线性代数A 大练习5

4.2 特殊矩阵

4.3 矩阵乘积的秩及行列式

Part 1 错题复现

1.求行列式

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix},$$

例 7 计算下述 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix},$$

其中 $a\neq b$。

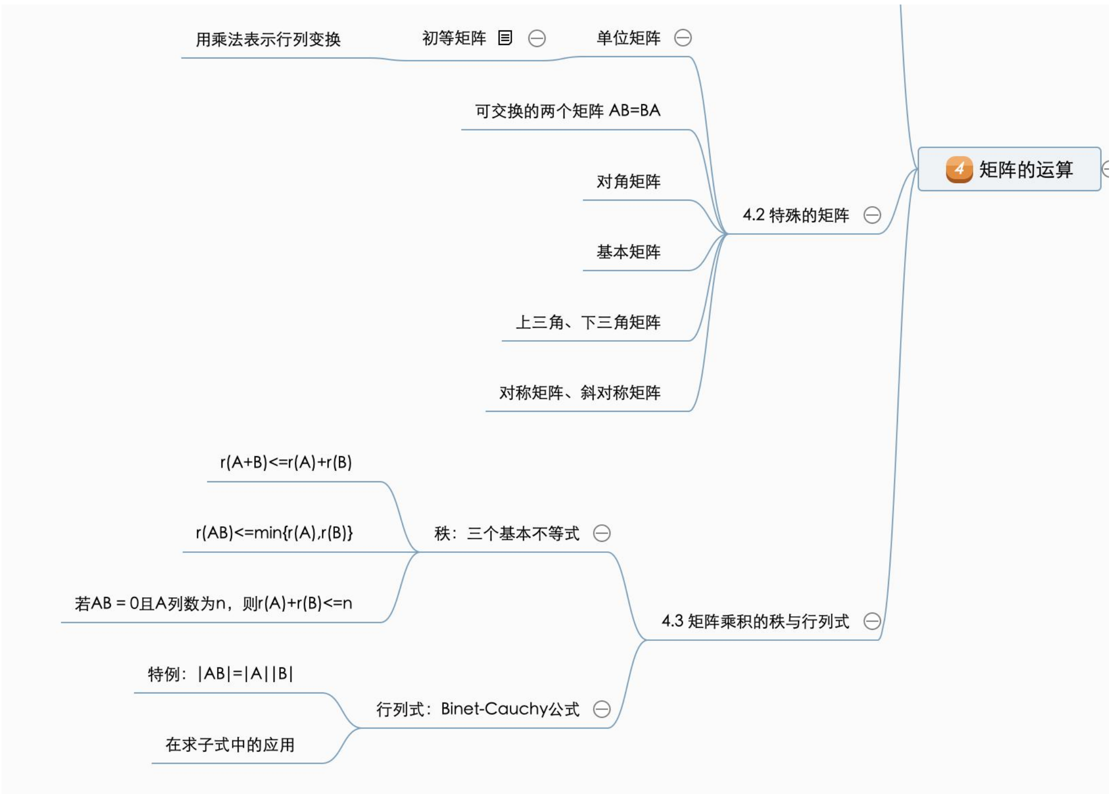
2.

例 12 设数域 K 上 $m\times n$ 矩阵 H 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$。证明：$H$ 的任意 s 列（$s\leqslant\min\{m,n\}$）都线性无关当且仅当：齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0} \tag{5}$$

的任一非零解的非零分量的数目大于 s。

Part 2 知识点回顾及练习



同时回顾拉普拉斯定理

定义 1 n 阶行列式 $|A|$ 中任意取定 k 行、k 列 $(1\leqslant k<n)$，位于这些行和列的交叉处的 k^2 个元素按原来的排法组成的 k 阶行列式，称为 $|A|$ 的一个 **k 阶子式**。取定 $|A|$ 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行 $(i_1<i_2<\cdots<i_k)$，第 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列 $(j_1<j_2<\cdots<j_k)$，所得到的 k 阶子式记作

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}. \tag{1}$$

划去这个 k 阶子式所在的行和列，剩下的元素按原来的排法组成的 $(n-k)$ 阶行列式，称为子式(1)的**余子式**，它前面乘以

$$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)},$$

则称为子式(1)的**代数余子式**。令

$$\{i'_1, i'_2, \cdots, i'_{n-k}\} = \{1, 2, \cdots, n\}\backslash\{i_1, i_2, \cdots, i_k\},$$
$$\{j'_1, j'_2, \cdots, j'_{n-k}\} = \{1, 2, \cdots, n\}\backslash\{j_1, j_2, \cdots, j_k\},$$

并且 $i'_1<i'_2<\cdots<i'_{n-k}$，$j'_1<j'_2<\cdots<j'_{n-k}$，则子式(1)的余子式为

$$A\begin{pmatrix} i'_1, i'_2, \cdots, i'_{n-k} \\ j'_1, j'_2, \cdots, j'_{n-k} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

定理 1(Laplace) 在 n 阶行列式 $|A|$ 中，取定第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行 $(i_1<i_2<\cdots<i_k)$，则这 k 行元素形成的所有 k 阶子式与它们自己的代数余子式的乘积之和等于 $|A|$，即

$$|A| = \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix} (-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)} A\begin{pmatrix} i'_1, i'_2, \cdots, i'_{n-k} \\ j'_1, j'_2, \cdots, j'_{n-k} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

熟悉各个符号!

4.3 中的重要定理（请分别给出证明）

定理 1 设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$，则

$$\operatorname{rank}(AB)\leqslant \min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}.$$

定理 2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$|AB|=|A||B|.$$

定理 3 (Binet-Cauchy 公式)设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times s}$。

(1) 如果 $s>n$，那么 $|AB|=0$；

(2) 如果 $s\leqslant n$，那么 $|AB|$ 等于 A 的所有 s 级子式与 B 的相应 s 级子式的乘积之和，即

$$|AB|=\sum_{1\leqslant v_1<v_2<\cdots<v_s\leqslant n} A\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & s\\ v_1, & v_2, & \cdots, & v_s\end{pmatrix}\cdot B\begin{pmatrix}v_1, & v_2, & \cdots, & v_s\\ 1, & 2, & \cdots, & s\end{pmatrix}.$$

命题 1 设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times s}$，设正整数 $r\leqslant s$。

(1) 如果 $r>n$，那么 AB 的所有 r 阶子式都等于 0；

(2) 如果 $r\leqslant n$，那么 AB 的任一 r 阶子式为

$$AB\begin{pmatrix}i_1, & i_2, & \cdots, & i_r\\ j_1, & j_2, & \cdots, & j_r\end{pmatrix}=\sum_{1\leqslant v_1<v_2<\cdots<v_r\leqslant n} A\begin{pmatrix}i_1, & i_2, & \cdots, & i_r\\ v_1, & v_2, & \cdots, & v_r\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}v_1, & v_2, & \cdots, & v_r\\ j_1, & j_2, & \cdots, & j_r\end{pmatrix}.$$

Part 3 书上例题练习

例 4 证明：如果 A 与 B 都是 n 级斜对称矩阵，那么 $AB-BA$ 也是斜对称矩阵。

例 5 设 A 是一个 n 级实对称矩阵(即实数域上的对称矩阵)，证明：如果 $A^2=0$，那么 $A=0$。

例 6 设 A 是数域 K 上一个 $s\times n$ 矩阵，证明：如果 A 的秩为 r，那么 A 的行向量组的一个极大线性无关组与 A 的列向量组的一个极大线性无关组交叉位置的元素按原来的排法组成的 r 阶子式不等于 0。

例 7 证明：斜对称矩阵的秩是偶数。

例 8 证明：矩阵的 2°型初等行变换(即两行互换)可以通过一些 1°型与 3°型初等行变换实现。

例 9 方阵 A 称为**幂零矩阵**，如果存在正整数 l，使得 $A^l=0$；使 $A^l=0$ 成立的最小正整数 l 称为 A 的**幂零指数**。证明：

(1) 上(下)三角矩阵是幂零矩阵当且仅当它的主对角元全为 0；

(2) 如果 n 级上(下)三角矩阵是幂零矩阵，那么它的幂零指数 $l\leqslant n$。

例 10 令

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

称 C 是 n 级**循环移位矩阵**。证明：

(1) 用 C 左乘一个矩阵，就相当于把这个矩阵的行向上移一行，第 1 行换到最后一行；用 C 右乘一个矩阵，就相当于把这个矩阵的列向右移一列，最后一列换到第 1 列；

(2) $\sum\limits_{l=0}^{n-1} C^l=J$，其中 J 是元素全为 1 的 n 级矩阵。

例 11 n 级矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

称为**循环矩阵**，它是由第 1 行的元素逐步往右移一位得到第 $2,3,\cdots,n$ 行。证明：

$$A=a_1I+a_2C+a_3C^2+\cdots+a_nC^{n-1},$$

其中 C 是例 10 中的循环移位矩阵。

例 12 证明：两个 n 级循环矩阵的乘积仍是循环矩阵。

例 1 证明：$\operatorname{rank}(A+B)\leqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$。

例 2 证明：若 $k\neq0$，则 $\operatorname{rank}(kA)=\operatorname{rank}(A)$。

例 3 设 A 是实数域上的 $s\times n$ 矩阵，则

$$\operatorname{rank}(A'A)=\operatorname{rank}(AA')=\operatorname{rank}(A).$$

例 4 一个矩阵称为行(列)满秩矩阵，如果它的行(列)向量组是线性无关的。证明：如果一个 $s\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，那么存在 $s\times r$ 的列满秩矩阵 B 和 $r\times n$ 行满秩矩阵 C，使得 $A=BC$。

例 5 证明：如果数域 K 上的 n 级矩阵 A 满足

$$AA'=I,\qquad |A|=-1,$$

那么

$$|I+A|=0.$$

例 6 设

$$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k,\quad k=0,1,2\cdots,$$

设 $A=(a_{ij})_{n\times m}$，其中

$$a_{ij}=S_{i+j-2},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

证明：

$$|A|=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)^2.$$

例 7 设 A 是复数域上 n 级循环矩阵，它的第一行为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，求 $|A|$。

例 8 在数域 K 中,设

$$u_j=\sum_{i=1}^{n}c_ia_i^j,\quad 1\leqslant j<2n.$$

令

$$A=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_2 & u_3 & \cdots & u_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{2n-1} \end{pmatrix}.$$

证明:对任意 $\beta\in K^n$,线性方程组 $AX=\beta$ 有惟一解的充分必要条件是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不等,且 $a_1,a_2,\cdots,a_n,c_1,c_2,\cdots,c_n$ 全不为 0。

例 9 证明 Cauchy 恒等式:当 $n\geqslant 2$ 时,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_id_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_id_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_ic_i\right)=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(a_jb_k-a_kb_j)(c_jd_k-c_kd_j).$$

例 10 证明 Cauchy-Bunyakovsky 不等式:对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$,有

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2,$$

等号成立当且仅当 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 线性相关。

例 11 设 A、B 都是 n 级矩阵,证明:AB 与 BA 的 r 阶的所有主子式之和相等,其中 $1\leqslant r\leqslant n$。

例 12 用 Binet-Cauchy 公式计算下述 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}.$$

例 13 设 A 是一个 $n\times m$ 矩阵,$m\geqslant n-1$。求 AA' 的(1,1)元的代数余子式。

例 14 设 A 是一个 $n\times m$ 矩阵,$m\geqslant n-1$,并且 A 的每一列元素的和都为 0。证明:AA' 的所有元素的代数余子式都相等。

例 15 求数域 K 上其平方等于零矩阵的所有 2 级矩阵。

例 16 设 A 是数域 K 上的 2 级矩阵,l 是大于 2 的整数。证明:$A^l=0$ 当且仅当 $A^2=0$。