线性代数 A 大练习 7

范围：4.6 正交矩阵 欧几里得空间

Part 1 错题复现

1.

例 4 证明：如果 A 与 B 都是 n 级斜对称矩阵，那么 $AB-BA$ 也是斜对称矩阵。

2.

例 3 设 A 是实数域上的 $s\times n$ 矩阵，则

$$\mathrm{rank}(A'A)=\mathrm{rank}(AA')=\mathrm{rank}(A).$$

3.

例 5 证明：如果数域 K 上的 n 级矩阵 A 满足

$$AA'=I,\qquad |A|=-1,$$

那么

$$|I+A|=0.$$

4.

例 9 证明 Cauchy 恒等式：当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_id_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_id_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_ic_i\right)=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(a_jb_k-a_kb_j)(c_jd_k-c_kd_j).$$

例 10 证明 Cauchy-Bunyakovsky 不等式：对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$，有

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2,$$

等号成立当且仅当 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 线性相关。

5.

例 11 设 A、B 都是 n 级矩阵，证明：AB 与 BA 的 r 阶的所有主子式之和相等，其中 $1\leqslant r\leqslant n$。

6.

例 12 用 Binet-Cauchy 公式计算下述 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}.$$

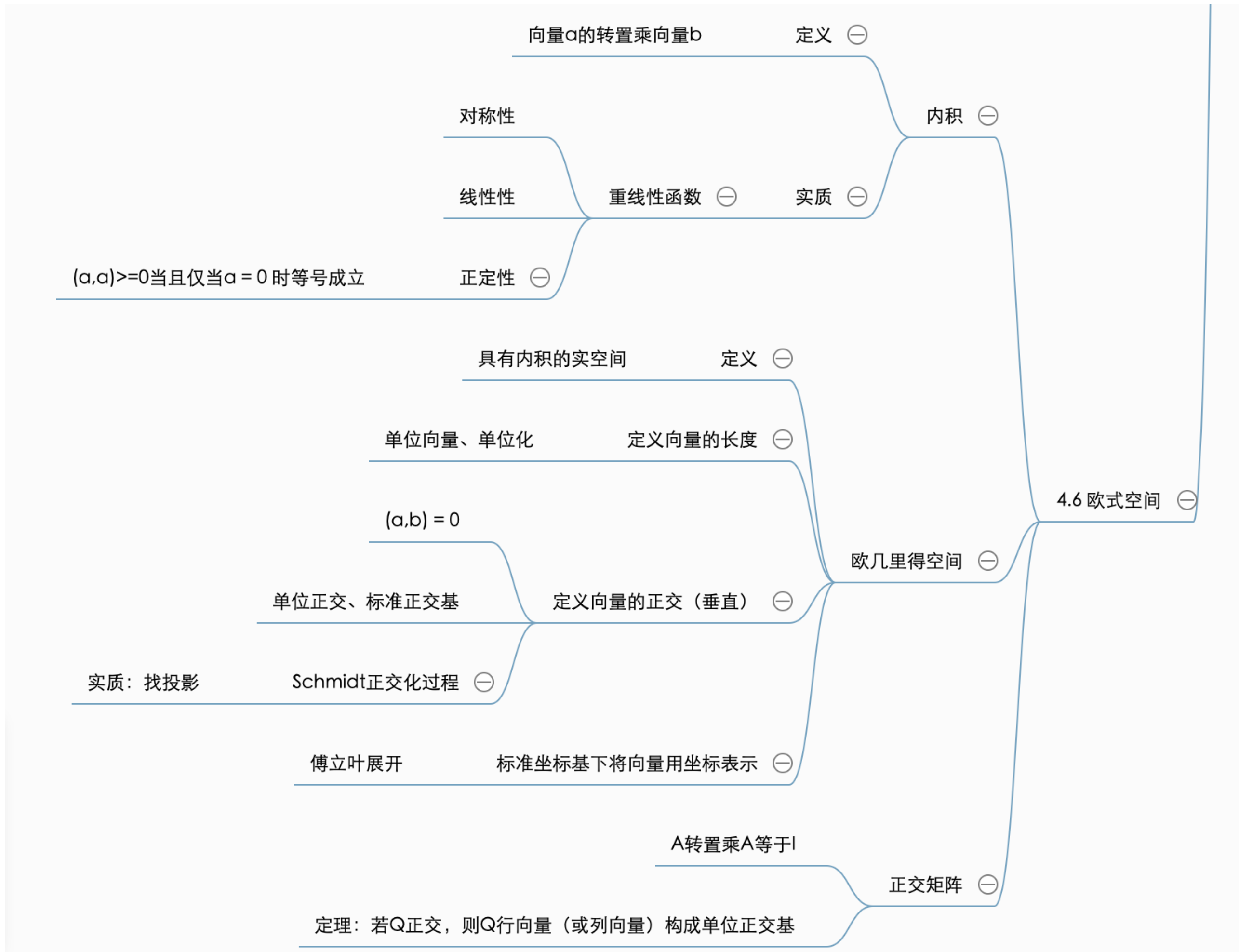
7.

例 13 设 A 是一个 $n\times m$ 矩阵，$m\geqslant n-1$。求 AA' 的 $(1,1)$ 元的代数余子式。

8.

例 14 设 A 是一个 $n\times m$ 矩阵，$m\geqslant n-1$，并且 A 的每一列元素的和都为 0。证明：AA' 的所有元素的代数余子式都相等。

Part 2 知识点回顾及练习



Part 3 书上例题练习

【注：本部分例题补充内容较多】

例 1 证明：如果 A 是实数域上 n 级对称矩阵(简称为 n 级实对称矩阵)，T 是 n 级正交矩阵，那么 $T^{-1}AT$ 是实对称矩阵。

例 2 证明：如果 n 级正交矩阵 A 是上三角矩阵，那么 A 是对角矩阵，且 A 的主对角元为 1 或 -1。

例 3 设 A 是实数域上的 n 级矩阵，证明：如果 A 可逆，那么 A 可以惟一地分解成正交矩阵 T 与主对角元都为正数的上三角矩阵 B 的乘积：$A=TB$。

例 4 在欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中，设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}$$

把 A 分解成正交矩阵 T 与主对角元为正数的上三角矩阵 B 的乘积。

例 5 设 A 是实数域上的 $m\times n$ 矩阵，其中 $m>n$。证明：如果 A 的列向量组 $\alpha_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，那么 A 可以惟一分解成

$$A=QR,$$

其中 Q 是列向量组为正交单位向量组的 $m\times n$ 矩阵，R 是主对角元都为正数的 n 级上三角矩阵，这称为 QR—分解。

例 6 设 A 是实数域上的 $m\times n$ 列满秩矩阵，它可分解成

$$A=QR,$$

其中 Q 是列向量组为正交单位向量组的 $m\times n$ 矩阵，R 为主对角元都为正数的上三角矩阵。证明对于任意 $\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^m$，$R^{-1}Q'\boldsymbol{\beta}$ 是线性方程组 $A'AX=A'\boldsymbol{\beta}$ 的惟一解。

例 7 决定所有的 2 级正交矩阵。

例 8 设 A 是 n 级正交矩阵，证明：

(1) 如果 $|A|=1$，那么 A 的每一个元素等于它自己的代数余子式；

(2) 如果 $|A|=-1$，那么 A 的每一个元素等于它自己的代数余子式乘以 -1。

例 9 设 A 是实数域上的 n 级矩阵证明：

(1) 如果 $|A|=1$，且 A 的每一个元素等于它自己的代数余子式，那么 A 是正交矩阵；

(2) 如果 $|A|=-1$，且 A 的每一个元素等于它自己的代数余子式乘以 -1，那么 A 是正交矩阵。

例 10 设 A 是实数域上的 n 级矩阵，$n\geqslant 3$。且 $A\neq 0$。证明：

(1) 如果 A 的每一个元素等于它自己的代数余子式，那么 A 是正交矩阵；

(2) 如果 A 的每一个元素等于它自己的代数余子式，乘以 -1，那么 A 是正交矩阵。

例 11 设 A 是 n 级正交矩阵，证明：任意取定 A 的两行(或两列)，由这两行(或两列)的元素组成的所有 2 阶子式的平方和等于 1。

例 12 证明：实数域上的一个 n 级矩阵如果具有下列三个性质中的任意两个性质，那么必有第三个性质：正交矩阵，对称矩阵，对合矩阵。

例 13 设 A 是 n 级正交矩阵，证明：对于欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中任一列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $|A\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\alpha}|$.

例 14 设 A 是实数域上一个 $s\times n$ 非零矩阵，A 的行空间记作 U；齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解空间记作 W。证明：U 中每一个向量的转置与 W 中任一向量正交。

例 15 证明：在欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中，如果向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\mathbf{R}^n$ 的一个正交基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的每个向量都正交，那么 $\boldsymbol{\alpha}=0$。

例 16 在欧几里得空间 $\mathbf{R}^4$ 中，求与线性无关的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价的正交单位向量组：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

例 17 设 U 是欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间，如果向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 U 中每一个向量正交，那么称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 U **正交**，记作 $\boldsymbol{\alpha}\perp U$。令

$$U^{\perp}\xlongequal{\text{def}}\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n\mid\boldsymbol{\alpha}\perp U\}.$$

称 $U^{\perp}$ 是 U 的**正交补**。证明：$U^{\perp}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间。

例 18 设 U 是欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间。令

$$P_U:\quad \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$$
$$\boldsymbol{\alpha} \longmapsto \boldsymbol{\alpha}_1,$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in U$,并且 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1 \in U^{\perp}$,则称 P_U 是 $\mathbf{R}^n$ 在 U 上的**正交投影**,把 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的**正交投影**。证明:对于 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{\alpha}_1 \in U$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影当且仅当

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}|, \forall \boldsymbol{\gamma} \in U.$$

例 19 设 A 是实数域上的一个 $m \times n$ 矩阵,$m>n$,$\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^m$。如果 $\boldsymbol{X}_0 \in \mathbf{R}^n$ 使得 $|\boldsymbol{\beta}-A\boldsymbol{X}_0|^2 \leqslant |\boldsymbol{\beta}-A\boldsymbol{X}|^2, \forall \boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^n$,那么称 $\boldsymbol{X}_0$ 是线性方程组 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ **最小二乘解**。证明:$\boldsymbol{X}_0$ 是 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的最小二乘解当且仅当 $\boldsymbol{X}_0$ 是线性方程组

$$A'A\boldsymbol{X} = A'\boldsymbol{\beta}$$

例 20 设 A 是实数域上 $m\times n$ 列满秩矩阵,$m>n$。A 的列空间记作 U。记 $P_A = A(A'A)^{-1}A'$。令

$$\boldsymbol{P}_A(\boldsymbol{X}) = P_A\boldsymbol{X}, \forall \boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^m$$

证明:$\boldsymbol{P}_A$ 是 $\mathbf{R}^m$ 在 U 上的正交投影。

例 21 设 A 是实数域上 $m\times n$ 列满秩矩阵,$m>n$。证明:$(A'A)^{-1}A'\boldsymbol{\beta}$ 是线性方程组 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的惟一的最小二乘解。

例 22 设 A 是复数域上的矩阵,用 A^* 表示 $\overline{A}'$,即把 A 的每个元素取共轭复数得到的矩阵 $\overline{A}$ 再转置(注意从上下文区别 A^* 是表示 $\overline{A}'$ 还是表示 A 的伴随矩阵)。如果 n 级复矩阵 A 满足 $AA^*=I$,那么称 A 是**酉矩阵**。证明:下列每一个条件都是 n 级复矩阵 $A=(a_{ij})$ 为酉矩阵的充分必要条件:

(1) A 可逆,且 $A^{-1}=A^*$;

(2) $A^*A=I$;

(3) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a}_{jk} = \delta_{ij}, 1 \leqslant i,j \leqslant n$;

(4) $\sum_{k=1}^{n} \overline{a}_{ki} \cdot a_{kj} = \delta_{ij}, 1 \leqslant i,j \leqslant n.$

例 23 证明:两个 n 级酉矩阵的乘积是酉矩阵;酉矩阵的逆矩阵是酉矩阵。

例 24 证明:酉矩阵的行列式的模等于 1。

Part 4 附加题

2021.高等代数期末(高峡)(6)

六. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是 n 级实矩阵,满足条件 $\mathbf{AA^T = BB^T}$. 证明:

存在正交矩阵 $\mathbf{Q}$,使得 $\mathbf{A = BQ}$.

2021.高等代数期末(李文威)(2-4)

4. (10 分) 在配备标准内积的空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 设

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},$$

以 Gram–Schmidt 正交化为它们生成的子空间求一组正交基, 不必化为单位向量.