线性代数 A 大练习 9

范围：5.1 等价关系与集合的划分 5.2 矩阵的相抵 5.3 广义逆矩阵

Part 1 错题复现

1.

例 26 设 A 是数域 K 上 2 级矩阵，证明：如果 $|A|=1$，那么：A 可以表示成 1°型初等矩阵 $P(i,j(k))$ 的乘积（即 A 可以表示成形如 $I+kE_{ij}$ 的矩阵的乘积，其中 $i\neq j$）。

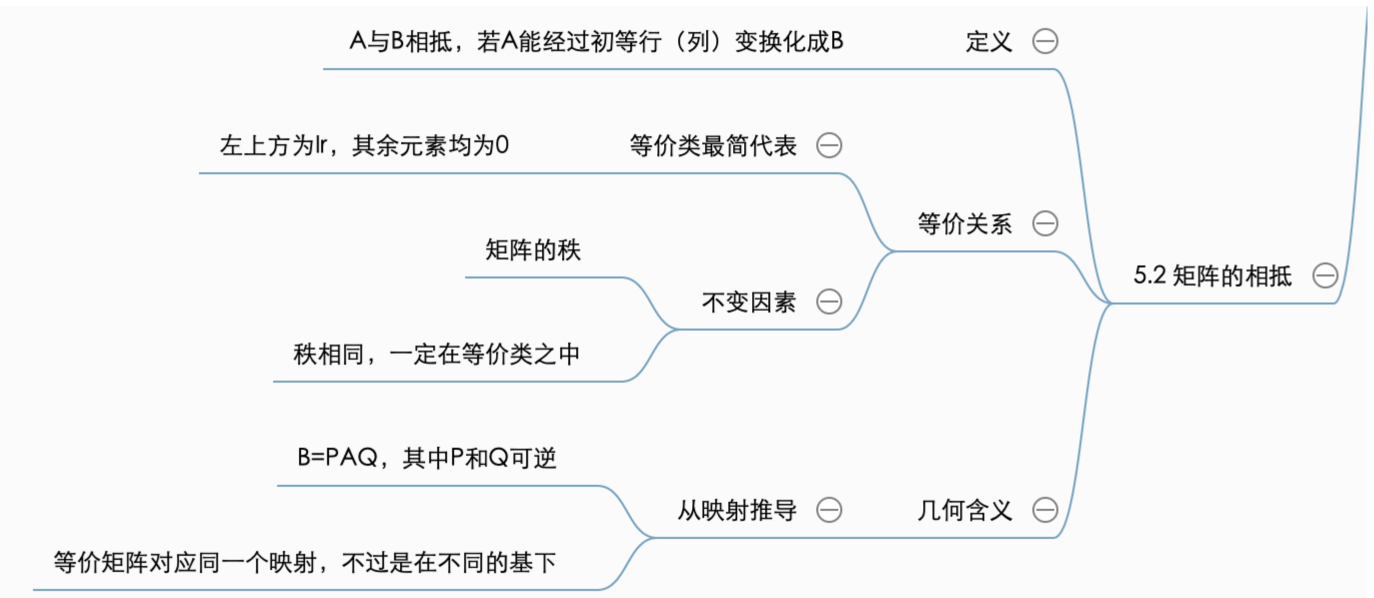
2.

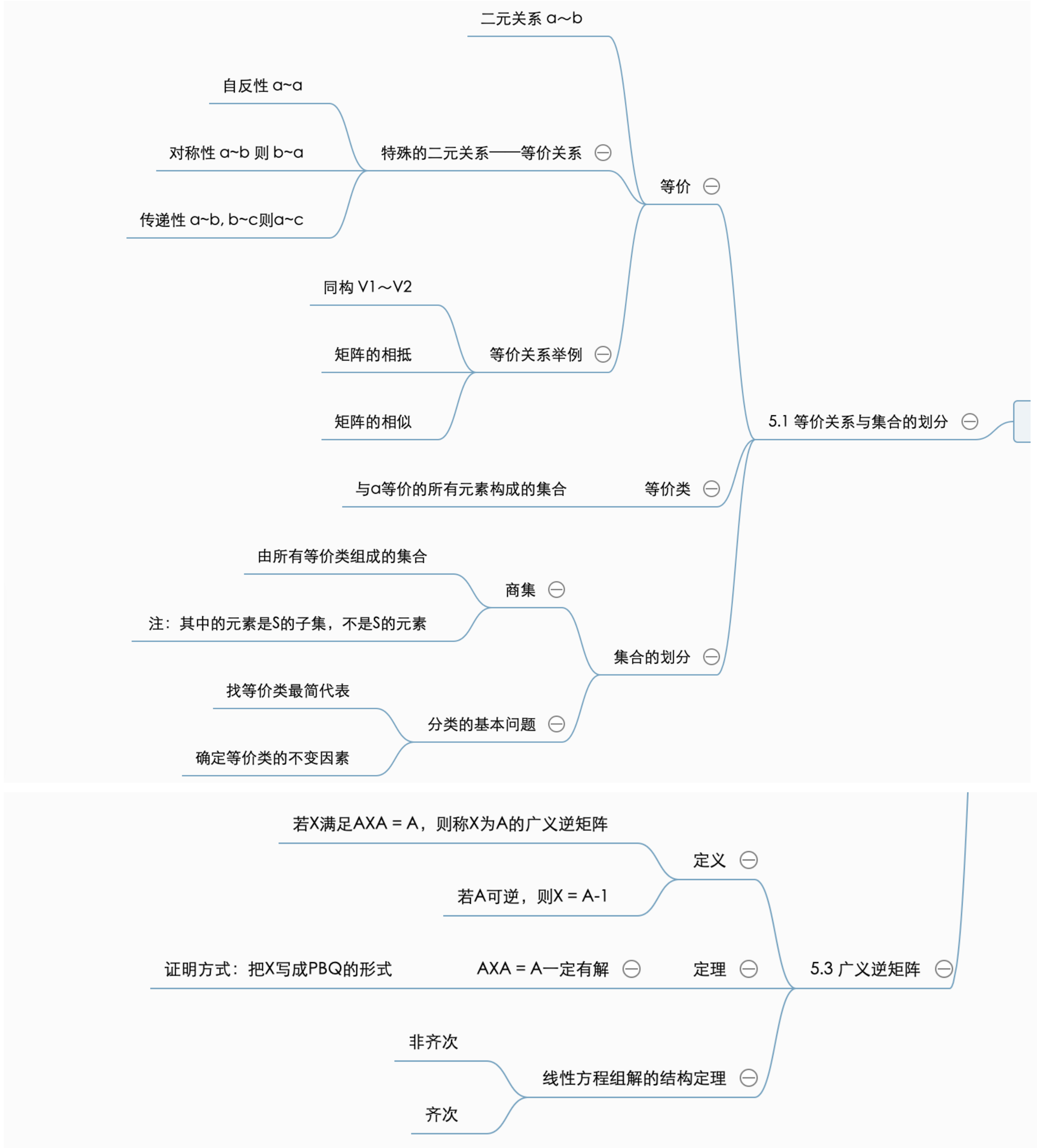
例 27 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵（$n\geqslant 2$），证明：如果 $|A|=1$，那么：A 可以表示成 1°型初等矩阵 $P(i,j(k))$ 的乘积。

3.

例 28 设 A 是 n 级矩阵，行标和列标都为 $1,2,\cdots,k$ 的子式称为 A 的 k 阶顺序主子式，$k=1,2,\cdots,n$。证明：如果 A 的所有顺序主子式都不等于 0，那么存在 n 级下三角矩阵 B，使得 BA 为上三角矩阵。

Part 2 知识点回顾及练习





Part 3 书上例题练习

例 1 在实数集 **R** 上定义一个二元关系：

$$a\sim b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a-b\in \mathbf{Z}$$

证明：(1) ～是 **R** 上的一个等价关系；

(2) 任一等价类 $\bar{a}$ 可以找到一个惟一的代表，它属于[0,1)，从而 **R** 对于这个关系的商集（记作 **R/Z**）与区间[0,1)之间有一个一一对应。

例 2 对于 $a\in\mathbf{R}$，用$\lfloor a\rfloor$表示小于或等于 a 的最大整数。在实数集 **R** 上定义一个二元关系：

$$a\sim b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lfloor a\rfloor=\lfloor b\rfloor$$

证明：(1) ～是 **R** 上的一个等价关系；

(2) **R** 对于这个关系的商集 **R**/～与 **Z** 有一个一一对应。

例 1 求下述矩阵 A 的相抵标准形：

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&5&2\\-2&4&1&-7\\3&-8&10&6\end{pmatrix}$$

例 2 证明：任意一个秩为 $r(r>0)$ 的矩阵都可以表示成 r 个秩为 1 的矩阵之和。

例 3 设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 矩阵，证明：A 的秩为 r 当且仅当存在数域 K 上 $s\times r$ 列满秩矩阵 B 与 $r\times n$ 行满秩矩阵 C，使得 $A=BC$。

例 4 设 B_1,B_2 都是数域 K 上 $s\times r$ 列满秩矩阵，证明：存在数域 K 上 s 级可逆矩阵 P，使得

$$B_2=PB_1$$

***例 5** 证明：任一 n 级非零矩阵都可以表示成形如 $I+a_{ij}E_{ij}$ 这样的矩阵的乘积。

例 6 设 A 是实数域上的 n 级对称矩阵，且 A 的秩为 $r(r>0)$。证明：

(1) A 至少有一个 r 阶主子式不为 0；

(2) A 的所有不等于 0 的 r 阶主子式都同号。

***例 7** 设 A、B 分别是 $s\times n$、$n\times m$ 矩阵，证明：
$\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-n$ 充分必要条件是

$$\begin{pmatrix}A&0\\I_n&B\end{pmatrix}\overset{\text{相抵}}{\sim}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$$

***例 8** 设 A、B、C 分别是数域 K 上 $s\times n$、$p\times m$、$s\times m$ 矩阵，证明：矩阵方程

$$AX-YB=C$$

有解的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}.$$

例 9 设 A、B 分别是数域 K 上 $s\times n$、$n\times m$ 矩阵，证明：矩阵方程 $ABX=A$ 有解的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(A).$$

例 1 设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 矩阵，证明：如果 A 行满秩，那么有

$$AA^-=I_s.$$

例 2 设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 矩阵。证明：如果 A 行满秩，那么对于 K 上任意一个 $s\times m$ 矩阵 B，矩阵方程 $AX=B$ 都有解，并且 $X=A^-B$ 是它的解。

例 3 设 A、B 分别是数域 K 上 $s\times n$、$s\times m$ 矩阵，证明：矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是

$$B=AA^-B,$$

在有解时，它的通解为

$$X=A^-B+(I_n-A^-A)W,$$

其中 W 是任意 $n\times m$ 矩阵，A^- 是 A 的任意取定的一个广义逆。

例 6 设 A、B 分别是数域 K 上 $s\times n$、$n\times s$ 矩阵。证明：

$$\operatorname{rank}(A-ABA)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I_n-BA)-n.$$

例 7 设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 矩阵，证明：B 是 A 的一个广义逆的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I_n-BA)=n.$$

例 8 设 A 是数域 K 上 $s\times n$ 非零矩阵，证明：

$$\operatorname{rank}(A^-A)=\operatorname{rank}(A)$$