北京大学数学科学学院期末试题（B卷）

2022 - 2023 学年第 1 学期

考试科目　高等数学B1

姓　　名 ________　　　　学　　号 ________

本试题共 9 道大题，满分 100 分

1.(10分) 设 $\mathbb{R}^3$ 中直线 L 是平面 $2x+y-3z=0$ 与 平面 $x+2y-z-2=0$ 的交线。

（1）（5分）．求出 L 的一个标准方程。

（2）（5分）．求出 与 L 相切的、以原点 $(0,0,0)$ 为中心的球面的方程。

2.(15分) 下面极限存在吗？如果存在，求出极限值； 如果不存在，写出理由。

（1）（5分）．　$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2+x^4}-1}{(\ln(1+x))^2}$

（2）（5分）．　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+(e^y-1)^2}$

（3）（5分）．　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (e^y-1)\frac{xy}{x^2+y^2}$

3.(10分)

（1）（5分）．设整数 $n\geq 3$, n 元函数 $u(x_1,\cdots,x_n)=(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2)^{\frac{2-n}{2}}$，其中 $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \neq 0.$ 计算出 $\sum\limits_{k=1}^{n} u_{x_k x_k}$.

（2）（5分）．设二元函数 $h(x,t)=f(x+at)+g(x-at)$，其中 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 和 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 都有二阶导函数, a 是常数。　计算出 $h_{tt} - a^2 h_{xx}$.

4.(10分) 求 $\mathbb{R}^2$ 中曲线 $x^2(y+1)^2+\int_0^{xy}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}} = 1$ 在点 $(1, 0)$ 处 的切线方程。

5.(10分) 设二元函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z) = z^3+xz-2y = 0$ 所确定的隐函数。求出函数 $z(x,y)$ 在点 $(1, 1)$ 处方向导数的最大值。

6.(10分) 求出二元函数 $f(x,y) = x^{\sqrt{y}}$ 在点 $(1, 1)$ 处的二阶泰勒多项式。

7.(10分) 任意取定实数 $p>4$. 求函数 $f(x)= (x^4)^{\frac{1}{p}} + (1-x^4)^{\frac{1}{p}}$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上的最小值，并指明所有最小值点。

8.(10分) 证明：任意给定实数 k， 存在点 1 的开邻域 U，存在点 1 的开邻域 W， 存在唯一的函数 $y=f(x)$， $x\in U$, $y\in W$ 满足方程 $x^k - 3x^2y + 3xy^2 - y^k = 0$.

9.(15分) 设 $\mathbb{R}^3$ 中平面 K 的方程是 $x+3y+2z=6$. K 与 x 轴交点为 A， 与 y 轴交点为 B，与 z 轴交点为 C.　$\mathbb{R}^3$ 中一个动点 H 与平面 K 保持恒定的距离 1 ， H 在平面 K 上的垂直投影 记为 M .　假设 M 是在以 A, B, C 为 顶点 的三角形 ΔABC 之中， M 到三条边 BC， CA ， AB 的 距离 分别记为 p, q, r .

（1）（5分）．用 p, q, r 表示以 A, B, C, H 为四个顶点的四面体的表面积 $S(p,q,r)$.

（2）（5分）．写出变量 p, q, r 必须满足的约束条件。

（3）（5分）．求出以 p, q, r 为变量的函数 $S(p,q,r)$ 的 条件极值的稳定点。