高三数学

考生注意：

1．本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。

2．答题前，考生务必用直径 0. 5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。

3．考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0. 5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。

4．本卷命题范围：高考范围.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

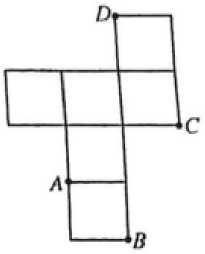
1．已知复数 z 满足 $z^2+1=0$，则 $|z+1|=$

A．3　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．1

2．已知集合 $A=\{x|x^2-3x-4\geqslant 0\}$，$B=\{x|(x-2)(5-x)>0\}$，则 $(\complement_R A)\cap B=$

A．$(-1,2)$　　B．$(2,4)$　　C．$(-4,1)$　　D．$(-4,2)$

3．如图是正方体的表面展开图，在原正方体中，直线 AB 与 CD 所成角的大小为



A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

4．已知向量 $\vec{a}=\left(\log_2 3,\sin\frac{4\pi}{3}\right)$，$\vec{b}=(\log_3 8,m)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $m=$

A．$-2\sqrt{3}$　　B．$-\sqrt{3}$　　C．$2\sqrt{3}$　　D．$3\sqrt{2}$

5．下表统计了 2017 年～2022 年我国的新生儿数量（单位：万人）.

年份	2017	2018	2019	2020	2021	2022
年份代码 x	1	2	3	4	5	6
新生儿数量 y	1723	1523	1465	1200	1062	956

经研究发现新生儿数量与年份代码之间满足线性相关关系，且 $\hat{y}=-156.66x+\hat{a}$，据此预测 2023 年新生儿数

量约为（精确到 0.1）（参考数据：$\sum_{i=1}^{6} y_i = 7929$）

A．773.2 万　　B．791.1 万　　C．800.2 万　　D．821.1 万

6．甲箱中有 2 个白球和 4 个黑球，乙箱中有 4 个白球和 2 个黑球．先从甲箱中随机取出一球放入乙箱中，以 A_1，A_2 分别表示由甲箱中取出的是白球和黑球 再从乙箱中随机取出一球，以 B 表示从乙箱中取出的是白球，则下列结论错误的是

A．A_1，A_2 互斥　　B．$P\left(B|A_1\right)=\frac{5}{7}$　　C．$P\left(A_2B\right)=\frac{1}{7}$　　D．$P\left(B\right)=\frac{13}{21}$

7．阿波罗尼斯（约公元前 262 年～约公元前 190 年），古希腊著名数学家，主要著作有《圆锥曲线论》、《论切触》等．尤其《圆锥曲线论》是一部经典巨著，代表了希腊几何的最高水平，此书集前人之大成，进一步提出了许多新的性质．其中也包括圆锥曲线的光学性质，光线从双曲线的一个焦点发出，通过双曲线的反射，反射光线的反向延长线经过其另一个焦点．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，其离心率 $e=\sqrt{5}$，从 F_2 发出的光线经过双曲线 C 的右支上一点 E 的反射，反射光线为 EP，若反射光线与入射光线垂直，则 $\sin\angle F_2F_1E=$

A．$\frac{5}{6}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

8．若集合 $\left\{x\left|x\ln x+\left(k-\ln 4\right)x+k<0\right.\right\}$ 中仅有 2 个整数，则实数 k 的取值范围是

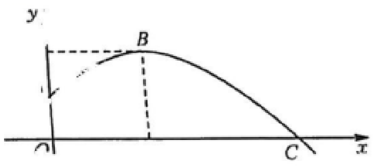
A．$\left[\frac{3}{4}\ln\frac{4}{3},\frac{2}{3}\ln 2\right)$　　B．$\left[\frac{2}{3}\ln 2,\frac{3}{4}\ln 3\right)$　　C．$\left[\frac{2}{3}\ln 2,\frac{3}{2}\ln 2\right)$　　D．$\left[\frac{3}{4}\ln\frac{2}{3},\frac{2}{3}\ln 2\right)$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9．过抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点 F 作直线 l，交抛物线于 A，B 两点，若 $\left|FA\right|=3\left|FB\right|$，则直线 l 的倾斜角可能为

A．30°　　B．60°　　C．120°　　D．150°

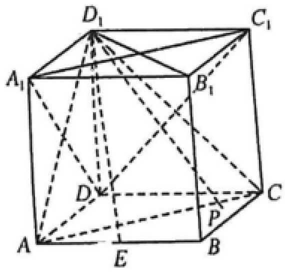
10．已知函数 $f\left(x\right)=a\sin\left(\omega x+4\varphi\right)$（$a>0$，$\omega>0$，$\left|\varphi\right|<\frac{\pi}{3}$），若 $f\left(x\right)$ 的图象过 $A\left(0,1\right)$，$B\left(m,2\right)$，$C\left(m+\pi,0\right)$ 三点，其中点 B 为函数 $f\left(x\right)$ 图象的最高点（如图所示），将 $f\left(x\right)$ 图象上的每个点的纵坐标保持不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{4}$ 倍，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，则



A. $f\left(x\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{5\pi}{6}\right)$　　B. $g\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

C. $f\left(x\right)$的图象关于直线$x=\frac{2\pi}{3}$对称　　D. $g\left(x\right)$在$\left[-\frac{5\pi}{3},-\pi\right]$上单调递减

11．如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，点E是AB的中点，点P为侧面BCC_1B_1内（含边界）一点，则



A．若$D_1P\perp$平面A_1C_1D，则点P与点B重合

B．以D为球心，$\frac{2\sqrt{6}}{3}$为半径的球面与截面ACD_1的交线的长度为$\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

C．若P为棱BC中点，则平面D_1EP截正方体所得截面的面积为$\frac{7\sqrt{17}}{6}$

D．若P到直线A_1B_1的距离与到平面CDD_1C_1的距离相等，则点P的轨迹为一段圆弧

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12．$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^9$的展开式中的常数项为__________．（用数字作答）

13．已知A为圆C：$x^2+\left(y-1\right)^2=\frac{1}{4}$上的动点，$B$为圆$E$：$\left(x-3\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$上的动点，$P$为直线$y=\frac{1}{2}x$上的动点，则$\left|PB\right|-\left|PA\right|$的最大值为__________．

14．在1，3中间插入二者的乘积，得到13，3，称数列1，3，3为数列1，3的第一次扩展数列，数列1，3，3，9，3为数列1，3的第二次扩展数列，重复上述规则，可得1，x_1，x_2，…，x_{2^n-1}，3为数列1，3的第n次扩展数列，令$a_n=\log_3\left(1\times x_1\times x_2\times\cdots\times x_{2^n-1}\times3\right)$，则数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为__________．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本小题满分 13 分）

面试是求职者进入职场的一个重要关口，也是机构招聘员工的重要环节．某科技企业招聘员工，首先要进行笔试，笔试达标者进入面试，面试环节要求应聘者回答 3 个问题，第一题考查对公司的了解，答对得 2 分，答错不得分，第二题和第三题均考查专业知识，每道题答对得 4 分，答错不得分．

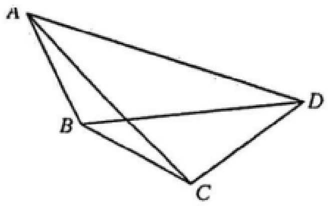
（1）若一共有 100 人应聘，他们的笔试得分 X 服从正态分布 $N\left(60,144\right)$，规定 $X \geqslant 72$ 为达标，求进入面试环节的人数大约为多少（结果四舍五入保留整数）；

（2）某进入面试的应聘者第一题答对的概率为 $\dfrac{2}{3}$，后两题答对的概率均为 $\dfrac{4}{5}$，每道题是否答对互不影响，求该应聘者的面试成绩 Y 的数学期望．

附：若 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$（$\sigma > 0$），则 $P\left(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma\right) \approx 0.683$，$P\left(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma\right) \approx 0.954$，$P\left(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma\right) \approx 0.997$．

16.（本小题满分 15 分）

如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB = BC = 2$，D 为$\triangle ABC$ 外一点，$AD = 2CD = 4$，记 $\angle BAD = \alpha$，$\angle BCD = \beta$．

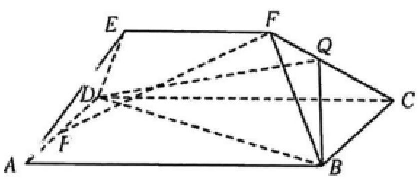


（1）求 $2\cos\alpha - \cos\beta$ 的值；

（2）若$\triangle ABD$ 的面积为 S_1，$\triangle BCD$ 的面积为 S_2，求 $S_1^2 + S_2^2$ 的最大值．

17.（本小题满分 15 分）

我国古代数学名著《九章算术》中记载：“刍（chú）甍（méng）者，下有袤有广，而上有袤无广．刍，草也．甍，窟盖也．”翻译为“底面有长有宽为矩形，顶部只有长没有宽为一条棱．刍甍的字面意思为茅草屋顶．”现有一个“刍甍”如图所示，四边形 $ABCD$ 为矩形，四边形 $ABFE$、$CDEF$ 为两个全等的等腰梯形，$EF /\!/ AB$，$AB = 4$，$EF = AD = 2$，P 是线段 AD 上一点．



（1）若点 P 是线段 AD 上靠近点 A 的三等分点，Q 为线段 CF 上一点，且 $\overrightarrow{FQ} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{FC}$，证明：$PF /\!/$ 平面 BDQ；

（2）若 E 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{3}{2}$，PF 与平面 BCF 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{39}}{13}$，求 AP 的长.

18.（本小题满分 17 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，右顶点为 A，且 $|AF_1|+|AF_2|=4$，离心率为 $\frac{1}{2}$.

（1）求 C 的方程；

（2）已知点 $B(-1,0)$，M，N 是曲线 C 上两点（点 M，N 不同于点 A），直线 AM，AN 分别交直线 $x=-1$ 于 P，Q 两点，若 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=-\frac{9}{4}$，证明：直线 MN 过定点.

19.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-a\ln x$（$a\in R$）.

（1）当 $a=e$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

（2）若 $f(x)$ 有 2 个零点，求 a 的取值范围.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1．C

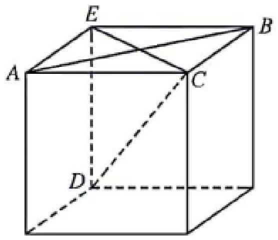
因为$z^2+1=0$，所以$z=\pm\mathrm{i}$，所以$\left|z+1\right|=\left|1\pm\mathrm{i}\right|=\sqrt{1^2+\left(\pm1\right)^2}=\sqrt{2}$．故选C.

2．B

由$x^2-3x-4\geqslant0$，得$x\leqslant-1$，或$x\geqslant4$，所以$A=\left\{x\middle|x\leqslant-1\text{或}x\geqslant4\right\}$．所以$\complement_R A=\left(-1,4\right)$，由$\left(x-2\right)\left(5-x\right)>0$，得$2<x<5$，所以$\left(\complement_R A\right)\cap B=\left(2,4\right)$．故选B.

3．D

将表面展开图还原为正方体，*AB*与*CD*在正方体中的位置如图所示，易证*AB*⊥平面*DCE*，所以*AB*⊥*CD*，故直线*AB*与*CD*所成角的大小为$\dfrac{\pi}{2}$．故选D.



4．C

因为$\vec{a}\perp\vec{b}$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即$\log_2 3\times\log_3 8+m\sin\dfrac{4\pi}{3}=0$，所以$\log_2 8-\dfrac{\sqrt{3}}{2}m=0$，所以$m=2\sqrt{3}$．故选C.

5．A

由题意得$\overline{x}=3.5$，$\overline{y}=\dfrac{7929}{6}=1321.5$，所以$\hat{a}=\overline{y}+156.66\times3.5=1321.5+548.31=1869.81$，所以$\hat{y}=-156.66x+1869.81$，当$x=7$时，$\hat{y}=-156.66\times7+1869.81=773.19\approx773.2$．故选A.

6．C

因为每次只取一球，故A_1，A_2是互斥的事件，故A正确；由题意得$P\left(A_1\right)=\dfrac{1}{3}$，$P\left(A_2\right)=\dfrac{2}{3}$，$P\left(B\middle|A_1\right)=\dfrac{5}{7}$，$P\left(B\right)=P\left(A_1B\right)+P\left(A_2B\right)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5}{7}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{13}{21}$，故B，D均正确；因为$P\left(A_2B\right)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{8}{21}$，故C错误．故选C.

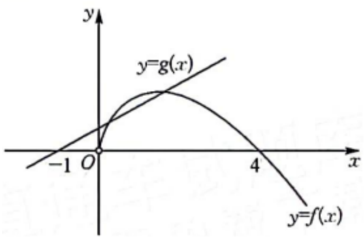
7．B

设$\left|EF_1\right|=m$，$\left|EF_2\right|=n$，$\left|F_1F_2\right|=2c$，由题意知$m-n=2a$，$F_2E\perp EP$，$\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$，所以m^2+n^2-2mm，$=4a^2$ $c=\sqrt{5}a$，$m^2+n^2=4c^2$，所以$mn=2c^2-2a^2=8a^2$，又$m-n=2a$，所以

$n^2+2an-8a^2=0$，解得 $n=2a$，所以 $\sin\angle F_2F_1E=\frac{|EF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{2a}{2\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$．故选 B.

8．A

原不等式等价于 $k(x+1)<x\ln 4-x\ln x$，设 $g(x)=k(x+1)$，$f(x)=x\ln 4-x\ln x$，则 $f'(x)=\ln 4-(1+\ln x)=\ln\frac{4}{x}-1$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{4}{e}$．当 $0<x<\frac{4}{e}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x>\frac{4}{e}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减．又 $f(4)=0$，$x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$，因此 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象如图，



当 $k\leqslant 0$ 时，显然不满足题意；当 $k>0$ 时，当且仅当 $\begin{cases}g(1)<f(1)\\g(2)<f(2)\\g(3)\geqslant f(3)\end{cases}$，或 $\begin{cases}g(1)\geqslant f(1)\\g(2)<f(2)\\g(3)<f(3)\end{cases}$.

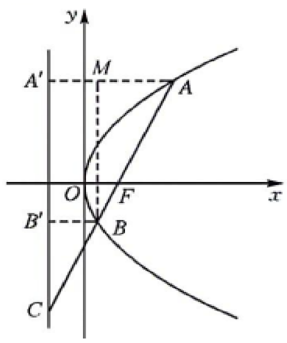
由第一个不等式组，得 $\begin{cases}2k<\ln 4\\3k<2\ln 4-2\ln 2\\4k\geqslant 3\ln 4-3\ln 3\end{cases}$，即 $\frac{3}{4}\ln\frac{4}{3}\leqslant k<\frac{2}{3}\ln 2$，

由第二个不等式组，得 $\begin{cases}2k...\ \ln 4\\3k<2\ln 4-2\ln 2\\4k<3\ln 4-3\ln 3\end{cases}$，该不等式组无解.

综上所述，$\frac{3}{4}\ln\frac{4}{3}\leqslant k<\frac{2}{3}\ln 2$．故选 A.

9．BC

当 l 的倾斜角为锐角时，如图所示，由抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，分别过 A，B 作准线的垂线，垂足为 A'，B'，直线 l 交准线于 C，作 $BM\perp AA'$，垂足为 M，则 $|AA'|=|AF|$，$|BB'|=|BF|$，$|FA|=3|FB|$，所以 $|AM|=2|BF|$，$|AB|=4|BF|=2|AM|$，所以 $\angle ABM=30°$，则 l 的倾斜角 $\angle AFx=60°$，同理可得当直线 l 的倾斜角为钝角时，其大小为 $120°$．故选 BC.

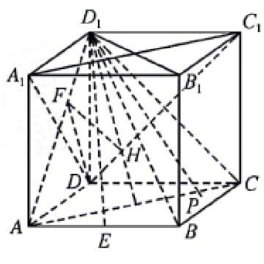


10．BC

由题意得 $a=2$，$\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\omega=\frac{1}{2}$，所以 $f\left(x\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+4\varphi\right)$，$f'\left(x\right)=\cos\left(\frac{1}{2}x+4\varphi\right)$．由 $f\left(0\right)=1$，$f'\left(0\right)>0$，得 $2\sin 4\varphi=1$，$\cos 4\varphi>0$，所以 $4\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$，所以 $\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}$．又 $\left|\varphi\right|<\frac{\pi}{3}$，只可能 $k=0$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{24}$，所以 $f\left(x\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$，$g\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，故 A 错误，B 正确；因为 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=2$，所以 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称，故 C 正确；令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$（$k\in Z$），解得 $\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+k\pi$（$k\in Z$），令 $k=-2$，得 $-\frac{5\pi}{3}\leqslant x\leqslant-\frac{7\pi}{6}$，又 $\left[-\frac{5\pi}{3},-\pi\right]$ 包含 $\left[-\frac{5\pi}{3},-\frac{7\pi}{6}\right]$ 但不是其子集，故 D 错误．故选 BC.

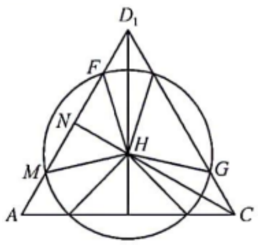
11．ABC

由正方体的性质，易证 $D_1B\perp$ 平面 A_1C_1D，若点 P 不与 B 重合，因为 $D_1P\perp$ 平面 A_1C_1D，则 $D_1P\parallel D_1B$，与 $D_1P\cap D_1B=D_1$ 矛盾，故当 $D_1P\perp$ 平面 A_1C_1D 时，点 P 与 B 重合，故 A 正确；

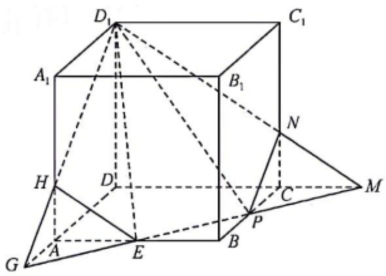


由题意知三棱锥 $D-ACD_1$ 为正三棱锥，故顶点 D 在底面 ACD_1 的射影为 ΔACD_1 的中心 H，连接 DH，由 $V_{D-ACD_1}=V_{D_1-ACD}$，得 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}DH$，所以 $DH=\frac{2}{\sqrt{3}}$，因为球的半径为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$，所以截面圆的半径 $r=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，所以球面与截面 ACD_1 的交线是以 H 为圆心，$\frac{2}{\sqrt{3}}$

为半径的圆在ΔACD_1内部部分，如图所示，$HN=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以$MF=2\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$ $=\frac{2\sqrt{6}}{3}$．$HF^2+HM^2=MF^2$，所以$\angle MHF=\frac{\pi}{2}$，同理，其余两弦所对圆心角也等于$\frac{\pi}{2}$，所以球面与截面ACD_1的交线的长度为$2\pi\times\frac{2}{\sqrt{3}}-3\times\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$，故 B 正确；



对于 C，过 E，P 的直线分别交 DA、DC 的延长线于点 G，M，连接D_1M、D_1G，分别交侧棱C_1C于点 N，交侧棱A_1A于点 H，连接 EH 和 NP，如图所示：



则截面为五边形D_1HEPN，易求$D_1G=D_1M=\sqrt{13}$，$GM=3\sqrt{2}$，$GE=\sqrt{2}$，$GH=\frac{\sqrt{13}}{3}$，

$\cos\angle D_1GM=\frac{\frac{1}{2}GM}{D_1G}=\frac{3}{\sqrt{26}}$，故$\sin\angle D_1GM=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$，所以$S_{\Delta D_1GM}=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}=\frac{3\sqrt{17}}{2}$，

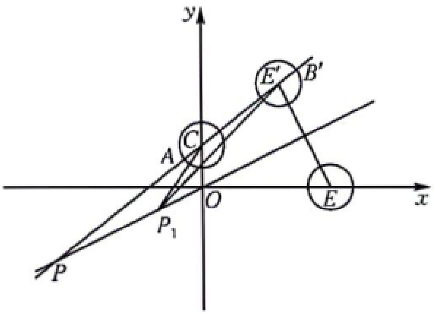
$S_{\Delta GEH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{13}}{3}\times\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{17}}{6}$，所以五边形$D_1HEPN$的面积$S=S_{\Delta D_1GM}-2S_{\Delta GEH}=\frac{3\sqrt{17}}{2}-2\times\frac{\sqrt{17}}{6}=\frac{7\sqrt{17}}{6}$，故 C 正确；因为$A_1B_1\perp$平面$BCC_1B_1$，所以$PB_1\perp A_1B_1$．因为平面$BCC_1B_1\perp$平面$CDD_1C_1$，故点 P 到平面$CDD_1C_1$的距离为点 P 到$CC_1$的距离，由题意知点 P 到点$B_1$的距离等于点 P 到$CC_1$的距离，故点 P 的轨迹是以$B_1$为焦点，以$CC_1$为准线的抛物线在侧面$BCC_1B_1$内的部分，故 D 错误．故选 ABC．

12．-672

$T_{r+1}=C_9^r\left(\sqrt{x}\right)^{9-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r=\left(-2\right)^r C_9^r x^{\frac{9-3r}{2}}$，令$\frac{9-3r}{2}=0$，解得$r=3$，故常数项为$\left(-2\right)^3 C_9^3=-672$.

13．$\frac{\sqrt{130}}{5}+1$

设$E\left(3,0\right)$关于直线$y=\frac{1}{2}x$的对称点为$E'\left(m,n\right)$，则$\begin{cases}\frac{n}{m-3}\cdot\frac{1}{2}=-1\\ \frac{n}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{m+3}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=\frac{9}{5}\\ n=\frac{12}{5}\end{cases}$，故$E'\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$. 要使$\left|PB\right|-\left|PA\right|$的值最大，则 P，A，B'（其中 B' 为 B 关于直线$y=\frac{1}{2}x$的对称点）三点共线，且该直线过 C，E' 两点，如图，其最大值为$\left|AB'\right|=\left|CE'\right|+1=\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}-1\right)^2}+1=\frac{\sqrt{130}}{5}+1$.



14．$a_n=\frac{3^n+1}{2}$

因为$a_n=\log_3\left(1\times x_1\times x_2\times\cdots\times x_{2^n-1}\times 3\right)$，所以$a_{n+1}=\log_3\left[1\cdot\left(1\cdot x_1\right)x_1\left(x_1x_2\right)x_2\cdots\cdots x_{2^{n-1}}\left(x_{2^n-1}\cdot 3\right)\cdot 3\right]=\log_3\left(1^2\cdot x_1^3x_2^3\cdots x_{2^3-2}^3x_{2^3-1}^3\cdot 3^2\right)=3a_n-1$，所以$a_{n+1}-\frac{1}{2}=3\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$，又$a_1=\log_3\left(1\times 3\times 3\right)=2$，所以$a_1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以$\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$是以$\frac{3}{2}$为首项，3为公比的等比数列，所以$a_n-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\times 3^{n-1}=\frac{3^n}{2}$，所以$a_n=\frac{3^n+1}{2}$.

15．解：

（1）因为X服从正态分布$N\left(60,144\right)$，所以$\mu=60$，$\sigma=12$，$72=\mu+\sigma$，

所以$P\left(X\geqslant 72\right)\approx\frac{1-0.683}{2}=0.1585$.

进入面试的人数$Z\sim B\left(100,0.1585\right)$，$E\left(Z\right)=100\times 0.1585\approx 16$.

因此，进入面试的人数大约为 16.

（2）由题意可知，Y的可能取值为 0，2，4，6，8，10，

则 $P(Y=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{1}{75}$；

$P(Y=2)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{2}{75}$；

$P(Y=4)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times C_2\times\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{75}$；

$P(Y=6)=\frac{2}{3}\times C_2^1\times\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{16}{75}$；

$P(Y=8)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{75}$；

$P(Y=10)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{32}{75}$.

所以 $E(Y)=0\times\frac{1}{75}+2\times\frac{2}{75}+4\times\frac{8}{75}+6\times\frac{16}{75}+8\times\frac{16}{75}+10\times\frac{32}{75}=\frac{580}{75}=\frac{116}{15}$.

16．解：

（1）在$\triangle ABD$中，由余弦定理，得 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\alpha=20-16\cos\alpha$，

在$\triangle BCD$中，由余弦定理，得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\beta=8-8\cos\beta$，

所以 $20-16\cos\alpha=8-8\cos\beta$，

所以 $8(2\cos\alpha-\cos\beta)=12$，

即 $2\cos\alpha-\cos\beta=\frac{3}{2}$.

（2）由题意知 $S_1=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD=4\sin\alpha$， $S_2=\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin\angle BCD=2\sin\beta$，

所以 $S_1^2+S_2^2=16\sin^2\alpha+4\sin^2\beta=16\left(1-\cos^2\alpha\right)+4\left(1-\cos^2\beta\right)$

$=20-16\cos^2\alpha-4\cos^2\beta$，

由（1）知 $2\cos\alpha-\cos\beta=\frac{3}{2}$，

所以 $\cos\beta=2\cos\alpha-\frac{3}{2}$， $\cos\alpha\in\left(\frac{1}{4},1\right)$，

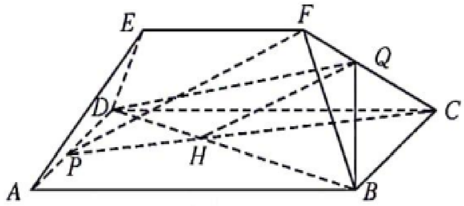
所以$S_1^2+S_2^2=20-16\cos^2\alpha-4\left(2\cos\alpha-\dfrac{3}{2}\right)^2=-32\cos^2\alpha+24\cos\alpha+11$

$$=-32\left(\cos\alpha-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{31}{2},$$

所以当$\cos\alpha=\dfrac{3}{8}\in\left(\dfrac{1}{4},1\right)$时，$S_1^2+S_2^2$取得最大值，最大值为$\dfrac{31}{2}$.

17.

（1）证明：连接CP交BD于点H，连接HQ，



因为$AD // BC$，且$PD=\dfrac{2}{3}AD$，所以$\dfrac{PH}{HC}=\dfrac{PD}{BC}=\dfrac{PD}{AD}=\dfrac{2}{3}$，

因为$\overrightarrow{FQ}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{FC}$，所以$\dfrac{FQ}{QC}=\dfrac{2}{3}$，

所以$\dfrac{FQ}{QC}=\dfrac{PH}{HC}$，所以$PF // HQ$，

因为$HQ\subset$平面BDQ，$PF\not\subset$平面BDQ，

所以$PF //$平面BDQ.

（2）解：分别取AD，BC的中点I，J，连接EI，IJ，FJ，则$IJ // AB$，且$IJ=AB$，

因为四边形$ABFE$与四边形$CDEF$为全等的等腰梯形，所以$EA=ED=FE=FC$，四边形$EIJF$为等腰梯形，

且$EF // IJ$，$EF=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}IJ$，

$EI\perp AD$，$FJ\perp BC$，又$AD // BC$，所以$FJ\perp AD$，

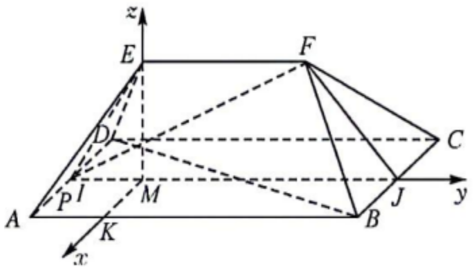
因为EI，$FJ\subset$平面$EIJF$，且EI，FJ为两条相交直线，

所以$AD\perp$平面$EIJF$，所以平面$ABCD\perp$平面$EIJF$.

过E在平面$EIJF$内作IJ的垂线，垂足为M，则$EM\perp$平面$ABCD$，

$EM=\dfrac{3}{2}$，$IM=\dfrac{1}{2}\left(IJ-EF\right)=1$.

过M作$MK // AD$，易得MK，MJ，ME两两垂直，以M为坐标原点，MK，MJ，ME所在直线分别为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系（如图所示），



则 $F\left(0,2,\dfrac{3}{2}\right)$，$B(1,3,0)$，$C(-1,3,0)$，

设 $P(a,-1,0)$（$-1\leqslant a\leqslant 1$），所以 $\overrightarrow{PF}=\left(-a,3,\dfrac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{FB}=\left(1,1,-\dfrac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{FC}=\left(-1,1,-\dfrac{3}{2}\right)$.

设平面 BCF 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{FB}=0 \\ n\cdot\overrightarrow{FC}=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x+y-\dfrac{3}{2}z=0 \\ -x+y-\dfrac{3}{2}z=0 \end{cases}$，

令 $z=2$，解得 $x=0$，$y=3$，所以 $\vec{n}=(0,3,2)$，

设 PF 与平面 BCF 所成角的大小为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{PF},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{PF}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PF}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{12}{\sqrt{a^2+\dfrac{45}{4}}\times\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{39}}{13},$$

解得 $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且满足题意，

所以 $AP=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，或 $AP=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

18.

（1）解：设 C 的半焦距为 c，由题意得 $\begin{cases} 2a=4 \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{3} \\ c=1 \end{cases}$，

故 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）证明：设 MN 的方程为 $x=sy+t$ （$t\neq 2$），代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，得 $\left(3s^2+4\right)y^2+6sty+3t^2-12=0$，

由 $\Delta=36s^2t^2-4\left(3s^2+4\right)\left(3t^2-12\right)>0$，得 $3s^2+4-t^2>0$，

设 $M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，则 $y_1+y_2=-\frac{6st}{3s^2+4}$，$y_1y_2=\frac{3t^2-12}{3s^2+4}$，

所以 $x_1+x_2=s\left(y_1+y_2\right)+2t=\frac{8t}{3s^2+4}$，

$x_1x_2=\left(sy_1+t\right)\left(sy_2+t\right)=s^2y_1y_2+st\left(y_1+y_2\right)+t^2=\frac{4t^2-12s^2}{3s^2+4}$.

直线 AM 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-2}\left(x-2\right)$，令 $x=-1$，得 $y=-\frac{3y_1}{x_1-2}$，故 $P\left(-1,-\frac{3y_1}{x_1-2}\right)$，

同理可求 $Q\left(-1,-\frac{3y_2}{x_2-2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{BP}=\left(0,-\frac{3y_1}{x_1-2}\right)$，$\overrightarrow{BQ}=\left(0,-\frac{3y_2}{x_2-2}\right)$，

由 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=-\frac{9}{4}$，得 $-\frac{3y_1}{x_1-2}\left(-\frac{3y_2}{x_2-2}\right)=-\frac{9}{4}$，

即 $\frac{y_1y_2}{x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)+4}=-\frac{1}{4}$，

所以 $\frac{\frac{3t^2-12}{3s^2+4}}{\frac{4t^2-12s^2}{3s^2+4}-2\times\frac{8t}{3s^2+4}+4}=-\frac{1}{4}$，

所以 $\frac{3\left(t^2-4\right)}{\left(t-2\right)^2}=-1$，解得 $t=-1$，

所以直线 MN 的方程为 $x=sy-1$，故直线 MN 过定点 $\left(-1,0\right)$.

19．解：

（1） $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$.

当 $a=e$ 时，$f\left(x\right)=\left(x-1\right)e^x-e\ln x$，$f'\left(x\right)=xe^x-\frac{e}{x}=\frac{x^2e^x-e}{x}$.

令 $g(x)=x^2e^x-e$（$x>0$），则 $g'(x)=(x^2+2x)e^x>0$，

所以 $g(x)$ 在上 $(0,+\infty)$ 单调递增，

又 $g(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=0$.

（2）由题意知 $f'(x)=xe^x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2e^x-a}{x}$（$x>0$）.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 至多有一个零点，不合题意；

②当 $a>0$ 时，令 $h(x)=x^2e^x-a$，则 $h'(x)=(x^2+2x)e^x>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $h(0)=-a<0$，$h(\sqrt{a})=ae^{\sqrt{a}}-a=a\left(e^{\sqrt{a}}-1\right)>0$，

所以存在唯一 $x_0\in(0,\sqrt{a})$，使得 $h(x_0)=x_0^2e^{x_0}-a=0$，所以 $a=x_0^2e^{x_0}$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<0$，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-a\ln x_0$.

（a）当 $a=e$ 时，由（1）知 $f(x)_{\min}=f(1)=0$，即 $a=e$ 时，$x_0=1$，且 $f(x_0)=0$，$f(x)$ 只有一个零点 1，不合题意；

（b）当 $a>e$ 时，因为 $a=x_0^2e^{x_0}>e$，则 $x_0>1$，又 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)<f(1)=0$，

而 $f(\ln a)=(\ln a-1)e^{\ln a}-a\ln(\ln a)=a\left[\ln a-1-\ln(\ln a)\right]$，

令 $\varphi(x)=x-1-\ln x$，则 $\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

当$0<x<1$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递减，所以$\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=0$；

当$x>1$时，$\varphi(x)>\varphi(1)=0$，即$x-1-\ln x>0$.

又$\ln a>1$，

所以$\ln a-1-\ln(\ln a)>0$，

所以$f(\ln a)=a\varphi(\ln a)>0$，

由$f(x)$的单调性及零点存在定理，知$f(x)$在$(x_0,+\infty)$上有且仅有一个零点.

又$f(x)$在$(0,x_0)$上有且仅有一个零点 1，

所以，当$a\in(e,+\infty)$时，$f(x)$存在两个零点；

（c）当$0<a<e$时，由$a=x_0^2e^{x_0}<e$，得$0<x_0<1$，又$f(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

所以$f(x_0)<f(1)=0$.

取$x=e^{-\frac{1}{a}}$，则$0<e^{-\frac{1}{a}}<1$，所以$0<1-e^{-\frac{1}{a}}<1$.

当$x\in(0,1)$时，$\ln x<x-1$，

所以$\ln(1-x)<-x$，

所以$x<-\ln(1-x)=\ln\frac{1}{1-x}$，

所以$e^x<\frac{1}{1-x}$.

又$0<e^{-\frac{1}{a}}<1$，所以$f\left(e^{-\frac{1}{a}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{a}}-1\right)e^{e^{-\frac{1}{a}}}-a\times\left(-\frac{1}{a}\right)>\left(e^{-\frac{1}{a}}-1\right)\left(\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{a}}}\right)+1=-1+1=0$，

由$f(x)$的单调性及零点存在定理，知$f(x)$在$(0,x_0)$上有且有一个零点，又 1 为$f(x)$在$(x_0,+\infty)$内的唯一零点，所以当$a\in(0,e)$时，$f(x)$存在两个零点.

综上可知，a的取值范围是$(0,e)\cup(e,+\infty)$.