高等数学 A 大练习 16 第六章总复习

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) $f(x,y)$在点(x,y)可微分是$f(x,y)$在该点连续的________条件. $f(x,y)$在点(x,y)连续是$f(x,y)$在该点可微分的________条件；

(2) $z=f(x,y)$在点(x,y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$存在是$f(x,y)$在该点可微分的________条件. $z=f(x,y)$在点(x,y)可微分是函数在该点的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$存在的________条件；

(3) $z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$存在且连续是$f(x,y)$在该点可微分的________条件；

(4) 函数$z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域$D$内连续是这两个二阶混合偏导数在$D$内相等的________条件.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论：

设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某邻域内有定义，且$f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=-1$，则有________.

(A) $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

(B) 曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$的一个法向量为$(3,-1,1)$

(C) 曲线$\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的一个切向量为$(1,0,3)$

(D) 曲线$\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的一个切向量为$(3,0,1)$

3. 求函数$f(x,y)=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$的定义域，并求$\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{1}{2},0)} f(x,y)$.

*4. 证明极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$不存在.

5. 设

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

求$f_x(x,y)$及$f_y(x,y)$.

6. 求下列函数的一阶和二阶偏导数：

(1) $z=\ln(x+y^2)$；　(2) $z=x^y$.

7. 求函数$z=\frac{xy}{x^2-y^2}$当$x=2, y=1, \Delta x=0.01, \Delta y=0.03$时的全增量和全微分.

*8. 设

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

证明：$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续且偏导数存在，但不可微分.

9. 设$u=x^y$，而$x=\varphi(t), y=\psi(t)$都是可微函数，求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

10. 设$z=f(u,v,w)$具有连续偏导数，而

$$u=\eta-\zeta, v=\zeta-\xi, w=\xi-\eta,$$

求$\frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta}$.

11. 设$z=f(u,x,y), u=xe^y$，其中f具有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

12. 设$x=e^u\cos v, y=e^u\sin v, z=uv$. 试求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

13. 求螺旋线$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=b\theta$在点$(a,0,0)$处的切线及法平面方程.

14. 在曲面$z=xy$上求一点，使这点处的法线垂直于平面$x+3y+z+9=0$，并写出这法线的方程.

15. 设$e_l=(\cos\theta,\sin\theta)$，求函数

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2$$

在点$(1,1)$沿方向l的方向导数，并分别确定角θ，使这导数有(1)最大值，(2)最小值，(3)等于0.

16. 求函数$u=x^2+y^2+z^2$在椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处沿外法线方向的方向导数.

17. 求平面$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$和柱面$x^2+y^2=1$的交线上与$xOy$平面距离最短的点.

18. 在第一卦限内作椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的切平面，使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小. 求这切平面的切点，并求此最小体积.

19. 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售，售价分别为p_1和p_2，销售量分别为q_1和q_2，需求函数分别为

$$q_1=24-0.2p_1,\ q_2=10-0.05p_2,$$

总成本函数为

$$C=35+40(q_1+q_2).$$

试问：厂家如何确定两个市场的售价，能使其获得的总利润最大？最大总利润为多少？

20. 设有一小山，取它的底面所在的平面为xOy坐标面，其底部所占的闭区域为$D=\{(x,y)|x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为$h=f(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设$M(x_0,y_0)\in D$，问$f(x,y)$在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为$g(x_0,y_0)$，试写出$g(x_0,y_0)$的表达式；

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚找一上山坡度最大的点作为攀岩的起点. 也就是说，要在D的边界线$x^2+y^2-xy=75$上找出(1)中的$g(x,y)$达到最大值的点. 试确定攀岩起点的位置.