线性代数 A 大练习 12

范围：6.2 6.3 二次型 合同矩阵

Part 1 知识点回顾及复习（略）

Part 2 书上例题练习

例 5 证明：一个 n 元实二次型可以分解成两个实系数 1 次齐次多项式的乘积当且仅当它的秩等于 2 且符号差为 0，或者它的秩等于 1。

例 6 设 $X'AX$ 是一个 n 元实二次型，证明：如果 $\mathbf{R}^n$ 中有列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1'A\boldsymbol{\alpha}_1>0$，$\boldsymbol{\alpha}_2'A\boldsymbol{\alpha}_2<0$，那么在 $\mathbf{R}^n$ 中有非零列向 $\boldsymbol{\alpha}_3$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_3'A\boldsymbol{\alpha}_3=0$。

例 7 设 A 为一个 n 级实对称矩阵，证明：如果 $|A|<0$，那么在 $\mathbf{R}^n$ 中有非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得 $\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha}<0$。

例 8 设实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=l_1^2+\cdots+l_s^2-l_{s+1}^2-\cdots-l_{s+u}^2, \qquad (1)$$

其中 $l_i(i=1,2,\cdots,s+u)$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 1 次齐次多项式。证明：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的正惯性指数 $p\leqslant s$，负惯性指数 $q\leqslant u$。

例 10 指出下列实二次型中，哪些是等价的？写出理由：

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2x_3$$
$$f_2(y_1,y_2,y_3)=y_1y_2-y_3^2$$
$$f_3(z_1,z_2,z_3)=z_1z_2+z_3^2.$$

例 11 n 级实对称矩阵组成的集合中，如果一个合同类里既含有 A 又含有 $-A$，那么这个合同类里的秩与符号差有什么特点？

例 1 证明：如果 A 是 n 级正定矩阵，那么 A^{-1} 也是正定矩阵。

例 2 设 A 是 n 级实对称矩阵，它的 n 个特征值的绝对值的最大者记作 $S_r(A)$。证明：当 $t>S_r(A)$ 时，$tI+A$ 是正定矩阵。

例 3 判断下列实二次型是否正定？

(1) $f_1(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+5x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$；

(2) $f_2(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3$.

例 4 t 满足什么条件时，下述实二次型是正定的？

$$f_2(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3.$$

例 5 证明：n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定的必要条件是，它的 n 个平方项的系数全是正的。举例说明这个条件不是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定的充分条件。

例 6 n 级实对称矩阵 A 是正定的充分必要条件为：有 n 级实可逆矩阵 C 使得 $A=C'C$。

例 7 证明：n 级实对称矩阵 A 是正定的充分必要条件为：有可逆实对称矩阵 C 使得 $A=C^2$。

例 8 证明：如果 A 是 n 级正定矩阵，那么存在惟一的正定矩阵 C，使得 $A=C^2$。

例 9 证明：实对称矩阵 A 是正定的充分必要条件为 A 的所有主子式都大于零。

例 10 证明：如果 A 是 n 级正定矩阵，B 是 n 级实对称矩阵，则存在一个 n 级实可逆矩阵 C，使得 $C'AC$ 与 $C'BC$ 都是对角矩阵。

例 11 证明：如果 A 与 B 都是 n 级正定矩阵，那么 AB 是正定矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$。

例 12 证明：如果 A 是 n 级正定矩阵，B 是 n 级半正定矩阵，那么 $A+B$ 是正定矩阵。

例 13 证明：n 元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n\sum_{i=1}^n x_i^2-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$$

是半正定的。

例 14 证明：实对称矩阵 A 半正定的充分必要条件为：有实对称矩阵 C 使得 $A=C^2$。

例 15 证明：如果 A 是 n 级正定矩阵，B 是 n 级半正定矩阵且 $B\neq 0$，那么

$$|A+B|>\max\{|A|,|B|\} \qquad (7)$$

例 17 设

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}$$

是 n 级正定矩阵，其中 A 是 r 级矩阵。证明

$$|M|\leqslant|A||D|, \quad (9$$

并且等号成立当且仅当 $B=0$。

例 18 证明：如果 $A=(a_{ij})$ 是 n 级正定矩阵，那么

$$|A|\leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \quad (10)$$

例 19 证明：如果 $C=(c_{ij})$ 是 n 级实可逆矩阵，那么

$$|C|^2\leqslant\prod_{j=1}^{n}(c_{1j}^2+c_{2j}^2+\cdots+c_{nj}^2)$$

Part 3 补充练习

高等代数期末 高峡

二.（20 分）已知实矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

1) **确定矩阵 A , B 的正负惯性指数并判断它们是否合同;** (8 分)

2) **确定矩阵 A , B , C, D 的相似分类并说明理由.** (12 分)