

高等数学 A 大练习 3

(大练习 3.4.5 截取前两章教材习题进行轮换式复现)

1.

设 (a, b) 为任意的一个开区间. 证明: (a, b) 中必有有理数.

2.

设 q 为常数, $|q| < 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

3.

例 6 设 $a > 1$ 是一常数, 试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0.$$

4.

求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}).$$

5.

9. 证明

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right).$$

6.

例 2 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x+1} = 2$.

7.

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \tan 3x}{2x}.$$

8.

例 8 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.

9. 求极限

$$(9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad (n \text{ 为正整数});$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1});$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} \quad (b_n \neq 0);$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} \quad (a_0 \cdot b_0 \neq 0);$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4+8}}{x^2+1};$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[3]{1-2x}}{x+x^2};$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3-a^3}} \quad (a > 0).$$

10.

2. 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续且 $f(x_0) > 0$. 证明存在一个 $\delta > 0$ 使得
$$f(x) > 0, \quad \text{当 } |x - x_0| < \delta.$$

11.

3. 设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 中连续. 又设 $x_1, x_2 \in (a,b), m_1 > 0, m_2 > 0$. 证明: 存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f(\xi) = \frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2)}{m_1 + m_2}.$$

12.

1. 证明:任一奇数次实系数多项式至少有一实根.

2. 设 $0 < \epsilon < 1$, 证明对于任意一个 $y_0 \in \mathbf{R}$, 方程

$$y_0 = x - \epsilon \sin x$$

有解,且解是惟一的.

13.

14. 设 $f(x) = |x-a|\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续且 $\varphi(a) \neq 0$, 证明: $f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导.

14.

例 11 设

$$y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2(2-x)}{(3-x)^2(x-4)}},$$

求 $y' = ?$

15.

4. 求下列函数的导函数

(1) $y = \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0);$

(2) $y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad (a > 0);$

(3) $y = x^2 \arccos x \quad (|x| < 1);$

(4) $y = \arctan \frac{1}{x};$

(5) $y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0);$

(6) $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \quad (a > 0);$

(7) $y = \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad x \neq \pm 1;$

16.

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列各函数是 x 的几阶无穷小量?

(1) $y = x + 10x^2 + 100x^3;$

(2) $y = (\sqrt{x+2} - \sqrt{2}) \sin x;$

(3) $y = x(1 - \cos x).$

2. 已知: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = o(x^2)$. 试证明: $\alpha(x) = o(x)$.

17.

9. 求下列隐函数在指定的点 M 的导数:

(1) $y^2 - 2xy - x^2 + 2x - 4 = 0, M(3, 7);$

(2) $e^{xy} - 5x^2y = 0, M\left(\frac{e^2}{10}, \frac{20}{e^2}\right).$

18.

3. 设 $y = \frac{x-3}{x+4} (x \neq -4)$, 证明: $2y'^2 = (y-1)y''.$

4. 设 $y = (1-x)(2x+1)^2(3x-1)^3$, 求 $y^{(6)}, y^{(7)}.$

5. 要使 $y = e^{\lambda x}$ 满足方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

(其中 p, q 为常数), 问: λ 该取哪些值?

19.

7. 设 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^n}$, 其中 n 为一个正整数. 求 $f^{(k)}(0)$, k 为某一正整数.

8. 设 $y = x^2 \ln(1+x)$, 求 $y^{(50)}.$

20.

17. 求解微分方程

$$y''(x) = a + be^{-x} \quad (a, b \text{ 为常数}).$$

18. 设 $f(x)$ 满足下列方程

$$xf'(x) + f(x) = x^3 + 1,$$

求 $f(x).$