线性代数A 大练习1

复习题组1 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-8x_2+x_3+5x_4=0, \\ x_1-3x_2-2x_3-x_4=6, \\ -2x_1+x_2-4x_3+x_4=-12, \\ -x_1+4x_2-x_3-3x_4=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+a_1)x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=b_1, \\ x_1+(1+a_2)x_2+x_3+\cdots+x_n=b_2, \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ x_1+x_2+x_3+\cdots+(1+a_n)x_n=b_n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+\cdots+(n-1)x_{n-1}+nx_n=b_1, \\ nx_1+x_2+2x_3+\cdots+(n-2)x_{n-1}+(n-1)x_n=b_2, \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ 2x_1+3x_2+4x_3+\cdots+nx_{n-1}+x_n=b_n. \end{cases}$$

复习题组2 逆序数与行列式的计算（1）

如果 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n$ 的逆序数为 r，求 n 元排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 的逆序数。

设 $n\geqslant 2$，证明：如果 n 级矩阵 A 的元素为 1 或 -1，则 $|A|$ 必为偶数。

求行列式的值：

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix},$$

4. 计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ -3 & 6 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

计算下述行列式，并且将结果因式分解：

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}.$$

计算下列 n 阶行列式($n\geqslant 2$)：

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

例 7 计算下述 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix},$$

其中 $a\neq b$。

例 8 计算下述 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

$i=1 \quad j=1$

计算下述 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & c_2^1 & c_3^1 & \cdots & c_{n-1}^1 & c_n^1 \\ 1 & c_3^2 & c_4^2 & \cdots & c_n^2 & c_{n+1}^2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & c_{n-1}^{n-2} & c_n^{n-2} & \cdots & c_{2n-4}^{n-2} & c_{2n-3}^{n-2} \\ 1 & c_n^{n-1} & c_{n+1}^{n-1} & \cdots & c_{2n-3}^{n-1} & c_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

（上题中 C 代表组合数）

例 11 计算下述 n 阶列式($n\geqslant 2$)：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1+a_{11} & x_1^2+a_{21}x_1+a_{22} & \cdots & x_1^{n-1}+a_{n-1,1}x_1^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \\ 1 & x_2+a_{12} & x_2^2+a_{21}x_1+a_{22} & \cdots & x_2^{n-1}+a_{n-1,1}x_2^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n+a_{11} & x_n^2+a_{21}x_n+a_{22} & \cdots & x_n^{n-1}+a_{n-1,1}x_n^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

计算下述 n 阶行列式($n\geqslant 2$)：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}.$$