

## 高等数学 A 大练习 10

范围：泰勒公式 函数的极值

### Part 1 错题再现

$$(8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x};$$

### Part 2 新知识巩固

**例2 求极限**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

**例3 已知**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1, f''(0) = 1$ , **求极限**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x \sin x}$ .

**例4 若**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$ , **求极限**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$ .

**例5 设**  $f''(x) > 0$ , 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  与  $x$  是等价无穷小. 证明: 当  $x \neq 0$  时,  $f(x) > x$ .

**例3 求函数**  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  **的极值.**

**例4 求函数**  $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$  **的极值.**

### Part 3 补充习题练习

- 按  $(x-4)$  的幂展开多项式  $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ .
- 应用麦克劳林公式, 按  $x$  的幂展开函数  $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ .
- 求函数  $f(x) = \sqrt{x}$  按  $(x-4)$  的幂展开的带有拉格朗日型余项的 3 阶泰勒公式.
- 求函数  $f(x) = \ln x$  按  $(x-2)$  的幂展开的带有佩亚诺型余项的  $n$  阶泰勒公式.
- 求函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  按  $(x+1)$  的幂展开的带有拉格朗日型余项的  $n$  阶泰勒公式.
- 求函数  $f(x) = \tan x$  的带有佩亚诺型余项的 3 阶麦克劳林公式.
- 求函数  $f(x) = xe^x$  的带有佩亚诺型余项的  $n$  阶麦克劳林公式.
- 验证当  $0 < x \leq \frac{1}{2}$  时, 按公式  $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$  计算  $e^x$  的近似值时, 所产生的误差

小于 0.01, 并求  $\sqrt{e}$  的近似值, 使误差小于 0.01.

9. 应用 3 阶泰勒公式求下列各数的近似值, 并估计误差:

- (1)  $\sqrt[3]{30}$ ; (2)  $\sin 18^\circ$ .

10. 利用泰勒公式求下列极限:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[4]{x^4 - 2x^3})$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$ ;  
 (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}$ .

1. 求下列函数的极值:

- (1)  $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ ; (2)  $y = x - \ln(1+x)$ ;  
 (3)  $y = -x^4 + 2x^2$ ; (4)  $y = x + \sqrt{1-x}$ ;

- (5)  $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$ ; (6)  $y = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$ ;  
 (7)  $y = e^x \cos x$ ; (8)  $y = x^{\frac{1}{x}}$ ;  
 (9)  $y = 3 - 2(x+1)^{\frac{1}{3}}$ ; (10)  $y = x + \tan x$ .

2. 试证明: 如果函数  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  满足条件  $b^2 - 3ac < 0$ , 那么这函数没有极值.

3. 试问  $a$  为何值时, 函数  $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$  在  $x = \frac{\pi}{3}$  处取得极值? 它是极大值还是极小值? 并求此极值.

4. 求下列函数的最大值、最小值;

(1)  $y = 2x^3 - 3x^2, -1 \leq x \leq 4$ ;      (2)  $y = x^4 - 8x^2 + 2, -1 \leq x \leq 3$ ;

(3)  $y = x + \sqrt{1-x}, -5 \leq x \leq 1$ .

5. 问函数  $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7$  ( $-1 \leq x \leq 4$ ) 在何处取得最大值? 并求出它的最大值.

6. 问函数  $y = x^2 - \frac{54}{x}$  ( $x < 0$ ) 在何处取得最小值?

7. 问函数  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$  ( $x \geq 0$ ) 在何处取得最大值?

#### Part 4 附加题

2.(15分) (极值题) 求出闭区间  $[-1, 1]$  上的一元函数  $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$  达到最小值的所有  $[-1, 1]$  上的点。