北京大学2022年高等数学A期中考试

高数 A

一、

(1) 有理数的有理数次幂是否一定是有理数?

(2) 无理数的无理数次幂是否一定是无理数?

二、

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+4}}$

(2)$\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x^3-1}-\frac{4}{x^4-1})$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2021\sqrt{x+2021}+2023\sqrt{x+2023}-2\cdot2022\sqrt{x+2022})$

三、

(1)$f'(x)=1+e^{-x}$，求 $f(x)$

(2)$g'(x)+g(x)=1+e^{-x}$，求 $g(x)$

四、

是否存在实数序列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1, \lim\limits_{n\to+\infty}a_n^n=1.001$?

五、

(1)$y=(x^2+2x+2)e^{-x}$，求 $y^{(n)}$

(2)$y=\int_{\cot x}^{\tan x}\sqrt{1+t^2}dt$，求 y'

六、

已知 $f(x)$,$x\in[a,b]$

(1) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，证明 $f(x)$ 在其一个小邻域内连续

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，证明 $f(x)$ 在其一个小邻域内连续

七、

$f(x)\in C[a,b], f(x)\in R[a,b], F(x)=\int_a^x f(t)dt$，证明：

(1)$F(x)\in C[a,b]$

(2)$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\forall x\in(a,b), F'(x)=f(x)$

八、

$a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{2}^{a_n}$,判断 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$是否存在，若存在求出其值，若不存在说明理由

九、

求一个 $\{\xi_n\}$ 使得 $(i),(ii)$ 成立

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\xi_n-e^n)=0;(ii)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(\xi_n)-f(e^n))\neq0;$其中$f(x)=x\ln x, x\in(0,+\infty)$