Cambio entre Sistemas de Referencia

José Cortés Parejo. Enero 2008

1. Cambio de Base en E^3

Sean $B_1 = \{ u_1, u_2, u_3 \}$ y $B_2 = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ bases de E^3 y sea $w \in E^3$ un vector cualquiera, que puede expresarse en ambas Bases:

$$\begin{cases} w = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 \\ w = \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \beta_3 \cdot v_3 \end{cases} \qquad \text{con } \alpha_i, \beta_i \in \mathbf{R}$$

Cada vector v_i de la 2ª Base es una combinación lineal de u_1, u_2, u_3:

$$\begin{cases} v_1 = \lambda_{11} \cdot u_1 + \lambda_{21} \cdot u_2 + \lambda_{31} \cdot u_3 \\ v_2 = \lambda_{12} \cdot u_1 + \lambda_{22} \cdot u_2 + \lambda_{32} \cdot u_3 \\ v_3 = \lambda_{13} \cdot u_1 + \lambda_{23} \cdot u_2 + \lambda_{33} \cdot u_3 \end{cases}$$

que puede escribirse en forma matricial, si se conocen las coordenadas de u_1, u_2, u_3 en la Base canónica, como:

$$\left[v_1 \mid v_2 \mid v_3 \right] = \left[u_1 \mid u_2 \mid u_3 \right] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{o bien: } V = U \cdot R \qquad \textbf{(1)}$$

donde en las matrices U y V están, por columnas, las coordenadas de los vectores u_i y v_i.
La matriz R se denomina **matriz del Cambio de Base**, de B_2 a B_1.

Si se suponen conocidas las coordenadas de w en la Base B_2, es decir, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$:

$$w = \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \beta_3 \cdot v_3 = \left[v_1 \mid v_2 \mid v_3 \right] \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \left[u_1 \mid u_2 \mid u_3 \right] \cdot R \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

y por otra parte: $w = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 = \left[u_1 \mid u_2 \mid u_3 \right] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$

Por tanto:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}} \qquad \textbf{(2)}$$

1.1 Cambio entre Bases Ortonormales

Si $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ son Bases ortonormales, las matrices $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{V}$, que tienen por columnas a los vectores de las respectivas Bases expresados en la Base canónica, son **ortogonales**:

$$\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^t, \qquad \boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{V}^t$$

Entonces, de $(\mathbf{1})$: $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{R}$ se tiene: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}^t\cdot\boldsymbol{V}$ **(3)**

y de aquí:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}^t\cdot\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^t \\ \boldsymbol{u}_2^t \\ \boldsymbol{u}_3^t \end{bmatrix}\cdot\left[\boldsymbol{v}_1 \mid \boldsymbol{v}_2 \mid \boldsymbol{v}_3\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^t\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{u}_1^t\boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{u}_1^t\boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{u}_2^t\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{u}_2^t\boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{u}_2^t\boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{u}_3^t\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{u}_3^t\boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{u}_3^t\boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(4)}$$

expresión que muestra que $\boldsymbol{R}$ puede obtenerse a través de los productos escalares de cada vector de la 1ª Base con cada uno de la 2ª, y dado que todos los vectores tienen norma 1:

$$\boldsymbol{u}_i^t\boldsymbol{v}_j = \|\boldsymbol{u}_i\|\cdot\|\boldsymbol{v}_j\|\cdot\cos\varphi_{ij} = \cos\varphi_{ij}$$

de forma que, en ocasiones, puede calcularse la matriz del cambio de base $\boldsymbol{R}$ si se conocen los ángulos de giro de cada vector de una Base con cada uno de la otra, aunque no se conozcan las expresiones de los propios vectores de $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$.

1.2 Transformación entre Bases Ortonormales

En ocasiones no se conoce la expresión de las 2 Bases en la canónica ni tampoco la matriz del cambio de Base $\boldsymbol{R}$ tal que $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{M}$.

Por el contrario, sólo se tiene la expresión de los vectores en la Base canónica de una de éllas, digamos $\mathbf{B}_1$ (es decir, se conoce la matriz $\boldsymbol{U}$) y una **matriz de transformación** $\boldsymbol{M}$ tal que:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{u}_3 \end{cases}$$

Esto es, la 2ª Base se define indicando cómo se transforma individualmente cada vector de la 1ª.

Estas 3 relaciones pueden expresarse matricialmente como:

$$\left[\boldsymbol{v}_1 \mid \boldsymbol{v}_2 \mid \boldsymbol{v}_3\right] = \boldsymbol{M}\cdot\left[\boldsymbol{u}_1 \mid \boldsymbol{u}_2 \mid \boldsymbol{u}_3\right] \quad \text{o bien: } \boldsymbol{V} = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{U} \qquad \mathbf{(5)}$$

El conocimiento de la matriz $\boldsymbol{M}$, que es trivialmente ortogonal, permite desde luego obtener los vectores de la Base $\mathbf{B}_2$ expresados en la Base canónica.

Evidentemente, $\boldsymbol{M}$ está relacionada con la matriz del cambio de Base $\boldsymbol{R}$ de $(\mathbf{1})$:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^t = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}^t \qquad \mathbf{(6)}$$

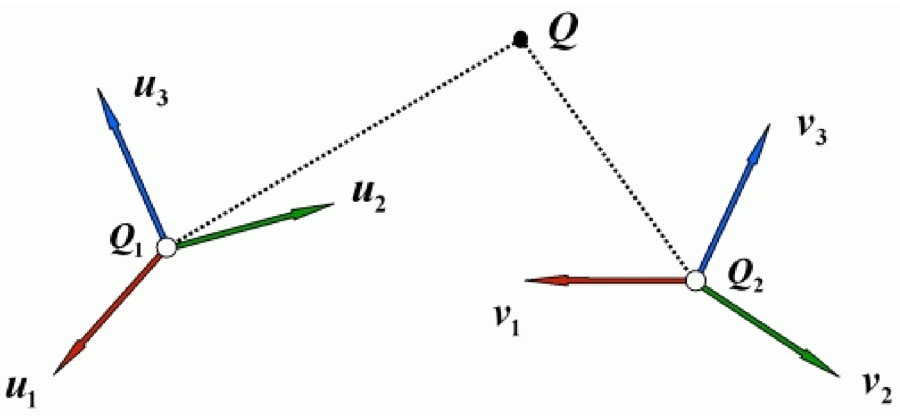
O también:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}^t\boldsymbol{M}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}^t\boldsymbol{M}\boldsymbol{V} \qquad \mathbf{(7)}$$

2. Cambio entre Sistemas de Referencia

Consideremos un Sistema de referencia $\mathbf{R} = \{ Q_0, [w_1, w_2, w_3] \}$ donde Q_0 es su origen de coordenadas y w_1, w_2, w_3 los vectores de la Base asociada, que supondremos ortonormal.
Dado un punto $Q \in \mathbf{R}^3$, sus **coordenadas en el Sistema de referencia** son, por definición, las coordenadas del vector $w = Q - Q_0$ en la Base $\{ w_1, w_2, w_3 \}$.

Consideremos ahora 2 Sistemas de referencia $\mathbf{R}_1 = \{ Q_1, [u_1, u_2, u_3] \}$ y $\mathbf{R}_2 = \{ Q_2, [v_1, v_2, v_3] \}$ con Bases asociadas ortonormales y sea $Q \in \mathbf{R}^3$ un punto arbitrario.



El punto Q tendrá unas coordenadas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en el 1^er S.R. y otras $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ en el 2º S.R.:

$$\begin{cases} Q - Q_1 = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 \\ Q - Q_2 = \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \beta_3 \cdot v_3 \end{cases}$$

El problema que nos planteamos es similar al de cambio de Base: Obtener $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en función de $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Para ello, expresamos el vector $Q - Q_1$, por ejemplo, en ambas Bases:

$$Q - Q_1 = [\, u_1 \mid u_2 \mid u_3 \,] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = U \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$Q - Q_1 = (Q - Q_2) + (Q_2 - Q_1) = [\, v_1 \mid v_2 \mid v_3 \,] \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + (Q_2 - Q_1) = V \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + (Q_2 - Q_1)$$

De aquí, igualando ambas expresiones:

$$U \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = V \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + (Q_2 - Q_1)$$

de donde podemos despejar los α_i en función de los β_i:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = U^t V\cdot\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix} + U^t\left(Q_2 - Q_1\right)$$

Teniendo en cuenta que por **(3)** $R = U^t \cdot V$ (matriz del cambio de Base):

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = R\cdot\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix} + U^t\left(Q_2 - Q_1\right) \qquad \textbf{(8)}$$

Nótese que para poder utilizar estas ecuaciones es necesario conocer la matriz U que tiene por columnas los vectores de la Base B_1 expresados en la Base canónica y la matriz R del cambio de Base B_2 a B_1. Falta especificar cómo vienen expresados los puntos Q_1 y Q_2, que en **(8)** se suponen en el Sistema de Referencia Universal (S.R.U.).

Supondremos, como suele ser lo habitual, que Q_1 es conocido en el S.R.U.; es decir, se conocen las coordenadas del vector $Q_1 - (0,0,0)$ en la Base canónica.
Con frecuencia, sin embargo, Q_2 no se conoce en el S.R.U., sino que se define en relación al primer Sistema de referencia:

$$Q_2 - Q_1 = \lambda_1\cdot u_1 + \lambda_2\cdot u_2 + \lambda_3\cdot u_3 \qquad \textbf{(9)}$$

Es decir, lo que se conoce son las coordenadas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ del punto Q_2 en el primer S.R.

En este caso:

$$Q_2 - Q_1 = \left[u_1 \mid u_2 \mid u_3\right]\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix} = U\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}$$

de donde el 2º término en **(8)** es: $U^t\left(Q_2 - Q_1\right) = U^t U\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}$

y la expresión **(8)** queda:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = R\cdot\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix} \qquad \textbf{(10)}$$

Expresión muy "económica" en el sentido de que no requiere en absoluto conocer los vectores de las Bases involucradas ni los puntos origen de los respectivos S.R., sino que basta con conocer la matriz R del cambio de Base y las coordenadas del origen del 2º S.R. en el primero de ellos.

Nótese que, al aparecer una **Traslación** en las ecuaciones del cambio entre Sistemas de Referencia **(10)**, podemos escribir dichas ecuaciones utilizando coordenadas homogéneas:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \lambda_1 \\ & R & & \lambda_2 \\ & & & \lambda_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(11)}$$

con lo cual el cambio de coordenadas se realiza mediante una única multiplicación matricial.

2.1. Cambio al Sistema de Referencia Universal

Este es un caso particular interesante pues se presenta con frecuencia.
Si uno de los S.R. es el Universal, por ejemplo $\mathbf{R}_1 = \{ (0, 0, 0), [e_1, e_2, e_3] \}$,siendo e_1, e_2, e_3 los vectores de la Base canónica, entonces por **(3)**:

$$R = U^t \cdot V \qquad \text{donde } U = [\, e_1 \,|\, e_2 \,|\, e_3 \,] \equiv I$$

por lo que $R = V = [\, v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \,]$.

Si $\mathbf{R}_2 = \{ Q_2, [v_1, v_2, v_3] \}$ y $Q_2 = (q_x, q_y, q_z)$ con coordenadas expresadas en el S.R.U., entonces la transformación de coordenadas es:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} & & & q_x \\ v_1 & v_2 & v_3 & q_y \\ & & & q_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O bien, llamando $p^{(0)} = [\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3 \; 1]^t$ y $p = [\beta_1 \; \beta_2 \; \beta_3 \; 1]^t$ se tiene:

$$p^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & V & & Q \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot p \qquad \textbf{(12)}$$

que relaciona las coordenadas de un punto en el S.R.U., $p^{(0)}$, en función de sus coordenadas p en otro Sistema de Referencia, siendo V la matriz cuyas columnas son los vectores del S.R. y Q su origen, todos expresados en la Base canónica.

3. Sistemas de Referencia encadenados

Consideremos una sucesión de S.R. $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_n$ donde $\mathbf{R}_i = \left\{ Q_i, \left[e_1^i, e_2^i, e_3^i \right] \right\}$.
Denotaremos por $Q \equiv (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i)$ a las coordenadas de un punto Q en el S. R. $\mathbf{R}_i$.

Dados dos S.R. consecutivos $\mathbf{R}_{i-1}$, $\mathbf{R}_i$, nos proponemos, como en la sección anterior, obtener las coordenadas de un punto Q en el S.R. $\mathbf{R}_{i-1}$, supuesto se conocen estas coordenadas en el siguiente S.R. $\mathbf{R}_i$.

Como antes, se supondrá conocida la matriz del cambio de Base R_i^{i-1} tal que:

$$\left[e_1^i \,\middle|\, e_2^i \,\middle|\, e_3^i \right] = \left[e_1^{i-1} \,\middle|\, e_2^{i-1} \,\middle|\, e_3^{i-1} \right] \cdot R_i^{i-1} \tag{13}$$

y asimismo, también serán conocidas las coordenadas del origen Q_i en el S.R. $\mathbf{R}_{i-1}$:

$$Q_i - Q_{i-1} = q_{i1}^{i-1} \cdot e_1^{i-1} + q_{i2}^{i-1} \cdot e_2^{i-1} + q_{i3}^{i-1} \cdot e_3^{i-1} \tag{14}$$

Con esta notación, podemos escribir las ecuaciones **(11)** del cambio de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^{i-1} \\ \alpha_2^{i-1} \\ \alpha_3^{i-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & q_{i1}^{i-1} \\ & R_i^{i-1} & & q_{i2}^{i-1} \\ & & & q_{i3}^{i-1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^{i} \\ \alpha_2^{i} \\ \alpha_3^{i} \\ 1 \end{bmatrix} = T_i^{i-1} \begin{bmatrix} \alpha_1^{i} \\ \alpha_2^{i} \\ \alpha_3^{i} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Análogamente, las coordenadas de un punto Q en el S.R. $\mathbf{R}_{i-2}$ en función de sus coordenadas en el S.R. $\mathbf{R}_{i-1}$ serán:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^{i-2} \\ \alpha_2^{i-2} \\ \alpha_3^{i-2} \\ 1 \end{bmatrix} = T_{i-1}^{i-2} \begin{bmatrix} \alpha_1^{i-1} \\ \alpha_2^{i-1} \\ \alpha_3^{i-1} \\ 1 \end{bmatrix} = T_{i-1}^{i-2} \cdot T_i^{i-1} \begin{bmatrix} \alpha_1^{i} \\ \alpha_2^{i} \\ \alpha_3^{i} \\ 1 \end{bmatrix}$$

y aplicando sucesivamente estas transformaciones, podemos llegar hasta el S.R. $\mathbf{R}_0$:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \alpha_1^{0} \\ \alpha_2^{0} \\ \alpha_3^{0} \\ 1 \end{bmatrix} = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2 \cdot \ldots \cdot T_{i-1}^{i-2} \cdot T_i^{i-1} \begin{bmatrix} \alpha_1^{i} \\ \alpha_2^{i} \\ \alpha_3^{i} \\ 1 \end{bmatrix}} \tag{16}$$

ecuaciones que proporcionan las coordenadas del punto Q en el S. R. inicial en función de sus coordenadas en el S.R $\mathbf{R}_i$ y de las matrices de transformación de cada S.R al anterior.

4. Rotación de la 1ª Base

Dadas 2 Bases B_1 y B_2, la segunda puede siempre considerarse una **rotación** de la primera alrededor de algún eje apropiado.
Sin embargo, no es usual que se especifique explícitamente este eje, sino que normalmente los vectores de la 2ª Base se definirán mediante **aplicación sucesiva de 3 rotaciones elementales** que se realizan con respecto a ejes que tienen por dirección a alguno de los $\boldsymbol{u}_i$ o con respecto a alguno de estos ejes ya transformado por una rotación elemental previa.

4.1 Rotación alrededor de un vector de la 1ª Base

Para rotar un vector $\boldsymbol{w}$ un ángulo φ alrededor de un vector concreto $\boldsymbol{u}_i$ de la Base B_1, el proceso puede descomponerse en 3 pasos (que se explican con detalle más abajo):

1- Aplicar a $\boldsymbol{w}$ una transformación de rotación $\boldsymbol{T}$ tal que "indirectamente" transforme $\boldsymbol{u}_i$ en $\boldsymbol{e}_i$ (el correspondiente vector de la Base canónica). De esta forma, el "nuevo" eje de rotación es $\boldsymbol{e}_i$.

2- Realizar a continuación sobre $\boldsymbol{Tw}$ la **rotación plana** $\boldsymbol{R}_i(\varphi)$ de ángulo φ alrededor del eje $\boldsymbol{e}_i$.

3- Aplicar a $\boldsymbol{R}_i(\varphi)\cdot(\boldsymbol{Tw})$ la inversa de la rotación $\boldsymbol{T}$ que "devuelve" el eje $\boldsymbol{e}_i$ a $\boldsymbol{u}_i$, es decir, $\boldsymbol{T}^t$.

La transformación completa es entonces: $\bar{w} = \left(\boldsymbol{T}^t \cdot \boldsymbol{R}_i(\varphi)\cdot \boldsymbol{T}\right) w$

Nótese que en principio basta con que la matriz $\boldsymbol{T}$ transforme $\boldsymbol{u}_i$ en cualquier vector de la Base canónica $\boldsymbol{e}_j$ para después, en el 2º paso, aplicar la correspondiente rotación plana $\boldsymbol{R}_j(\varphi)$. Sin embargo, el conocer que $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ es una Base ortonormal, facilita la expresión de $\boldsymbol{T}$.

Desarrollemos entonces los 3 pasos descritos:

1- Sea $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^t \\ \boldsymbol{u}_2^t \\ \boldsymbol{u}_3^t \end{bmatrix}$ Se tiene: $\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^t \\ \boldsymbol{u}_2^t \\ \boldsymbol{u}_3^t \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^t\boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{u}_2^t\boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{u}_3^t\boldsymbol{u}_i \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_i$

2- La matriz $\boldsymbol{R}_i(\varphi)$ es una rotación plana alrededor del eje $\boldsymbol{e}_i$:

$$\boldsymbol{R}_1(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}_2(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}_3(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3- La última transformación es por la matriz $\boldsymbol{T}^t = [\boldsymbol{u}_1 \,|\, \boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{u}_3]$.

Por tanto, la transformación completa es:

$$\bar{w} = \left(\boldsymbol{T}^t \cdot \boldsymbol{R}_i(\varphi)\cdot \boldsymbol{T}\right) w = [\boldsymbol{u}_1 \,|\, \boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{u}_3]\, \boldsymbol{R}_i(\varphi) \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^t \\ \boldsymbol{u}_2^t \\ \boldsymbol{u}_3^t \end{bmatrix} w \qquad \textbf{(17)}$$

4.2 Rotaciones sucesivas alrededor de vectores de la 1ª Base

Uno de los procedimientos típicos de definir la 2ª Base $\mathbb{B}_2$ a partir de la primera $\mathbb{B}_1$ consiste en aplicar sucesivamente a los vectores de $\mathbb{B}_1$ 3 rotaciones alrededor de 3 de sus propios vectores, que se consideran fijos durante el proceso. Estas rotaciones no tienen por qué estar dadas en el orden $\boldsymbol{u}_1 \to \boldsymbol{u}_2 \to \boldsymbol{u}_3$, ni tienen por qué ser alrededor de los 3 ejes. Por ejemplo, una secuencia válida podría ser: rotación alrededor de $\boldsymbol{u}_2$, seguida de rotación alrededor de $\boldsymbol{u}_1$ y finalmente, rotación de nuevo alrededor de $\boldsymbol{u}_2$.

Llamando $\left\{\boldsymbol{u}_1^{(1)}, \boldsymbol{u}_2^{(1)}, \boldsymbol{u}_3^{(1)}\right\}$ a los vectores obtenidos tras la primera rotación, $\left\{\boldsymbol{u}_1^{(2)}, \boldsymbol{u}_2^{(2)}, \boldsymbol{u}_3^{(2)}\right\}$ a los resultantes de la 2ª rotación y $\left\{\boldsymbol{u}_1^{(3)}, \boldsymbol{u}_2^{(3)}, \boldsymbol{u}_3^{(3)}\right\}$ a los correspondientes a la 3ª rotación, entonces se toman estos últimos vectores como los constituyentes de la nueva Base $\mathbb{B}_2$.

El proceso detallado es:

Rotación 1: Rotación de $\left\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\right\}$ alrededor de $\boldsymbol{u}_i$ (fijo) un ángulo φ_1

Sustituyendo en **(17)** el vector $\boldsymbol{w}$ respectivamente por $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$:

$$\left[\boldsymbol{u}_1^{(1)} \,|\, \boldsymbol{u}_2^{(1)} \,|\, \boldsymbol{u}_3^{(1)}\right] = \left[\boldsymbol{u}_1 \,|\, \boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{u}_3\right] \boldsymbol{R}_i(\varphi_1) \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^t \\ \boldsymbol{u}_2^t \\ \boldsymbol{u}_3^t \end{bmatrix} \left[\boldsymbol{u}_1 \,|\, \boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{u}_3\right] = \left[\boldsymbol{u}_1 \,|\, \boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{u}_3\right] \boldsymbol{R}_i(\varphi_1)$$

Rotación 2: Rotación de $\left\{\boldsymbol{u}_1^{(1)}, \boldsymbol{u}_2^{(1)}, \boldsymbol{u}_3^{(1)}\right\}$ alrededor de $\boldsymbol{u}_j$ (fijo) un ángulo φ_2

Sustituyendo en **(17)** el vector $\boldsymbol{w}$ respectivamente por $\boldsymbol{u}_1^{(1)}, \boldsymbol{u}_2^{(1)}, \boldsymbol{u}_3^{(1)}$:

$$\left[\boldsymbol{u}_1^{(2)} \,|\, \boldsymbol{u}_2^{(2)} \,|\, \boldsymbol{u}_3^{(2)}\right] = \left[\boldsymbol{u}_1 \,|\, \boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{u}_3\right] \boldsymbol{R}_j(\varphi_2) \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^t \\ \boldsymbol{u}_2^t \\ \boldsymbol{u}_3^t \end{bmatrix} \left[\boldsymbol{u}_1^{(1)} \,|\, \boldsymbol{u}_2^{(1)} \,|\, \boldsymbol{u}_3^{(1)}\right]$$

Sustituyendo ahora la expresión de $\left[\boldsymbol{u}_1^{(1)} \,|\, \boldsymbol{u}_2^{(1)} \,|\, \boldsymbol{u}_3^{(1)}\right]$ obtenida en la Rotación 1:

$$\left[\boldsymbol{u}_1^{(2)} \,|\, \boldsymbol{u}_2^{(2)} \,|\, \boldsymbol{u}_3^{(2)}\right] = \left[\boldsymbol{u}_1 \,|\, \boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{u}_3\right] \boldsymbol{R}_j(\varphi_2) \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^t \\ \boldsymbol{u}_2^t \\ \boldsymbol{u}_3^t \end{bmatrix} \left[\boldsymbol{u}_1 \,|\, \boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{u}_3\right] \boldsymbol{R}_i(\varphi_1) = \left[\boldsymbol{u}_1 \,|\, \boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{u}_3\right] \boldsymbol{R}_j(\varphi_2)\boldsymbol{R}_i(\varphi_1)$$

Rotación 3: Rotación de $\left\{\boldsymbol{u}_1^{(2)}, \boldsymbol{u}_2^{(2)}, \boldsymbol{u}_3^{(2)}\right\}$ alrededor de $\boldsymbol{u}_k$ (fijo) un ángulo φ_3

Sustituyendo en **(17)** el vector $\boldsymbol{w}$ respectivamente por $\boldsymbol{u}_1^{(2)}, \boldsymbol{u}_2^{(2)}, \boldsymbol{u}_3^{(2)}$:

$$\left[\boldsymbol{u}_1^{(3)} \,|\, \boldsymbol{u}_2^{(3)} \,|\, \boldsymbol{u}_3^{(3)}\right] = \left[\boldsymbol{u}_1 \,|\, \boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{u}_3\right] \boldsymbol{R}_k(\varphi_3) \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^t \\ \boldsymbol{u}_2^t \\ \boldsymbol{u}_3^t \end{bmatrix} \left[\boldsymbol{u}_1^{(2)} \,|\, \boldsymbol{u}_2^{(2)} \,|\, \boldsymbol{u}_3^{(2)}\right]$$

Sustituyendo ahora la expresión de $\left[\boldsymbol{u}_1^{(2)} \,|\, \boldsymbol{u}_2^{(2)} \,|\, \boldsymbol{u}_3^{(2)}\right]$ obtenida en la Rotación 2:

$$\left[u_1^{(3)} \mid u_2^{(3)} \mid u_3^{(3)} \right] = \left[u_1 \mid u_2 \mid u_3 \right] R_k(\varphi_3) \begin{bmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ u_3^t \end{bmatrix} \left[u_1 \mid u_2 \mid u_3 \right] R_j(\varphi_2) R_i(\varphi_1) =$$

$$= \left[u_1 \mid u_2 \mid u_3 \right] R_k(\varphi_3) R_j(\varphi_2) R_i(\varphi_1)$$

Llamando finalmente $\left[v_1 \mid v_2 \mid v_3 \right] \equiv \left[u_1^{(3)} \mid u_2^{(3)} \mid u_3^{(3)} \right]$ tenemos ya los vectores de la base B_2:

$$\boxed{\left[v_1 \mid v_2 \mid v_3 \right] = \left[u_1 \mid u_2 \mid u_3 \right] R_k(\varphi_3) R_j(\varphi_2) R_i(\varphi_1)} \qquad \textbf{(18)}$$

Y naturalmente, la **matriz del cambio de Base** es: $R = R_k(\varphi_3) R_j(\varphi_2) R_i(\varphi_1)$

4.3 Rotaciones sucesivas alrededor de los vectores transformados

Otro de los procedimientos usuales para definir la 2ª Base B_2 a partir de la 1ª B_1 consiste en aplicar una primera rotación a los vectores de B_1 alrededor de uno de sus vectores u_i (fijo) para obtener vectores $\left\{ u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)} \right\}$. Este paso es análogo al primero del procedimiento anterior.

La segunda rotación, sin embargo, se realiza respecto a uno de los vectores ya transformados, digamos $u_j^{(1)}$, para obtener los vectores $\left\{ u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)} \right\}$. Finalmente, la 3ª rotación se efectúa alrededor de uno de los vectores $u_k^{(2)}$ transformados por la 2ª rotación, resultando en los vectores $\left\{ u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)} \right\}$ que son los de la 2ª Base B_2.

El proceso detallado es:

Rotación 1: Rotación de $\left\{ u_1, u_2, u_3 \right\}$ alrededor de u_i (fijo) un ángulo φ_1.
Este paso es idéntico al primero de la sección anterior, por lo que:

$$\left[u_1^{(1)} \mid u_2^{(1)} \mid u_3^{(1)} \right] = \left[u_1 \mid u_2 \mid u_3 \right] R_i(\varphi_1)$$

Rotación 2: Rotación de $\left\{ u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)} \right\}$ alrededor de $u_j^{(1)}$ (fijo) un ángulo φ_2

Ahora la rotación es alrededor de uno de los vectores de la propia Base, por lo que hay que usar una expresión similar a **(17)**:

$$\bar{w} = \left[u_1^{(1)} \mid u_2^{(1)} \mid u_3^{(1)} \right] R_j(\varphi_2) \begin{bmatrix} u_1^{(1)^t} \\ u_2^{(1)^t} \\ u_3^{(1)^t} \end{bmatrix} w$$

Sustituyendo el vector w respectivamente por $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}$:

$$\left[u_1^{(2)} \mid u_2^{(2)} \mid u_3^{(2)}\right] = \left[u_1^{(1)} \mid u_2^{(1)} \mid u_3^{(1)}\right] R_j(\varphi_2) \begin{bmatrix} u_1^{(1)^t} \\ u_2^{(1)^t} \\ u_3^{(1)^t} \end{bmatrix} \left[u_1^{(1)} \mid u_2^{(1)} \mid u_3^{(1)}\right] = \left[u_1^{(1)} \mid u_2^{(1)} \mid u_3^{(1)}\right] R_j(\varphi_2)$$

Y expresando $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}$ en función de u_1, u_2, u_3 según la 1ª rotación:

$$\left[u_1^{(2)} \mid u_2^{(2)} \mid u_3^{(2)}\right] = \left[u_1 \mid u_2 \mid u_3\right] R_i(\varphi_1) R_j(\varphi_2)$$

Rotación 3: Rotación de $\left\{u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}\right\}$ alrededor de $u_k^{(2)}$ (fijo) un ángulo φ_3

Es similar a la 2ª rotación utilizando una expresión similar a **(17)**:

$$\bar{w} = \left[u_1^{(2)} \mid u_2^{(2)} \mid u_3^{(2)}\right] R_k(\varphi_3) \begin{bmatrix} u_1^{(2)^t} \\ u_2^{(2)^t} \\ u_3^{(2)^t} \end{bmatrix} w$$

sustituyendo el vector w respectivamente por $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}$:

$$\left[u_1^{(3)} \mid u_2^{(3)} \mid u_3^{(3)}\right] = \left[u_1^{(2)} \mid u_2^{(2)} \mid u_3^{(2)}\right] R_k(\varphi_3) \begin{bmatrix} u_1^{(2)^t} \\ u_2^{(2)^t} \\ u_3^{(2)^t} \end{bmatrix} \left[u_1^{(2)} \mid u_2^{(2)} \mid u_3^{(2)}\right] = \left[u_1^{(2)} \mid u_2^{(2)} \mid u_3^{(2)}\right] R_k(\varphi_3)$$

Sólo resta expresar $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}$ en función de u_1, u_2, u_3 según la 2ª rotación:

$$\left[u_1^{(3)} \mid u_2^{(3)} \mid u_3^{(3)}\right] = \left[u_1 \mid u_2 \mid u_3\right] R_i(\varphi_1) R_j(\varphi_2) R_k(\varphi_3)$$

Llamando finalmente $\left[v_1 \mid v_2 \mid v_3\right] \equiv \left[u_1^{(3)} \mid u_2^{(3)} \mid u_3^{(3)}\right]$ tenemos ya los vectores de la base $\mathcal{B}_2$:

$$\boxed{\left[v_1 \mid v_2 \mid v_3\right] = \left[u_1 \mid u_2 \mid u_3\right] R_i(\varphi_1) R_j(\varphi_2) R_k(\varphi_3)} \qquad \textbf{(19)}$$

Y la **matriz del cambio de Base** es: $R = R_i(\varphi_1) R_j(\varphi_2) R_k(\varphi_3)$

Comparando esta expresión con **(18)** observamos que sólo se diferencian en el orden en el que se aplican las rotaciones planas:

- **Si las rotaciones se realizan siempre con respecto a los vectores de la 1ª Base, entonces las rotaciones planas se van premultiplicando a las anteriormente hechas.**

- **Si las rotaciones se realizan respecto a vectores ya transformados, entonces las rotaciones planas se van postmultiplicando a las anteriormente hechas.**

4.4 Representación mediante ángulos de Euler

Cualquiera de los procedimientos vistos en las dos secciones anteriores se denomina una representación mediante ángulos de Euler de la rotación que transforma la Base B_1 en B_2. Sin embargo, existen algunas combinaciones especiales de las secuencias de rotaciones básicas que son muy utilizadas y que describiremos brevemente:

4.4.1 Movimiento giroscópico (Angulos de Euler ZXZ)

Es un sistema de representación de la orientación asociado al movimiento de un giróscopo. La secuencia es del tipo de la vista en la sección **4.3**:

1- Rotación de $\{u_1, u_2, u_3\}$ alrededor de u_3 un ángulo ϕ , que suele denominarse ***precesión***, para obtener la Base intermedia $\{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}\}$.

2- Rotación de $\{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}\}$ alrededor de $u_1^{(1)}$ un ángulo θ , que se denomina ***nutación***, para obtener la 2ª Base intermedia $\{u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}\}$.

3- Rotación de $\{u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}\}$ alrededor de $u_3^{(2)}$ un ángulo ψ , llamado ***ángulo de rotación propia***, obteniendo finalmente la Base $\mathrm{B}_2 \equiv \{v_1, v_2, v_3\} \equiv \{u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}\}$.

La denominación "ángulos de Euler ZXZ" se debe a la secuencia 3er eje → 1er eje → 3er eje.
Por tanto, la expresión de la transformación es:

$$[v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3] = [u_1 \,|\, u_2 \,|\, u_3]\, R_3(\phi) R_1(\theta) R_3(\psi)$$

4.4.2 Sistema *Roll, Pitch, Yaw* (Angulos de Euler RPY)

Este sistema se emplea comunmente en aeronáutica para describir la orientación de un sistema ortonormal ligado a un objeto móvil (la Base B_2) con respecto a otro sistema ortonormal fijo (La Base B_1). La secuencia es del tipo de la vista en la sección **4.2**:

1- Rotación de $\{u_1, u_2, u_3\}$ alrededor de u_1 un ángulo ψ , que se denomina en ingles ***Yaw*** (desviación o guiñada) para obtener la Base intermedia $\{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}\}$.

2- Rotación de $\{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}\}$ alrededor de u_2 un ángulo θ , que se llama ***Pitch*** (elevación o cabeceo) para obtener la 2ª Base intermedia $\{u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}\}$.

3- Rotación de $\{u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}\}$ alrededor de u_3 un ángulo ϕ , que es el ***Roll*** (giro o alabeo) obteniendo finalmente la Base $\mathrm{B}_2 \equiv \{v_1, v_2, v_3\} \equiv \{u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}\}$.

La transformación combinada tiene por expresión: $[v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3] = [u_1 \,|\, u_2 \,|\, u_3]\, R_3(\phi) R_2(\theta) R_1(\psi)$