线性代数 A 大练习 6

范围：4.4 可逆矩阵　　4.5 矩阵的分块

Part 1 错题复现　　矩阵的分解

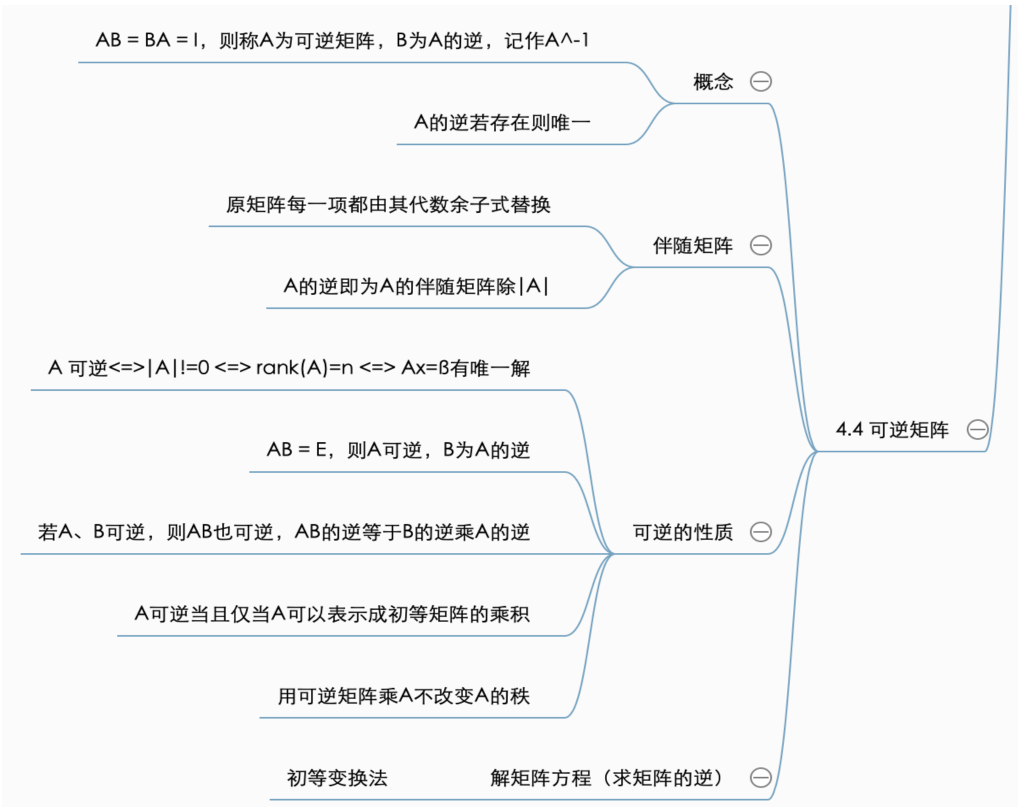
2. (45分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

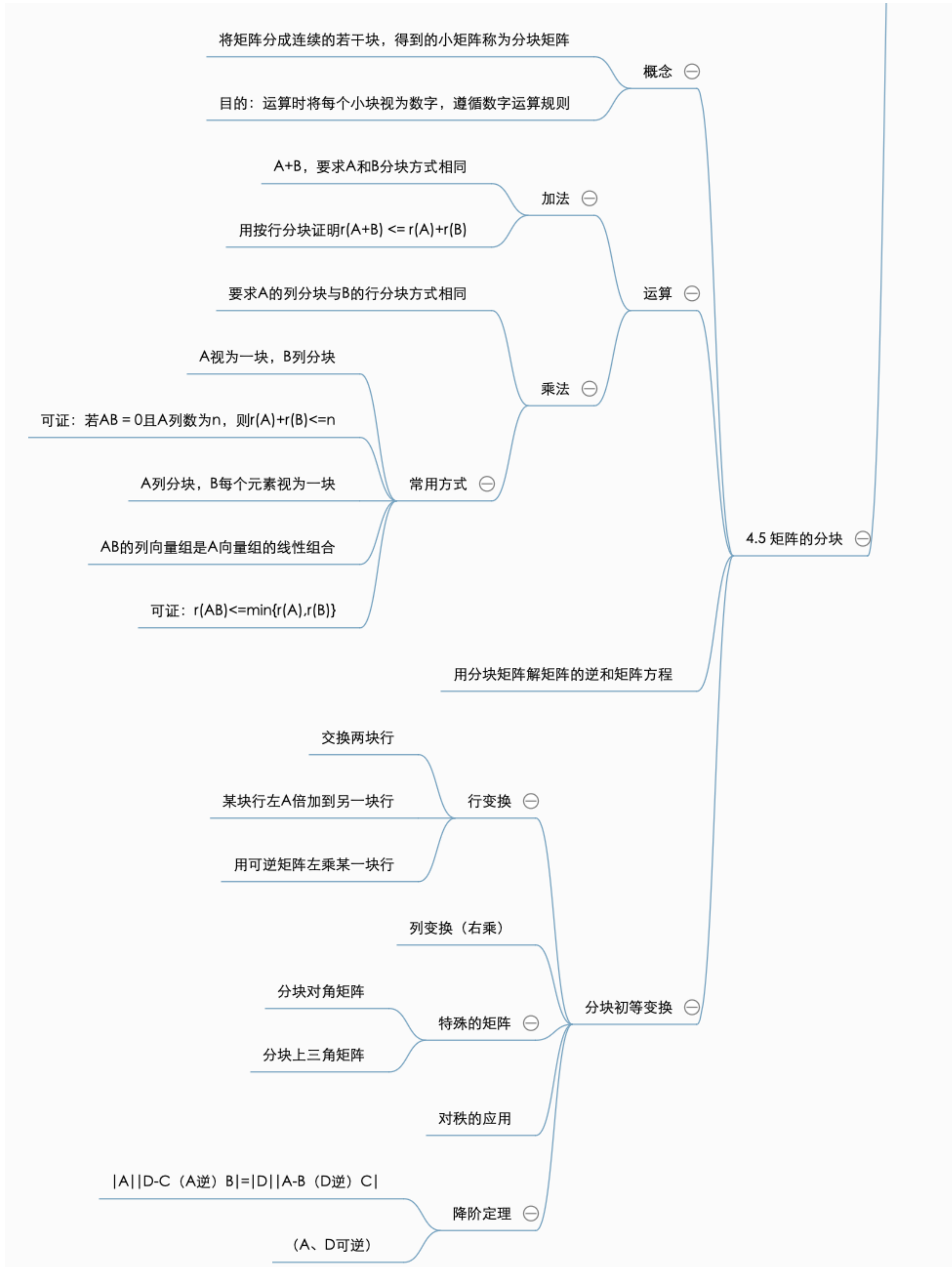
(a) 求 A 列向量组的一个极大无关组, 并用此无关组线性表出 A 其余的列向量;

(b) 求齐次线性方程组 $AX = 0$ 解空间的一组基;

(c) 将 A 写成 BC 的形式，其中 B 的列向量组线性无关, C 的行向量组线性无关.

Part 2 知识点回顾及练习





Part 3 书上例题练习

4.4 可逆矩阵

例 1 证明：如果矩阵 A 可逆，那么 A^* 也可逆；并且求 $(A^*)^{-1}$。

例 2 证明：如果 A 是幂零矩阵，它的幂零指数为 l，那么 $I-A$ 可逆；并且求 $(I-A)^{-1}$。

例 3 证明：如果数域 K 上 n 级矩阵 A 满足

$$b_mA^m+b_{m-1}A^{m-1}+\cdots+b_1A+b_0I=0,$$

其中 $b_i\in K, i=0,1,\cdots,m$，且 $b_0\neq0$，那么 A 可逆；并且求 A^{-1}。

例 4 证明：可逆的对称矩阵的逆矩阵仍是对称矩阵。

例 5 证明：数域 K 上可逆的上三角矩阵的逆矩阵仍是上三角矩阵。

例 6 求 A^{-1}，设

(1)
$$A=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&2&2\\2&-2&1\end{pmatrix};$$

(2)
$$A=\begin{pmatrix}2&5&7\\5&-2&-3\\6&3&4\end{pmatrix};$$

(3)
$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\1&1&1&-1\\2&1&-1&-7\end{pmatrix};$$

(4)
$$A=\begin{pmatrix}1&4&-3&2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

例 7 求下述 n 级矩阵 A 的逆矩阵($n\geqslant2$)：

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

例 8 求下述 n 级矩阵 A 的逆矩阵($n>2$)：

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&\cdots&0&0\\-1&2&-1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&2&-1\\0&0&0&\cdots&-1&2\end{pmatrix}$$

例 9 求下述 n 级矩阵 A 的逆矩阵。

$$A=\begin{pmatrix}1&b&b^2&\cdots&b^{n-1}\\1&1&b&\cdots&b^{n-2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&b\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

例 10 设 A、B 分别是数域 K 上 $n\times m$、$m\times n$ 矩阵。证明：如果 I_n-AB 可逆，那么 I_m-BA 也可逆；并且求 $(I_m-BA)^{-1}$。

例 11 方阵 A 如果满足 $A^2=I$，那么称 A 是**对合矩阵**。证明：

(1) 如果 A、B 都是 n 级对合矩阵，且 $|A|+|B|=0$，那么 $A+B$、$I+AB$ 都不可逆；

(2) 如果 B 是对合矩阵，且 $|B|=-1$，那么 $I+B$ 不可逆。

例 12 证明：如果 n 级可逆矩阵 A 的每一行元素的和都等于 a，那么 $a\neq0$，且 A^{-1} 的每一行元素的和都等于 a^{-1}。

例 13 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，证明：对任意正整数 k，有

$$\operatorname{rank}(A^{n+k})=\operatorname{rank}(A^n).$$

例 14 证明：任何方阵都可以表示成一些下三角矩阵与上三角矩阵的乘积。

例 15 解下列矩阵方程：

(1)
$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&4&2\\1&-1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix};$$

(2)
$$X\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&4&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}.$$

例 16 解下述矩阵方程：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&1&2&\cdots&n-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

4.5 矩阵的分块

例 1 设 A、B 分别是 $s\times n$ 、$n\times m$ 矩阵。证明：如果 $AB=0$，那么 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\leqslant n$。

例 2 证明 Sylvester 不等式：设 A、B 分别是 $s\times n$、$n\times m$ 矩阵，则

$$\mathrm{rank}(AB)\geqslant \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-n.$$

例 3 如果数域 K 上 n 级矩阵 A 满足 $A^2=A$，那么称 A 是幂等矩阵。证明：数域 K 上 n 级矩阵 A 是幂等矩阵当且仅当

$$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(I-A)=n.$$

例 4 设 A 是实数域上的 $s\times n$ 矩阵，证明：对于任意 $\boldsymbol{\beta}\in K^s$，线性方程组 $A'A\boldsymbol{X}=A'\boldsymbol{\beta}$ 一定有解。

例 5 设 A 是数域 K 上一个 $s\times n$ 矩阵，且 $A\neq 0$。证明：$\mathrm{rank}(A)=1$ 当且仅当 A 能表示成一个 s 维列向量和一个 n 维行向量的乘积。

例 6 设 A 是 n 级矩阵($n\geqslant 2$)，证明：

$$|A^*|=|A|^{n-1}.$$

例 7 设 A 是 n 级矩阵($n\geqslant 2$)，证明：

$$\mathrm{rank}(A^*)=\begin{cases} n, & \text{当 } \mathrm{rank}(A)=n, \\ 1, & \text{当 } \mathrm{rank}(A)=n-1, \\ 0, & \text{当 } \mathrm{rank}(A)<n-1. \end{cases}$$

例 8 设 A 是 n 级矩阵($n\geqslant 2$)。证明：

(1) 当 $n\geqslant 3$ 时，$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$；

(2) 当 $n=2$ 时，$(A^*)^*=A$。

例 9 设 A、B 都是 n 级矩阵($n\geqslant 2$)，证明：

$$(AB)^*=B^*A^*$$

例 10 设 A、B 分别是数域 K 上 $s\times n$、$s\times m$ 矩阵，证明：矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是

$$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A,B)$$

例 11 求下述 n 级矩阵 A 的逆矩阵($n\geqslant 2$).

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 3 & n & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

例 12 求下述 n 级矩阵 A 的逆矩阵($n\geqslant 2$)：

$$A=\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix},$$

例 13 解下述数域 K 上的矩阵方程：

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

例 14 在 K^3 中取两个基：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}.$$

求矩阵 A 使得 $A\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i$，$i=1,2,3$.

例 15 设

$$B=\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 B_1，B_2 分别是 r 级、s 级矩阵。求 B 可逆的充分必要条件；当 B 可逆时，求 B^{-1}。

例 16 设

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

其中 A_1 是 r 级可逆矩阵，A_4 是 s 级矩阵。问：还应满足什么条件，A 才可逆，当 A 可逆时，求 A^{-1}。

例 17 设 A、B、C、D 都是数域 K 上的 n 级矩阵，且 $AC=CA$。证明：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|.$$

例 18 设 A、D 分别是 r 级、s 级矩阵，且 D 可逆。证明：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D||A-BD^{-1}C|.$$

例 19 设 A、D 分别是 r 级、s 级可逆矩阵，B、C 分别是 $r\times s$、$s\times r$ 矩阵，证明：

$$|D||A-BD^{-1}C|=|A||D-CA^{-1}B|$$

例 20 设 A 为 n 级可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$。证明：

$$|A-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'|=(1-\boldsymbol{\alpha}'A^{-1}\boldsymbol{\alpha})|A|.$$

例 21 计算下述 n 阶行列式($n\geqslant 2$)：

$$\begin{vmatrix} 0 & 2a_1 & 3a_1 & \cdots & na_1 \\ a_2 & a_2 & 3a_2 & \cdots & na_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 2a_n & 3a_n & \cdots & (n-1)a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$。

例 22 设 A、B 都是 n 级矩阵，证明：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|.$$

例 23 设 A、B 都是 n 级矩阵，下式是否成立？

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A^2-B^2|.$$

例 24 设 A 是一个 n 级矩阵，且 $\mathrm{rank}(A)=r$，$r<n$。证明：存在一个 n 级可逆矩阵 P，使 PAP^{-1} 的后 $n-r$ 行的元素全为 0。

例 25 设 A 是 $s\times n$ 矩阵。证明：

(1) A 是列满秩矩阵当且仅当存在 s 级可逆矩阵 P，使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix};$$

(2) A 是行满秩矩阵当且仅当存在 n 级可逆矩阵 Q，使得

$$A=(I_s,0)Q.$$

例 26 设 A 是数域 K 上 2 级矩阵，证明：如果 $|A|=1$，那么：A 可以表示成 1°型初等矩阵 $P(i,j(k))$ 的乘积(即 A 可以表示成形如 $I+kE_{ij}$ 的矩阵的乘积，其中 $i\neq j$)。

例 27 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵($n\geqslant 2$)，证明：如果 $|A|=1$，那么：A 可以表示成 1°型初等矩阵 $P(i,j(k))$ 的乘积。

例 28 设 A 是 n 级矩阵，行标和列标都为 $1,2,\cdots,k$ 的子式称为 A 的 k 阶顺序主子式，$k=1,2,\cdots,n$。证明：如果 A 的所有顺序主子式都不等于 0，那么存在 n 级下三角矩阵 B，使得 BA 为上三角矩阵。

Part 4 附加题

2017.高等代数期中（高峡）（6）

六.（10 分）设 ε 是任意一个固定的正数. 证明：任给一个 n 级矩阵 A，总存在一个对角矩阵 D，其每个对角元要么为 ε，要么为 -ε，且 $|A+D|\neq 0$.

2022.高等代数期中（李文威）（2-4）

2. (10 分) 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上求下列矩阵的逆矩阵:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (10 分) 设 F 为任意域, $A\in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$, 证明矩阵方程 $AXA=A$ 总有解 $X\in \mathrm{M}_{n\times m}(F)$. **提示.** 将 A 左乘或右乘一个可逆矩阵不影响解的存在性.

4. (10 分) 考虑域 F 上的分块对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 1_{n_1\times n_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda_r 1_{n_r\times n_r}} \end{pmatrix}$$

留白部分为零, $\lambda_1,\ldots,\lambda_r\in F$ 两两相异, $n_i\geq 1$ 而 $n_1+\cdots+n_r=n$. 确定所有满足

$$AB=BA$$

的 $n\times n$ 矩阵 B.