A 一.(1) 不一定 $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

(2) 不一定 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ 必有一个是无理数无理次幂为有理数

二. (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x+4}+\frac{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}}{x+4}}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x^3-1}-\frac{4}{x^4-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}+\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{4}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4+x^3+5x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)}=\frac{12}{2\times2\times3}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2023(\sqrt{x+2023}-\sqrt{x+2022})+2021(\sqrt{x+2021}-\sqrt{x+2020})\right]=0$

(4)=

三. (1) $f'(x)=1+e^{-x}$ 左右积分 $f(x)=x-e^{-x}+C$

(2) $e^{x}[g(x)+g'(x)]=e^{x}+1$ $\therefore e^{x}g(x)=e^{x}+x+C$ $g(x)=1+\frac{x}{e^{x}}+\frac{C}{e^{x}}=1+\frac{x+C}{e^{x}}$

四. 取数列 $a_n=(1.001)^{\frac{1}{n}}$ 满足条件 但显然的

五. (1) $n=0$. $y^{(n)}=(x^2+2x+2)\cdot e^{-x}$ $n=1$. $y^{(n)}=(x^2+2x+2-2x-2)e^{-x}=x^2e^{-x}$

$n=2$. $y^{(n)}=(x^2-2x)e^{-x}$ $n\geq3$. $y^{(n)}=(x^2+2x+2)e^{-x}-n(2x+2)e^{-x}+\frac{n(n-1)}{2}(2)e^{-x}$

$=(x^2-(2+2n)x+[2-2n+n(n-1)])e^{-x}$

(2) $y=\int_0^{\tan x}\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_0^{\cot x}\sqrt{1+t^2}\,dt$. $y'=\frac{1}{\cos^2x}\cdot\sqrt{1+\tan^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\sqrt{1+\cot^2x}$

$=\frac{1}{\cos^3x}+\frac{1}{\sin^3x}$

八. $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 不存在 $a_{n+2}=a_n^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}=a_n^2>\sqrt{2}a_n$ 故 $\{a_n\}$ 发散. 无极限.

六. (1) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 双侧存在 应有 $f(x+\Delta x)-f(x)\to 0$ 表明 $f(x)$ 在其 x_0 小邻域内连续

(2) 同(1)

七. (1) ∵ $f(x)\in R[a,b]$ ∴ 则表明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M.

$|F(x')-F(x'')|=\left|\int_a^{x'}f(t)dt-\int_a^{x''}f(t)dt\right|=\left|\int_{x''}^{x'}f(t)dt\right|\le M|x'-x''|$ ∴ $F(x)\in C[a,b]$

(2). $F'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x_0+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)dt}{\Delta x}\underset{积分中值定理}{=}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\xi)\cdot\Delta x}{\Delta x}=f(x_0)$ $\xi\in[x,x+\Delta x]$

或者: (2)' $F'(x_0)-f(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)dt-f(x_0)\Delta x}{\Delta x}$. $m\cancel{f(x_0)}\le f(t)\le M-f(x_0)$ 由 $f(t)$ 在 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上一致连续性易知. $f(x_0)=F'(x_0)$

九. 取 $\xi_n=e^n+\frac{1}{n}$. , $\xi_n-e^n=\frac{1}{n}$. $n\to\infty$ 时 (中) $\to 0$ (i) 满足

$f(\xi_n)-f(e^n)=(e^n+\frac{1}{n})\ln(e^n+\frac{1}{n})-e^n\ln(e^n)$

$>e^n\ln e^n+\frac{1}{n}\ln(e^n+\frac{1}{n})-e^n\ln e^n$

$=\cancel{\frac{1}{n}e^n}\frac{1}{n}\ln(e^n+\frac{1}{n})>\frac{n}{n}=1\ne 0$

(ii) 满足 故 $\xi_n=e^n+\frac{1}{n}$ 为一组.