线性代数 A 大练习 2

复习题组 1 行列式计算（2）

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & n \end{vmatrix}.$$

2.

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

4.计算下列 2n 阶行列式（空缺处元素为 0）

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}.$$

复习题组 2 克莱姆法则与线性方程组解的情况

1.

当 λ 取什么值时，下述齐次线性方程组有非零解？

$$\begin{cases}(\lambda-3)x_1-x_2+x_4=0,\\ -x_1+(\lambda-3)x_2+x_3=0,\\ x_2+(\lambda-3)x_3-x_4=0,\\ x_1-x_3+(\lambda-3)x_4=0.\end{cases}$$

2.

讨论下述线性方程组何时有惟一解？有无穷多个解？无解？

$$\begin{cases}x_1+ax_2+x_3=2,\\ x_1+x_2+2bx_3=2,\\ x_1+x_2-bx_3=-1.\end{cases}$$

复习题组 3 向量组的基本概念 线性相关与无关

(注意证明题!!)

1.

例 7 证明：如果线性方程组(Ⅰ)的增广矩阵的第 i 个行向量 $\boldsymbol{\gamma}_i$ 可以由其余行向量线性表出：

$$\boldsymbol{\gamma}_i=k_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\gamma}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{\gamma}_{i+1}+\cdots+k_s\boldsymbol{\gamma}_s,$$

那么把方程组(Ⅰ)的第 i 个方程去掉以后得到的线性方程组(Ⅱ)与线性方程组(Ⅰ)同解。

2.

例 3 在 K^n 中，令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},$$

证明：K^n 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$ 能够由向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表出，并且表出方式惟一，写出这种表出方式。

3.

例 1　证明：如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，那么向量组 $3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,5\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,4\boldsymbol{\alpha}_3-7\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关。

4.

例 2　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 是否线性无关。

5.

例 3　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，并且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{1s}\boldsymbol{\alpha}_s,\\ \cdots\quad&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_s &= a_{s1}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{ss}\boldsymbol{\alpha}_s.\end{aligned}$$

证明：$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{s1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1s} & \cdots & a_{ss} \end{vmatrix} \neq 0.$$

6.

例 4　判断下列向量组是线性相关还是线性无关。如果线性相关，试找出其中一个向量，使得它可以由其余向量线性表出，并且写出它的一种表达式。

(1)

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-4\\2\\1\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\5\\0\\1\end{pmatrix};$$

(2)

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\1\\2\\-3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}6\\2\\4\\-2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

7.

例 5　证明：K^n 中，任意 $n+1$ 个向量都线性相关。

8.

例 7 证明：如果向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，则表出方式惟一的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关。

9.

例 8 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_s\boldsymbol{\alpha}_s$。如果 $b_i\neq 0$，那么用 $\boldsymbol{\beta}$ 替换 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 以后得到的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 也线性无关。

10.

例 9 证明：由非零向量组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性无关的充分必要条件是：每一个 $\boldsymbol{\alpha}_i(1<i\leqslant s)$ 都不能用它前面的向量线性表出。

11.

例 12 设数域 K 上 $m\times n$ 矩阵 H 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$。证明：$H$ 的任意 s 列 $(s\leqslant\min\{m,n\})$ 都线性无关当且仅当：齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0} \tag{5}$$

的任一非零解的非零分量的数目大于 s。