北京大学线性代数 B 期末试题

(2022-2023学年第一学期)

1. (12分)
把下面矩阵表示成初等矩阵的乘积并求出其逆矩阵。

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. (18分) 设$M_2(k)$是数域k上所有2-级方阵构成的线性空间。
(i).证明：矩阵的转置是$M_2(k)$上的线性变换。
(ii).求出转置线性变换在基本矩阵E_{ij}构成的基下的矩阵。

3. (15分) 设实数域$\mathbb{R}$上的矩阵A为

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$$

(1) 求正交矩阵Q，使得Q^TAQ为对角矩阵D，其中Q^T为Q的转置;
(2) 求正定矩阵C，使得$C^2 = (a+3)I - A$，其中I为3阶单位矩阵。

4. (20分) 设实二次型

$$f(X) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3, \quad a \in \mathbb{R}\text{为参数},$$

可用非退化线性替换$X = CY$化成二次型

$$g(Y) = g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2.$$

(1) 求参数a的值;
(2) 求把$f(X)$化成$g(Y)$的非退化线性替换中的可逆矩阵C。

5. （16分）设r, s为正整数，分块矩阵A为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中A_{11}, A_{22}分别为r阶，s阶的方阵，O为$s \times r$零矩阵。
求证：

5. （16分）设r, s为正整数，分块矩阵A为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中A_{11}, A_{22}分别为r阶，s阶的方阵，O为$s \times r$零矩阵。
求证：
(1) A可逆的充分必要条件是A_{11}与A_{22}都可逆;
(2) 当A可逆时，用A_{11},A_{12},A_{22}给出A^{-1}的表达式。

6. (12分) 设$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$为欧几里得空间$\mathbb{R}^n$中的一组基。证明：存在$\mathbb{R}^n$中的一组标准正交基$\beta_1, \cdots, \beta_n$使得$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$到$\beta_1, \cdots, \beta_n$的过渡矩阵为上三角矩阵。

7. (7分) 设$\mathbb{R}$为实数域，V是以0为极限的实数数列全体，即

$$V = \left\{ \{a_n\} \mid a_n \in \mathbb{R}, \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \right\}$$

在V中定义加法与数乘运算：$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$, $k\{a_n\} = \{ka_n\}, k \in \mathbb{R}$，则$V$构成实数域$\mathbb{R}$上的线性空间(不需要证明).
请证明：V是无穷维的线性空间.

1. (12分)
把下面矩阵表示成初等矩阵的乘积并求出其逆矩阵。

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. (18分) 设$M_2(k)$是数域k上所有2-级方阵构成的线性空间。
(i).证明：矩阵的转置是$M_2(k)$上的线性变换。
(ii).求出转置线性变换在基本矩阵E_{ij}构成的基下的矩阵。

3. (15分) 设实数域$\mathbb{R}$上的矩阵A为

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$$

(1) 求正交矩阵Q，使得$Q^T AQ$为对角矩阵D，其中Q^T为Q的转置;
(2) 求正定矩阵C，使得$C^2 = (a+3)I - A$，其中I为3阶单位矩阵。

4. (20分) 设实二次型

$$f(X) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3, \quad a \in \mathbb{R}\text{为参数},$$

可用非退化线性替换$X = CY$化成二次型

$$g(Y) = g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2.$$

(1) 求参数a的值;
(2) 求把$f(X)$化成$g(Y)$的非退化线性替换中的可逆矩阵C。