатив в кожному експерименті.

4. Висновки по роботі.

Варіанти завдань

№	Ієрархія	Метод розрахунку глобальних ваг
1	p=3, повна, m=(4, 3, 3)	дистрибутивний, ГВББВПА
2	p=3, повна, m=(3, 3, 4)	ідеальної точки, ГВББВПА
3	p=3, повна, m=(2, 4, 3)	мультиплікативний, ГВББВПА
4	p=3, повна, m=(2, 3, 4)	на основі функції мінімуму, ГВББВПА
5	p=3, повна, m=(3, 3, 4)	дистрибутивний, ГВББВПА

Контрольні запитання для підготовки до роботи:

1. Дати означення ієрархії як частково впорядкованої множини.
2. Дати означення і навести приклади повних ієрархій.
3. Навести загальні етапи методу аналізу ієрархій.
4. Сформулювати метод ієрархічної композиції.
5. Описати дистрибутивний метод розрахунку глобальних ваг альтернатив.
6. Описати метод ідеальної точки розрахунку глобальних ваг альтернатив.
7. Описати мультиплікативний метод розрахунку глобальних ваг альтернатив.
8. Описати метод агрегування локальних ваг альтернатив на основі функції мінімуму.

9. В чому полягає метод групового врахування бінарних відношень переваг альтернатив?
10. Як можна порівняти різні методи агрегування локальних ваг?
11. Що таке явище реверсу рангів? Навести види реверсу рангів з прикладами.
12. Як здійснюється моделювання реверсу рангів?

Практикум 3

Дослідження методів розрахунку пріоритетів альтернатив рішень на основі нечітких експертних оцінок парних порівнянь

Мета роботи:

- Дослідити різні методи розрахунку пріоритетів (ваг) альтернатив за одним критерієм на основі нечітких оцінок експерта.

- Оцінити і підвищити узгодженість нечітких оцінок експерта.

- Порівняти результати, знайдені різними методами. Порівняти з результатами, отриманими при формуванні чітких експертних оцінок.

- Розрахувати пріоритети (ваги) альтернатив рішень на основі нечіткої матриці парних порівнянь в модельній задачі підтримки прийняття рішень.

1 Теоретичні відомості

Основні означення

Інтервальною матрицею парних порівнянь (ІМПП) називається

$$A = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} = [l_{ij}; u_{ij}], i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,n\}, \tag{5.1}$$

де $u_{ij} \ge l_{ij} > 0$, $l_{ij} = \dfrac{1}{u_{ji}}$ при $i \ne j$ і $a_{ii} = l_{ii} = u_{ii} = 1$.

Задача полягає у розрахунку вектору ваг $w = \{w_i \mid i = 1,...,n\}$ на основі ІМПП.

ІМПП називається *узгодженою*, якщо існує вектор ваг w, $w_i \in \Re$, $w_i > 0$:

$$l_{ij} \le w_i / w_j \le u_{ij}\ ,\ \ i = 1,2,...,n-1,\ \ j = 2,3,...,n\ ,\ \ i < j\ .$$

ІМПП узгоджена тоді і тільки тоді, коли її елементи задовольняють умові:

$$\max_k (l_{ik} l_{kj}) \le \min_k (u_{ik} u_{kj}) \text{ для } \forall\ \ i = \overline{1,n}\ ,\ \ j = \overline{1,n}\ .$$

У наступних означеннях відношення переваги для випадку інтервальних чисел a_{ij} або w_i визначається *методом ступенів переваги*.

ІМПП *A* називається *слабко* або *порядково узгодженою*, якщо для її елементів виконуються порядкові транзитивності:

$$(a_{ij} > 1) \wedge (a_{jk} > 1) \Rightarrow (a_{ik} > 1),\ (a_{ij} = 1) \wedge (a_{jk} > 1) \Rightarrow (a_{ik} > 1),$$

$$(a_{ki} > 1) \wedge (a_{ij} = 1) \Rightarrow (a_{kj} > 1).$$

ІМПП *A* називається *слабко неузгодженою*, якщо в ній існує принаймні один цикл, який визначається трійкою індексів (i, j, k), таких що:

$$(a_{ij} > 1) \wedge (a_{jk} > 1) \wedge (a_{ik} < 1) \text{ або } (a_{ij} = 1) \wedge (a_{jk} > 1) \wedge (a_{ik} \le 1), \text{ або}$$

$$(a_{ki} > 1) \wedge (a_{ij} = 1) \wedge (a_{kj} \le 1), \text{ або } (a_{ij} = 1) \wedge (a_{jk} = 1) \wedge (a_{ik} \ne 1).$$

Цикл в ІМПП свідчить про порушення порядкової транзитивності на множині порівнюваних альтернатив рішень і може бути результатом випадкової помилки експерта при виконанні парних порівнянь альтернатив. У більшості випадків ІМПП з циклом має високий рівень неузгодженості і не може застосовуватися для обчислення ваг.

Порядок в ІМПП A зберігається слабо (перевага за елементами), якщо

$$\left(a_{ij} > 1\right) \Rightarrow \left(w_i \ge w_j\right).$$

Порядок в ІМПП A зберігається сильно (перевага за рядками), якщо з умов $\forall\ k = \overline{1,n}\ \ a_{ik} \ge a_{jk}$ і $\exists\ q = \overline{1,n}\ \ a_{iq} > a_{jq}$ витікає, що $w_i \ge w_j$.

Метод оцінювання і підвищення узгодженості нечіткої МПП (НМПП) полягає в тому, що будується дефазифікована МПП:

$$D = \{(d_{ij})\} \in R^{+}_{nxn},$$

де $d_{ij} = Defuz(a_{ij})$ - результат дефазифікації нечіткої множини $a_{ij} \ge 1$, і $d_{ij} = 1/d_{ji}$, якщо $a_{ij} < 1$, і застосовується метод оцінювання і підвищення узгодженості для чіткої МПП *D*.

Метод розрахунку нечітких локальних ваг на основі НМПП

На рис.5.1 показана структурна схема методу розрахунку нормованих нечітких локальних ваг на основі НМПП. Метод містить етапи оцінювання допустимості неузгодженості НМПП для розрахунку ваг, підвищення узгодженості НМПП, врахування властивостей слабкого і сильного збереження порядку в НМПП та етап коригування НМПП з метою збереження цих бажаних властивостей. В методі використовується декомпозиційне представлення НМПП на множину ІМПП, що дозволяє працювати з НМПП з довільним виглядом функцій приналежності. Інтервальна апроксимація нечіткого числа є зручною в багатьох випадках і широко використовується в літературі.

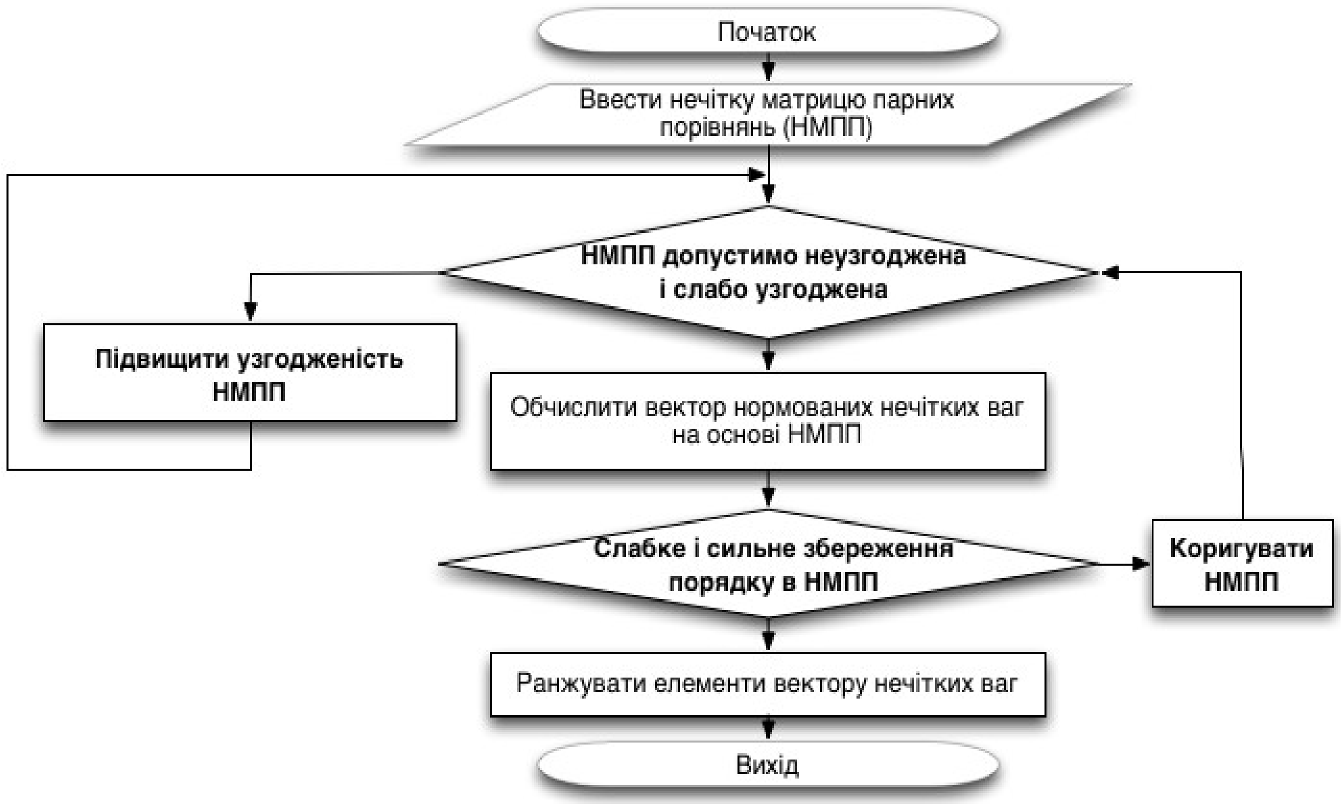

Рисунок 5.1. Структурна схема методу розрахунку нечітких локальних ваг на основі НМПП

Декомпозиційне представлення НМПП $A_k^{неч}$, $k=\overline{1,K}$ полягає в її розкладенні за множинами рівня $A_k(\alpha)$:

$$A_k^{неч} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_k(\alpha),\quad k=\overline{1,K},$$

де $A_k(\alpha)=\left\{\left(a_{ijk}(\alpha)\right)\middle|\, i,j=\overline{1,N}\right\}$ – матриця множин рівня α, $a_{ijk}(\alpha)=\left\{x:\mu_{ijk}(x)\ge\alpha\right\}$, $\alpha\in[0,1]$, $\mu_{ijk}(x)$ – функція приналежності нечіткій множині $a_{ijk}^{неч}$, $x\in\Re$.

Нехай елементи $a_{ijk}^{неч}$ НМПП $A_k^{неч}$, $k=\overline{1,K}$ – трикутні нечіткі числа $a_{ijk}^{неч}=\left(a_{ijk}^l,a_{ijk}^m,a_{ijk}^u\right)$, $a_{ijk}^l\le a_{ijk}^m\le a_{ijk}^u$. Тоді елементи $A_k(\alpha)$ множини рівня $\alpha\in[0,1]$ дорівнюють $a_{ijk}(\alpha)=\left[a_{ijk}^l+\alpha\left(a_{ijk}^m-a_{ijk}^l\right),a_{ijk}^u-\alpha\left(a_{ijk}^u-a_{ijk}^m\right)\right]$, $i,j=\overline{1,N}$. Елементи $a_{ijk}(\alpha)$ також можна представити у вигляді $a_{ijk}^{інтерв.\alpha}=\left[a_{ijk}^m-x1_{ijk}^\alpha,a_{ijk}^m+x2_{ijk}^\alpha\right]$, де $x1_{ijk}^\alpha=(1-\alpha)\left(a_{ijk}^m-a_{ijk}^l\right)$, $x2_{ijk}^\alpha=(1-\alpha)\left(a_{ijk}^u-a_{ijk}^m\right)$, $x1_{ijk}^\alpha\ge0$, $x2_{ijk}^\alpha\ge0$ – величини відхилень від значення a_{ijk}^m.

Використовуючи декомпозиційне представлення НМПП $A_k^{неч}$, $k=\overline{1,K}$ переходимо до розгляду множини ІМПП:

$$\left\{A_k(\alpha)\middle|\alpha\in[0,1]\right\},$$

де $A_k(\alpha)=\left\{\left(a_{ijk}(\alpha)\right)\middle| i,j=\overline{1,N}\right\}$, $a_{ijk}(\alpha)=\left[a_{ijk}^m-x1_{ijk}^\alpha,a_{ijk}^m+x2_{ijk}^\alpha\right]$.

Задача розрахунку нормованих нечітких локальних ваг альтернатив відносно критерію C_k зводиться до задачі розрахунку множини нормованих інтервальних локальних ваг $\left\{w_k(\alpha)\middle|\,\alpha\in[0,1]\right\}$ альтернатив на основі множини ІМПП $\left\{A_k(\alpha)\middle|\alpha\in[0,1]\right\}$, $k=\overline{1,K}$, де $w_k(\alpha)=\left\{\left(w_{ik}(\alpha)\right)\middle| i=\overline{1,N}\right\}$, $\alpha\in[0,1]$. Подальші дії полягають в агрегуванні множини інтервальних ваг за рівнями $\alpha\in[0,1]$ і отриманні локальних нечітких ваг.

Під час розв’язання багатокритеріальних задач підтримки прийняття рішень часто використовуються нормовані ваги альтернатив за кожним з критеріїв. Тому пропонований метод містить етап нормування інтервальних ваг, обчислених на основі ІМПП. В задачах вибору найкращої альтернативи рішень, побудови рейтингів та інших задачах упорядкування альтернатив за їх важливістю потрібні спеціальні методи ранжування інтервальних ваг. Методи ранжування і нормування інтервалів використовуються також на етапах оцінювання узгодженості ІМПП та розрахунку інтервальних ваг.

Модель GPM. ІМПП $A = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} = [l_{ij}; u_{ij}], i = 1,\dots,n, j = 1,\dots,n\}$, де $u_{ij} \geq l_{ij} > 0$, $l_{ij} = \frac{1}{u_{ji}}$ при $i \neq j$ і $a_{ii} = l_{ii} = u_{ii} = 1$ представляємо двома дійснозначними додатними матрицями A^L і A^U, де $A^L \leq A \leq A^U$: $A_L = \{(l_{ij})\}$, $A_U = \{(u_{ij})\}$.

Припустимо, що для заданої експертом ІМПП A існує нормований вектор $W = (w_i)$, $w_i = [w_i^L, w_i^U]$, близький до A в сенсі $a_{ij} = \frac{[w_i^L, w_i^U]}{[w_j^L, w_j^U]}\varepsilon_{ij}$ для всіх $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, де ε_{ij} – деяке збурення. Розглянемо узгоджену ІМПП $\widetilde{A} = \{(\widetilde{a}_{ij})\}$:

$$\widetilde{a}_{ij} = \frac{[w_i^L, w_i^U]}{[w_j^L, w_j^U]} = \left[\frac{w_i^L}{w_j^U}, \frac{w_i^U}{w_j^L}\right] \tag{5.2}$$

і представимо її за допомогою двох чітких додатних матриць $\widetilde{A}^L$ і $\widetilde{A}^U$:

$$\widetilde{A}^L = \left[\frac{w_i^L}{w_j^U}\right], \; \widetilde{A}^U = \left[\frac{w_i^U}{w_j^L}\right].$$

Накладемо додаткову умову, що діагональні елементи в матрицях $\widetilde{A}^L$ і $\widetilde{A}^U$ дорівнюють одиницям, тоді можна записати в матричному виді

$$\widetilde{A}_L W_U = W_U + (n-1)W_L,$$

$$\widetilde{A}_U W_L = W_L + (n-1)W_U, \tag{4.3}$$

де $W_L = \{(w_i^L) \mid i = 1,\dots,n\}$, $W_U = \{(w_i^U) \mid i = 1,\dots,n\}$ - чіткі вектори ваг.

ІМПП A (5.1) в загальному випадку неузгоджена, тому рівності (5.3) для A виконуються тільки наближено. Введемо вектори відхилень:

$$\mathrm{E} = (A_L - I)W_U - (n-1)W_L ,$$

$$\Gamma = (A_U - I)W_L - (n-1)W_U , \qquad (5.4)$$

де $\mathrm{E} = \{(\varepsilon_i) \mid i = 1,...,n\}$, $\Gamma = \{(\gamma_i) \mid i = 1,...,n\}$, I - одинична матриця розмірності n. Величини ε_i, γ_i при $i = \overline{1,n}$ є показниками відхилень.

Бажано, щоб абсолютні значення цих показників були якомога меншими, причому граничний випадок $\varepsilon_i = \gamma_i = 0$ відповідає узгодженій ІМПП A. Тому для знаходження вектору ваг $W = (w_i)$, $w_i = [w_i^L, w_i^U]$ будується наступна модель 1 математичного програмування. В цій моделі перші два обмеження відповідають умовам (5.4). Наступні два обмеження задають необхідну і достатню умови нормування для інтервального вектору ваг. Останні два – це умови на нижній і верхній кінці інтервальної ваги та їх невід'ємність. Так як невідомі величини – елементи векторів відхилень E і Γ - можуть приймати від'ємні значення в моделі 1, то проводиться заміна змінних:

$$\varepsilon_i^+ = \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2},\ \varepsilon_i^- = \frac{-\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2},\ \gamma_i^+ = \frac{\gamma_i + |\gamma_i|}{2} \text{ і } \gamma_i^- = \frac{-\gamma_i + |\gamma_i|}{2},\ i = \overline{1,n},$$

$\varepsilon_i^+ \ge 0$, $\varepsilon_i^- \ge 0$, $\gamma_i^+ \ge 0$ і $\gamma_i^- \ge 0$, $i = \overline{1,n}$. Після введення заміни змінних модель 1 переписується у вигляді моделі 2 лінійного програмування.

Модель 1

Мінімізувати

$$J = \sum_{i=1}^{n} (|\varepsilon_i| + |\gamma_i|) \qquad (5.5)$$

при обмеженнях:

$$\mathrm{E} = (A_L - I)W_U - (n-1)W_L$$

$$\Gamma = (A_U - I)W_L - (n-1)W_U$$

$$\sum_{j=1, j\ne i}^{n} w_j^U + w_i^L \ge 1,\ i = \overline{1,n}$$

$$\sum_{j=1, j\ne i}^{n} w_j^L + w_i^U \le 1,\ i = \overline{1,n}$$

$$W_U - W_L \ge 0$$

$$W_L \ge 0$$

Модель 2

Мінімізувати

$$J=\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^+ +\varepsilon_i^- +\gamma_i^+ +\gamma_i^-)=e^T(\mathrm{E}^+ +\mathrm{E}^- +\Gamma^+ +\Gamma^-)$$

(5.6)

при обмеженнях:

$$\mathrm{E}^+ +\mathrm{E}^- =(A_L-I)W_U-(n-1)W_L$$

$$\Gamma^+ +\Gamma^- =(A_U-I)W_L-(n-1)W_U$$

$$\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n} w_j^U + w_i^L \ge 1,\ i=\overline{1,n}$$

$$\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n} w_j^L + w_i^U \le 1,\ i=\overline{1,n}$$

$$W_U-W_L\ge 0$$

$$W_L,\mathrm{E}^+,\mathrm{E}^-,\Gamma^+,\Gamma^-\ge 0$$

Для узгоджених ІМПП значення цільових функціоналів J моделей 1 і 2 дорівнюють нулю. Якщо $J^*\neq 0$, то ІМПП неузгоджена. Величина відхилення J^* від нуля слугує оцінкою неузгодженості ІМПП.

Нормування інтервальних ваг. Нехай $w=\{(w_i=[w_i^L,w_i^U])\,|\,i=1,...,n\}$ - вектор інтервальних ваг, де $0\le w_i^L\le w_i^U$, $N=\{X=(x_1,...,x_n)\,|\,w_i^L\le x_i\le w_i^U,\, i=1,...,n,\ \sum_{i=1}^{n}x_i=1\}$ - множина векторів нормованих інтервальних чисел.

Вектор ваг $w=\{(w_i=[w_i^L,w_i^U])\,|\,i=1,...,n\}$, $0\le w_i^L\le w_i^U$ називається *нормованим*, якщо він задовольняє двом умовам:

1) $\exists X=(x_1,...,x_n)\in N$,

2) w_i^L і w_i^U досяжні в N для всіх $i=1,...,n$.

Твердження. Вектор інтервальних ваг $w=\{(w_i=[w_i^L,w_i^U])\,|\,i=1,...,n\}$, $0\le w_i^L\le w_i^U$ нормований за наведеним вище означенням тоді і тільки тоді коли:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^L+\max_j(w_j^U-w_j^L)\le 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^U-\max_j(w_j^U-w_j^L)\ge 1.$$

Ці дві умови можуть бути переписані в еквівалентному виді:

$$w_j^U + \sum_{i \neq j}^{n} w_i^L \leq 1, \; j = 1,...,n$$

$$w_j^L + \sum_{i \neq j}^{n} w_i^U \geq 1, \; j = 1,...,n \,.$$

Ранжування інтервальних чисел методом ступенів переваги. Нехай $a = [a^L, a^U]$ і $b = [b^L, b^U]$ - інтервальні числа, $0 \leq a^L \leq a^U \leq 1$, $0 \leq b^L \leq b^U \leq 1$.

Ступінь переваги $a \succeq b$ обчислюється наступним чином:

$$p(a \succeq b) = \max(1 - \max(\frac{b^U - a^L}{(a^U - a^L) + (b^U - b^L)}, 0), 0) \,. \qquad (5.7)$$

Ступінь переваги $p(a \succeq b)$ можна розглядати як ступінь виконання нечіткого відношення переваги $a \succeq b$ одного інтервального числа над іншим. При побудові ранжування використовують позначення $a \underset{}{\overset{p(a \succeq b)}{\succ}} b$.

Формулу розрахунку ступеня переваги (5.7) можна записати в еквівалентному виді:

$$p(a \succeq b) = \frac{\max(a^U - b^L, 0) - \max(a^L - b^U, 0)}{(a^U - b^L) - (a^L - b^U)}$$

Метод ранжування інтервальних чисел на основі ступенів переваги складається з етапів:

1. Обчислити матрицю ступенів переваги $P = \{(p_{ij}) \,|\, i, j = 1,...,n\}$, де $p_{ij} = p(x_i \succeq x_j)$.
2. Для кожного $i = 1,.2,...,n$ обчислити узагальнену величину переваги інтервального числа x_i :

   $p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$ чи $p_i = \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} + \frac{n}{2} - 1)$ (модифікований метод)
3. Побудувати ранжування інтервальних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ відповідно до спадання величин p_i.

Цей метод дає повне ранжування множини інтервальних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$.

Метод нечіткого програмування переваг (Fuzzy Preference Programming Method, FPP)

Даний метод дозволяє знайти чіткі ваги $w_i \in \Re$, $w_i > 0$.

ІМПП називається *узгодженою*, якщо існує вектор ваг w, $w_i \in \Re$, $w_i > 0$:

$$l_{ij} \le w_i / w_j \le u_{ij} \ , \ \ i = 1,2,...,n-1 , \ j = 2,3,...,n , \ i < j . \tag{5.8}$$

Будемо шукати вектор ваг w, який задовольняє нерівності (4.8) нечітко, наближено. Тобто, допускаємо порушення (5.8) з деяким ступенем.

ІМПП називається *нечітко узгодженою*, якщо існує вектор w, $w_i \in \Re$, $w_i > 0$:

$$l_{ij} \underset{\sim}{\le} w_i / w_j \underset{\sim}{\le} u_{ij} \ , \ \ i = 1,2,...,n-1 , \ j = 2,3,...,n , \ i < j , \tag{5.9}$$

де $\underset{\sim}{\le}$ - нечітке відношення нестрогої переваги.

Перетворимо нерівність (5.9) наступним чином:

$$\begin{aligned} w_i - u_{ij} w_j \underset{\sim}{\le} 0 \ , \\ - w_i + l_{ij} w_j \underset{\sim}{\le} 0 , \end{aligned} \tag{5.10}$$

$i = 1,2,...,n-1$, $j = 2,3,...,n$, $i < j$.

Систему (5.10) з $n(n-1)$ нерівностей запишемо у матричному вигляді:

$$Rw \underset{\sim}{\le} 0 , \tag{5.11}$$

$$R \in \Re^{m \times n} , \ \ m = n(n-1)$$

k-ий рядок нерівності (5.11), для якого $R_k w \underset{\sim}{\le} 0$, $k = 1,2,...,m$, представляє нечітке лінійне обмеження і задається функцією приналежності:

$$\mu_k(R_k w) = \begin{cases} 1, & R_k w \le 0, \\ 1 - \dfrac{R_k w}{d_k}, & 0 < R_k w \le d_k , \\ 0, & R_k w > d_k , \end{cases} \tag{5.12}$$

де d_k - параметр, який задає допустимий інтервал наближеного задоволення чіткої нерівності $R_k w \le 0$.

Функція приналежності (5.12) показує рівень задоволення ОПР певним вектором ваг, відповідно до k-ї односторонньої нерівності (5.10).

Значення функції приналежності $\mu_k(R_k w)$:

- приймає значення нуль, коли відповідне чітке обмеження $R_k w \le 0$ сильно порушується;

- лінійно зростає і приймає додатні значення, що менші за одиницю, коли обмеження $R_k w \le 0$ задовольняється наближено;

- приймає значення одиниця, якщо обмеження $R_k w \le 0$ повністю задовольняється.

Нехай $\mu_k(R_k w)$ - функції приналежності, $k = 1,2,...,m$ нечітких обмежень $R_k w \underset{\sim}{\le} 0$ в області $T^{n-1} = \left\{ (w_1,...,w_n) \mid w_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}$, яка представляє ($n-1$)-вимірний симплекс.

Нечіткою допустимою областю $\tilde{A}$ симплекса T^{n-1} називається нечітка множина, яка є перетином нечітких обмежень (5.11):

$$\mu_{\tilde{A}}(w) = \left\{ \min\{\mu_1(R_1 w),...,\mu_m(R_m w)\} \mid \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}. \tag{5.13}$$

Якщо параметри d_k функцій приналежності (5.12) приймають достатньо великі значення, тоді можна отримати непорожню нечітку допустиму область. Тому, непорожня допустима область $\tilde{A}$ симплекса T^{n-1} є випуклою нечіткою множиною. Вона показує загальне задоволення для особи, що приймає рішення, певним чітким вектором ваг. Розв'язком є вектор ваг, на якому досягається максимум функції приналежності $\mu_{\tilde{A}}(w)$.

Максимізуючим розв'язком є вектор w^*, який відповідає максимальному значенню $\mu_{\tilde{A}}(w)$:

$$w^* = \arg\max_w \left\{ \min\{\mu_1(R_1 w), \ldots, \mu_m(R_m w)\} \mid \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}. \tag{5.14}$$

Нечітка допустима область $\widetilde{A}$ - випукла множина і всі нечіткі обмеження визначені як випуклі множини, тому принаймні одна точка w^* завжди присутня у симплексі, яка має максимальний ступінь приналежності множині $\widetilde{A}$.

Задача знаходження максимізуючого розв'язку перетворюється на задачу лінійного програмування шляхом введення змінної λ, використання (5.12) і (5.14):

$$\max \lambda \tag{5.15}$$

при обмеженнях

$$d_k \lambda + R_k w \le d_k ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 , \quad w_i > 0 , \quad i = 1,2,\ldots, n ,$$

$$k = 1,2,\ldots, m .$$

Твердження: Якщо ІМПП узгоджена, то $\lambda^* \ge 1$.

Твердження: Якщо ІМПП неузгоджена, то $\lambda^* \in (0,1)$.

Для неузгоджених ІМПП значення λ^* залежить від рівня неузгодженості ІМПП та від значень параметрів d_k. Параметри d_k мають бути достатньо великими, щоб гарантувати непорожність припустимої області $\widetilde{P}$ і додатність значення λ^*.

Приклад. Розглянемо три альтернативи рішень та елементи нечіткої матриці парних порівнянь цих альтернатив $\widetilde{a}_{12} = (1.5,\ 2,\ 2.5)$, $\widetilde{a}_{13} = (4,\ 5,\ 6)$, $\widetilde{a}_{23} = (2.5,\ 3,\ 3.5)$ - трикутні нечіткі числа. Значення параметрів $d_1 = d_2 = \ldots = d_5 = d_6 = 1$. Тоді задача (5.15) розрахунку ваг на кожному α - рівні запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \lambda \to \max \\ d_1\lambda + w_1 - u_{12}(\alpha)w_2 \le d_1 \\ d_2\lambda - w_1 + l_{12}(\alpha)w_2 \le d_2 \\ d_3\lambda + w_2 - u_{23}(\alpha)w_3 \le d_3 \\ d_4\lambda - w_2 + l_{23}(\alpha)w_3 \le d_4 \\ d_5\lambda + w_1 - u_{13}(\alpha)w_3 \le d_5 \\ d_6\lambda - w_1 + l_{13}(\alpha)w_3 \le d_6 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \\ w_1, w_2, w_3 > 0 \end{cases}$$

де $l_{12}(\alpha) = \alpha(m_{12} - l_{12}) + l_{12}$, $u_{12}(\alpha) = \alpha(m_{12} - u_{12}) + u_{12}$ для трикутного нечіткого числа $\widetilde{a}_{12} = (l_{12}, m_{12}, u_{12})$.

Максимізуючий розв’язок w^* та оптимальне значення λ^* цільової функції для різних α наведені в таблиці:

α	w_1^*	w_2^*	w_3^*	λ^*
0	0.5556	0.3333	0.1111	1.056
0.3	0.5699	0.3226	0.1075	1.038
0.5	0.5748	0.3171	0.1081	1.020
0.8	0.5802	0.3099	0.1099	0.991
1.0	0.5833	0.3056	0.1111	0.972

Розрахунок довірчих інтервалів [Bel, Pls] для локальних ваг альтернатив рішень

Нехай $D_{n\times n} = \{d_{ij} \mid i, j = 1,...,n\}$ – **чітка МПП** альтернатив рішень $a_1, a_2, ..., a_n$.

В основу методу розрахунку довірчих інтервалів для локальних ваг покладено твердження,що задана експертом МПП деякою мірою відображає реальні відношення ваг альтернатив і містить невизначеність, незалежно від рівня її узгодженості. Нехай МПП містить наступні види невизначеності:

1) невизначеність, яку вносить шкала, в якій експерт виконує оцінювання,

2) невизначеність, обумовлена можливими помилками експерта при виконанні парних порівнянь і його особистими якостями, такими як реалізм, оптимізм або песимізм.

Для кількісного оцінювання невизначеності описаних вище видів, надалі називатимемо її *невизначеністю експертних оцінок*, і побудови довірчих інтервалів для ваг альтернатив, пропонується метод, що використовує апарат теорії довіри (свідчень) Демпстера-Шеффера.

Суть цього методу полягає в наступному. Розглядаються наступні гіпотези:

- одноелементні множини $\{a_1\},\{a_2\},...,\{a_n\}$, які включають окремі альтернативи рішень,

- множина $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}=\Theta$, яка включає усі альтернативи рішень.

Базові довіри $m_i=m(\{a_i\})$ до альтернатив відповідають вагам альтернатив, а базова довіра $m(\Theta)$ до множини, яка містить усі альтернативи, як довіра до гіпотези, що усі альтернативи нерозрізнені експертом або мають однакову важливість для експерта, пропонується використовувати для вираження рівня невизначеності експертних оцінок.

В теорії довіри *базовим розподілом довіри* називається функція $m:2^{\Theta}\to[0,1]$, що визначена на підмножинах множини Θ і задовольняє аксіомам: $m(\varnothing)=0$ і $\sum_{B\in 2^{\Theta}} m(B)=1$.

Базовий розподіл довіри в задачі, що розглядається, визначимо наступним чином:

$$m(a_i)=m_i=\frac{v_i}{\sum_{j=1}^{n} v_j + X},\quad i=1,...,n,$$

де $v_i>0$ – ненормована вага альтернативи a_i, обчислена на основі МПП одним з відомих методів: головного власного вектору ЕМ, геометричної середньої RGMM або ін., $X > 0$ – ненормований показник рівня невизначеності експертних оцінок парних порівнянь.

Значення базової довіри до усієї множини альтернатив – нормований *показник рівня невизначеності експертних оцінок* визначимо

$$m_\Theta = \frac{X}{\sum_{j=1}^{n} v_j + X}.$$

Виконується рівність: $\sum_i m_i + m_\Theta = 1$. Показник X побудуємо як деякий відсоток від суми $\sum_j v_j$ таким чином:

– якщо експертні оцінки повністю узгоджені, то $X = X_1 = k_1 \sum_{j=1}^{n} v_j$, де параметр $k_1 \in (0,1)$ моделює невизначеність, яку вносить шкала Сааті, а також невизначеність внаслідок якостей експерта, таких як песимізм і оптимізм;

– якщо в експертних оцінках присутня неузгодженість, то рівень невизначеності збільшується мультиплікативно відповідно до значення показника узгодженості (ПУ) МПП, узятого з деяким коефіцієнтом $k_2 > 0$:

$$X = X_1(1 + k_2 \cdot ПУ),$$

$$X = X_1 = k_1 \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot (1 + k_2 \cdot ПУ) ,$$

де $k_1 \in (0,1)$, $k_2 > 0$, $ПУ \geq 0$.

Тоді значення базової довіри до альтернативи a_i дорівнює

$$m_i = \frac{v_i}{(1 + k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot ПУ)) \sum_{j=1}^{n} v_j}, \tag{5.16}$$

а нормований показник рівня неузгодженості експертних оцінок –

$$m_\Theta = \frac{k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot ПУ)}{1 + k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot ПУ)}, \; i = 1,...,n. \tag{5.17}$$

Довірчий інтервал для локальної ваги альтернативи a_i визначимо, використовуючи апарат теорії довіри Демпстера-Шеффера, наступним чином:

$$[Bel_i, Pls_i],$$

де Bel_i і Pls_i – значення функцій довіри і правдоподібності до одноелементної гіпотези $\{a_i\}$.

В теорії довіри функція довіри $Bel: 2^\Theta \to [0,1]$ визначається аксіомами $Bel(\varnothing)=0$, $Bel(\Theta)=1$ і $Bel(A)+Bel(\neg A)\le 1$. Величина $Bel(A)$ обчислюється як сума базових довір за всіма підмножинами *A*: $Bel(A)=\sum_{B\subseteq A} m(B)$ і показує повну довіру до гіпотези $A\subseteq\Theta$.

Функцією правдоподібності називається $Pls: 2^\Theta \to [0,1]$, де $Pls(A)$ показує величину максимального значення довіри, яке може бути по можливості назначено гіпотезі $A\subseteq\Theta$: $Pls(A)=1-Bel(\neg A)$. Величина $Bel(\neg A)$ показує рівень сумніву в гіпотезі A і обчислюється за формулою: $Bel(\neg A)=\sum_{\substack{B\subseteq\Theta\\ A\cap B=\varnothing}} m(B)$.

Функції $Bel(A)$ і $Pls(A)$ інтерпретуються як нижні і верхні імовірності появи гіпотези A в тому розумінні, що припускається існування деякої істинної імовірності $p(A)$ появи гіпотези *A*, такої що $Bel(A)\le p(A)\le Pls(A)$.

Очевидно, що значення довіри *Bel* до одноелементної множини співпадає зі значенням базової довіри до неї: $Bel(\{a_i\})=m_i$, а значення правдоподібності для множини $\{a_i\}$: $Pls(\{a_i\})=m_i+m_\Theta$. Таким чином, *довірчий інтервал для локальної ваги* альтернативи a_i в даній задачі дорівнює довірчому інтервалу до гіпотези $\{a_i\}$ і дорівнює:

$$[Bel_i, Pls_i]=[m_i,\ m_i+m_\Theta]. \tag{5.18}$$

Враховуючи (5.16) і (5.17), сформулюємо етапи методу розрахунку довірчого інтервалу для локальної ваги альтернативи a_i. Відомі особисті якості експерта (реаліст, песиміст або оптиміст).

Метод складається з етапів:

1. Розрахувати ненормовані локальні ваги v_i на основі МПП D одним з відомих методів, наприклад, головного власного вектору.
2. Розрахувати показник узгодженості МПП D.
3. Визначити значення параметру $k_1 \in (0,1)$ залежно від особистих якостей експерта та шкали. Задати значення параметру $k_2 > 0$.
4. Розрахувати довірчі інтервали $[Bel_i, Pls_i] = [m_i,\ m_i + m_\Theta]$ для локальних ваг альтернатив a_i, $i = 1,...,n$, використовуючи рівності (5.16) і (5.17).

Параметр $k_1(n)$ в (5.16) і (5.17) визначено на основі емпіричної оцінки $\hat{p}_1 = \hat{p}_1^{0.90}(n)$ (табл.5.1) величини $p_1(l) = \| w(l) - w^{реал}(l) \|_\infty$ чебишевської норми відхилення реальних ваг $w^{реал}(l)$ від ваг $w(l)$, обчислених на основі МПП $D^*(l)$ за результатами комп'ютерного моделювання:

$$k_1 = k_{11} \cdot \hat{p}_1 , \tag{5.19}$$

де $w(l) = v(l) / \sum_k v_k(l)$, вектор $v(l)$ обчислено методом головного власного вектору, $\hat{p}_1^{0.90}(n) = \hat{p}_1^{ср}(n) + 1.3\sigma(p_1(n))$ – значення чебишевської норми, таке, що для 90% модельованих МПП $D^*(l)$ виконується нерівність $p_1(l) \le \hat{p}_1^{0.90}(n)$, l – номер експерименту, $l = 1,...,10^5$, коефіцієнт $k_{11}(n) > 0$.

Значення коефіцієнта $k_{11} = k_{11}(n)$ в (5.19) визначаються емпірично так, щоб в 90% експериментів всі координати вектору нормованих реальних ваг $w^{реал}$, $w_i^{реал} = v_i^{реал} / \sum_k v_k^{реал}$ містилися в своїх довірчих інтервалах (табл.5.2):

$$w_i^{реал} \in [Bel_i, Pls_i],\ i = 1,2,..., n .$$

Таблиця 5.1. Оцінки значень параметра p_1 в рівності (5.19) при обчисленні довірчих інтервалів для ваг альтернатив

n	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{p}_1^{реаліст}$	0.054	0.046	0.039	0.033	0.025	0.021	0.017
$\hat{p}_1^{pessim}$	0.126	0.105	0.088	0.073	0.064	0.056	0.050
$\hat{p}_1^{optim}$	0.106	0.095	0.084	0.072	0.064	0.056	0.050

Таблиця 5.2. Значення коефіцієнта k_{11} і середні значення $\hat{m}_\Theta$ показника невизначеності m_Θ, що їм відповідають для експертів реаліста, песиміста/оптиміста

n	3	4	5	6	7	8	9
$k_{11}^{реаліст}$	2.35	2.84	3.34	3.85	4.77	5.40	6.00
$k_{11}^{опт/пес}$	3.60	4.40	5.20	5.05	6.80	7.70	8.27
$\hat{m}_\Theta$ для $k_{11}^{реаліст}$	0.113	0.115	0.115	0.112	0.106	0.100	0.094
$\hat{m}_\Theta$ для $k_{11}^{опт/пес}$	0.319	0.324	0.319	0.313	0.309	0.307	0.301

Значення $\hat{m}_\Theta$ в табл.5.2 показують, що рівень невизначеності експертних оцінок в даній задачі обчислення ваг зменшується із зростанням кількості альтернатив *n*. Як наслідок, із зростанням *n* зменшується ширина обчислюваних довірчих інтервалів (5.18).

Приклади розв’язання типових задач за лабораторною роботою

Задача 1

Для заданої нечіткої матриці парних порівнянь (МПП) побудувати інтервальну МПП для рівнів $\alpha = 0$, $\alpha = 0.5$ та $\alpha = 1$, використовуючи нечітку фундаментальну шкалу ФП 1 (див. в кінці цієї лабораторної роботи):

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \tilde{2} & \tilde{4} \\ 1/\tilde{2} & 1 & \tilde{3} \\ 1/\tilde{4} & 1/\tilde{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Для нечіткої МПП $\tilde{A}=\left\{\left(\tilde{a}_{ij}=\left(a_{ij}^{l},a_{ij}^{m},a_{ij}^{u}\right)\right)\mid i,j=\overline{1,n}\right\}$ елементи інтервальної МПП $A(\alpha)=\left\{\left(a_{ij}(\alpha)=\left[l_{ij}(\alpha),u_{ij}(\alpha)\right]\right)\middle| i,j=\overline{1,n}\right\}$ розраховуються: $l_{ij}(\alpha)=(1-\alpha)\left(a_{ij}^{m}-a_{ij}^{l}\right)$, $u_{ij}(\alpha)=(1-\alpha)\left(a_{ij}^{u}-a_{ij}^{m}\right)$.

При $\alpha=0$, $\alpha=1$ та $\alpha=0.5$ інтервальні МПП дорівнюють

$$A(\alpha)\Big|_{\alpha=0}=\begin{pmatrix} 1 & [1,3] & [3,5] \\ [1/3,1] & 1 & [2,4] \\ [1/5,1/3] & [1/4,1/2] & 1 \end{pmatrix},\quad A(\alpha)\Big|_{\alpha=1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

і $$A(\alpha)\Big|_{\alpha=0.5}=\begin{pmatrix} 1 & [1.5,\ 2.5] & [3.5,\ 4.5] \\ [1/2.5,\ 1/1.5] & 1 & [2.5,\ 3.5] \\ [1/4.5,\ 1/3.5] & [1/3.5,\ 1/2.5] & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2

Розрахувати локальні ваги методом нечіткої геометричної середньої (FRGMM) для наступної інтервальної МПП:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & [\mathbf{3},\mathbf{4}] & \mathbf{6} & [\mathbf{6},\mathbf{7}] \\ [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}] & \mathbf{1} & [\mathbf{3},\mathbf{4}] & [\mathbf{3},\mathbf{4}] \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} & [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}] & \mathbf{1} & [\mathbf{3},\mathbf{4}] \\ [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}] & [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}] & [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}] & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Згідно з методом FRGMM ненормовані і нормовані локальні ваги розраховуються відповідно

$$v_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}\ , \qquad w_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}} \ / \sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}\ ,$$

використовуючи розширені бінарні операції.

Отримаємо наступні результати:

$w^T = ([0.523,\ 0.673] \quad [0.199,\ 0.284] \quad [0.096,\ 0.128] \quad [0.050, 0.069])$

Задача 4

Виконати нормування інтервальних ваг, використовуючи нечітку арифметику: w_1=[3, 4.5], w_2=[4, 4.5], w_3=[1.5, 4.5], w_4= [1, 1.125].

Розв'язання

Використаємо наступну формулу для нормування ваг

$$w_i^{norm} = w_i \ / \sum_{k=1}^{n} w_k\ ,$$

де бінарні операції є розширеними бінарними операціями.

Отримаємо наступні результати: w_1^{norm}=[0.205; 0.474], w_2^{norm}=[0.274; 0.474], w_3^{norm}=[0.103; 0.474], w_4^{norm}= [0.068; 0.118].

Задача 5

Побудувати ранжування заданих інтервальних глобальних ваг альтернатив за методом, який базується на розрахунку ступеня переваги: w1=[0.2, 0.4], w2=[0.1, 0.4], w3=[0.2, 0.6].

Розв'язання

Матриця ступенів переваг дорівнює

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.333 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \\ 0.667 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Суми ступенів переваг однієї ваги над всіма іншими вагами:

p1=1.43, p2=1.2, p3=1.87. Результуюче ранжування: $w3 \succeq w1 \succeq w2$.

Задача 6

Побудувати ранжування інтервальних глобальних ваг альтернатив за методом, що базується на нечітких відношеннях переваги:

w1=[0.05; 0.18; 0.32], w2=[0.17; 0.32; 0.48], w3=[0.14; 0.27; 0.44].

Розв’язання

Для кожної пари заданих ваг розрахуємо значення відношень нестрогої переваги $\nu\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$, строгої переваги $\nu_s\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$ та еквівалентності $\nu_e\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$:

(i,j)	$\nu\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$	$\nu_s\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$	$\nu_e\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$
(1,2)	0.521	0	0.521
(1,3)	0.659	0	0.659
(2,3)	1	0.148	0.852
(2,1)	1	0.479	0.521
(3,1)	1	0.341	0.659
(3,2)	0.852	0	0.852

Задамо порогові значення $\gamma_s = 0.2$ і $\gamma_e = 0.8$. Тоді виконуються строгі переваги w2>w1, w3>w1 та еквівалентність w2~w3.

Підмножини недомінованих нечітких ваг дорівнюють:

$M_1 = \{w2,\ w3\}$, $M_2 = \{w1\}$.

Задача 7

Знайти довірчі інтервали [Bel, Pls] для локальних ваг альтернатив на основі МПП D^*, яка відповідає оцінкам цих альтернатив, наданих експертом-реалістом в шкалі Сааті:

$$D^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1/2 & 1 & 3 & 1 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. З табл.5.1 і табл.5.2 беремо параметри $\hat{p}_1 = 0.046$ і $k_{11}^{реаліст} = 2.84$. Відношення узгодженості МПП D^* дорівнює CR=0.006 і значно менше порогового значення $CR^{porog} = 0.08$, тому МПП D^* має малий рівень неузгодженості. Кінці довірчих інтервалів $[Bel_i(D^*)\ , Pls_i(D^*)]$ для ваг альтернатив a_i за умов $m_i = \dfrac{v_i}{(1 + k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot ПУ))\sum_{j=1}^{n} v_j}$,

$m_\Theta = \dfrac{k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot ПУ)}{1 + k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot ПУ)}$, $ПУ$=CR, $k_1 = k_{11} \cdot \hat{p}_1$, $k_2 = 1$ наведено в табл.5.3.

Таблиця 5.3. Значення лівого і правого кінців довірчих інтервалів для локальних ваг альтернатив a_i, $i = 1,...,4$ задачі 7

Альтернативи	a_1	a_2	a_3	a_4
$Bel_i(D^*)$	0.401	0.211	0.081	0.190
$Pls_i(D^*)$	0.517	0.327	0.198	0.307

Значення показника невизначеності експертних оцінок $m_\Theta = 0.116$.

2. Порядок виконання роботи

2.1. Уважно прочитати теоретичні відомості, наведені в п.1.

2.2. Використовуючи метод GPM, розрахувати ваги на основі НМПП та декількох різних функцій приналежності, заданих згідно з варіантом. Використати декомпозиційний підхід. Порівняти результати, отримані при різних функціях приналежності. Чи змінюється ранжування альтернатив рішень при використанні різних функцій приналежності на основі однієї і тієї ж НМПП? Результуючі ваги та ранжування представити графічно залежно від рівня α.

2.3. Використовуючи метод GPM та декомпозиційний підхід, розрахувати ваги на основі НМПП, заданих згідно з варіантом. Результуючі ваги представити графічно залежно від рівня α. Знайти ранжування на основі цих ваг для кожного α. Перевірити виконання властивостей сильного і слабкого збереження порядку та скоригувати НМПП в разі необхідності. Чи змінюється ранжування альтернатив рішень після коригування НМПП?

2.4. Використовуючи метод FPP, розрахувати ваги на основі НМПП та декількох різних функцій приналежності, заданих згідно з варіантом. Використати декомпозиційний підхід. Порівняти результати, отримані при різних функціях приналежності. Чи змінюється ранжування альтернатив рішень при використанні різних функцій приналежності на основі однієї і тієї ж НМПП? Результуючі ваги та ранжування представити графічно залежно від рівня α.

2.5. Використовуючи метод FPP, розрахувати ваги на основі НМПП, заданих згідно з варіантом, та декількох різних наборів параметрів

d_k. Використати декомпозиційний підхід. Результуючі ваги представити графічно залежно від рівня α. Встановити, в яких випадках вибір параметрів d_k впливає на результуючі ваги, в яких – ні. Як вибирати значення параметрів d_k, щоб гарантувати непорожність допустимої області і додатність значення λ^*?

2.6. Оцінити і за необхідності підвищити узгодженість НМПП, заданих згідно з варіантом. Використати різні функції приналежності елементів НМПП та різні методи дефазифікації. Чи змінюється результат оцінювання узгодженості при використанні різних функцій приналежності та різних методів дефазифікації на основі однієї і тієї ж НМПП?

2.7. Розглянути чіткі МПП, побудовані на основі заданих НМПП. Розрахувати інтервали [Bel, Pls] для ваг на основі чітких МПП. За інтервалами [Bel, Pls] побудувати ранжування альтернатив. Порівняти з ранжуваннями, отриманими на основі НМПП при різних значеннях рівня α.

2.8. Розглянути чіткі МПП, побудовані на основі заданих НМПП. Розрахувати ваги і показники узгодженості чітких МПП методом з лабораторної роботи №1 згідно варіанту. Побудувати ранжування альтернатив. Порівняти з ранжуваннями, отриманими на основі НМПП.

2.9. Зробити висновки по роботі.

2.10. Дати відповіді на контрольні питання, наведені в кінці роботи.

Варіанти завдань

№ варіанту	№ пункту порядку виконання роботи	№ нечіткої матриці парних порівнянь (див.нижче)	№ функції приналежності (див.нижче)
1	2.2, 2.7	1, 2, 3	1, 7, гаусівська
2	2.3, 2.7	13, 3, 6	2, 8, гаусівська
3	2.4, 2.7	1, 14, 15	3, 9, гаусівська
4	2.5, 2.7	13, 3, 6	4, 7, гаусівська
5	2.6, 2.7	1, 14, 15	5, 10, гаусівська
6	2.2, 2.7	4, 5, 6	2, 8, гаусівська
7	2.3, 2.7	7, 16, 17	5, 10, гаусівська
8	2.4, 2.7	8, 18, 19	4, 7, гаусівська
9	2.5, 2.7	7, 16, 17	3, 9, гаусівська
10	2.6, 2.7	8, 18, 19	1, 7, гаусівська
11	2.2, 2.7	7, 8, 9	3, 9, гаусівська
12	2.3, 2.7	11, 20, 21	1, 7, гаусівська
13	2.4, 2.7	22, 23, 24	5, 10, гаусівська
14	2.5, 2.8	11, 20, 21	2, 8, гаусівська
15	2.6, 2.8	22, 23, 24	3, 7, гаусівська
16	2.2, 2.8	10, 11, 12	4, 5, гаусівська
17	2.3, 2.8	25, 26	2, 9, гаусівська
18	2.4, 2.8	27, 28	1, 6, гаусівська
19	2.5, 2.8	25, 26	3, 8, гаусівська
20	2.6, 2.8	27, 28	5, 7, гаусівська
21	2.2, 2.8	29, 30	4, 10, гаусівська
22	2.3, 2.8	31, 32	6, 10, гаусівська
23	2.4, 2.8	33, 34	2, 8, гаусівська
24	2.5, 2.8	31, 32	1, 7, гаусівська

25	2.6, 2.8	33, 34	3, 9, гаусівська
26	2.2, 2.8	35, 36	2, 7, гаусівська

Нечіткі матриці парних порівнянь

Варіант 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/6 & 1/7 & 1/9 \\ 3 & 1 & 1/2 & 1/2 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1/3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 1/2 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 1/3 & 1/7 \\ 1/3 & 1/3 & 3 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1 & 2 & 1/5 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 1/2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 2 & 4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 1/3 & 1/7 \\ 1/3 & 1/2 & 3 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 1/2 & 2 & 3 \\ 1/9 & 1 & 1/8 & 1/8 & 1/3 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 8 \\ 1/2 & 8 & 1 & 1 & 5 \\ 1/3 & 3 & 1/8 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 7

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1 & 1/6 & 1/8 \\ 6 & 1 & 3 & 1/2 & 2 \\ 1 & 1/3 & 1 & 1/9 & 1/4 \\ 6 & 2 & 9 & 1 & 1/2 \\ 8 & 1/2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 8

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1/3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 7 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 9

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1/4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 10

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 & 1/7 & 1/5 \\ 3 & 1 & 1/4 & 2 & 1/2 \\ 2 & 4 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 7 & 1/2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 11

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1/3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 7 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1/7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 12

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/3 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 13

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1 & 2 & 1/5 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 2 & 2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 14

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/6 & 1/7 & 1/9 \\ 3 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 6 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Таблиця. Функції приналежності, які відповідають нечітким фундаментальним шкалам трикутного виду

	Нечіткі числа					
Лінгвістична змінна	**ФП 1**	**ФП 2**	**ФП 3**	**ФП 4**	**ФП 5**	**ФП 6**
Рівна важливість $\tilde{1}$	$\tilde{1} = (1,1,3)$	$\tilde{1} = (1,1,1)$	$\tilde{1} = (1,1,1)$	$\tilde{1} = (1,1,2)$	$\tilde{1} = (1,1,1)$	$\tilde{1} = (1/2,1,3/2)$
Слабка перевага $\tilde{3}$	$\tilde{3} = (1,3,5)$	$\tilde{3} = (2,3,4)$	$\tilde{3} = (2,3,4)$	$\tilde{3} = (2,3,4)$	$\tilde{3} = (1,3,5)$	$\tilde{3} = (1,3/2,2)$
Сильна перевага $\tilde{5}$	$\tilde{5} = (3,5,7)$	$\tilde{5} = (4,5,6)$	$\tilde{5} = (4,5,6)$	$\tilde{5} = (4,5,6)$	$\tilde{5} = (3,5,7)$	$\tilde{5} = (3/2,2,5/2)$
Дуже сильна $\tilde{7}$	$\tilde{7} = (5,7,9)$	$\tilde{7} = (6,7,8)$	$\tilde{7} = (6,7,8)$	$\tilde{7} = (6,7,8)$	$\tilde{7} = (5,7,9)$	$\tilde{7} = (2,5/2,3)$
Абсолютна перевага $\tilde{9}$	$\tilde{9} = (7,9,9)$	$\tilde{9} = (9,9,9)$	$\tilde{9} = (8,9,10)$	$\tilde{9} = (8,9,9)$	$\tilde{9} = (7,9,11)$	$\tilde{9} = (5/2,3,7/2)$
Проміжні значення $\tilde{2}$, $\tilde{4}$, $\tilde{6}$, $\tilde{8}$	$\tilde{2} = (1,2,4)$ $\tilde{4} = (2,4,6)$ $\tilde{6} = (4,6,8)$ $\tilde{8} = (6,8,9)$	$\tilde{2} = (1, 2, 3)$ $\tilde{4} = (3, 4, 5)$ $\tilde{6} = (5, 6, 7)$ $\tilde{8} = (7, 8, 9)$	$\tilde{2} = (1,2,3)$ $\tilde{4} = (3,4,5)$ $\tilde{6} = (5,6,7)$ $\tilde{8} = (7,8,9)$	$\tilde{2} = (1,2,3)$ $\tilde{4} = (3,4,5)$ $\tilde{6} = (5,6,7)$ $\tilde{8} = (7,8,9)$	$\tilde{2} = (1,2,4)$ $\tilde{4} = (2,4,6)$ $\tilde{6} = (4,6,8)$ $\tilde{8} = (6,8,10)$	$\tilde{2} = (3/4,5/4,7/4)$ $\tilde{4} = (5/4,7/4,9/4)$ $\tilde{6} = (7/4,9/4,11/4)$ $\tilde{8} = (9/4,11/4,13/4)$

Таблиця. Функції приналежності, які відповідають нечітким фундаментальним шкалам трапецевидного виду

Лінгвістична змінна	**ФП 7**	**ФП 8**	**ФП 9**	**ФП 10**
Рівна важливість $\tilde{1}$	$\tilde{1}=(1,1,1,2)$	$\tilde{1}=(1,1,1,3)$	$\tilde{1}=(1/3, 1/2, 3/2, 2)$	$\tilde{1}=(1/4, 1/2, 2, 3)$
Слабка перевага $\tilde{3}$	$\tilde{3}=(2, 2.5, 3.5, 4)$	$\tilde{3}=(1, 2, 4, 5)$	$\tilde{3}=(2, 2.5, 3.5, 4)$	$\tilde{3}=(1, 2, 4, 5)$
Сильна перевага $\tilde{5}$	$\tilde{5}=(4, 4.5, 5.5, 6)$	$\tilde{5}=(3, 4, 6, 7)$	$\tilde{5}=(4, 4.5, 5.5, 6)$	$\tilde{5}=(3, 4, 6, 7)$
Дуже сильна перевага $\tilde{7}$	$\tilde{7}=(6, 6.5, 7.5, 8)$	$\tilde{7}=(5, 6, 8, 9)$	$\tilde{7}=(6, 6.5, 7.5, 8)$	$\tilde{7}=(5, 6, 8, 9)$
Абсолютна перевага $\tilde{9}$	$\tilde{9}=(8, 9, 9, 9)$	$\tilde{9}=(7, 9, 9, 9)$	$\tilde{9}=(8, 9, 9, 9)$	$\tilde{9}=(7, 9, 9, 9)$
Проміжні значення між двома сусідніми судженнями	$\tilde{2}=(1, 1.5, 2.5, 3)$ $\tilde{4}=(3, 3.5, 4.5, 5)$ $\tilde{6}=(5, 5.5, 6.5, 7)$ $\tilde{8}=(7, 7.5, 8.5, 9)$	$\tilde{2}=(1, 1, 3, 4)$ $\tilde{4}=(2, 3, 5, 6)$ $\tilde{6}=(4, 5, 7, 8)$ $\tilde{8}=(6, 7, 9, 9)$	$\tilde{2}=(1, 1.5, 2.5, 3)$ $\tilde{4}=(3, 3.5, 4.5, 5)$ $\tilde{6}=(5, 5.5, 6.5, 7)$ $\tilde{8}=(7, 7.5, 8.5, 9)$	$\tilde{2}=(1, 1, 3, 4)$ $\tilde{4}=(2, 3, 5, 6)$ $\tilde{6}=(4, 5, 7, 8)$ $\tilde{8}=(6, 7, 9, 9)$

Звіт має містити:

1 Завдання до роботи згідно з варіантом.

2 Проміжні та кінцеві результати розрахунків згідно із завданням.

3 Текст програми, яка реалізує завдання, скріншоти вікон з результатами.

4 Конкретні висновки по роботі на основі проведеного аналізу.

Контрольні запитання для підготовки до роботи:

1. Дайте означення узгодженої, слабко узгодженої ІМПП.
2. Сформулюйте і доведіть критерій узгодженості ІМПП.
3. Дайте означення властивостей сильного і слабкого збереження порядку в ІМПП.
4. Наведіть етапи методу оцінювання і підвищення узгодженості ІМПП.

5. Наведіть алгоритм методу розрахунку нечітких локальних ваг на основі НМПП.
6. Опишіть декомпозиційний підхід до розрахунку нечітких локальних ваг на основі НМПП.
7. Опишіть модель GPM розрахунку ваг на основі ІМПП.
8. Опишіть методи нормування інтервальних ваг.
9. Дайте означення і наведіть властивості ступеня переваги одного інтервального числа над іншим.
10. Наведіть етапи методу ранжування інтервальних чисел на основі ступенів переваги.
11. Опишіть метод нечіткого програмування переваг FPP.
12. Яку структуру має матриця R в методі нечіткого програмування переваг?
13. Як задається функція приналежності нечіткого відношення нестрогої переваги в методі нечіткого програмування переваг FPP?
14. Доведіть твердження: Якщо ІМПП узгоджена, то $\lambda^* \geq 1$.
15. Доведіть твердження: Якщо ІМПП неузгоджена, то $\lambda^* \in (0,1)$.
16. Як вибирати значення параметрів d_k, щоб гарантувати непорожність допустимої області і додатність значення λ^* в методі FPP.
17. Опишіть метод нечіткої геометричної середньої FRGMM.
18. В чому полягає метод нечітких переваг FAHP?

Список літератури

1. Панкратова Н.Д., Недашківська Н.І. Моделі і методи аналізу ієрархій: Теорія. Застосування: *Навчальний посібник.* К: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2010. 372 с.
2. Недашківська Н.І. Системний підхід до підтримання прийняття рішень на основі ієрархічних та мережевих моделей. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2018. №1. С.7 – 18.
3. Nedashkovskaya N.I. Investigation of methods for improving consistency of a pairwise comparison matrix. *Journal of the Operational Research Society*. 2018. Vol.69, No.12. P.1947 – 1956.
4. Nedashkovskaya N.I. Evaluation of quality of expert pairwise comparison judgements in decision-making techniques. *International Journal of Latest Engineering and Management Research*. 2018. Vol.3, No.5. P. 69 – 74.
5. Недашківська Н.І. Оцінювання стійкості локальних ваг альтернатив рішень на основі методу парних порівнянь. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2016. №4. С.14 – 22.
6. Nedashkovskaya N.I. Method for Evaluation of the Uncertainty of the Paired Comparisons Expert Judgements when Calculating the Decision Alternatives Weights. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, No. 10. P.69 – 82.
7. Недашковская Н.И. Построение доверительных интервалов для весов альтернатив решений на основе экспертных оценок парных сравнений. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2015. №3. С. 121 – 130.
8. Недашковская Н.И. Модели парных сравнений на основании интервальных оценок экспертов. *Питання прикладної математики і*

математичного моделювання. Збірник наукових праць. 2015. Вип.15. С.121 – 137.

9. Недашковская Н.И. Принятие решений при согласованных экспертных оценках парных сравнений. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2014. №4. С. 35 – 44.
10. Недашківська Н.І. Метод узгоджених парних порівнянь при оцінюванні альтернатив рішень за якісним критерієм. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2013. №4. С. 67 – 79.
11. Недашковская Н.И. Оценивание чувствительности метода ДШ/МАИ к изменениям во множестве альтернатив. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2012. №1. С. 17 – 30.
12. Недашковская Н.И. Принятие решений по многим критериям при непол-ных экспертных оценках на базе метода анализа иерархий и теории Демпстера-Шафера. *Наукові праці. Чорноморський державний університет імені Петра Могили. Серія «Комп'ютерні технології»*. 2010. Вип.130, Том.143. С. 6 – 11.
13. Недашковская Н.И. Метод анализа иерархий в методологии сценарного анализа решения задач предвидения. *Східно-європейський журнал передових технологій*. 2010. Том 4, №9 (46). С.35 – 42.
14. Недашковская Н.И. Многокритериальное принятие решений с использованием максиминного синтеза в методе анализа иерархий (МАИ). *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2010. №3. С.7 – 16.
15. Nedashkovskaya N.I. Multi-criteria decision making in the presence of ignorance using the DS/AHP Method ISAHP 2011: *The XI International Symposium for the AHP/ANP: Proceedings* (Naples, Italy 15-18 June, 2011). Naples, 2011. 9 pages. Режим доступу: http://www.isahp.org/italy2011/proceedings-from-past-meetings.

16. Недашківська Н.І. Оцінювання стійкості розв'язку, отриманого методом аналізу ієрархій. *Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта:* материалы международ. научн. конф. (Херсон, 24 – 28 мая 2016 г.). Херсон: ПП Вишемирський В.С., 2016. С. 210 – 212.
17. Недашковская Н.И. Оценивание качества экспертной информации при анализе альтернатив решений. *Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта*: материалы международ. научн. конф. (Железный порт, 25 – 28 мая 2015 г.). Херсон: ХНТУ, 2015. С. 201 – 203.
18. Недашковская Н.И. Методы повышения согласованности матриц парных сравнений. *Интеллектуальный анализ информации*: сборник трудов международ. науч. конф. им. Т.А.Таран (Киев, 20 – 22 мая 2015г.). Киев: «Просвита», 2015. С. 146–151.
19. Недашковская Н.И. Подготовка экспертной информации для метода анализа иерархий. *Системный анализ в проектировании и управлении*: сборник науч. трудов XVIII международ. науч.-практич. конф. (Санкт-Петербург, 1 – 3 июля 2014г.). Санкт-Петербург, 2014. С.92 – 94.
20. Недашковская Н.И. Гибридный метод поддержки принятия решений в нечетких условиях при взаимозависимых критериях. *Системний аналіз та інформаційні технології*: матеріали міжнарод. наук.-техніч. конф. (Київ, 24 квіт. 2012 р.). Київ: ННК "ІПСА" НТУУ "КПІ", 2012. С. 95 – 96.
21. Недашковская Н.И. Оценивание чувствительности спектрального коэффициента согласованности нечетких экспертных оценок парных сравнений. *Інтелектуальний аналіз інформації*: збірка праць XII міжнарод. конф. (Київ, 16 – 18 трав. 2012 р.) Київ: Просвіта, 2012. С.226 – 232.

22. Недашківська Н.І. Багатокритеріальне оцінювання альтернатив при взаємозалежних критеріях за допомогою методу BOCR/MAI та нечітких мір. *Системи підтримки прийняття рішень. Теорія і практика*: матеріали наук.-техн. конф. з міжнародною участю СППР (Київ, 26-30 трав. 2011 р.). Київ: ІПММС НАНУ, 2011. С. 42 – 45.
23. Недашківська Н.І. Кількісна оцінка чутливості задачі обробки поглядів експертів за методами аналізу ієрархій. *Системи підтримки прийняття рішень. Теорія і практика*: матеріали наук.-техніч. конф. з міжнародною участю (Київ, 26–30 трав 2010 р.). Київ: ІПММС НАНУ, 2010. С. 42 – 45.
24. Недашківська Н.І. Адаптивне стратегічне планування розвитку підприємства з використанням нечіткого методу аналізу ієрархій. *Системний аналіз та інформаційні технології*: матеріали XII міжнародної науково-технічної конференції SAIT-2010 (Київ, 25–29 трав. 2010 р.). Київ: НТУУ «КПІ», 2010. С.123.
25. Недашківська Н.І. Оцінювання якості кластеризації методами багатокритеріальної підтримки прийняття рішень. *Системний аналіз та інформаційні технології*: матеріали XII міжнарод. наук.-техніч. конф. (Київ, 25–29 трав. 2010 р.) Київ: НТУУ «КПІ», 2010. С.294.
26. Недашковская Н.И. Методологическое и математическое обеспечение оценивания направлений развития социально-экономических систем. *Информационно-компьютерные технологии в экономике, образовании и социальной сфере*: материалы V Всеукраин. науч.-практич. конф. (Симферополь, 13 – 14 мая 2010 г.). Симферополь: КРП «Издательство «Крымучпедгиз», 2010. С. 61 – 62.
27. Недашковская Н.И. Интегрированные методы поддержки принятия решений в условиях нестохастической неопределенности. *Системний аналіз та інформаційні технології*: матеріали XI

міжнарод. наук.-техніч. конф. (Київ, 26–30 трав. 2009 р.). Київ: НТУУ «КПІ», 2009. С. 161.

28. Недашковская Н.И. Нелинейный синтез в методе анализа иерархий. *Системний аналіз та інформаційні технології*: матеріали XI міжн. наук.-техніч. конф. (Київ, 26–30 трав. 2009 р.). Київ: НТУУ «КПІ», 2009. С. 162.
29. Саати Т. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. Изд. 2-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 360 с.
30. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. М.: Радио и связь, 1991. — 224 с.
31. Ланкастер П. Теория матриц: Пер.с англ. –М.:Наука.Гл. ред.физ.-мат. лит.,1982.–272 с.
32. Оре О. Теория графов.– 2-е изд. – М.Наука, Гл. ред. физ.-мат.лит., 1980. 336 с.
33. Поспелов Д. А. Нечёткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. 1986.
34. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Підручник. Сьоме видання. – К.: Слово, 2006. – 816 с.
35. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. – К.: Наукова думка, 2002. – 381 с.
36. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. - М.:Наука, 1974.–256 с.
37. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах. - М.: Логос, 2000. – 296 с.
38. Система підтримки прийняття рішень «Decision Lens». URL: http://www.decisionlens.com. (дата звернення: 04.06.2018)
39. Система підтримки прийняття рішень «Expert Choice» URL: https://expertchoice.com/ (дата звернення: 04.06.2018)

40. Система підтримки прийняття рішень «СОЛОН» URL: http://www.dss-lab.org.ua/Diss.pdf (дата звернення: 04.06.2018)
41. Система підтримки прийняття рішень «Logical Decisions» URL: http://www.logicaldecisions.com. (дата звернення: 04.06.2018)
42. Система підтримки прийняття рішень «Make It Rational» URL: http://makeitrational.com/, http://www.transparentchoice.com. (дата звернення: 04.06.2018)
43. Система підтримки прийняття рішень «Mpriority» URL: http://www.tomake choice.com/ mpriority.html (дата звернення: 04.06.2018)
44. Система підтримки прийняття рішень «Super Decisions» URL: http://www. superdecisions.com. (дата звернення: 04.06.2018)
45. Система підтримки прийняття рішень «Vibor» URL: http://www.softportal.com/software-7763-sppr-vibor.html (дата звернення: 04.06.2018)