

## 高等数学 A 大练习 6

(大练习 6 为积分部分补充习题, 与 mooc 视频讲解搭配)

### Part 1

**【例1】** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right]$ .

**【例2】** 设  $f(x)$  连续, 试求下列函数的导数

1)  $\int_{e^x}^{x^2} f(t) dt$ ;                      2)  $\int_0^x (t-x) f(t) dt$ ;  
3)  $\int_0^x \sin(x-t)^2 dt$                       4)  $\int_1^2 f(x+t) dt$ .

**【例3】** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{(\sqrt[3]{1+x^3} - 1) \sin x}$

**【例4】** 设函数  $f(x)$  连续, 且  $f(0) \neq 0$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}$ .

**【例5】** 试证:  $F(x) = \int_0^x (t-t^2) \sin^{2n} t dt$  在  $x \geq 0$  上最大值不超过  $\frac{1}{(2n+2) \cdot (2n+3)}$ .

### Part 2

**【例1】**  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

**【例2】**  $I = \int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin x}}$

**【例3】**  $I = \int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

**【例4】**  $I = \int \frac{1+x^4}{1+x^6} dx$

【例5】若  $\int xf(x)dx = \arcsin x + C$ , 求  $I = \int \frac{1}{f(x)} dx$ .

【例6】设  $F(x)$  为  $f(x)$  的原函数, 且当  $x \geq 0$  时,  
 $F(x)f(x) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$ . 已知  $F(0) = 1, F(x) > 0$ . 求  $f(x)$ .

【例7】设  $f'(e^x) = \sin x$ , 求  $f(x)$ .

【例8】求不定积分  $\int e^{-|x|} dx$ .

【例9】  $I = \int_{-1}^1 \frac{2x^2 + \sin x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$ ;

【例10】  $I = \int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ ;

【例11】设  $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$ , 计算  $\int_0^\pi f(x) dx$ .

【例12】  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x} \sin^4 x dx$ ;

【例13】已知  $f(x)$  连续,  $\int_0^x tf(x-t)dt = 1 - \cos x$ , 求  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$  的值.