

高等数学 A 大练习 8

范围：罗尔定理 拉格朗日中值定理

Part 1 错题再现

1.

【例6】设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x \geq 0$ 时，
 $F(x)f(x) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$ 。已知 $F(0) = 1, F(x) > 0$ 。求 $f(x)$ 。

2.

【例12】 $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x} \sin^4 x dx$;

3.

【例13】已知 $f(x)$ 连续， $\int_0^x tf(x-t)dt = 1 - \cos x$ ，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ 的值。

4.2023 高数 A 期中 & 2023 大练习 6

【例11】设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$ ，计算 $\int_0^\pi f(x)dx$ 。

Part 2 新知识巩固

例1 试证方程 $a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx = 0$
在 $(0, \pi)$ 内至少有一实根。

例2 设函数 $f: [0, 1] \rightarrow R$ ，在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，并且 $f(1) = 0$ ，则 $\exists c \in (0, 1)$ 使

$$f'(c) = -\frac{f(c)}{c}$$

例2 试证 $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

例3 证明：当 $x > 0$ 时， $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

附加题：尝试证明罗尔定理、拉格朗日定理