线性代数 A 期初测试

共 9 题，满分 100 分，考试时间 90 分钟

2024 年 02 月 19 日

1 选择题

1. （5 分） 已知 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $ABC = O$, E 为 n 阶单位矩阵, 记矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ BC & E \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} AB & C \\ O & E \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} E & AB \\ AB & O \end{pmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3, 则

   A. $r_1 \le r_2 \le r_3$ B. $r_1 \le r_3 \le r_2$ C. $r_3 \le r_1 \le r_2$ D. $r_2 \le r_1 \le r_3$

2. （5 分） 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是

   A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. （5 分） 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 若 γ 既可由 α_1, α_2 线性表示, 也可由 β_1, β_2 线性表示, 则 γ 可以取

   A. $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

2 填空题

4. （5 分） 设 A, $A - E$ 可逆, 若 B 满足 $(E - (A - E)^{-1})B = A$, 则 $B - A =$____________.

5. （5 分） 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$. 若 $\gamma^T\alpha_i = \beta^T\alpha_i$ $(i = 1, 2, 3)$, 则 $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 =$____________.

3 解答题

6. （15 分） 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3$, $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3$.

   (1) 求可逆变换 $x=Py$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$.

   (2) 是否存在正交变换 $x=Qy$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$?

7. （20 分） 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} ijx_ix_j$.

   (1) 求二次型矩阵.

   (2) 求正交矩阵 Q, 使得二次型经正交变换 $x=Qy$ 化成标准型.

   (3) 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

8. （20 分） 设 A 是 n 级矩阵, 它的所有顺序主子式都不为 0, 证明存在下三角矩阵 B 使得 BA 是上三角矩阵.

9. （20 分） 设 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的 r 维子空间, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ 是 W 的一组基. 设 $A=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in M_{nr}(\mathbb{R})$, 是列向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 相应的矩阵. 证明: 对 $\alpha\in\mathbb{R}^n$, α 在 W 上的正交投影为 $A(A^TA)^{-1}A^T\alpha$. 其中 A^T 表示矩阵 A 的转置.