高等数学 A 大练习 9

范围：柯西中值定理 洛必达法则

Part 1 错题再现

9. 证明

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

Part 2 新知识巩固

例1 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导, 证明:
至少存在一点$\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

例2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：在 (a,b) 内存在点 ξ 和 η 使

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$

例1 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

例2 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^{2x}-e^x-3x-1}{e^x x\sin x}$

例3 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^\alpha}\left(a>1,\alpha>0\right)$

例4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^{\beta x}}\left(a>1,\alpha,\beta>0\right)$

例5 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sec x-\tan x\right)$

例6 求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x\left(\alpha>0\right)$

例7 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$

例8 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\tan x\right)^{\tan 2x}$

例10 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$

例11 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

Part 3 补充习题练习

1. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性.

2. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上的正确性.

3. 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

4. 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

5. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间.

6. 证明恒等式：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

7. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 $x=x_0$，证明方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

8. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$，证明：在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

9. 设 $a>b>0,n>1$，证明：

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

10. 设 $a>b>0$，证明：

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

11. 证明下列不等式：

(1) $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$；

(2) 当 $x>1$ 时，$e^x>e\cdot x$.

12. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

*13. 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明在 (a,b) 内有一点 ξ，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

14. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$.

*15. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，试用柯西中值定理证明：

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\ (0<\theta<1).$$

1. 用洛必达法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$；

(4) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；

(6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}(a\neq 0)$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$；

(8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$；

(12) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}$；

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$；

(14) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$；

(15) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$；

(16) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$；

2. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出.

3. 验证极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出.

*4. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant 0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性.