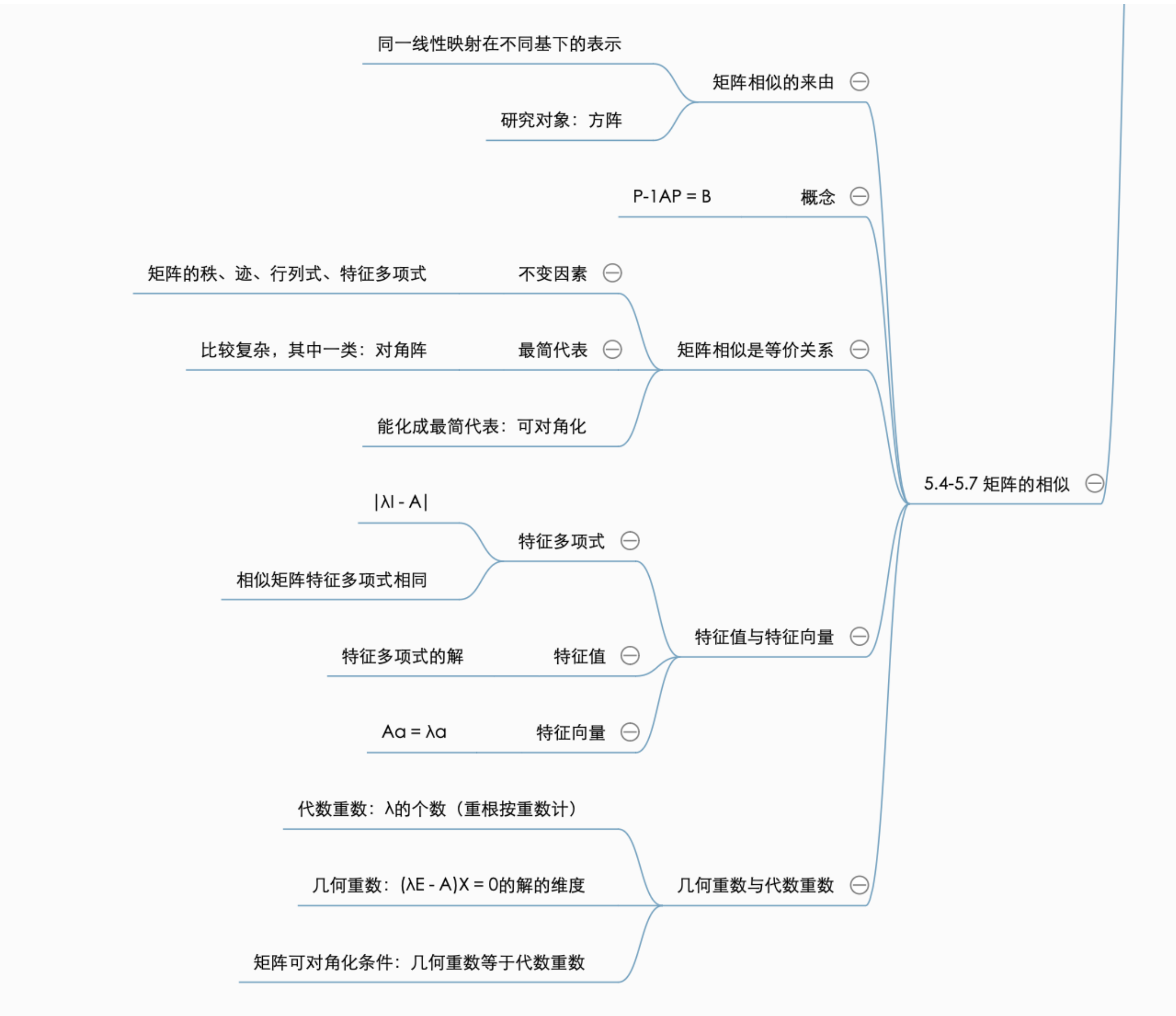
# 线性代数 A 大练习 10

范围：5.4-5.6 矩阵的相似

Part 1 知识点回顾及复习




Part 2 书上例题练习

**例 1** 证明：与幂等矩阵相似的矩阵仍是幂等矩阵。

**例 2** 证明：与幂零矩阵相似的矩阵仍是幂零矩阵，并且它们的幂零指数相等。

**例 3** 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ 是数域 $K$ 上的一元多项式，$A$ 是数域 $K$ 上的一个 $n$ 级矩阵，定义

$$f(A)=a_0I+a_1A+\cdots+a_mA^m.$$

称矩阵 $f(A)$ 是 $A$ 的一个多项式。证明：如果 $A\sim B$，那么 $f(A)\sim f(B)$。

**例 4** 设 $A$ 是数域 $K$ 上的 $n$ 级矩阵，如果有正整数 $m$ 使得 $A^m=I$，那么称 $A$ 是**周期矩阵**。使得 $A^m=I$ 成立的最小正整数 $m$ 称为 $A$ 的**周期**。证明：与周期矩阵相似的矩阵仍是周期矩阵，并且它们的周期相等。

**例 5** 证明：如果 $n$ 级矩阵 $A$ 可对角化，那么 $A\sim A'$。

**例 6** 证明：如果 $n$ 级矩阵 $A$ 的相似类里只有一个元素，那么 $A$ 一定是数量矩阵。

**例 7** 每行有且只有一个元素是 1，每列也有且只有一个元素是 1，其余元素全为 0 的 $n$ 级矩阵称为 $n$ 级**置换矩阵**。设 $P$ 是 $n$ 级置换矩阵，它的第 $l$ 列的元素 1 位于第 $i_l$ 行，$l=1,2,\cdots,n$。证明：

（1）$P=(\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1},\boldsymbol{\varepsilon}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{i_n})$；

（2）把 $I$ 的第 $1,2,\cdots,n$ 行分别调到第 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 行的位置得到的矩阵等于 $P$；

（3）把 $I$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 列分别调到第 $1,2,\cdots,n$ 列的位置得到的矩阵等于 $P$；

（4）$P$ 可逆，并且 $P^{-1}=P'$，从而 $P^{-1}$ 也是置换矩阵；$P^{-1}$ 是把 $I$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 行分别调到第 $1,2,\cdots,n$ 行的位置得到的矩阵；$P^{-1}$ 也是把 $I$ 的第 $1,2,\cdots,n$ 列分别调到第 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 列位置得到的矩阵；

（5）在一个 $n$ 级矩阵 $A$ 的左边乘上置换矩阵 $P$，就相当于把 $A$ 的第 $1,2,\cdots,n$ 行分别调到第 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 行的位置；在 $A$ 的右边乘上置换矩阵 $P$，就相当于把 $A$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 列分别调到第 $1,2,\cdots,n$ 列的位置。

**例 8** 证明：实数域上的置换矩阵是正交矩阵。

**例 9** 设 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,设 $A=(a_{ij})$ 是 $n$ 级矩阵,令

$$B=\begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_n} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_n i_1} & a_{i_n i_2} & \cdots & a_{i_n i_n} \end{pmatrix},$$

证明:$A\sim B$。

**例 10** 证明:$\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}\sim\mathrm{diag}\{\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\cdots,\lambda_{i_n}\}$,其中 $i_1 i_2\cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列。

**例 11** 设

$$\boldsymbol{J}_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

证明: $\boldsymbol{J}_0\sim\boldsymbol{J}_0'$。

**例 12** 证明:如果数域 $K$ 上的 $n$ 级矩阵 $A$、$B$ 满足 $AB-BA=A$,那么 $A$ 不可逆。

**例 13** 证明:幂等矩阵一定可对角化,并且如果幂等矩阵 $A$ 的秩为 $r(r>0)$,那么

$$A\sim\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**例 14** 证明:数域 $K$ 上幂等矩阵的秩等于它的迹。

**例 15** 设 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 都是数域 $K$ 上的 $n$ 级矩阵,证明:如果 $\sum\limits_{i=1}^{s}A_i=I$,且 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 都是幂等矩阵,那么 $\sum\limits_{i=1}^{s}\mathrm{rank}(A_i)=n$。

**例 16** 证明:如果实数域上的 $n$ 级矩阵 $A$ 与 $B$ 不相似,那么把它们看成复数域上的矩阵后仍然不相似。

**例 1** 求复数域上矩阵 $A$ 的全部特征值和特征向量:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -2 & -4 & 2 \\ -4 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

**例 2** 设 $A$ 是复数域上的 $n$ 级矩阵,并且 $A$ 的元素全是实数。

证明:如果虚数 $\lambda_0$ 是 $A$ 的一个特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $A$ 的属于 $\lambda_0$ 的一个特征向量,那么 $\overline{\lambda_0}$ 也是 $A$ 的一个特征值,且 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ 是 $A$ 的属于 $\overline{\lambda_0}$ 的一个特征向量。

**例 3** 下述矩阵 $A$ 如果看成实数域上的矩阵,它有没有特征值?如果看成复数域上的矩阵,求它的全部特征值和特征向量:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix},a\text{ 是实数},\text{且 }a\neq 0.$$

**例 4** 证明:幂零矩阵一定有特征值,并且它的特征值一定是 0。

**例 5** 证明:幂等矩阵一定有特征值,并且它的特征值是 1 或者 0。

**例 6** 设 $A$ 是数域 $K$ 上的 $n$ 级可逆矩阵,证明:

(1) 如果 $A$ 有特征值,那么 $A$ 的特征值不等于 0;

(2) 如果 $\lambda_0$ 是 $A$ 的一个 $l$ 重特征值,那么 $\lambda_0^{-1}$ 是 $A^{-1}$ 的一个 $l$ 重特征值。

**例 7** 设 $A$ 是数域 $K$ 上的 $n$ 级矩阵,证明:如果 $\lambda_0$ 是 $A$ 的 $l$ 重特征值,那么 $\lambda_0^2$ 是 $A^2$ 的 $l$ 重特征值。

**例 8** 设 $A$ 是一个 $n$ 级正交矩阵,证明:

(1) 如果 $A$ 有特征值,那么它的特征值是 1 或 $-1$;

(2) 如果 $|A|=-1$,那么 $-1$ 是 $A$ 的一个特征值;

(3) 如果 $|A|=1$,且 $n$ 是奇数,那么 1 是 $A$ 的一个特征值。

**例 9** 设 $A$、$B$ 分别是数域 $K$ 上 $s\times n$、$n\times s$ 矩阵。证明:

(1) $AB$ 与 $BA$ 有相同的非零特征值,并且重数相同;

(2) 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $AB$ 的属于非零特征值 $\lambda_0$ 的一个特征向量,那么 $B\boldsymbol{\alpha}$ 是 $BA$ 的属于特征值 $\lambda_0$ 的一个特征向量。

**例 10** 用 $J$ 表示元素全为 1 的 $n$ 级矩阵。求数域 $K$ 上 $n$ 级矩阵 $J$ 的全部特征值和特征向量。

**例 11** 求复数域上 $n$ 级循环移位矩阵 $C=(\boldsymbol{\varepsilon}_n,\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1})$ 的全部特征值和特征向量。

**例 12** 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ 是数域 $K$ 上一个多项式。证明：如果 $\lambda_0$ 是 $K$ 上 $n$ 级矩阵 $A$ 的一个特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $A$ 的属于 $\lambda_0$ 的一个特征向量，那么 $f(\lambda_0)$ 是矩阵 $f(A)$ 的一个特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $f(A)$ 的属于 $f(\lambda_0)$ 的一个特征向量。

**例 13** 求复数域上 $n$ 级循环矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

的全部特征值和特征向量。

**例 14** 复数域上的 $n$ 级矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

称为 Frobenius 矩阵，$n\geqslant 2$。求 $A$ 的特征多项式和全部特征向量。

**例 1** 证明：幂等矩阵一定可对角化，并且如果 $n$ 级幂等矩阵 $A$ 的秩为 $r(r>0)$，那么

$$A\sim\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**例 2** 证明：不为零矩阵的幂零矩阵不能对角化。

**例 3** 5.5 节的例 1 中的 3 级复矩阵 $A$ 是否可对角化？如果 $A$ 可对角化，求出一个可逆矩阵 $P$，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

**例 4** 元素全为 1 的 $n$ 级矩阵 $J$ 看成有理数域上的矩阵是否可对角化？如果 $J$ 可对角化，求出有理数域上一个可逆矩阵 $P$，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

**例 5** 复数域上 $n$ 级循环移位矩阵 $C=(\boldsymbol{\varepsilon}_n,\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1})$ 是否可对角化？如果 $C$ 可对角化，求一个可逆矩阵 $P$，使得 $P^{-1}CP$ 为对角矩阵。

**例 6** 证明：复数域上的所有 $n$ 级循环矩阵都可对角化，并且能找到同一个可逆矩阵 $P$，使它们同时对角化。

**例 7** 复数域上的 $n$ 级 Frobenius 矩阵 $A(n\geqslant 2)$ 是否可对角化？在可对角化的情形，求一个可逆矩阵 $P$，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

**例 8** 证明：如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $n$ 级矩阵 $A$ 的属于不同特征值的特征向量，那么 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 不是 $A$ 的特征向量。

**例 9** 设 $A$ 是数域 $K$ 上的 $n$ 级矩阵。证明：如果 $K^n$ 中任意非零列向量都是 $A$ 的特征向量，那么 $A$ 一定是数量矩阵。

## Part 3 补充练习

高等代数期末 高峡

一.（25 分）设线性变换 A 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

1) 求 A 像空间的一组基；（5 分）

2) 求 A 核空间的一组基；（5 分）

3) 求 A 在基 $\beta_2$, $\beta_3$, $\beta_1+\beta_2$ 下的矩阵 B；（10 分）

4) 判断矩阵 A 能否对角化并说明理由.（5 分）

高等代数期末 李文威

**3. (15 分)** 设 $A\in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, 证明 ${}^tAA$ 在 $\mathbb{C}$ 中的特征值都是非负实数.