线性代数 A 大练习 14

范围：（4.2）4.3 4.5 矩阵的基本运算及性质

·执着于理想，纯粹于当下

加油!!!

Part 1 错题重现

例 3 设 A 是实数域上的 $s\times n$ 矩阵，则

$$\operatorname{rank}(A'A)=\operatorname{rank}(AA')=\operatorname{rank}(A).$$

例 5 证明：如果数域 K 上的 n 级矩阵 A 满足

$$AA'=I,\qquad |A|=-1,$$

那么

$$|I+A|=0.$$

例 9 证明 Cauchy 恒等式：当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_id_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_id_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_ic_i\right)=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(a_jb_k-a_kb_j)(c_jd_k-c_kd_j).$$

例 14 设 A 是一个 $n\times m$ 矩阵，$m\geqslant n-1$，并且 A 的每一列元素的和都为 0。证明：AA' 的所有元素的代数余子式都相等。

Part 2 书上练习题补充

1. 证明：对于任一 $s\times n$ 矩阵 A，都有 AA'，$A'A$ 是对称矩阵。
2. 证明：两个 n 级斜对称矩阵 A 与 B 的乘积是斜对称矩阵当且仅当 $AB=-BA$。
3. 证明：两个 n 级斜对称矩阵的乘积是对称矩阵当且仅当它们可交换。
4. 证明：如果 A 与 B 都是 n 级对称矩阵，那么 $AB-BA$ 是斜对称矩阵。
5. 设 A 是实数域上的 $s\times n$ 矩阵。证明：如果 $AA'=0$，那么 $A=0$。
6. 设 A 是复数域上的 $s\times n$ 矩阵，用 $\overline{A}$ 表示把 A 的每个元素取共轭复数得到的矩阵。证明：如果 $A\overline{A}'=0$，那么 $A=0$。
7. 证明：n 级对称矩阵的第 i 行元素的和等于它的第 i 列元素的和。
8. 设

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm}\end{pmatrix}.$$

证明：矩阵方程

$$AX=XB$$

有非零解。

9. 设 A 与 B 都是 n 级对称矩阵，则对任意正整数 m，矩阵 $C=(AB)^mA$ 也是对称矩阵。
10. 证明：初等矩阵可以表示成形如 $I+a_{ij}E_{ij}$ 这样的矩阵的乘积。
11. 证明：对角矩阵 $D=\operatorname{diag}\{1,\cdots,1,0,\cdots,0\}$ 可以表示成形如 $I+a_{ij}E_{ij}$ 这样的矩阵的乘积。

1. 证明：设 A 是 n 级矩阵，则 $|AA'|=|A|^2$。
2. 证明：设 A 是 n 级矩阵，如果 $AA'=I$，那么 $|A|=1$ 或 $|A|=-1$。
3. 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，证明：如果 n 是奇数，且 A 满足

$$AA'=I,\qquad |A|=1,$$

那么，$|I-A|=0$。

4. 证明：对于实数域上的任一 $s\times n$ 矩阵 A，都有

$$\operatorname{rank}(AA'A)=\operatorname{rank}(A).$$

9. 证明拉格朗日(Lagrange)恒等式：当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(a_jb_k-a_kb_j)^2$$

10. 用 Binet-Cauchy 公式计算下述 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n\\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n\end{vmatrix}.$$

11. 计算下述 $n+1$ 级矩阵 A 的行列式：

$$A=\begin{pmatrix}(a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n\\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n\end{pmatrix}.$$

12. 计算下述 n 级矩阵 A 的行列式：

$$A=\begin{pmatrix}\cos(\theta_1-\varphi_1) & \cos(\theta_1-\varphi_2) & \cdots & \cos(\theta_1-\varphi_n)\\ \cos(\theta_2-\varphi_1) & \cos(\theta_2-\varphi_2) & \cdots & \cos(\theta_2-\varphi_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cos(\theta_n-\varphi_1) & \cos(\theta_n-\varphi_2) & \cdots & \cos(\theta_n-\varphi_n)\end{pmatrix}.$$

13. 设实数域上的 n 级矩阵 $A=(B,C)$，其中 B 是 $n\times m$ 矩阵，证明：

$$|A|^2\leqslant|B'B||C'C|.$$

14. 设 A、B 分别是数域 K 上 $s\times n$、$n\times m$ 矩阵，证明：$\text{rank}(AB)=\text{rank}(B)$ 当且仅当齐次线性方程组 $(AB)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的每一个解都是 $B\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个解。

15. 设 A、B 分别是数域 K 上 $s\times n$，$n\times m$ 矩阵。证明：如果 $\text{rank}(AB)=\text{rank}(B)$，那么，对于数域 K 上任意 $m\times r$ 矩阵 C，都有

$$\text{rank}(ABC)=\text{rank}(BC).$$

16. 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，证明：如果存在正整数 m，使得 $\text{rank}(A^m)=\text{rank}(A^{m+1})$，那么对一切正整数 k，有

$$\text{rank}(A^m)=\text{rank}(A^{m+k}),$$

1. 设 n 级矩阵 $A\neq0$，证明：存在一个 $n\times m$ 非零矩阵 B，使 $AB=0$ 的充分必要条件为 $|A|=0$。

2. 设 B 为 n 级矩阵。C 为 $n\times m$ 行满秩矩阵，证明

(1) 如果 $BC=0$，那么 $B=0$；

(2) 如果 $BC=C$，那么 $B=I$.

3. 设 A、B、C 分别是 $s\times n$、$n\times m$、$m\times t$ 矩阵，证明：

$$\text{rank}(ABC)\geqslant\text{rank}(AB)+\text{rank}(BC)-\text{rank}(B).$$

4. 证明：数域 K 上 n 级矩阵 A 是对合矩阵的充分必要条件是

$$\text{rank}(I+A)+\text{rank}(I-A)=n.$$

5. 设 A 是数域 K 上一个 n 级矩阵。证明：如果 $\text{rank}(A)=1$，那么 $A^2=kA$，其中 k 是 K 中某个数。

6. 设 A 是数域 K 上一个 $s\times n$ 行满秩矩阵，证明：对于 K 上任意一个 $s\times m$ 矩阵 B，矩阵方程 $AX=B$ 都有解。

Part 3 常考题型及笔记整理