

高等数学 A 大练习 11

范围：第五章 向量代数与空间解析几何

Part 1 新知识巩固

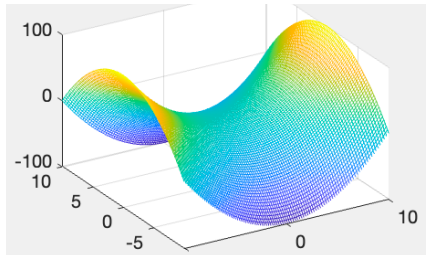
二维下的情况（直线方程）		三维下的情况（平面方程）	
一般式		一般式	
点斜式		点法式	
两点式		三点式	
点到直线的距离		点到平面的距离	
平行直线的距离		平行平面间的距离	
法向量		法向量	

特殊的，三维空间中直线的表示方式与二维的又有所不同：

直线的两面式方程、参数方程、标准方程

- 二次曲面复习

名称	标准式	缩略草图
椭圆锥面		

椭球面		
单叶双曲面		
双叶双曲面		
椭圆柱面		
双曲柱面		
抛物柱面		
椭圆抛物面		
双曲抛物面		

- 三维空间中曲线的表示（参数方程、切线、法平面、弧长）

总习题八

1. 填空:

(1) 设在坐标系 $[O; i, j, k]$ 中点 A 和点 M 的坐标依次为 (x_0, y_0, z_0) 和 (x, y, z) , 则在 $[A; i, j, k]$ 坐标系中, 点 M 的坐标为 _____, 向量 \overrightarrow{OM} 的坐标为 _____;

(2) 设数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 不全为 0, 使 $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$, 则 a, b, c 三个向量是 _____ 的;

(3) 设 $a = (2, 1, 2), b = (4, -1, 10), c = b - \lambda a$, 且 $a \perp c$, 则 $\lambda =$ _____;

(4) 设 $|a| = 3, |b| = 4, |c| = 5$, 且满足 $a + b + c = 0$, 则 $|a \times b + b \times c + c \times a| =$ _____.

2. 在 y 轴上求与点 $A(1, -3, 7)$ 和点 $B(5, 7, -5)$ 等距离的点.

3. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3, 2, -1), B(5, -4, 7)$ 和 $C(-1, 1, 2)$, 求从顶点 C 所引中线的长度.

4. 设 $\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC} = a, \overrightarrow{CA} = b, \overrightarrow{AB} = c$, 三边中点依次为 D, E, F , 试用向量 a, b, c 表示 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$, 并证明

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0.$$

5. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边, 且其长度等于第三边长度的一半.

6. 设 $|a + b| = |a - b|, a = (3, -5, 8), b = (-1, 1, z)$, 求 z .

7. 设 $|a| = \sqrt{3}, |b| = 1, (\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{6}$, 求向量 $a + b$ 与 $a - b$ 的夹角.

8. 设 $a + 3b \perp 7a - 5b, a - 4b \perp 7a - 2b$, 求 $(\widehat{a, b})$.

9. 设 $a = (2, -1, -2), b = (1, 1, z)$, 问 z 为何值时 $(\widehat{a, b})$ 最小? 并求出此最小值.

10. 设 $|a| = 4, |b| = 3, (\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{6}$, 求以 $a + 2b$ 和 $a - 3b$ 为边的平行四边形的面积.

11. 设 $a = (2, -3, 1), b = (1, -2, 3), c = (2, 1, 2)$, 向量 r 满足 $r \perp a, r \perp b, \text{Prj}_c r = 14$, 求 r .

12. 设 $a = (-1, 3, 2), b = (2, -3, -4), c = (-3, 12, 6)$, 证明三向量 a, b, c 共面, 并用 a 和 b 表示 c .

13. 已知动点 $M(x, y, z)$ 到 xOy 平面的距离与点 M 到点 $(1, -1, 2)$ 的距离相等, 求点 M 的轨迹的方程.

14. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

$$(1) z = 2(x^2 + y^2); \quad (2) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1;$$

$$(3) z^2 = 3(x^2 + y^2); \quad (4) x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1.$$

15. 求通过点 $A(3, 0, 0)$ 和 $B(0, 0, 1)$ 且与 xOy 面成 $\frac{\pi}{3}$ 角的平面的方程.

16. 设一平面垂直于平面 $z = 0$, 并通过从点 $(1, -1, 1)$ 到直线 $\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 的垂线, 求此平面的方程.

17. 求过点 $(-1, 0, 4)$, 且平行于平面 $3x - 4y + z - 10 = 0$, 又与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线的方程.

18. 已知点 $A(1, 0, 0)$ 及点 $B(0, 2, 1)$, 试在 z 轴上求一点 C , 使 $\triangle ABC$ 的面积最小.

19. 求曲线 $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

20. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与柱面 $z^2 = 2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

21. 画出下列各曲面所围立体的图形:

$$(1) \text{抛物柱面 } 2y^2 = x, \text{ 平面 } z = 0 \text{ 及 } \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1;$$

$$(2) \text{抛物柱面 } x^2 = 1 - z, \text{ 平面 } y = 0, z = 0 \text{ 及 } x + y = 1;$$

$$(3) \text{圆锥面 } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ 及旋转抛物面 } z = 2 - x^2 - y^2;$$

$$(4) \text{旋转抛物面 } x^2 + y^2 = z, \text{ 柱面 } y^2 = x, \text{ 平面 } z = 0 \text{ 及 } x = 1.$$