首都师范大学

保全局一致的三维重建理论与算法

唐小林
数学科学学院

导师：雷娜、张振雷 教授

开题：保全局一致的三维重建理论与算法

开题答辩人：唐小林
专业：数学与信息技术
导师：雷娜、张振雷教授

2020 年 6 月 30 日

绪论

* 选题背景

* 相关理论部分

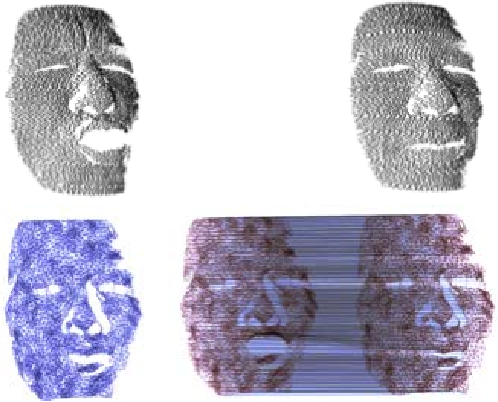
1. 切赫上同调（Cech Cohomology）
2. 持续同调 (Persistent Homology)

* 可行性分析

* 近期进度安排

* 结语

选题背景

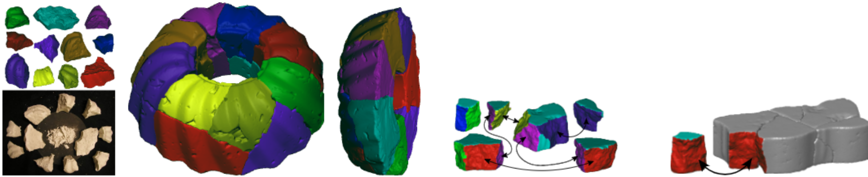


黄启兴等人用机器学习的方法将点云数据动画重建

选题背景

三维点云重建

选题背景



自动几何拼接

国内外研究现状综述和评价

上同调：顾险峰等人开发了曲面德拉姆上同调算法。而对于流形，德拉姆上同调和 cech 上同调是等价的。

持续同调：Carson 从 2006 来开发了持续同调的算法，现在在跟多方面开始有了应用，我们这里希望其与机器学习相结合

3D 重建：已经很有很多 3D 点云数据的重建。Hugues Hoppe 等人早期研究了如何用无组织的的点云数据进行重建 [4]，给出了点云定向的经典方法，但对于一些情况的全局一致仍有缺陷；黄启兴等人用机器学习的方法研究 3D 数据的重建，其中也为有几何拓扑信息的限制，以至于一些情况需要特殊处理，例如张口的人脸 [3]。3D 拼接一直是理论热点，我们希望引入拓扑几何信息帮助其拼接重建。

国内外研究现状综述和评价

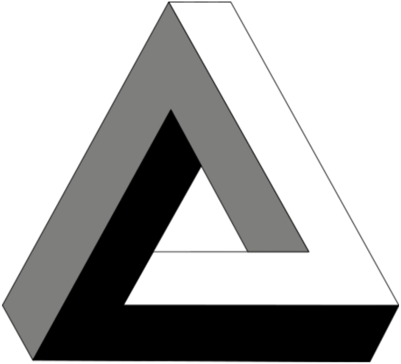
几何拓扑拼接: 很多 3D 数据重建方法无疑都需要用到几何对齐，拓扑拼接，才能从局部对真个几何体进行重构。对于全局性的考虑，大多数方法都是使用全局的一个优化函数去最小化（或最大化）去达到全局最优。目前的方法都未涉及使用其几何拓扑的信息使得几何上达到全局一致。加入几何拓扑的信息后能使整个问题得到改善。

相关理论

1. 切赫上同调（Cech Cohomology）

2. 持续同调 (Persistent Homology)

切赫上同调（Cech Cohomology）



彭罗斯三角描述了一个圆环的第一上同调的一个非平凡元素，取值是从观察者的距离的群 $(\mathbb{R}^+, *)$[*fromwiki*]

神经 (nerve）

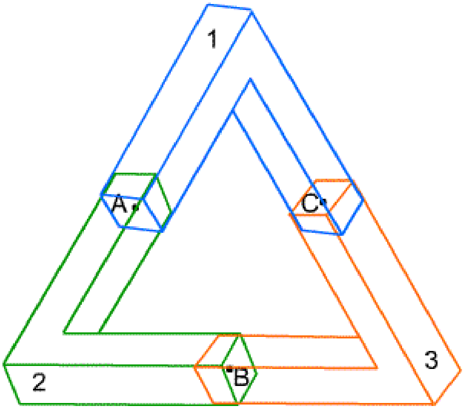
定义

神经 *(nerve*） 令 X 是一个拓扑空间，$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为 X 的任意的一个覆盖，$\mathcal{U}$ 的神经（*nerve*）是以集合 A 为顶点集的抽象单纯复形，且满足一个组 $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_k\}$ 可以张成一个 k 级单纯形当且仅当 $\bigcap_{i \in \{\alpha_0, \ldots, \alpha_k\}} U_i \neq \emptyset$。记作 $N(\mathcal{U})$。

神经 (nerve）

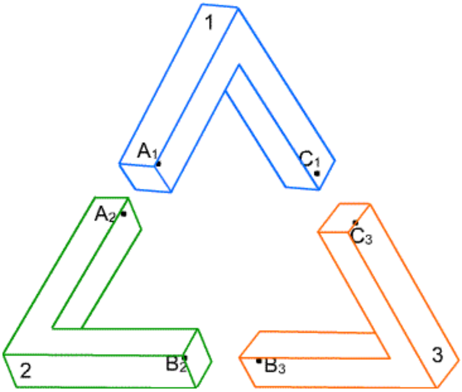
由神经引理知，如果 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 是一个好的覆盖（good cover），即对每一个 $\sigma\subset I$, 集合 $\bigcap\limits_{i\in\sigma} U_i$ 是可缩的或者为空集，神经 $N(\mathcal{U})$ 同伦等价 $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$

至此，可以构建复形，在此基础上定义同调与上同调。此处省略严格定义，来看之前简单地例子 –彭罗斯三角。



[From AMS:Feature Column-2014-10]

彭罗斯三角



彭罗斯三角

透视图在图片的平面中表示 3 维空间，暗示了所显示的某些点离观众的眼睛 E 比其他点更远。例如，$d(E, A_1)$ 从 E 到点 A_1 隐含距离可能和 E 到 A_2 的隐含距离 $d(E, A_2)$ 差异设置为

$$d_{12} = \frac{d(E, A_1)}{d(E, A_2)}$$

同理有，

$$d_{13} = \frac{d(E, C_1)}{d(E, C_3)} \quad d_{23} = \frac{d(E, B_2)}{d(E, B_3)}$$

彭罗斯三角

我们通过因子 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使它们向前移动或者向后移动，使得所有的 $d_{ij} = 1$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} d_{12} = 1, \frac{\lambda_1}{\lambda_3} d_{13} = 1, \frac{\lambda_2}{\lambda_3} d_{23} = 1,$$

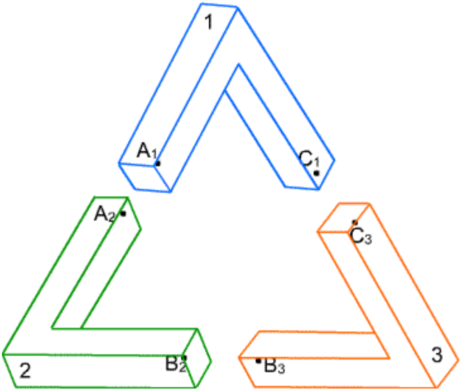
或

$$d_{12} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, d_{13} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, d_{23} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2},$$

如果没有这样的 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，那么这个对象是不可能存在的

若 $\epsilon = d_{12}d_{23}d_{31} = 1$ 则存在; 若 $\epsilon = d_{12}d_{23}d_{31} \neq 1$ 则不存在;

结论



传统观点认为 A_1 比 A_2 远，C_3 比 C_1 远，而 B_2 和 B_3 的距离是相同的。两个分数大于 1，一个等于 1, 所以它们的乘积不等于 1。

这个过程描述了一个非平凡的切赫上同调 $H^1(X, \mathbb{R}^+)$。

受其启发，我们可以希望与拓扑图论结合，将其应用于重建中几何拓扑拼接的全局一致性条件。

持续同调 (Persistent Homology)

十多年前 Calson 等人开始研究持续同调的应用，而国内是近年来才开始注意到这个研究数据的有力工具。我们希望将其运用到数据重建中拓扑性质的保持上（当然也能用于去噪）。

Cech 复形

现在考虑度量空间的数据点。

定义

***Cech* 复形** *若我们要研究的是度量空间，$\mathcal{B}(X)=\{B_\epsilon(x)\}_{x\in X}$ 可以构成覆盖。更一般地，对于任意的 X 的子集 V 有 $X=\bigcup_{v\in V}B_\epsilon(v)$, 则可以构造覆盖 $\{B_\epsilon(v)\}_{v\in V}$ 的神经。*

这种与 V 和 ϵ 有关的单纯复形记为 Cech 复形

Vietoris-Rips 复形

定义

***Vietoris-Rips* 复形** 令 X 是一个度量空间，设 d 是它的度量。令 X 为顶点集合且有参数 ϵ，若 $\{x_0, ..., x_k\}$ 可以张成一个 k 维单纯形当且仅当 $d(x_i, x_j) \leq \epsilon, 0 \leq i, j \leq k$ 这样构造出的单纯复形即为 *Vietoris-Rips* 复形，记作 $VR(X, \epsilon)$

Vietoris-Rips 复形不能保证同伦等价于 X

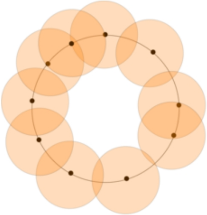
Cech 复形与 VR 复形

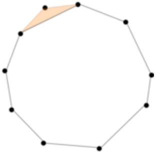
Cech 复形与 VR 复形有以下关系：

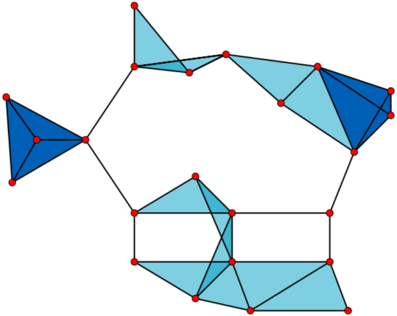
$$C(X, \epsilon) \subset VR(X, 2\epsilon) \subset C(X, 2\epsilon)$$

持续同调 (Persistent Homology)

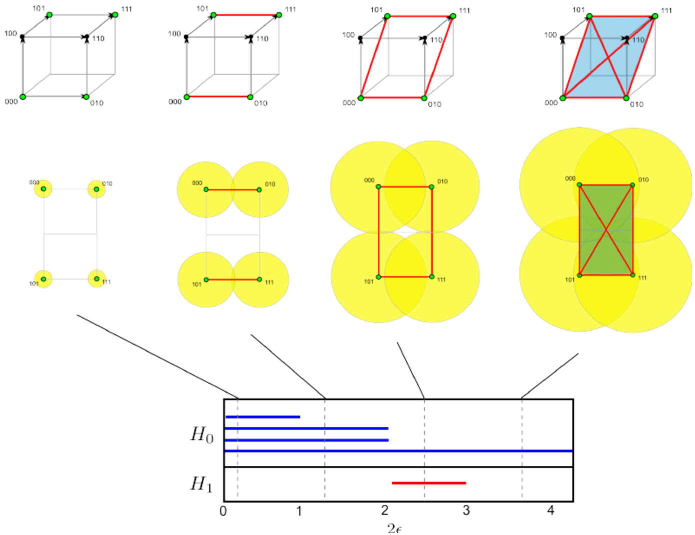
变大 ϵ 得到数据点动态拓扑信息的变化







条形码 barcode



条形码 barcode

一个条形码是实数轴 R 上的有限个区间组合的集合，一般可以表示为 $[a, b)$ 或 $[a, +\infty)$

" 洞" 在 a “出生”，在 b" 死亡"。不同维数的总区间个数代表不同的 betti 数。整个计算过程就是计算过程中的同调群，计算由线性代数的矩阵运算完成。

可行性分析

研究到目前为止

1. 对于持续同调执行较为容易，对于开始的问题的改进是可行。
2. 对切赫上同调理论的运用乃至于结合图论的理论还需再探索。

近期进度安排

1. 实现之前提到的对机器算法重建数据的改进工作，并与之前工作对比（7-9 月）

2. 对自动几何拼接问题以前算法的实现（7-9 月）

3. 对拓扑几何拼接问题的理论研究（7-）

结语

我们首先希望继续以上理论与算法（因为也存在不足）；其次，希望通过上面的工具去达到三维重建的几何拓扑一致性，从而达到改进算法的目的。

参考文献

[1]Xianfeng David Gu, Shing-Tung Yau.Computational Conformal Geometry[M]. 高等教育出版社: 北京,2008 年 1 月

[2]Qi-Xing Huang,Simon Flöry,Natasha Gelfand,etc. Reassembling Fractured Objects by Geometric Matching[J].ACM,May 2019,Transactions on Graphics(25(3)):569-578.

[3]Michael Wand,Philipp Jenke,Qixing Huang,etc. Reconstruction of Deforming Geometry from Time-Varying Point Clouds[J].SGP '07: Proceedings of the fifth Eurographics symposium on Geometry processing,2007,July:49-58.

[4]Tony,phillips. the Topology of Impossible Spaces,AMS:Feature Column-2014-10

谢谢各位老师聆听!