线性代数 A 大练习 11

范围：5.7 实对称矩阵的对角化 6.1 二次型 合同矩阵

Part 1 知识点回顾及复习（略）

Part 2 书上例题练习

例 1 设

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 4 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 4 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 4\end{pmatrix},$$

求正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵。

例 2 证明：如果 A 是实对称矩阵，且 A 是幂零矩阵，那么 $A=0$。

例 3 证明：如果 A 是 $s\times n$ 实矩阵，那么 $A'A$ 的特征值都是非负实数。

例 4 证明：n 级实矩阵 A 正交相似于一个上三角矩阵的充分必要条件是：A 的特征多项式在复数域中的根都是实数。

例 5 证明：如果 n 级实矩阵 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数，且 $AA'=A'A$，那么 A 是对称矩阵。

例 6 证明：任一 n 级复矩阵一定相似于一个上三角矩阵。

例 7 证明：实数域上斜对称矩阵的特征多项式在复数域中的根是 0 或纯虚数。

例 8 设 A 是实数域上的 n 级斜对称矩阵。证明：

$$\begin{vmatrix}2I_n & A\\ A & 2I_n\end{vmatrix}\geqslant 2^{2n}$$

等号成立当且仅当 $A=0$。

例 9 设 A 是 n 级实矩阵，证明：如果 A 的特征多项式在复数域中的根都是非负实数，且 A 的主对角元都是 1，那么 $|A|\leqslant 1$。

例 1 用正交替换把下述实二次型化成标准形：

$$f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4xy-4yz$$

例 2 作直角坐标变换，把下述二次曲面方程化成标准方程，并且指出它是什么二次曲面？

$$x^2+2y^2+3z^2-4xy-4yz=1. \tag{3}$$

例 3 作直角坐标变换，把下述二次曲面方程化成标准方程，并且指出它是什么二次曲面？

$$x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz+2x+y+2x-\frac{25}{16}=0. \tag{5}$$

例 4 用非退化线性替换化下列二次型为标准形，并且写出所作的非退化线性替换：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}x_ix_j$；

(2) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$；

(3) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，

其中 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，

例 5 证明：数域 K 上的 n 元二次型

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & 0\\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix},$$

其中，$i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列。

例 6 用矩阵的成对初等行、列变换法把数域 K 上的下述二次型化成标准形，并且写出所作的非退化线性替换：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3.$$

例 7 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，证明：A 是斜对称矩阵当且仅当对于 K^n 中任一列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha}=0$。

例 8 设 A 是数域 K 上的一个 n 级对称矩阵，证明：如果对于 K^n 中任一列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha}=0$，那么 $A=0$。

例 9 设

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}.$$

是一个 n 级对称矩阵，且 A_1 是 r 级可逆矩阵。证明：

$$A\simeq\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

并且求出 B。

例 10 证明：数域 K 上的斜对称矩阵一定合同于下述形式的分块对角矩阵：

$$\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},(0),\cdots,(0)\right\}.$$

例 11 设 n 级实对称矩阵 A 的全部特征值按大小顺序排成：$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$。证明：对于 $\mathbf{R}^n$ 中任一非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，都有

$$\lambda_n\leqslant\frac{\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|^2}\leqslant\lambda_1. \tag{11}$$

例 12 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 级实对称矩阵，它的 n 个特征值排序成 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\cdots\geqslant\lambda_n$。证明：

$$\lambda_n\leqslant a_{ii}\leqslant\lambda_1,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

例 13 设 A 是一个 n 级实对称矩阵，证明：存在一个正实数 M，使得对于 $\mathbf{R}^n$ 中任一非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，都有

$$\frac{|\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha}|}{|\boldsymbol{\alpha}|^2}\leqslant M. \tag{12}$$

例 14 设 B 是 n 级实矩阵，$B'B$ 的全部特征值排序成 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$。证明：如果 B 有特征值，那么 B 的任一特征值 μ 满足：

$$\sqrt{\lambda_n}\leqslant|\mu|\leqslant\sqrt{\lambda_1}\ . \tag{13}$$

例 15 设 A、B 都是 n 级实对称矩阵，证明：如果 $AB=BA$，那么存在一个 n 级正交矩阵 T，使得 $T'AT$ 与 $T'BT$ 都为对角矩阵。

Part 3 补充练习

高等代数期末 高峡

三. (30 分) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1x_2-2x_1x_3+3x_2^2-4x_2x_3$.

(1) 将 f 写成 X^TAX 的形式, 求实对称矩阵 A 的特征值与特征向量; (12 分)

(2) 求正交矩阵 P 及对角矩阵 D, 使得 $A=PDP^T$; 作正交替换将 f 化为标准型; (12 分)

(3) 求二次型 $f(X)=X^TAX$ 在单位球面 $||X||=1$ 上能取到的最大值, 并确定在何处取到这个最大值. (6 分)