高等数学 A 大练习 13

范围：6.5-6.6 复合函数微分 方向导数与梯度

Part 1 新知识巩固

求复合函数偏导数的链式法则

一阶全微分的形式不变性

高阶微分

方向导数的定义

方向导数的计算公式

梯度（一个向量）

梯度的计算公式

Part 2 补充习题练习

例 1 设 $z=e^u\sin v$，而 $u=xy$，$v=x+y$．求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

例 2 设 $u=f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}$，而 $z=x^2\sin y$．求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$．

例 3 设 $z=uv+\sin t$，而 $u=e^t$，$v=\cos t$．求全导数 $\dfrac{dz}{dt}$．

例 4 设 $w=f(x+y+z,xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$．

例 5 设 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续，把下列表达式转换为极坐标系中的形式：

(1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$； (2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$．

例 6 利用全微分形式不变性解本节的例 1．

1．设 $z=u^2+v^2$，而 $u=x+y$，$v=x-y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

2．设 $z=u^2\ln v$，而 $u=\dfrac{x}{y}$，$v=3x-2y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

3．设 $z=e^{x-2y}$，而 $x=\sin t$，$y=t^3$，求 $\dfrac{dz}{dt}$．

4．设 $z=\arcsin(x-y)$，而 $x=3t$，$y=4t^3$，求 $\dfrac{dz}{dt}$．

5．设 $z=\arctan(xy)$，而 $y=e^x$，求 $\dfrac{dz}{dx}$．

6．设 $u=\dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而 $y=a\sin x$，$z=\cos x$，求 $\dfrac{du}{dx}$．

7．设 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$，而 $x=u+v$，$y=u-v$，验证

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

8．求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数)：

(1) $u=f(x^2-y^2,e^{xy})$； (2) $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$；

(3) $u=f(x,xy,xyz)$．

9．设 $z=xy+xF(u)$，而 $u=\dfrac{y}{x}$，$F(u)$ 为可导函数，证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy.$$

10．设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(u)$ 为可导函数，验证

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

11. 设 $z=f(x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

*12. 求下列函数的$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$(其中 f 具有二阶连续偏导数)：

(1) $z=f(xy,y)$；　　(2) $z=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$；

(3) $z=f(xy^2,x^2y)$；　　(4) $z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$.

*13. 设 $u=f(x,y)$的所有二阶偏导数连续，而

$$x=\frac{s-\sqrt{3}t}{2},\qquad y=\frac{\sqrt{3}s+t}{2},$$

证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

例 1 求函数 $z=xe^{2y}$在点$P(1,0)$处沿从点 $P(1,0)$到点 $Q(2,-1)$的方向的方向导数.

例 2 求 $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ 在点(1,1,2)沿方向 l 的方向导数，其中 l 的方向角分别为 60°,45°,60°.

例 3 求 $\mathbf{grad}\,\frac{1}{x^2+y^2}$.

例 4 设 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，$P_0(1,1)$，求

(1) $f(x,y)$在 P_0 处增加最快的方向以及 $f(x,y)$沿这个方向的方向导数；

(2) $f(x,y)$在 P_0 处减少最快的方向以及 $f(x,y)$沿这个方向的方向导数；

(3) $f(x,y)$在 P_0 处的变化率为零的方向.

例 5 设 $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$，$P_0(1,1,0)$. 问 $f(x,y,z)$在 P_0 处沿什么方向变化最快，在这个方向的变化率是多少？

例 6 求曲面 $x^2+y^2+z=9$ 在点 $P_0(1,2,4)$的切平面和法线方程.

例 7 试求数量场$\frac{m}{r}$所产生的梯度场，其中常数 $m>0$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为原点 O 与点 $M(x,y,z)$间的距离.

1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点(1,2)处沿从点(1,2)到点$(2,2+\sqrt{3})$的方向的方向导数.

2. 求函数 $z=\ln(x+y)$在抛物线 $y^2=4x$ 上点(1,2)处，沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

3. 求函数 $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$在点$\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$处沿曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数.

4. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点(1,1,2)处沿方向角为 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$的方向的方向导数.

5. 求函数 $u=xyz$ 在点(5,1,2)处沿从点(5,1,2)到点(9,4,14)的方向的方向导数.

6. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上点(1,1,1)处，沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向)的方向导数.

7. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面$x^2+y^2+z^2=1$上点(x_0,y_0,z_0)处，沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

8. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求

$$\mathbf{grad}\,f(0,0,0)\text{及 }\mathbf{grad}\,f(1,1,1).$$

9. 设函数 $u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$的各个偏导数都存在且连续，证明：

(1) $\nabla(cu)=c\,\nabla u$ (其中 c 为常数)；

(2) $\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$；

(3) $\nabla(uv)=v\,\nabla u+u\,\nabla v$；

(4) $\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,\nabla u-u\,\nabla v}{v^2}$.

10. 求函数 $u=xy^2z$ 在点 $P_0(1,-1,2)$处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数.