线性代数 A 大练习 3

复习题组 1 极大线性无关组 向量组的秩

1.

例 2 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，证明：$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个极大线性无关组。

2.

例 3 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，证明：如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可以由其中的 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出，那么 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组。

3.

例 5 证明：在 n 维向量空间 K^n 中，n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关当且仅当 K^n 中任一向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出。

4.

例 6 证明：如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 有相等的秩，那么 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出。

5.

例 7 证明：两个向量组等价的充分必要条件是：它们的秩相等且其中一个向量组可以由另外一个向量组线性表出。

6.

10. 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，但是 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出。证明：$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}=\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\beta}\}$。

复习题组 2 n 维向量空间的基与维数 矩阵的秩

1.

例 6 证明：如果 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，那么它的任何 s 行组成的子矩阵 A_1 的秩大于或等于 $r+s-m$。

2.

个基。

例 4 判断下述向量组是否为 K^4 的一个基：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\7\\-2\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-3\\0\\4\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}6\\1\\0\\-4\end{pmatrix}.$$

3.

例 1 计算下述矩阵的秩，并且求它的列向量组的一个极大线性无关组：

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 4\\ -2 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 5 & -4 & 2\end{pmatrix}.$$

4.

例 2 求下述向量组的秩，它的一个极大线性无关组，以及 $\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\rangle$ 的维数和一个基。

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\4\\9\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\0\\-5\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\\5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\0\end{pmatrix}.$$

5.

例 7 设 A、B 分别是数域 K 上的 $s\times n$、$s\times m$ 矩阵。用 (A,B) 表示在 A 的右边添写上 B 得到的 $s\times(n+m)$ 矩阵。证明：$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}((A,B))$ 当且仅当 B 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表出。

6.

例 8 设 A 是 $s\times n$ 矩阵，B 是 $l\times m$ 矩阵。证明：

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B).$$

复习题组 3 n 维向量与线性方程组

1.

讨论 a 取什么值时，下述线性方程组有惟一解？有无穷多个解？无解？

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1. \end{cases} \tag{3}$$

2.

例 5 证明：线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{4}$$

有解的充分必要条件是下述线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{s1}x_s = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{s2}x_s = 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{sn}x_s = 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_sx_s = 1. \end{cases} \tag{5}$$

无解。

3.

例 2 证明：设 n 元齐次线性方程组(1)的系数矩阵的秩为 $r(r<n)$，如果 $\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \cdots, \boldsymbol{\delta}_m$ 都是齐次线性方程组(1)的解向量，那么

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \cdots, \boldsymbol{\delta}_m\} \leqslant n - r.$$

4.

例 3 设 n 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式等于零，并且 $\boldsymbol{A}$ 的 (k,l) 元的代数余子式 $A_{kl} \neq 0$。证明：

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} A_{k1} \\ A_{k2} \\ \vdots \\ A_{kn} \end{pmatrix}$$

是这个齐次线性方程组的一个基础解系。

复习题组 4 求解线性方程组专题

(刷速度!！ 不能出现半点失误)

1. 求下列数域 K 上齐次线性方程组的一个基础解系，并且写出它的解集。

(1) $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 - 11x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0; \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 10x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ -2x_1 + 15x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + 15x_2 - 6x_3 + 13x_4 = 0; \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ -3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 0, \\ 5x_1 - 15x_2 + 5x_3 - 10x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

2.

求下述数域 K 上非齐次线性方程组的解集。

(1) $$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5, \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_4 = 17, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1; \end{cases}$$

(2) $x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 4$;

(3) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 1, \\ -5x_1 - 10x_2 - 2x_3 + x_4 = -21, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 3x_4 = -16. \end{cases}$$

3.

求下述数域 K 上非齐次线性方程组的解集。

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-4x_4=-5, \\ 3x_1-x_2+5x_3+6x_4=-1, \\ -5x_1-3x_2+x_3+2x_4=11, \\ -9x_1-4x_2-x_3=17. \end{cases}$$

复习题组 5 矩阵的运算专题

1.

例 5 计算 A^m，其中 m 是正整数，且

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.

计算 A^m，其中 m 是正整数，

$$A=\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

3.

计算 A^m，其中 m 是正整数，

$$A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

4.

求与数域 K 上 3 级矩阵 A 可交换的所有矩阵，设

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

5.

例 11 设 n 级矩阵 A、B 的元素都是非负实数。证明：如果 AB 中有一行的元素全为 0，那么 A 或 B 中有一行元素全为 0。

6.

3. 计算

(1) $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$；

(4) $(4,7,9)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$；

(5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(4,7,9)$；

7.

证明：与所有 n 级矩阵可交换的矩阵一定是 n 级数量矩阵。

8.

例 3 证明：数域 K 上任一 n 级矩阵 A 都可以表示成一个对称矩阵与一个斜对称矩阵之和，并且表法惟一。