

## 高等数学 A 大练习 5

(大练习 3.4.5 截取前两章教材习题进行轮换式复现)

1.

设  $a > 1$  是给定的实数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

2.

**例 5** 设  $k$  为大于 1 的正整数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-1}}{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)} = 0.$$

3.

求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n - 10}{3 + n^3}.$$

4.

8. 利用单调有界序列有极限证明下列序列极限存在:

$$(1) x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2};$$

$$(2) x_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \cdots + \frac{1}{2^n+1};$$

$$(3) x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n};$$

$$(4) x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

5.

10. 设  $\{x_n\}$  满足下列条件:

$$|x_{n+1}| \leq k|x_n|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中  $k$  是小于 1 的正数. 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . (提示: 证明  $|x_n| \leq k^{n-1}|x_1|$ .)

6.

**例 5** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x}$ .

7.

3. 求下列极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2-1}{2x}$ ;

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ ;

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}, a > 0$ ;

(4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x-2}{2x^2-2x-3}$ ;

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x-2}{2x^2-2x-3}$ ;

(6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{10}}{(2x+1)^{30}}$ ;

(7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ ;

(8)  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right)$ ;

8.

1. 试用  $\varepsilon$ - $\delta$  的说法证明:

(1)  $\sqrt{1+x^2}$  在  $x=0$  连续;

(2)  $\sin 5x$  在任意一点  $x=a$  连续.

9.

(5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2})|x|}$ .

10.

7. 指出下列函数的间断点及其类型,若是可去间断点,请修改函数在该点的函数值,使之成为连续函数:

$$(1) f(x) = \cos \pi(x - [x]);$$

$$(2) f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x);$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1; \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ \sin \frac{\pi}{x-1}, & 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ x, & 1 < x \leq 2, \\ \frac{1}{1-x}, & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

11.

13. 求函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在  $x=0$  处的左右导数.

12. 求导

$$(5) y = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos(x^2)};$$

$$(6) y = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x;$$

$$(7) y = e^{ax} \sin bx;$$

$$(8) y = \cos^5 \sqrt{1+x^2};$$

$$(9) y = \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|;$$

$$(10) y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (a > 0, x \neq \pm a).$$

13. 求导

$$(8) y = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) \quad (a > b \geq 0);$$

$$(9) y = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{2x})(1 + \sqrt{3x});$$

$$(10) y = \sqrt{1+x+2x^2};$$

$$(11) y = \sqrt{x^2 + a^2};$$

$$(12) y = \sqrt{a^2 - x^2};$$

$$(13) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2});$$

$$(14) y = (x-1)\sqrt[3]{(3x+1)^2(2-x)};$$

$$(15) y = e^x + e^{e^x};$$

$$(16) y = x^{a^2} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0).$$

14.

1. 求下列函数的  $n$  阶导函数:

(1)  $y=x^n$ ;            (2)  $y=e^x$ ;            (3)  $y=\frac{1}{1+x}$  ( $x \neq -1$ );

(4)  $y=\frac{1}{(x+1)^2}$ .

2. 设  $y(x)=e^x \cos x$ , 证明:  $y''-2y'+2y=0$ .

15. 求不定积分

9.  $\int \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}} dx.$

10.  $\int \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) dx.$

11.  $\int \frac{(1-x)^2}{x \cdot \sqrt[3]{x}} dx.$

12.  $\int (2\cosh x - \sinh x) dx.$

13.  $\int \left( \frac{3x^2-1}{x^2} + \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} \right) dx.$

14.  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$

15.  $\int \frac{2^{x+1} + 3^{x-2}}{6^x} dx.$

16.  $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx.$