线性代数A 大练习4

北京大学线性代数A期中试题

(2020年)

记号说明： $\mathbb{C}$ 表示复数域;$\mathbb{Q}$表示有理数域； $|A|$表示矩阵A的行列式, A^T表示矩阵A的转置矩阵.

1. (10分)当a取何值时，下列齐次线性方程组有非零解?

$$\begin{cases} ax_1 & & & & & + & x_4 & = 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = 0 \\ (a+2)x_1 & - & x_2 & & & + & 4x_4 & = 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & ax_4 & = 0 \end{cases}$$

2. (45分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

   (a) 求 A 列向量组的一个极大无关组, 并用此无关组线性表出 A 其余的列向量;

   (b) 求齐次线性方程组 $AX = 0$ 解空间的一组基;

   (c) 将 A 写成 BC 的形式，其中 B 的列向量组线性无关, C 的行向量组线性无关.

3. (10分)计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}_{n\times n}$$

4. (10分)判断对错,正确请给出证明,错误请举出反例. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关,向量组 $\alpha_1+\beta, \alpha_2+\beta, \cdots, \alpha_s+\beta$ 线性相关, 则 β一定能被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出.

5. (10分)

   (a) 证明：任给 $n+1$ 个 n 阶方阵 $A_1, \cdots, A_{n+)} \in M_n(\mathbb{Q})$,总能找到不全为零的有理数 $k_1, \cdots, k_{n+1}$,使得矩阵$k_1A_1+\cdots+k_{n+1}A_{n+1}$的秩 $< n$.

   (b) 对任意 n 个($n>1$是任意自然数)方阵 $A_1, \cdots, A_n \in M_n(\mathbb{Q})$, 是否总有不全为零的有理数 $k_1, \cdots, k_n$,使得矩阵 $k_1A_1+\cdots+k_nA_n$的秩 $< n$?

6. (10分) 设线性方程组$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\alpha_i=\beta$, 其中列向量$\alpha_i (i=1, \cdots, n), \beta \in \mathbb{F}^m$. 证明:第$k$个列向量 α_k不能由其余列向量线性表出的充分必要条件是任何解 X 的第 k 个分量 x_k 取同一值.

7. 如果齐次线性方程组 $a_{i,1}x_1+\cdots+a_{i,n}x_n=0$ $(i=1, \cdots, s)$的解全是方程$b_1x_1+\cdots+b_nx_n=0$的解, 则行向量$(b_1, \cdots, b_n)$可由行向量组$(a_{1,1}, \cdots, a_{1,n}), \cdots, (a_{s,1}, \cdots, a_{s,n})$线性表出.