高等数学 A 大练习 12

范围：6.1-6.4 多元函数 极限 连续性 偏导数和全微分

Part 1 新知识巩固

	一元函数	多元函数
距离		
邻域		
内点外点边界点	/	
开区间、开集		
闭区间、闭集		
极限的定义		
极限的性质	四则运算、保序性、夹逼定理、复合函数	
连续的定义		
有界闭区间的函数	有界性、最值性、介值性	
导数/偏导数		
微分/全微分		

Part 2 补充习题练习

例 4 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$，

求证： $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

例 5 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}.$

例 6 设 $f(x,y)=\sin x$，证明 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数.

例 7 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{x+y}{xy}.$

例 8 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}.$

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集（称为导集）和边界.

(1) $\{(x,y)\mid x\neq 0, y\neq 0\}$； (2) $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$；

(3) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$；

(4) $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$.

2. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$.

3. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

4. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

5. 求下列各函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$； (2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$； (4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\ (R>r>0)$；

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

6. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{y}$；　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

*7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$；　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

8. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$在何处是间断的？

*9. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

*10. 设 $F(x,y)=f(x)$，$f(x)$在 x_0 处连续，证明：对任意 $y_0\in\mathbf{R}$，$F(x,y)$在(x_0,y_0)处连续.

例 1 求 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点(1,2)处的偏导数.

例 2 求 $z=x^2\sin 2y$ 的偏导数.

例 3 设 $z=x^y(x>0,x\neq1)$，求证：

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$

例 4 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

例 5 已知理想气体的状态方程 $pV=RT$（R 为常量），求证：

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$

例 6 设 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$及$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$.

例 7 验证函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

例 8 证明函数 $u=\dfrac{1}{r}$满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

习 题 9-2

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^3y-y^3x$；　(2) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$；

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$；　(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；

(5) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$；　(6) $z=(1+xy)^y$；

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$；　(8) $u=\arctan(x-y)^z$.

2. 设 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，求证 $l\dfrac{\partial T}{\partial l}+g\dfrac{\partial T}{\partial g}=0$.

3. 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

4. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

5. 曲线$\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的倾角是多少?

6. 求下列函数的$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$:

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$;

(2) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$;

(3) $z=y^x$.

7. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$,求 $f_{xx}(0,0,1)$,$f_{xz}(1,0,2)$,$f_{yz}(0,-1,0)$及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

8. 设 $z=x\ln(xy)$,求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$及$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

9. 验证:

(1) $y=e^{-kn^2t}\sin nx$ 满足$\dfrac{\partial y}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$;

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$满足$\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

例 1 计算函数 $z=x^2y+y^2$ 的全微分.

例 2 计算函数 $z=e^{xy}$在点(2,1)处的全微分.

例 3 计算函数 $u=x+\sin\dfrac{y}{2}+e^{yz}$的全微分.

例 4 有一圆柱体,受压后发生形变,它的半径由 20 cm 增大到 20.05 cm,高度由 100 cm 减少到 99 cm.求此圆柱体体积变化的近似值.

例 5 计算$(1.04)^{2.02}$的近似值.

1. 求下列函数的全微分:

(1) $z=xy+\dfrac{x}{y}$;　　(2) $z=e^{\frac{y}{x}}$;

(3) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　(4) $u=x^{yz}$.

2. 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$当 $x=1,y=2$ 时的全微分.

3. 求函数 $z=\dfrac{y}{x}$当$x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$时的全增量和全微分.

4. 求函数 $z=e^{xy}$当$x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$时的全微分.

5. 考虑二元函数 $f(x,y)$的下面四条性质:

(1) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续;

(2) $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$在点(x_0,y_0)连续;

(3) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微分;

(4) $f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$存在。

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q,则下列四个选项中正确的是(　　).

(A) (2)⇒(3)⇒(1)　　(B) (3)⇒(2)⇒(1)

(C) (3)⇒(4)⇒(1)　　(D) (3)⇒(1)⇒(4)

*6. 计算 $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$的近似值.

*7. 计算$(1.97)^{1.05}$的近似值($\ln 2=0.693$).

*8. 已知边长为 $x=6$ m 与 $y=8$ m 的矩形,如果 x 边增加 5 cm 而 y 边减少 10 cm,问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

*9. 设有一无盖圆柱形容器,容器的壁与底的厚度均为 0.1 cm,内高为 20 cm,内半径为 4 cm.求容器外壳体积的近似值.

*10. 设有直角三角形,测得其两直角边的长分别为(7 ± 0.1) cm 和(24 ± 0.1) cm.试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

*11. 测得一块三角形土地的两边边长分别为(63 ± 0.1) m 和(78 ± 0.1) m,这两边的夹角为$60°\pm1°$.试求三角形面积的近似值,并求其绝对误差和相对误差.

*12. 利用全微分证明:两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

*13. 利用全微分证明:乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和;商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.