线性代数 A 大练习 8

范围：4.7 线性映射

Part 1 错题复现

1.计算！！

7. 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$；
(2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；
(4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. 解下列矩阵方程：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$；

(2) $X \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$；

2.

例 10 设 A、B 分别是数域 K 上 $n\times m$、$m\times n$ 矩阵。证明：如果 $I_n - AB$ 可逆，那么 $I_m - BA$ 也可逆；并且求 $(I_m - BA)^{-1}$。

3.

例 11 方阵 A 如果满足 $A^2 = I$，那么称 A 是**对合矩阵**。证明：
(1) 如果 A、B 都是 n 级对合矩阵，且 $|A| + |B| = 0$，那么 $A+B$、$I+AB$ 都不可逆；
(2) 如果 B 是对合矩阵，且 $|B| = -1$，那么 $I+B$ 不可逆。

4.

例 12 证明：如果 n 级可逆矩阵 A 的每一行元素的和都等于 a，那么 $a \neq 0$，且 A^{-1} 的每一行元素的和都等于 a^{-1}。

5.

例 11 设 A、B 都是 n 级矩阵，证明：AB 与 BA 的 r 阶的所有主子式之和相等，其中 $1 \leqslant r \leqslant n$。

6.

例 6 设 A 是 n 级矩阵 $(n \geqslant 2)$，证明：

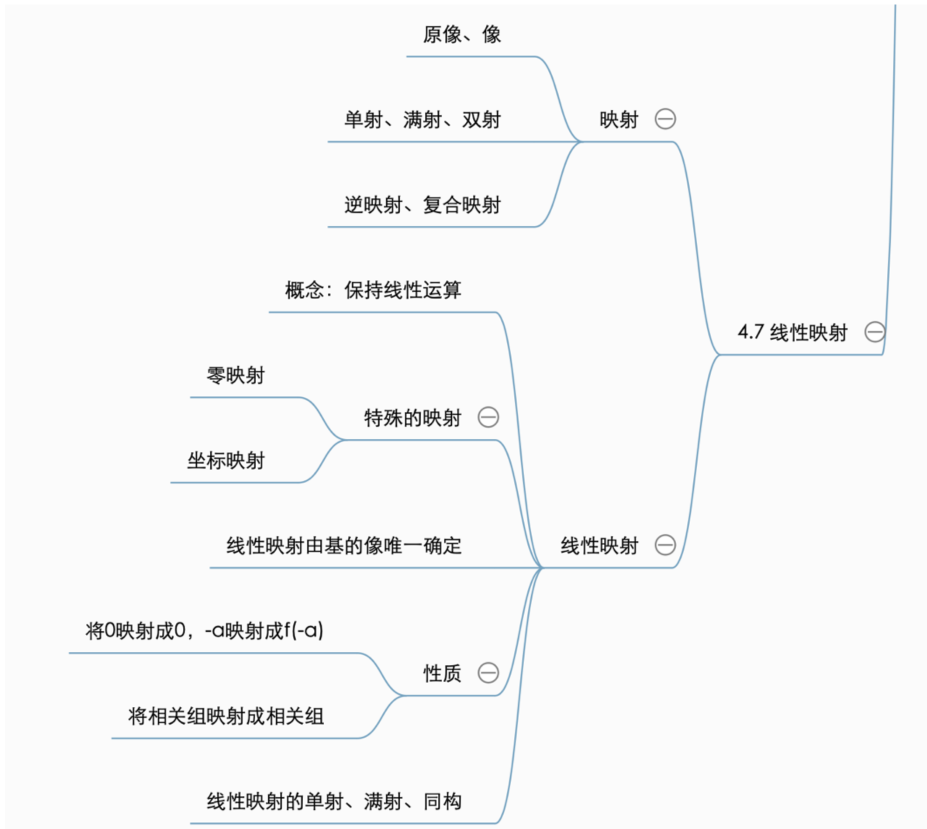
$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

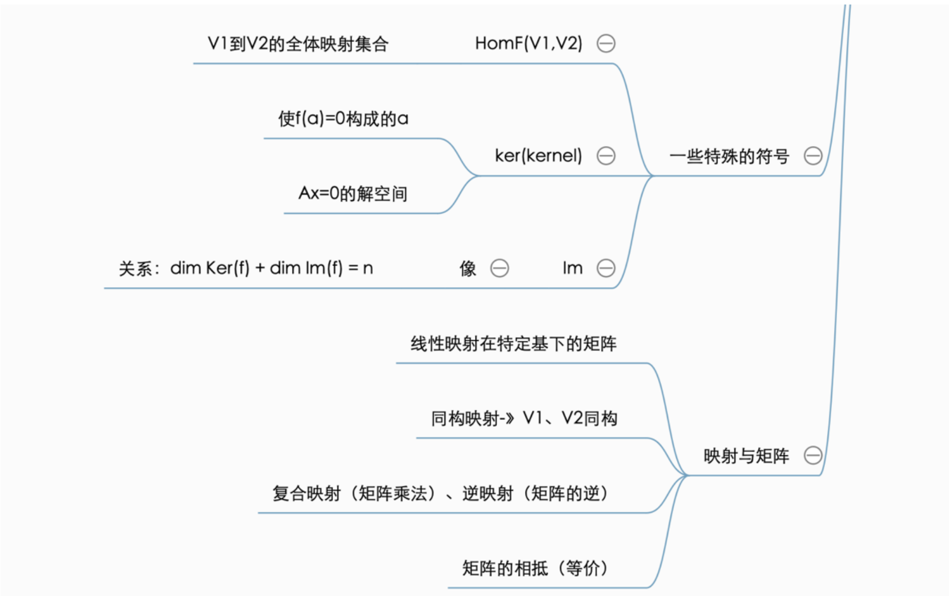
7.

例 9 设 A、B 都是 n 级矩阵 $(n \geqslant 2)$，证明：

$$(AB)^* = B^* A^*$$

Part 2 知识点回顾及练习





Part 3 书上例题练习

【注：本部分例题补充内容较多】

例 1 设 $f:S\to S'$，$g:S'\to S''$。证明：

(1) 如果 f 和 g 都是单射，那么 gf 也是单射；

(2) 如果 f 和 g 都是满射，那么 gf 也是满射；

(3) 如果 f 和 g 都是双射，那么 gf 也是双射；

(4) 如果 f 和 g 都是可逆映射，那么 gf 也是可逆映射。

例 2 设 f 是有限集 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 到自身的一个映射。证明：

(1) 如果 f 是单射，那么 f 也是满射。

(2) 如果 f 是满射，那么 f 也是单射。

例 3 设 S 和 S' 是两个有限集，证明：如果存在 S 到 S' 的一个双射 f，那么 $|S|=|S'|$，其中 $|S|$ 表示有限集 S 所含元素的个数。

例 4 设 S 和 S' 是两个集合，如果存在 S 到 S' 的一个双射 f，那么称 S 和 S' 有相同的基数，记作 $|S|=|S'|$。证明：整数集 $\mathbf{Z}$ 与偶数集（记作 $2\mathbf{Z}$）有相同的基数。

例 5 设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 矩阵。令

$$\mathbf{A}:\quad K^n \longrightarrow K^s$$
$$\boldsymbol{\alpha} \longmapsto A\boldsymbol{\alpha}$$

则 $\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{K}^n$ 到 $\mathbf{K}^s$ 的一个线性映射。证明：

(1) $\mathbf{A}$ 是单射当且仅当 $\mathrm{Ker}\mathbf{A}=\{\mathbf{0}\}$；

(2) $\mathbf{A}$ 是满射当且仅当 $Im\mathbf{A}=K^s$。

(3) 当 $s=n$ 时，$\mathbf{A}$ 是单射当且仅当 $\mathbf{A}$ 是满射，从而 $\mathbf{A}$ 是双射。

例 6 设数域 K 上的 3×4 矩阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

令
$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})=A\boldsymbol{\alpha},\qquad \forall\,\boldsymbol{\alpha}\in K^4.$$
分别求 $Im\mathbf{A}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathbf{A}$ 的一个基和维数。

例 7 氨（N_2H_4）与四氧化二氮（N_2O_4）结合形成氮气（N_2）和水（H_2O）：

$$N_2H_4+N_2O_4\longrightarrow N_2+H_2O.$$

平衡此化学反应的左、右边，即两边各元素的原子个数相同。

例 8 某产品公司租了两个仓库，记作 W_1，W_2，它们可分别存储 80 吨和 60 吨产品。该公司向两个商店（记作 S_1，S_2）发送产品，S_1 和 S_2 分别能存储产品 a 吨和 b 吨。要求存储在仓库的产品都必须发送出去，试问：仓库 W_1，W_2 应分别向商店 S_1，S_2 发送多少吨产品？a、b满足什么条件时，此问题有解？求此问题的可行解。

例 1 设 $\mathbf{A}$ 是 K^3 上的一个线性变换：

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ x_3-x_2 \\ x_2-x_3 \end{pmatrix}.$$

求 $\mathbf{A}$ 在 K^3 的标准基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵。