

范围: 6.8 多元函数的极值

Part 1 新知识巩固

极值的必要条件、充分条件、条件极值的必要条件

Part 2 补充习题练习

例 4 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值.

例 5 某厂要用铁板做成一个体积为 2 m^3 的有盖长方体水箱. 问当长、宽、高各取怎样的尺寸时, 才能使用料最省.

例 6 有一宽为 24 cm 的长方形铁板, 把它两边折起来做成一断面为等腰梯形的水槽. 问怎样折法才能使断面的面积最大?

例 7 求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积.

例 8 求函数 $u = xyz$ 在附加条件

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \quad (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0) \quad (12)$$

下的极值.

1. 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1,$$

则下述四个选项中正确的是().

- (A) 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点
- (B) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点
- (C) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点
- (D) 根据所给条件无法判断 $(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点

2. 求函数 $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ 的极值.

3. 求函数 $f(x, y) = (6x - x^2)(4y - y^2)$ 的极值.

4. 求函数 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ 的极值.

5. 求函数 $z = xy$ 在适合附加条件 $x + y = 1$ 下的极大值.

6. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中, 求有最大周长的直角三角形.

7. 要造一个体积等于定数 k 的长方体无盖水池, 应如何选择水池的尺寸, 方可使它的表面积最小.

8. 在平面 xOy 上求一点, 使它到 $x = 0, y = 0$ 及 $x + 2y - 16 = 0$ 三直线的距离平方之和为最小.

9. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体. 问矩形的边长各为多少时, 才可使圆柱体的体积为最大?

10. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

11. 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆, 求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

12. 设有一圆板占有平面闭区域 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. 该圆板被加热, 以致在点 (x, y) 的温度是

$$T = x^2 + 2y^2 - x.$$

求该圆板的最热点和最冷点.

13. 形状为椭球 $4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 16$ 的空间探测器进入地球大气层, 其表面开始受热, 1 小时后在探测器的点 (x, y, z) 处的温度 $T = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$, 求探测器表面最热的点.