# 2022秋季高等数学B期中模拟考试（更正版）

命题人：DARKO

2022.10

说明：本卷不押题，仅用于高等数学B选课同学复习或模拟考试使用。如正式考试与本卷风格迥异，实属正常现象。本卷不涉及的知识点也可能是重点，请同学们全面复习各个考点。

**题 1.** （*10*分）多选题，少选错选均不得分，不需要给出解答过程

***1.***下列各式中总是正确的有哪些

$$\textbf{A}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}\qquad \textbf{B}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x>1$$
$$\textbf{C}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x>\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\qquad \textbf{D}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x>\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

***2.***设$f(x)$上定义在$[1,+\infty)$上的非负单调下降连续函数，定义$s_n=\sum_{k=1}^n f(k)$，那么下列各式中总是正确的有哪些

$$\textbf{A}.s_n\le\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\qquad \textbf{B}.s_n\le f(1)+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$
$$\textbf{C}.s_n\ge\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x\qquad \textbf{D}.s_n\ge f(1)+\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$$

**题 2.** （*18*分）求极限，自变量为$n$的极限视为序列极限，自变量为$x$的极限视为函数极限。使用洛必达法则不得分。

***1.***$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2021}+2^{2021}+\cdots+n^{2021}}{n^{2022}}$.

***2.***$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x^{2022}}+\cos\frac{1}{x^{1011}}\right)^{x^{2022}}$.

***3.***$\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)-3\sin x}{x^3}$.

**题 3.** （*12*分）计算积分

***1.***$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\arctan(\mathrm{e}^x)}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

***2.***$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

**题 4.** （*8*分）求所有可能的的参数$a,b$使得$f(x)$在$x=1$处可导，其中

$$f(x)=\begin{cases} ax\mathrm{e}^x+bx^x, & x>1,\\ |x|, & x\le1.\end{cases}$$

**题 5.** （*12*分）设$f(x)$是$\mathbb{R}$上以*1*为周期的连续函数，求证：存在$c \in \mathbb{R}$使得$f(c) = f(c+\pi)$。

**题 6.** （*8*分）计算曲线$y = \int_0^x \sqrt{\sin t}\mathrm{d}t$在$x \in [0,\pi]$部分的弧长。

**题 7.** （*12*分）考虑方程$x = \tan x$的正实根：

***1.***证明：方程$x = \tan x$的正实根有无穷多个。

***2.***如果将方程$x = \tan x$的正实根从小到大排成一列$\{x_n\}$，证明$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = \pi$。

**题 8.** （*12*分）设$n \in \mathbb{N}^*$，定义序列$x_n = \sqrt[n]{n}$，回答下列问题

***1.***使用$\varepsilon - N$语言证明$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$。

***2.***求所有正实数$a$使得$\lim_{n\to\infty} n(x_n - 1)^a$收敛。

**题 9.** （*8*分）给定正整数$a > 0$，定义函数$f_a(x) = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^a$，求所有的自然数$n$使得$(f_a)^{(n)}(0) = 0$。

精简版答案

**1.** ABCD、BC

**2.** $\frac{1}{2022}, \sqrt{\mathrm{e}}, -4$

**3.** $\frac{\pi^2}{8}, \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - \frac{3x^2+4x}{2(x^2+1)} - 4\arctan x + C$

**4.** $a=0, b=1$

**5.** 利用极值定理和介值定理，构造$F(x)=f(x+\pi)-f(x)$辅助函数

**6.** 4

**7.** 证明$\lim_{n\to\infty}\left(n\pi+\frac{3\pi}{2}-x_n\right)=0$

**8.** $a>1$

**9.** $n\geq a+2$且与$a$奇偶性相同

# 试卷说明

1. 本卷难度不低，简单题少（仅15分左右），中档题多，正式考试难度不会高于本卷
2. 本卷第一选择题第一问难度很大，用于模拟意外情况。考试时应学会用几何直观做题
3. 大多数题目为课本习题变形和讲义重要方法，同学们应注意归纳
4. 本卷题量较正式考试多1-2题，但赋分更小，没有特别难的题目

① ABCD $0\le\frac{\sin x}{x}\le 1$ $f(x)=\frac{\sin x}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}\le 0$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 单调递减

$\Rightarrow \frac{2}{\pi}\le\frac{\sin x}{x}\le 1$

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx < 1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

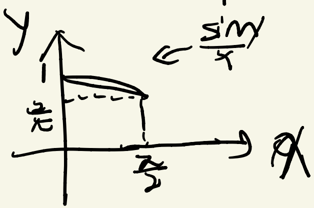
B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx > \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1$

C. 证明 $\frac{\sin x}{x}\ge\frac{\frac{2}{\pi}-1}{\frac{\pi}{2}}x+1$

本题难度：★★★★★

(C连$(0,1)$与$(\frac{\pi}{2},\frac{2}{\pi})$的线)

(C可以用图像分析)




梯形面积为 $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

考点：利用图像大致估计

D. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx\xrightarrow{y=\pi-x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{\pi-y}dy\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{y}dy$

② BC

注意 $f(k)\le\int_k^{k+1}f(x)dx\le f(k+1)$

本题难度：★★

考点：定积分单调性质

2、① 考点：定积分定义

难度：☆☆

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^{2021}+\cdots+n^{2021}}{n^{2022}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{2021}+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^{2021}\right]$$

$$=\int_0^1 x^{2021}\,dx=\frac{1}{2022}$$

② 考点：e的方法，等价无穷小

难度：☆☆

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x^{2022}}+\cos\frac{1}{x^{1011}}\right)^{x^{2022}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[1+\left(\sin\frac{1}{x^{2022}}+\cos\frac{1}{x^{1011}}-1\right)\right]^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x^{2022}}+\cos\frac{1}{x^{1011}}-1}}\right\}^{x^{2022}\left(\sin\frac{1}{x^{2022}}+\cos\frac{1}{x^{1011}}-1\right)}$$

$$=\exp\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x^{2022}}+\cos\frac{1}{x^{1011}}-1\right)x^{2022}\right]$$

指数中极限令 $t=\frac{1}{x^{1011}}$

$$\text{指数}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(t^2)+\cos(t)-1}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin(t^2)}{t^2}+\lim\frac{\cos t-1}{t^2}$$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

原极限为 $\sqrt{e}$

注：不要用Stolz定理!!!

③ 考点：等价无穷小

难度：☆

$$\sin(3x)=3\sin x-4\sin^3x$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)-3\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-4\sin^3x}{x^3}$$

$$=-4$$

3、① 注意 (☆☆☆)

$$\arctan(e^{-x}) + \arctan(e^{x}) = \frac{\pi}{2}$$

改题 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \arctan(e^{x})}{1+\sin^2 x}\,dx$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{1} \frac{dt}{1+t^2} \quad (t=\sin x)$$

$$= \frac{\pi^2}{8}$$

(☆☆) ② 有理分式积分

$$I = \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - \frac{3x^2+4x}{2(x^2+1)} - 4\arctan x + C$$

4、(☆)

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = a+b = 1$$

$$f'(1+0) = a(e^x + xe^x) + bx^x(1+\ln x)\Big|_{x=1}$$

$$= 2ea + b = 1$$

$\Rightarrow a=0 \quad b=1$

5、(☆☆☆)

$f\in C[0,1]$ 用极值定理

$\exists\, c_1, c_2 \in [0,1]$ $f(c_1) = M = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \| \quad \max\limits_{x\in R} f(x)$ (周期性)

$f(c_2) = m = \min\limits_{x\in[0,1]} f(x)$

定义函数 $F(x) = f(x+T) - f(x)$

$F(c_1) = f(c_1+T) - f(c_1) \le 0$

$F(c_1-T) = f(c_1) - f(c_1-T) \ge 0$

介值定理 $\exists\, c \in [c_1-T, c_1]$

使 $F(c) = 0$

6、(☆☆☆)

$$L = \int_0^\pi \sqrt{1+\sin x}\, dx$$

$$= \int_0^\pi \left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right| dx$$

$$= \int_0^\pi \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= 2\left[\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right]\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= 4$$

入 ① $\forall k\in\mathbb{N}^*$

令 $g(x)=\tan x-x$

$\lim\limits_{x\to(k\pi+\frac{3}{2}\pi)-0} g(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to(k\pi-\frac{\pi}{2})+0} g(x)=-\infty$

可取 $y_1, y_2\in(k\pi+\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{3}{2}\pi)$

$g(y_1)=\tan y_1-y_1<0$

$g(y_2)=\tan y_2-y_2>0$

介值定理 $\exists\, y\in(y_1,y_2)$ $g(y)=0$

② 用单调性知

每个 $x_n$ 位于 $(n\pi+\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{3}{2}\pi)$ 中

下面证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}[(n\pi+\frac{3}{2}\pi)-x_n]=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\tan[(n\pi+\frac{3}{2}\pi)-x_n]=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\tan x_n}=\frac{1}{x_n}=0$

由 $x_n\in(n\pi+\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{3}{2}\pi)$ 知 $(n\pi+\frac{3}{2}\pi)-x_n\to 0$

于是 $x_{n+1}-x_n-\frac{\pi}{2}$

$=[(n\pi+\frac{3}{2}\pi)-x_{n+1}]+[(n\pi+\frac{\pi}{2})-x_n]$

$\to 0+0=0$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n-\frac{\pi}{2})=0$

8. ① 先证 $\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$

用 ε-N 语言可证

答: $a>1$

② 1. 令 $h_n=\sqrt[n]{n}-1$

$(h_n+1)^n=n$

取二项式展开第k+1项

$$n>\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}h_n^k$$

$$h_n<\left[\frac{k!}{(n-1)\cdots(n-k+1)}\right]^{\frac{1}{k}}$$

$$=O(n^{-\frac{k-1}{k}})$$

即对给定k，右侧关于n是阶为 $n^{-\frac{k-1}{k}}$

$(\cancel{\quad})$

2. 先证对一切 $b<1$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}n^b h_n=0$

取k足够大使 $b<\frac{k-1}{k}$

$$n^b h_n=\sqrt[k]{k!}\left[\frac{n^{bk}}{(n-1)\cdots(n-k+1)}\right]^{\frac{1}{k}}\to 0$$

$(bk<k-1)$

故对一切 $a>1$

$$n h_n^a=(n^{\frac{1}{a}}h_n)^a\to 0$$

3. 再证 $\lim\limits_{n\to\infty}n h_n=+\infty$

任取 $m\in\mathbb{N}^*$ 用等价无穷小

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{m}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{m^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln m$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}n h_n>\ln m \quad \forall m\in\mathbb{N}^*$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}n h_n=+\infty$

因此对一切 $a<1$

$n h_n^a>n h_n$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}n h_n^a=+\infty$

9. 用化显为隐法

令 $y=(x+\sqrt{x^2+1})^a$

$\ln y = a\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ (取对数)

$$\frac{y'}{y}=a\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y'\sqrt{x^2+1}=ay$$

$$(y')^2(x^2+1)=a^2y^2$$

求导得

$$2y'y''(x^2+1)+2x(y')^2=2a^2yy'$$

$$y''(x^2+1)+xy'=a^2y$$

再用Leibniz公式求n阶导

$$(x^2+1)y^{(n+2)}+2nxy^{(n+1)}+n(n-1)y^{(n)}+xy^{(n+1)}+ny^{(n)}=a^2y^{(n)}$$

代入 $x=0$

$$y^{(n+2)}(0)=(a^2-n^2)y^{(n)}(0) \quad (n\geq 1)$$

由 $y(0)=1$ $y'(0)=a$ $y''(0)=a^2$

$$y^{(2k-1)}(0)=[a^2-(2k-3)^2]\cdots[a^2-3^2][a^2-1^2]a$$

$$y^{(2k-2)}(0)=[a^2-(2k-2)^2]\cdots[a^2-4^2][a^2-2^2]a$$

对a为奇数 则 $n\geq a+2$ 且n奇数时

$$(f_a)^{(n)}(0)=0$$

对a为偶数 则 $n\geq a+2$ 且n偶数时

$$(f_a)^{(n)}(0)=0$$