高等数学 A 大练习 4

(大练习 3.4.5 截取前两章教材习题进行轮换式复现)

1.证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

2.

例 4 设 $a>1$ 是任意给定的常数. 考查

$$a_n=\frac{a^n}{n!}$$

是否有极限.

3.

利用 $a^n>n(n-1)\cdots(n-k)h^{k+1}/(k+1)!$ 及例 5,可进一步证明,当 $a>1$ 时,对于任意自然数 k,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$$

4.

4. 用 ε-N 说法证明下列各极限式:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-3}=\frac{3}{2}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n}{n+1}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2q^n=0\ (|q|<1)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right)=1$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^{3/2}}+\cdots+\frac{1}{(2n)^{3/2}}\right)=0.$

5.

例 3 证明: $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a.$

6.

例 7 函数 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 时没有极限.

7.

1. 直接用 ε-δ 说法证明下列各极限式：

(1) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\quad(a>0)$；　(2) $\lim\limits_{x\to a}x^2=a^2$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}e^x=e^a$；　(4) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

8.

4. 利用 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\tan\beta x}\ (\beta\neq 0)$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x-\sin 2x}{\sin 5x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$；　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{-x}$；

(7) $\lim\limits_{y\to 0}(1-5y)^{1/y}$；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+100}$.

9.

5. 利用初等函数的连续性及定理 3 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 2}x^{\sqrt{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\sin 2x}{\sin 3x}}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan\frac{\sqrt{x^4+8}}{x^2+1}$；

10.

2. 根据定义，求下列函数的导函数：

(1) $y=ax^3$；　(2) $y=\sqrt{2px},\quad p>0$；

11.

8. 求下列函数的导函数：

(1) $y=8x^3+x+7$；

(2) $y=(5x+3)(6x^2-2)$；

(3) $y=(x+1)(x-1)\tan x$；

(4) $y=\dfrac{9x+x^2}{5x+6}$；

(5) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$ $(x\neq 1)$；

(6) $y=\dfrac{2}{x^3-1}$ $(x\neq 1)$；

(7) $y=\dfrac{x^2+x+1}{e^x}$；

(8) $y=x\cdot 10^x$；

(9) $y=x\cos x+\dfrac{\sin x}{x}$；

(10) $y=e^x\sin x$.

12.

3. 求下列各函数的导函数：

(1) $y=\dfrac{2}{x^3-1}$；

(2) $y=\sec x$；

(3) $y=\sin 3x+\cos 5x$；

(4) $y=\sin^3 x\cdot\cos 3x$；

13.

4. 计算下列函数在指定的点 x_0 处的微分：

(1) $x\sin x$，$x_0=\pi/4$；

(2) $(1+x)^\alpha$，$x_0=0$（其中 $\alpha>0$ 是常数）.

5. 求下列各函数的微分：

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ $(x\neq -1)$；

(2) $y=xe^x$.

14.

8. 求下列方程确定的隐函数的导函数：

(1) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$；

(2) $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$（a,b,c 为常数）；

(3) $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$；

(4) $y\sin x-\cos(x-y)=0$.

15.

10. 设 $y=f(x)$ 由下列参数方程给出，求 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

(1) $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=t\ln t, \\ y=\mathrm{e}^t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=\arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\arcsin \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

16.

9. 验证函数 $y=C_1\mathrm{e}^{ax}+C_2\mathrm{e}^{bx}$（其中 C_1 与 C_2 为任意常数）是微分方程

$$y''-(a+b)y'+aby=0$$

的解.

10. 验证函数 $y=(C_1x+C_2)\mathrm{e}^{ax}$（其中 C_1 与 C_2 为任意常数）是微分方程

$$y''-2ay'+a^2y=0$$

的解.

11. 验证函数 $y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$（其中 C_1 与 C_2 为任意常数）是微分方程

$$y''+\omega^2y=0$$

的解.

17.

求下列不定积分：

1. $\int\left(\frac{a}{\sqrt{x}}-\frac{b}{x^2}+3C\sqrt[3]{x^2}\right)\mathrm{d}x.$　　2. $\int(1+\sqrt{x})^2\mathrm{d}x.$

3. $\int a\sec^2t\mathrm{d}t.$　　4. $\int\tan^2t\mathrm{d}t.$