线性代数 A 大练习 1

2024.2.24

本周内容：多项式、带余除法、公因式、最大公因数、最小公倍式

例 8　证明：设 d,n 都是正整数，则对任一不等于 ± 1 的整数 a，有 $a^d-1\mid a^n-1 \Leftrightarrow d\mid n$。

证明：在 $K[x]$ 中，如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为 0，那么

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1.$$

例 1　求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首一最大公因式，并且把它表示成 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的倍式和：

$$f(x)=x^4+3x-2,\ g(x)=3x^3-x^2-7x+4.$$

设 $f(x),g(x)\in K[x]$，$a,b,c,d\in K$，使得 $ad-bc\neq 0$。证明：

$$(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x))=(f(x),g(x)).$$

例 7　设 $A\in M_n(K)$，$f_1(x),f_2(x)\in K[x]$，记 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$。证明：如果 $(f_1(x),f_2(x))=1$，那么 $f(A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的任一个解可以唯一地表示成 $f_1(A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个解与 $f_2(A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个解的和。

例 9　设 $m,n\in\mathbf{N}^*$，证明：在 $K[x]$ 中，

$$(x^m-1,x^n-1)=x^{(m,n)}-1.$$