高等数学 A 期初测试

共 15 题，满分 100 分，考试时间 110 分钟

2024 年 02 月 20 日

1 选择题

1. （5 分） 曲线 $y = x\ln(e + \frac{1}{x-1})$ 的斜渐近线方程为：

   A. $y = x$ B. $y = x + e$ C. $y = x + \frac{1}{e}$ D. $y = x - \frac{1}{e}$

2. （5 分） 已知 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = |t|\sin t \end{cases}$ 决定，则：

   A. $f(x)$ 连续，$f'(0)$ 不存在。

   B. $f'(0)$ 存在，$f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续。

   C. $f'(x)$ 连续，$f''(0)$ 不存在。

   D. $f''(0)$ 存在，$f''(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续。

3. （5 分） 设 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$，则：

   A. $f(1) = 0$ B. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ C. $f'(1) = 1$ D. $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = 1$

4. （5 分） 设 $f(u)$ 可导，$z = xyf(\frac{y}{x})$，若 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy(\ln y - \ln x)$，则：

   A. $f(1) = \frac{1}{2}$，$f'(1) = 0$

   B. $f(1) = 0$，$f'(1) = \frac{1}{2}$

   C. $f(1) = 1$，$f'(1) = 0$

   D. $f(1) = 0$，$f'(1) = 1$

5. （5 分） 设 $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$，则：

   A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

   B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

   C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\sin x_n)$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在。

   D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\cos x_n)$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在。

2 填空题

6. （5 分） $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在 $(0,1)$ 处最大的方向导数为______。

7. （5 分） 当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=e^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小，则 $ab=$______。

8. （5 分） $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=$______。

9. （5 分） 曲面 $z=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(0,0,0)$ 处的切平面方程为______。

10. （5 分） 设 $x\geq 0$，$y\geq 0$，满足 $x^2+y^2\leq ke^{x+y}$，则 k 的最小值为______。

3 解答题

11. （6 分） 求极限：

    (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})$

    (2) $\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$

12. （10 分） 求函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的极值。

13. （10 分） 设曲线 $y=y(x)(x>0)$ 经过点 $(1,2)$，该曲线上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距。

    (1) 求 $y(x)$。

    (2) 求函数 $f(x)=\int_1^x y(t)dt$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值。

14. （12 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上具有 2 阶连续导数。证明：

    (1) 若 $f(0)=0$, 则存在 $\xi\in(-a,a)$，使得 $f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$。

    (2) 若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值，则存在 $\eta\in(-a,a)$，使得 $|f''(\eta)|\geq\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$。

15. （12 分） 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导数，证明：$f''(x)\geq 0$ 的充分必要条件是对任意的实数 a 和 b，有 $f(\frac{a+b}{2})\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$。