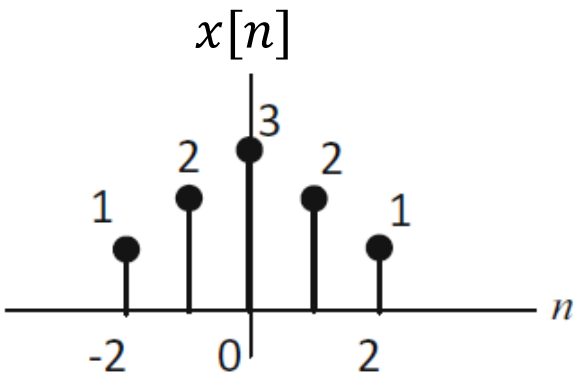
Signal Analysis

Discrete Fourier Transform, Fast Fourier Transform

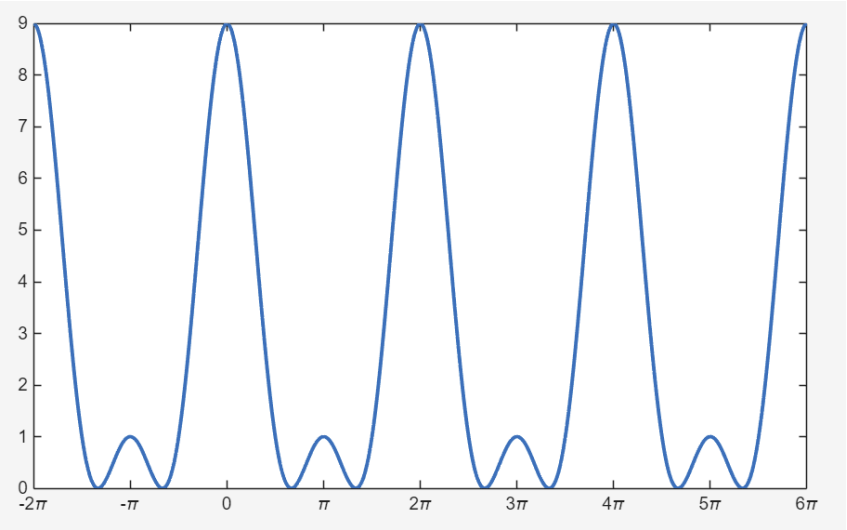
Panwit Tuwanut

ภาพรวม

จากที่ผ่านมาเราได้ว่า สัญญาณไม่ต่อเนื่องแบบไร้คาบ เมื่อทำการแปลงฟูเรียร์ (DTFT) จะได้เป็นสัญญาณต่อเนื่องในแกนความถี่



DTFT

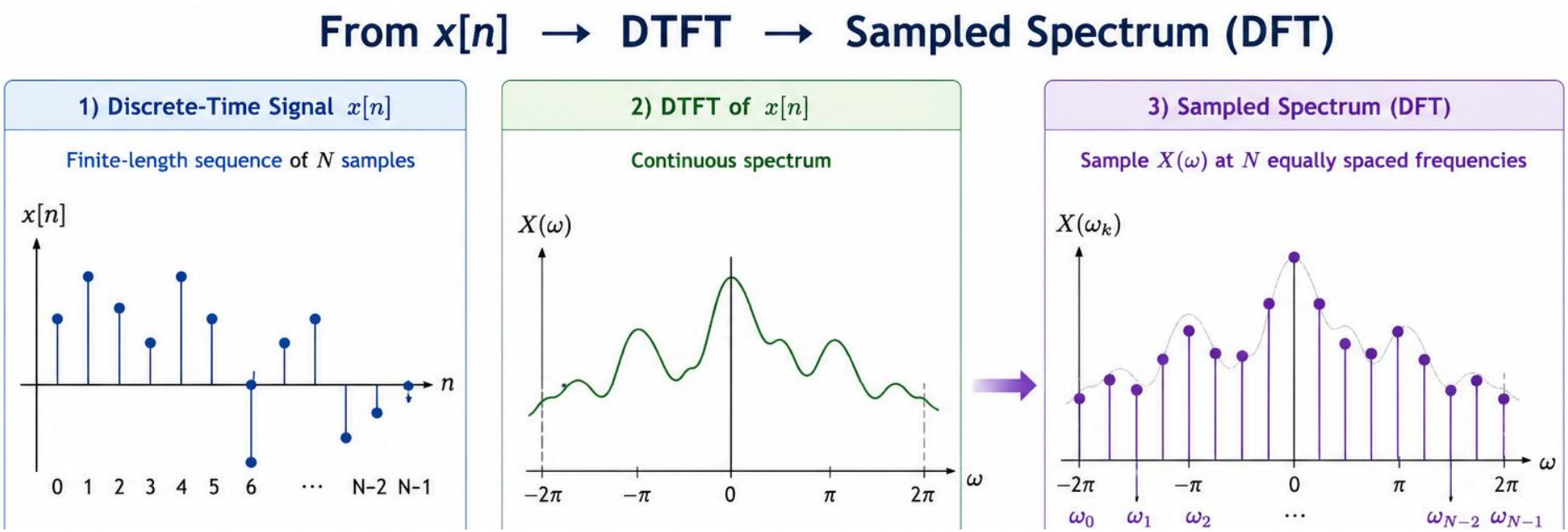


DTFT ให้สเปกตรัมต่อเนื่องซึ่งมีข้อมูลอนันต์ แต่สัญญาณ $x[n]$ มีเพียง N ค่า ดังนั้น เราจึงเลือกเฉพาะ N ความถี่ ที่เหมาะสมที่สุด

โดยการ Sampling ในโดเมนความถี่ เพราะต้องการแทน สเปกตรัมต่อเนื่อง ด้วยข้อมูลจำนวนจำกัด N ค่า

Note!! การที่มีค่าเป็นอนันต์ ทำให้ยากต่อการจัดเก็บข้อมูล Spectrum ลงในคอมพิวเตอร์

แนวคิดของ DFT



จากสมการ DTFT ของ

<u>สัญญาณไม่ต่อเนื่อง</u>แบบไร้คาบ

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

DTFT ให้ค่าของ Spectrum ต่อเนื่องทุกความถี่ มีลักษณะเป็นตาบ เท่ากับ 2π

Sampling N ค่า

ที่ความถี่ $\omega_k = \dfrac{2\pi k}{N}$

$k = 0,1,\ldots,N-1$

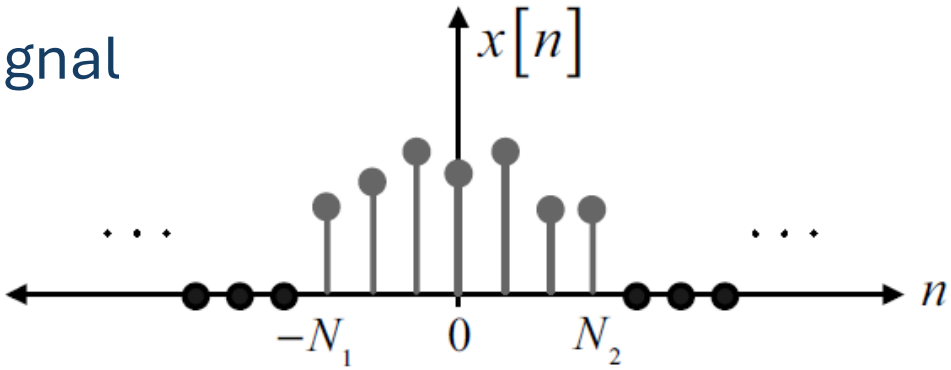
ชุดของค่า DTFT ที่ถูก Sample สเปรคตรัมต่อเนื่อง ที่ความถี่ $\omega_k = \dfrac{2\pi k}{N}$

เรียกว่า Discrete Fourier Transform

$$X(\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

Note : Finite-Length Sequence

Non-Periodic Signal



จาก<u>สัญญาณไม่ต่อเนื่อง</u>แบบไร้คาบ ที่มีความยาว $-\infty$ ถึง ∞ ซึ่งเป็น สัญญาณที่มีความยาวไม่จำกัด (infinite-length sequence) เราสามารถเขียนให้เป็น สัญญาณที่มีความยาวจำกัด (Finite-Length Sequence) ได้

$$x[n] = \begin{cases} x[n], -N_1 \le n \le N_2 \\ 0\,, otherwise \end{cases}$$

หรือในกรณีทั่วไป ที่มีค่าแค่ช่วง N ค่า ก็สามารถเขียนได้เป็น

$$x[n] = \begin{cases} x[n], 0 \le n \le N-1 \\ 0\,, otherwise \end{cases}$$

Discrete Fourier Transform (DFT)

DFT คือ ชุดของค่า DTFT ที่ถูก Sample สเปรคตรัมต่อเนื่อง ที่ความถี่ $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$

DFT คือ DTFT ที่ถูก Sampling ในแกนความถี่

DFT is the Frequency-Sampled Version of the DTFT

$$\boxed{X(\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

กำหนดให้ $X[k] = X(\omega_k)$ จะเขียนสมการได้ว่า

$$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

เปรียบเทียบ DTFT & DFT

Discrete Time Fourier Transform

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

Discrete Fourier Transform

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$k = 0,1, \dots, N-1$$

Inverse Discrete Time Fourier Transform

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega)\, e^{j\omega n} d\omega$$

Inverse Discrete Fourier Transform

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$n = 0,1, \dots, N-1$$

สรุป แนวคิดของ DFT

สัญญาณต่อเนื่อง

$$x(t) \xrightarrow{\text{Sampling}} x[n]$$

ที่ความถี่

$f_{sampling} \geq 2f_{max}$

สัญญาณไม่ต่อเนื่อง

$$x[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(\omega)$$

$$X(\omega) \xrightarrow{\text{Sampling } N \text{ ค่า}} X[k]$$

ที่ความถี่ $\omega_k = \dfrac{2\pi k}{N}$

- ชุดของค่า DTFT ที่ถูก Sample เรียก N-point DFT หรือ DFT of order N
- $X[k]$ แต่ละค่า ที่หาได้ เรียกว่า DFT complex coefficients

Note !! เปรียบเทียบ DTFS & DFT

Discrete Time Fourier Series

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] \cdot e^{-jk\omega_0 n}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Discrete Fourier Transform

$$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}}$$

$$k = 0,1,\ldots,N-1$$

Inverse Discrete Time Fourier Series

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \cdot e^{jk\omega_0 n}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Inverse Discrete Fourier Transform

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi k}{N}n}}$$

$$n = 0,1,\ldots,N-1$$

จะเห็นว่า DFT (Discrete Fourier Transform) มีรูปสมการเหมือนกับ DTFS (Discrete-Time Fourier Series) ทุกประการ เพียงแต่ค่าสัมประสิทธิ์ของทั้งสองต่างกันด้วยตัวคูณ N

$$X[k] = Na_k$$

ดังนั้นรูปของสเปกตรัมจะเหมือนกันทุกจุด แตกต่างกันแค่ **ขนาด (scale)** เท่านั้น

การคำนวณ DFT

จาก

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn} \qquad 0 \le k \le N-1$$

กำหนดให้

$$W_N = e^{-j(\frac{2\pi}{N})}$$

Note!!
$a^{mn} = (a^m)^n$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า

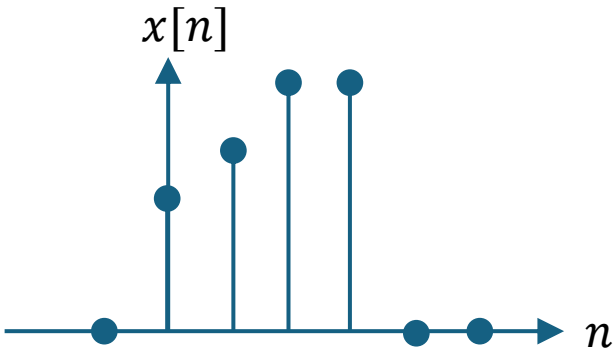
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \, (W_N)^{kn}$$

เขียนย่อๆ จะได้ว่า

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \qquad 0 \le k \le N-1$$

Example จงหาคำนวณหา DFT ของ

$$x[n] = \{..,0,0,\underset{\uparrow}{2},3,4,4,0,0,..\}$$



Solution

$$N = 4$$

$$W_N = e^{-j(\frac{2\pi}{N})} \xrightarrow[\text{แทน N=4}]{} W_4 = e^{-j(\frac{2\pi}{4})} = e^{-j(\frac{\pi}{2})} = cos\frac{\pi}{2} - jsin\frac{\pi}{2} = -j$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \xrightarrow[\text{แทน N=4}]{} X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n](-j)^{kn} \qquad 0 \le k \le 3$$

$0 \le k \le N-1$

แทน $W_4 = -j$

<u>ทำการแทนค่า k จาก 0 ถึง 3</u>

$$\boldsymbol{k = 0}, \qquad X[0] = \sum_{n=0}^{3} x[n](j)^{(0)n} = x[0](-j)^{(0)(0)} + x[1](-j)^{(0)(1)} + x[2](-j)^{(0)(2)} + x[3](-j)^{(0)(3)}$$

แทน $k = 0$

แทน n ด้วย 0 ถึง 3

$$= (2)(-j)^{(0)(0)} + (3)(-j)^{(0)(1)} + (4)(-j)^{(0)(2)} + (4)(-j)^{(0)(3)}$$

$$= \mathbf{13}$$

$k = 1$, $X[1] = \sum_{n=0}^{3} x[n](j)^{(1)n} = x[0](-j)^{(1)(0)} + x[1](-j)^{(1)(1)} + x[2](-j)^{(1)(2)} + x[3](-j)^{(1)(3)}$

แทน $k = 1$

แทน n ด้วย 0 ถึง 3

$$= (2)(-j)^{(0)} + (3)(-j)^{(1)} + (4)(-j)^{(2)} + (4)(-j)^{(3)}$$

$$= 2 - 3j - 4 + 4j$$

$$= \mathbf{-2 + j}$$

$k = 2$, $X[2] = \sum_{n=0}^{3} x[n](j)^{(2)n} = x[0](-j)^{(2)(0)} + x[1](-j)^{(2)(1)} + x[2](-j)^{(2)(2)} + x[3](-j)^{(2)(3)}$

แทน $k = 2$

แทน n ด้วย 0 ถึง 3

$$= (2)(-j)^{(0)} + (3)(-j)^{(2)} + (4)(-j)^{(4)} + (4)(-j)^{(6)}$$

$$= 2 - 3 + 4 - 4$$

$$= \mathbf{-1}$$

$k = 3$, $X[3] = \sum_{n=0}^{3} x[n](j)^{(3)n} = x[0](-j)^{(3)(0)} + x[1](-j)^{(3)(1)} + x[2](-j)^{(3)(2)} + x[3](-j)^{(3)(3)}$

แทน $k = 3$

แทน n ด้วย 0 ถึง 3

$$= (2)(-j)^{(0)} + (3)(-j)^{(3)} + (4)(-j)^{(6)} + (4)(-j)^{(9)}$$

$$= 2 + 3j - 4 - 4j$$

$$= \mathbf{-2 - j}$$

$x[n] = \{2,3,4,4\}$

จะได้ว่า

$X[k] = \{13, -2+\mathrm{j}, -1, -2-\mathrm{j}\}$

หาขนาด และ เฟส

$z = x + jy$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\angle z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$|X(k)| = \{13, \sqrt{5}, 1, \sqrt{5}\}$

$\angle X[k] = \{0, 153.43, 180, 206.57\}$

ข้อสังเกต

จากสมการในหน้าที่แล้ว

$$k = 0\,, \quad X[0] = (2)(-j)^{(0)}+(3)(-j)^{(0)}+(4)(-j)^{(0)}+(4)(-j)^{(0)} = 13$$
$$k = 1\,, \quad X[1] = (2)(-j)^{(0)}+(3)(-j)^{(1)}+(4)(-j)^{(2)}+(4)(-j)^{(3)} = -2+j$$
$$k = 2\,, \quad X[2] = (2)(-j)^{(0)}+(3)(-j)^{(2)}+(4)(-j)^{(4)}+(4)(-j)^{(6)} = -1$$
$$k = 3\,, \quad X[3] = (2)(-j)^{(0)}+(3)(-j)^{(3)}+(4)(-j)^{(6)}+(4)(-j)^{(9)} = -2-j$$

เขียนเป็น เมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

กรณี $N = 8$

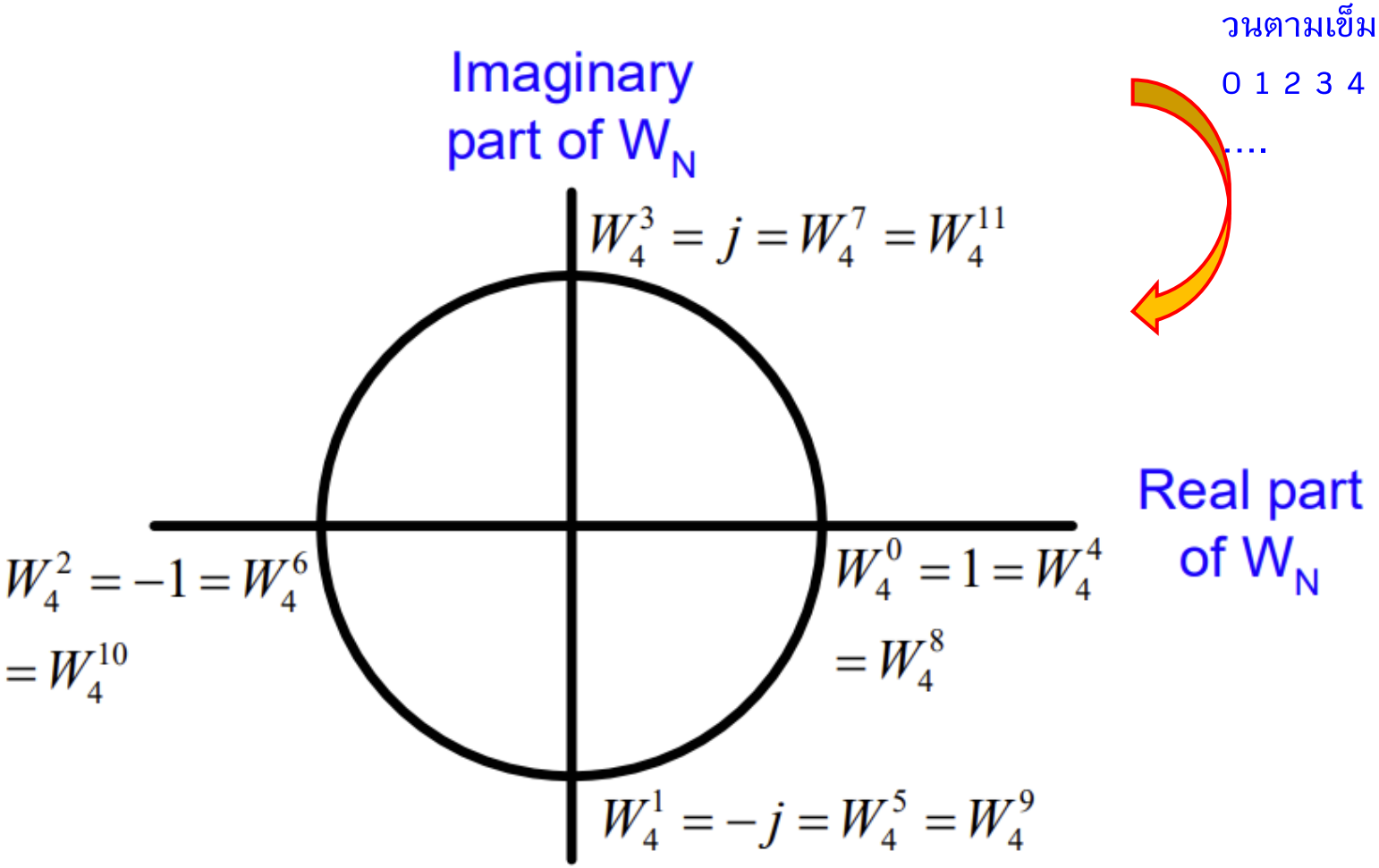
จากกรณี $N = 4$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

สามารถขยายเป็นกรณี $N = 8$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \\ X[4] \\ X[5] \\ X[6] \\ X[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 & W_4^4 & W_4^5 & W_4^6 & W_4^7 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 & W_4^8 & W_4^{10} & W_4^{12} & W_4^{14} \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 & W_4^{12} & W_4^{15} & W_4^{18} & W_4^{21} \\ 1 & W_4^4 & W_4^8 & W_4^{12} & W_4^{16} & W_4^{20} & W_4^{24} & W_4^{28} \\ 1 & W_4^5 & W_4^{10} & W_4^{15} & W_4^{20} & W_4^{25} & W_4^{30} & W_4^{35} \\ 1 & W_4^6 & W_4^{12} & W_4^{18} & W_4^{24} & W_4^{30} & W_4^{36} & W_4^{42} \\ 1 & W_4^7 & W_4^{14} & W_4^{21} & W_4^{28} & W_4^{35} & W_4^{42} & W_4^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ x[4] \\ x[5] \\ x[6] \\ x[7] \end{bmatrix}$$

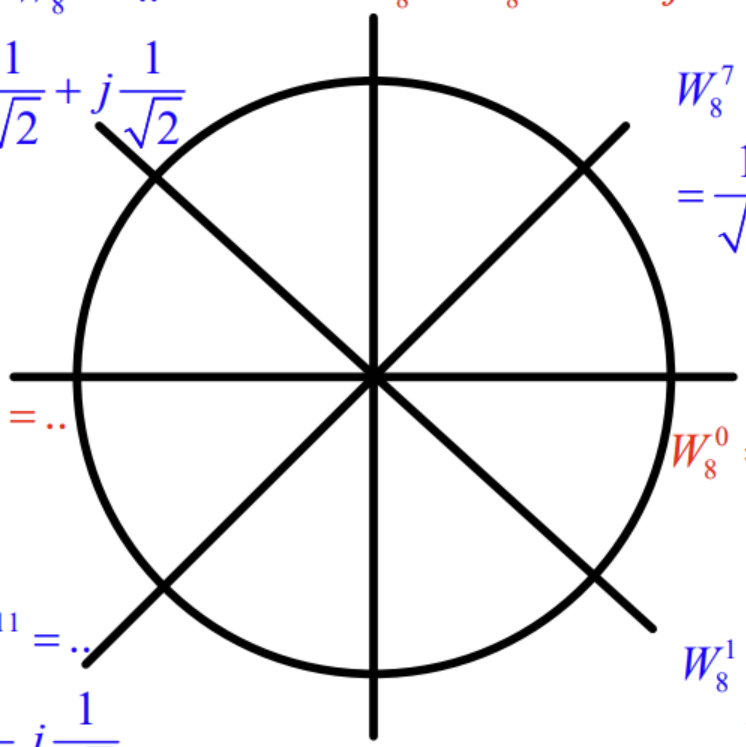
Note!! Periodicity of W_N and its values



Note!! Periodicity of W_N and its values

วนตามเข็ม

0 1 2 3 .. 7, 8...



กรณี $N = 8$

$$W_8^0 = W_8^8 = W_8^{16} = W_8^{24} = W_8^{40} \ldots = 1$$
$$W_8^1 = W_8^9 = W_8^{17} = W_8^{25} = W_8^{33} \ldots = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$W_8^2 = W_8^{10} = W_8^{18} = W_8^{26} = W_8^{34} \ldots = -j$$
$$W_8^3 = W_8^{11} = W_8^{19} = W_8^{27} = W_8^{35} \ldots = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$W_8^4 = W_8^{12} = W_8^{20} = W_8^{28} = W_8^{36} \ldots = -1$$
$$W_8^5 = W_8^{13} = W_8^{21} = W_8^{29} = W_8^{37} \ldots = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$W_8^6 = W_8^{14} = W_8^{22} = W_8^{30} = W_8^{38} \ldots = j$$
$$W_8^7 = W_8^{15} = W_8^{23} = W_8^{31} = W_8^{39} \ldots = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} & -j & -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} & j & \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} & j & \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} & -j & -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} & -j & \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} & j & -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} & j & -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} & -j & \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}$$

Example $x[n] = \{\underset{\uparrow}{2},3,4,4,0,0,0,0\}$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} & -j & -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} & j & \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} & j & \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} & -j & -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} & -j & \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} & j & -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} & j & -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} & -j & \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$X[0] = (2)(1) + (3)(1) + (4)(1) + (4)(1) = 13$$

$$X[1] = (2)(1) + (3)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (4)(-j) + (4)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1.29 - j8.94$$

$$X[2] = (2)(1) + (3)(-j) + (4)(-1) + (4)(j) = -2 + j$$

$$X[3] = (2)(1) + (3)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (4)(j) + (4)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2.70 - j0.94$$

$$X[4] = (2)(1) + (3)(-1) + (4)(1) + (4)(-1) = -1$$

$$X[5] = (2)(1) + (3)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (4)(-j) + (4)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2.70 + j0.94$$

$$X[6] = (2)(1) + (3)(j) + (4)(-1) + (4)(-j) = -2 - j$$

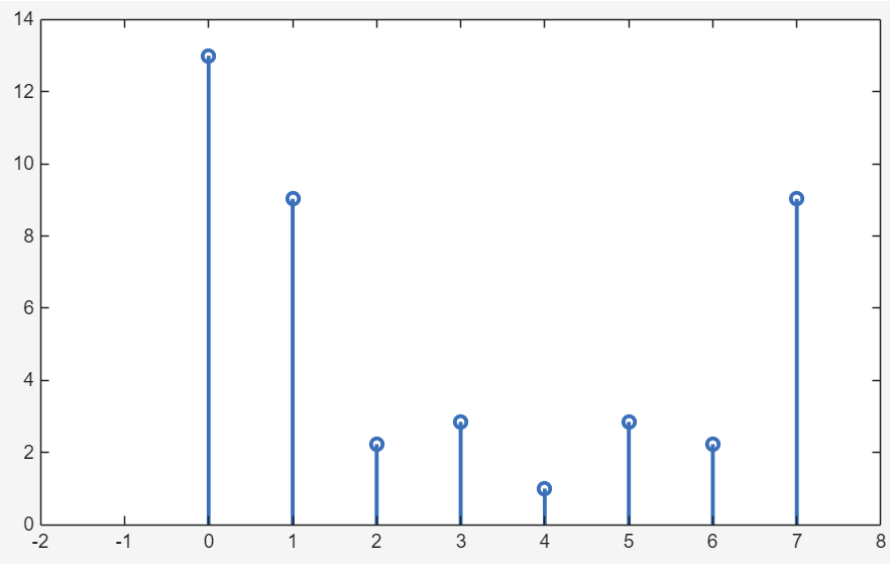
$$X[7] = (2)(1) + (3)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (4)(j) + (4)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1.29 + j8.94$$

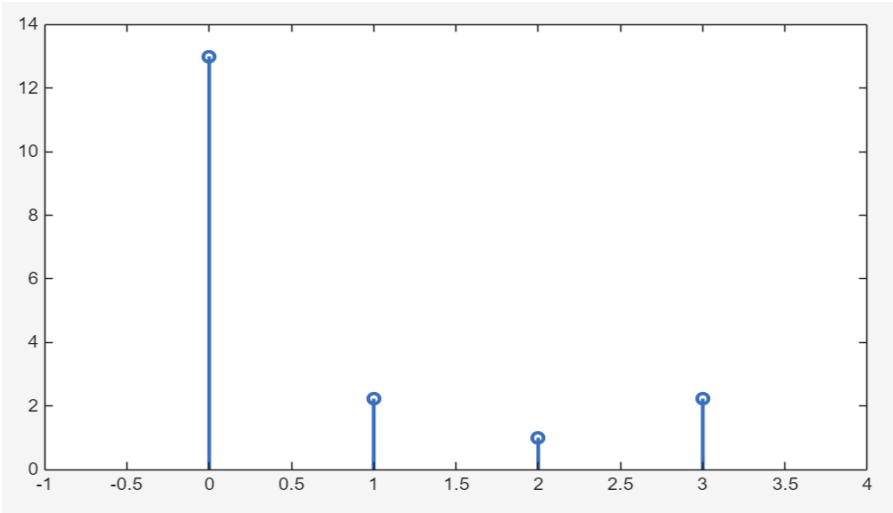
8-DFT จะได้ว่า

$x[n] = \{2,3,4,4,0,0,0,0\}$

$X[k] = \{13, 1.29 - j8.94, -2+\mathrm{j}, 2.70 - j0.94, -1, 2.70 + j0.94, -2-\mathrm{j}, 1.29 + j8.94\}$

พิจารณาขนาด ทำการหาขนาด $|X(k)| = \{13, 9.03, \sqrt{5}, 2.85, 1, 2.85, \sqrt{5}, 9.03\}$





เทียบกับโจทย์ 4-DFTจะได้ว่า

$x[n] = \{2,3,4,4\}$

$X[k] = \{13, -2+\mathrm{j}, -1, -2-\mathrm{j}\}$

$|X(k)| = \{13, \sqrt{5}, 1, \sqrt{5}\}$

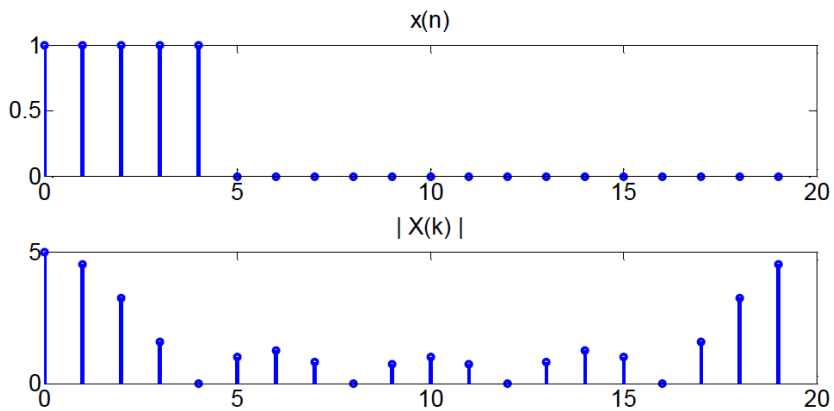
จะเห็นว่า สเปคตรัม

มีความหนาแน่น (density) มากขึ้น

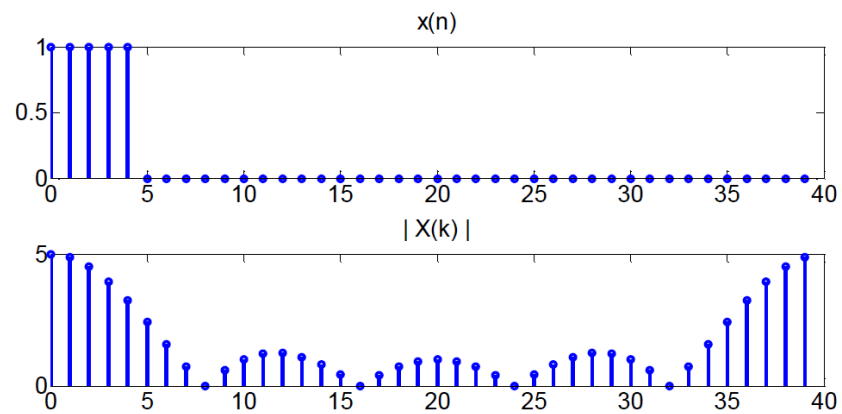
Zero padding

- คือ การเติม 0 เข้าไป เป็นการเติมจุดคำนวณให้มากขึ้น เพื่อช่วย ในการเพิ่ม ความหนาแน่น (density) ของการแสดงสเปคตรัม

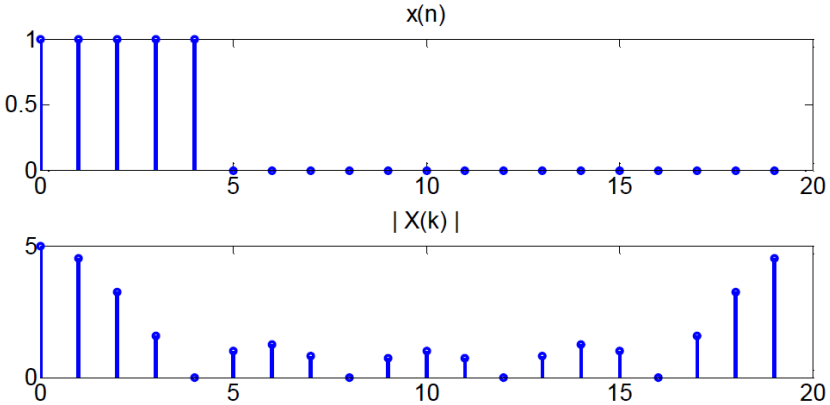
L=5, N=20



L=5, N=40 zero padding

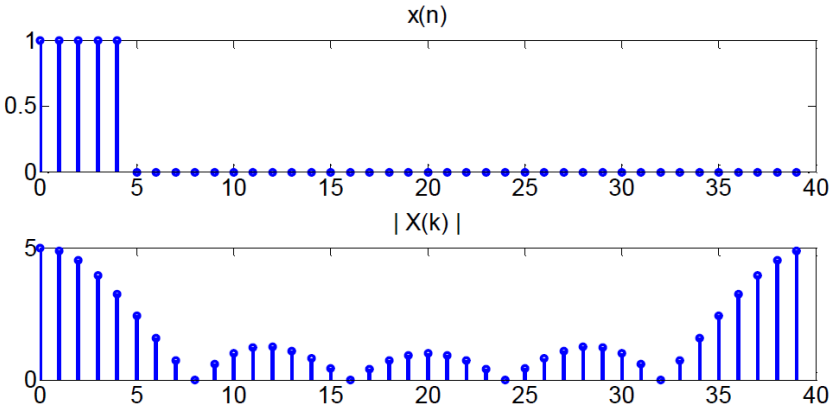


L=5, N=20



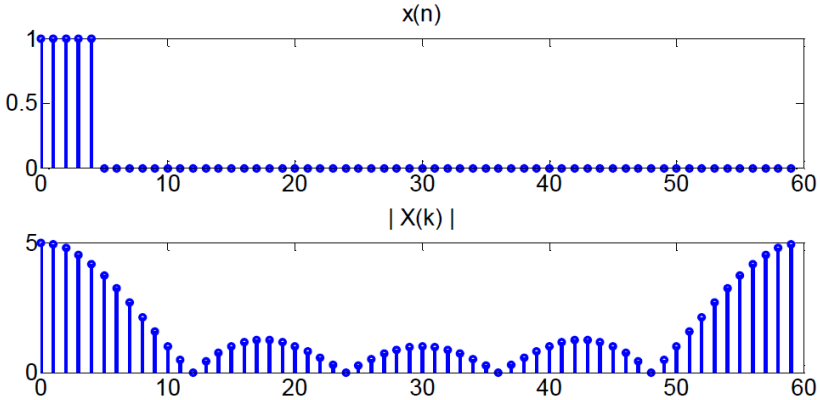
L=5, N=40

zero padding



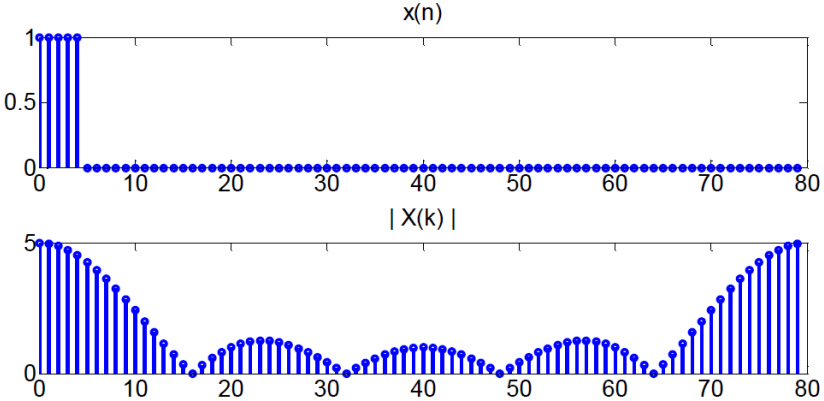
L=5, N=60

zero padding



L=5, N=80

zero padding



ข้อจำกัดการคำนวณ DFT

- จาก Matrix การคำนวณหาค่า DFT
- ถ้าต้องการหา N -point DFT ต้องใช้การคูณ N^2 ครั้ง
- ทำให้การคำนวณใช้เวลานานมาก จึงมีการพัฒนาอัลกอริทึม เพื่อลดขั้นตอนการคำนวณ DFT ให้ไวขึ้น เรียกว่า Fast Fourier Transform (FFT)
- FFT is not a Fourier transform, it is an algorithm for computing the discrete Fourier transform (DFT).

พิจารณากรณี 2-Point DFT

$\boldsymbol{N = 2}$

$$W_N = e^{-j(\frac{2\pi}{N})} \quad \Rightarrow \quad W_2 = e^{-j(\frac{2\pi}{2})} = e^{-j(\pi)} = cos\pi - jsin\pi = -1$$

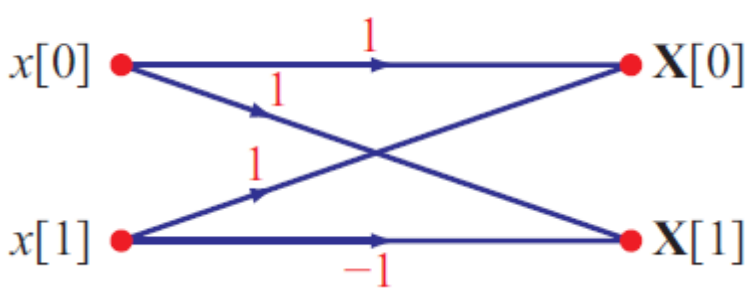
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \quad \Rightarrow \quad X[k] = \sum_{n=0}^{1} x[n](-1)^{kn}$$

$\boldsymbol{k = 0}$, $X[0] = \sum_{n=0}^{1} x[n](j)^{(0)n} = x[0](-1)^{(0)(0)} + x[1](-1)^{(0)(1)}$

$= x[0](1) \quad + x[1](1) \quad = x[0] + x[1]$

$\boldsymbol{k = 1}$, $X[1] = \sum_{n=0}^{1} x[n](j)^{(1)n} = x[0](-1)^{(1)(0)} + x[1](-1)^{(1)(1)}$

$= x[0](1) \quad + x[1](-1) \quad = x[0] - x[1]$



วาด Signal flow graph

ของ 2-point DFT

มีลักษณะเหมือนผีเสื้อ (Butterfly)

พิจารณากรณี 4-Point DFT

$k = 0\,,\quad X[0] = x[0](-j)^{(0)} + x[1](-j)^{(0)} + x[2](-j)^{(0)} + x[3](-j)^{(0)}$

$k = 1\,,\quad X[1] = x[0](-j)^{(0)} + x[1](-j)^{(1)} + x[2](-j)^{(2)} + x[3](-j)^{(3)}$

$k = 2\,,\quad X[2] = x[0](-j)^{(0)} + x[1](-j)^{(2)} + x[2](-j)^{(4)} + x[3](-j)^{(6)}$

$k = 3\,,\quad X[3] = x[0](-j)^{(0)} + x[1](-j)^{(3)} + x[2](-j)^{(6)} + x[3](-j)^{(9)}$

$k = 0\,,\quad X[0] = x[0] + x[1] + x[2] + x[3]$

$k = 1\,,\quad X[1] = x[0] + x[1](-j) - x[2] + x[3](j)$

$k = 2\,,\quad X[2] = x[0] - x[1] + x[2] - x[3]$

$k = 3\,,\quad X[3] = x[0] + x[1](j) - x[2] + x[3](-j)$

$k = 0\,,\quad X[0] = \{\, x[0] + x[2] \,\} + \{\, x[1] + x[3] \,\}$

$k = 2\,,\quad X[2] = \{\, x[0] + x[2] \,\} - \{\, x[1] + x[3] \,\}$

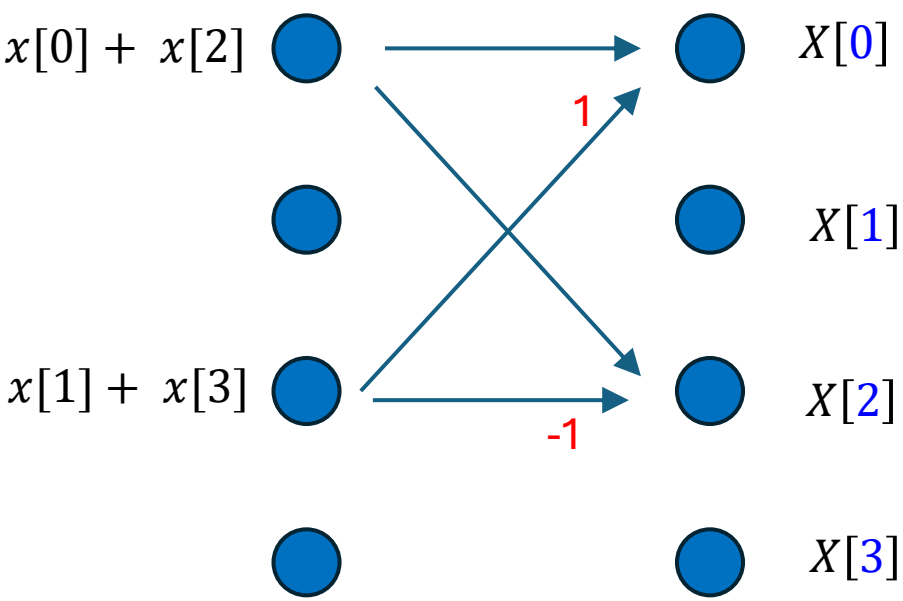
$k = 1\,,\quad X[1] = \{\, x[0] - x[2] \,\} - j\{\, x[1] - x[3] \,\}$

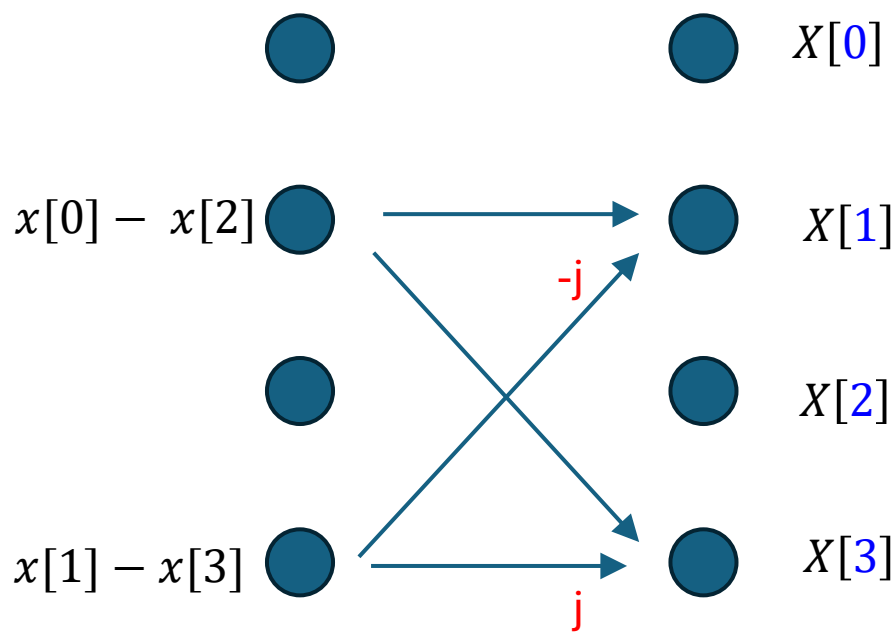
$k = 3\,,\quad X[3] = \{\, x[0] - x[2] \,\} + j\{\, x[1] - x[3] \,\}$

วาด Signal flow graph

$$k = 0\,, \qquad X[0] = \{\,x[0] + \ x[2]\} + \{\,x[1] + \ x[3]\}$$
$$k = 2\,, \qquad X[2] = \{\,x[0] + \ x[2]\} - \{\,x[1] + \ x[3]\}$$

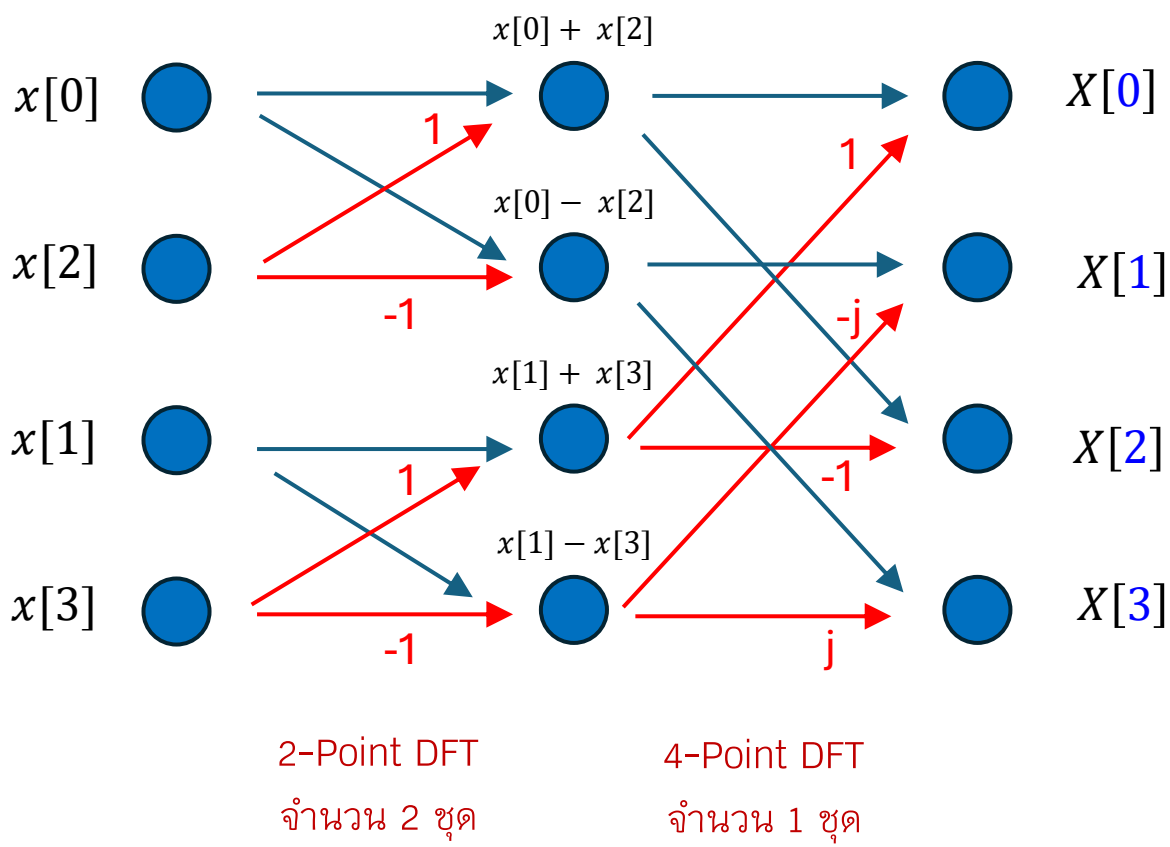
$$k = 1\,, \qquad X[1] \ = \{\,x[0] - \ x[2]\} - j\{\,x[1] - x[3]\}$$
$$k = 3\,, \qquad X[3] \ = \{\,x[0] - \ x[2]\} + j\{\,x[1] - \ x[3]\}$$





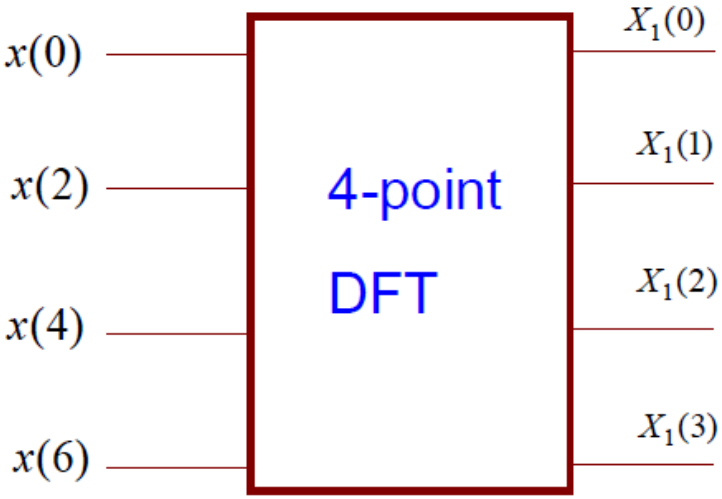
พิจารณากรณี 4-Point DFT

จากหน้าที่แล้ว นำเทอม $x[0] + x[2], x[0] - x[2], x[1] + x[3], x[1] - x[3]$ มาวาด Signal flow graph ต่อ จะได้ดังรูป

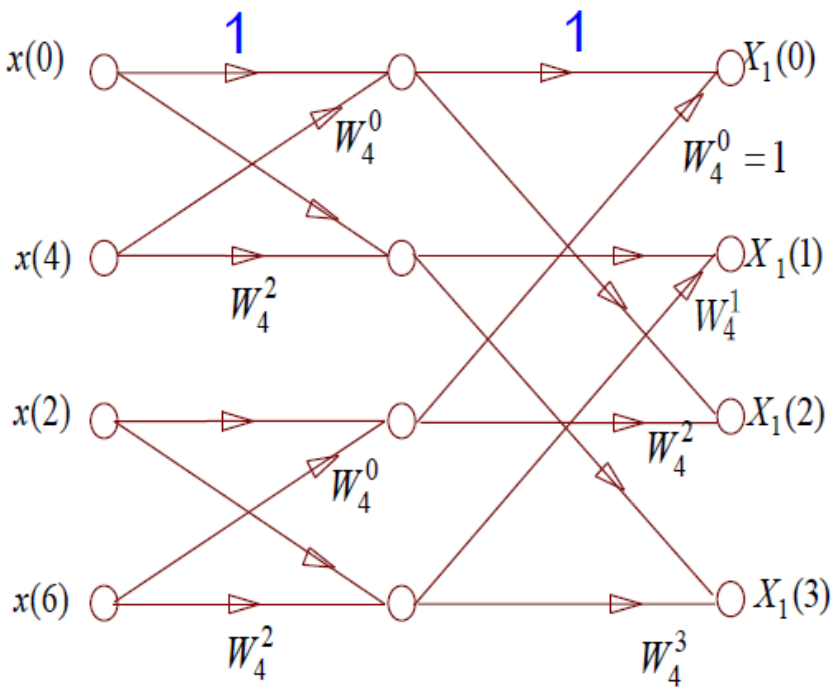


ข้อสังเกต ลำดับของ x[n] และ X[k] จะไม่ตรงกัน แต่ จะมีค่าเป็น bit reversal ของกันและกัน

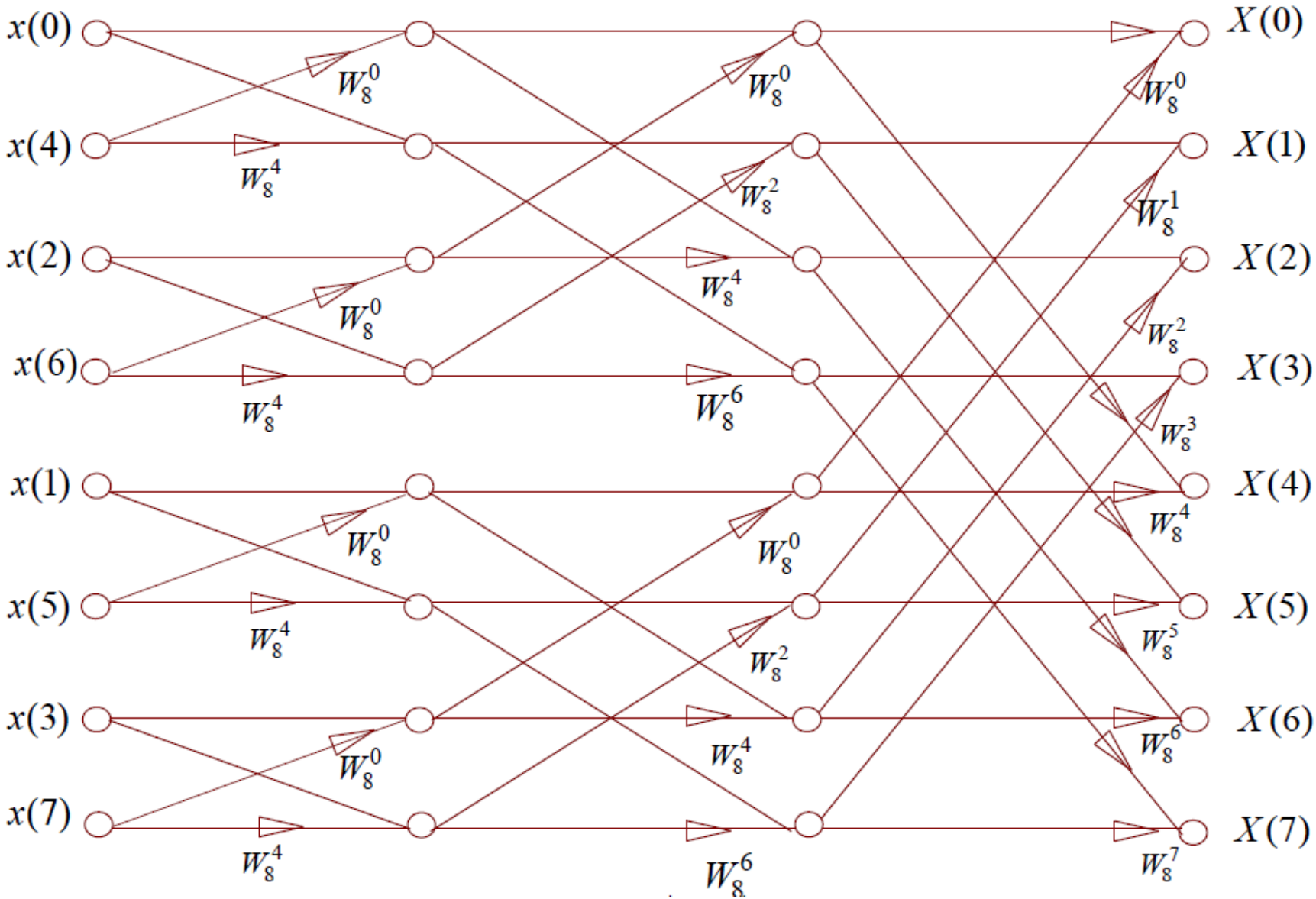
4-Point DFT


x(0)
x(2)
x(4)
x(6)
4-point
DFT
X1(0)
X1(1)
X1(2)
X1(3)

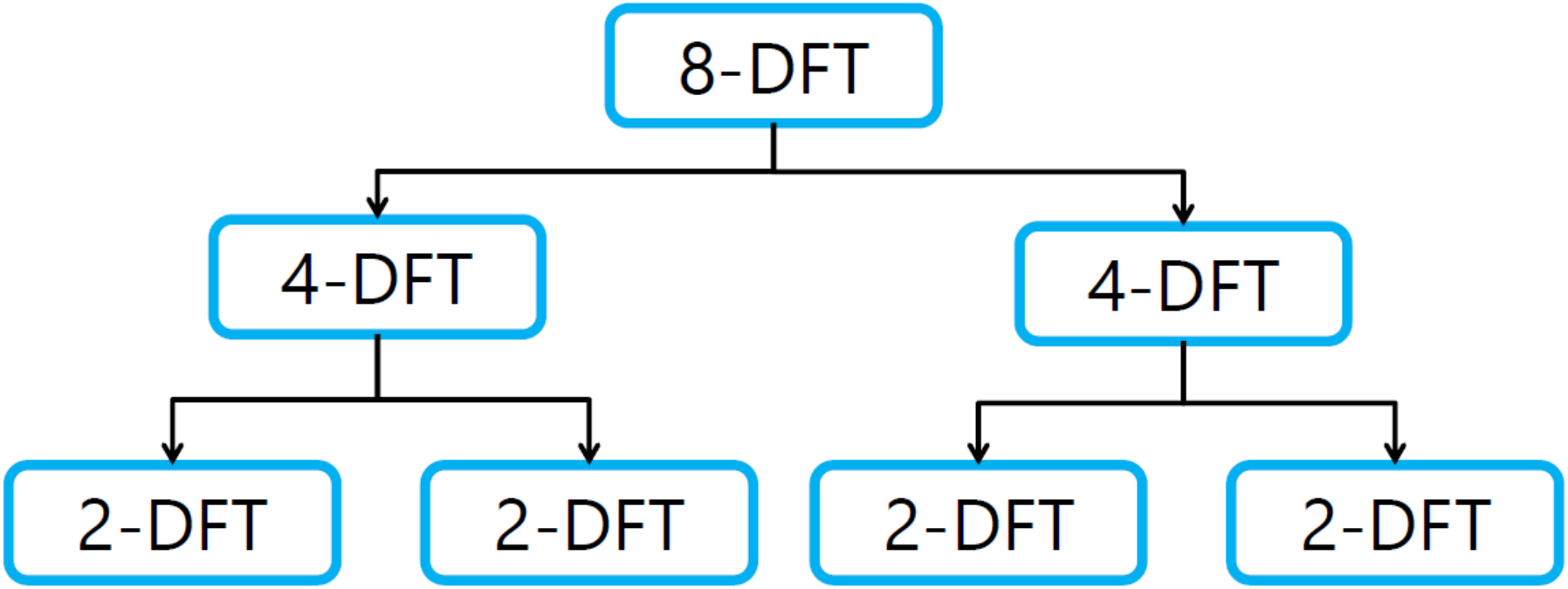
=


x(0)
x(4)
x(2)
x(6)
1
1
W4^0
W4^2
W4^0
W4^2
W4^0 = 1
W4^1
W4^2
W4^3
X1(0)
X1(1)
X1(2)
X1(3)

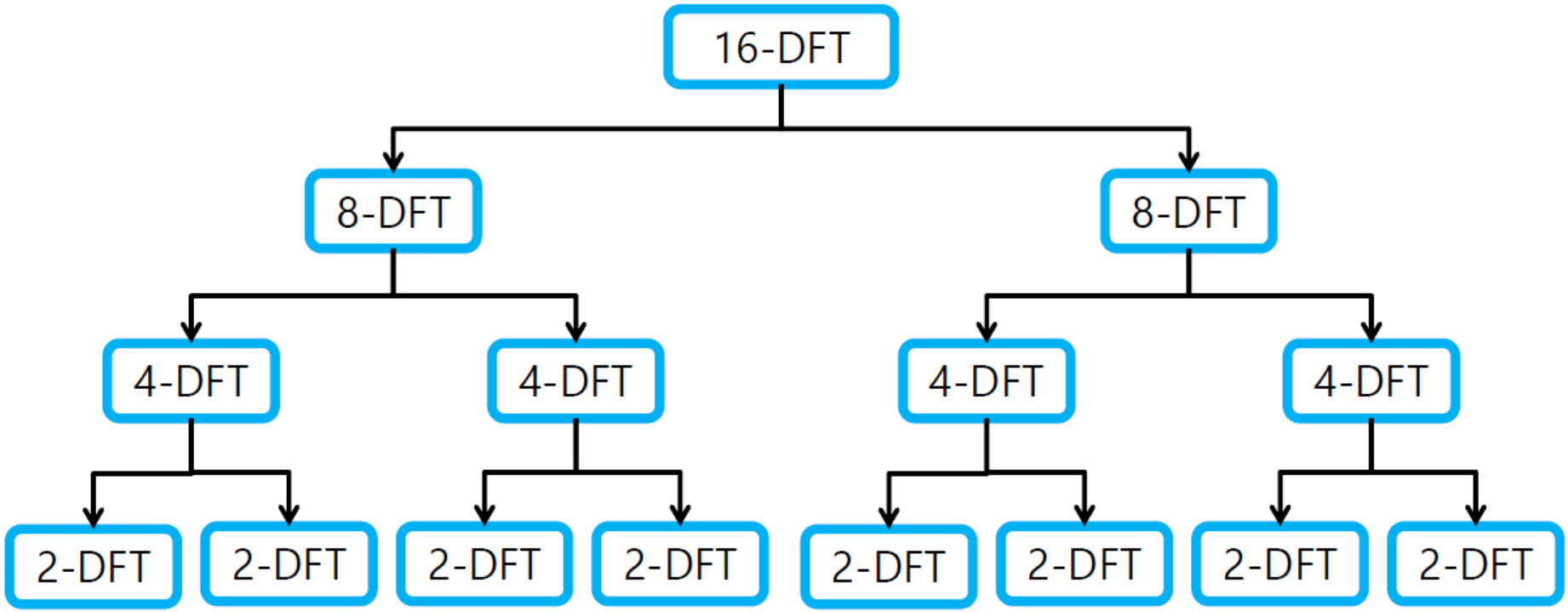
8-Point DFT


x(0)
x(4)
x(2)
x(6)
x(1)
x(5)
x(3)
x(7)
X(0)
X(1)
X(2)
X(3)
X(4)
X(5)
X(6)
X(7)
W_8^0
W_8^4
W_8^0
W_8^4
W_8^0
W_8^4
W_8^0
W_8^4
W_8^0
W_8^2
W_8^4
W_8^6
W_8^0
W_8^2
W_8^4
W_8^6
W_8^0
W_8^1
W_8^2
W_8^3
W_8^4
W_8^5
W_8^6
W_8^7

8-Point DFT



16-Point DFT


16-DFT
8-DFT
8-DFT
4-DFT
4-DFT
4-DFT
4-DFT
2-DFT
2-DFT
2-DFT
2-DFT
2-DFT
2-DFT
2-DFT
2-DFT

Example จงใช้ FFT หา $X[k]$ ของสัญญาณ

$x[n] = \{9, 4, 6, 0, 1, 0, 6, 4\}$

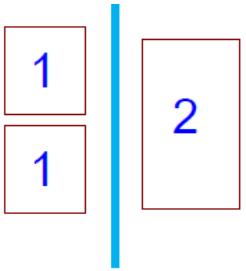
เฉลย $X[k] = \{$30.00, 13.6569 , -2.00 , 2.3431 , 14.00 , 2.3431 ,-2.00, 13.6569 }

Example

Example

Example

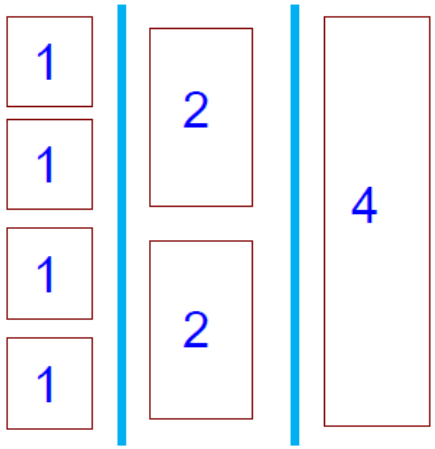
4 point DFT



จำนวน Butterfly ต่อ Sate = 2

จำนวน Stage = 2

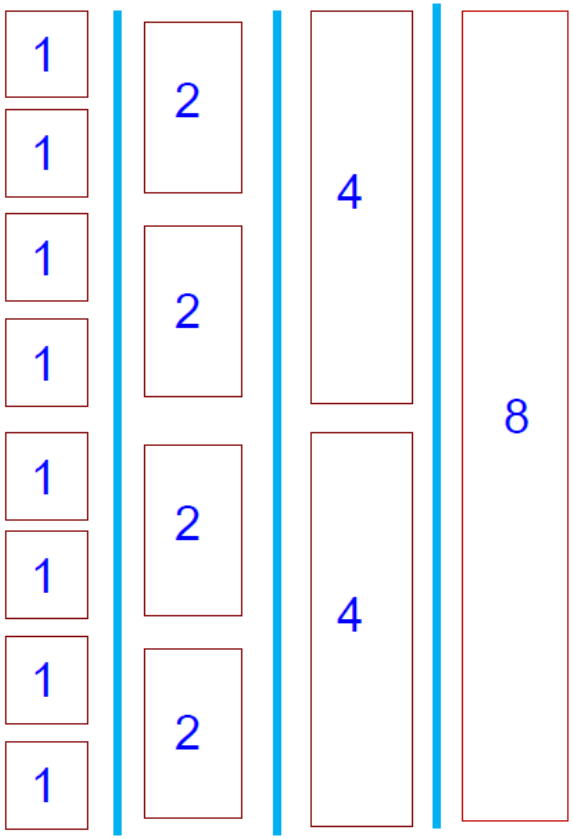
8 point DFT



จำนวน Butterfly ต่อ Sate = 4

จำนวน Stage = 3

16 point DFT



จำนวน Butterfly ต่อ Sate = 8

จำนวน Stage = 4

ประสิทธิภาพของอัลกอริทึม FFT

จำนวนการคูณทั้งหมด

= จำนวน Butterfly ต่อ Stage x จำนวน Stage x จำนวนการคูณต่อ Butterfly

$$= \frac{N}{2} \times \log_2 N \times 2$$

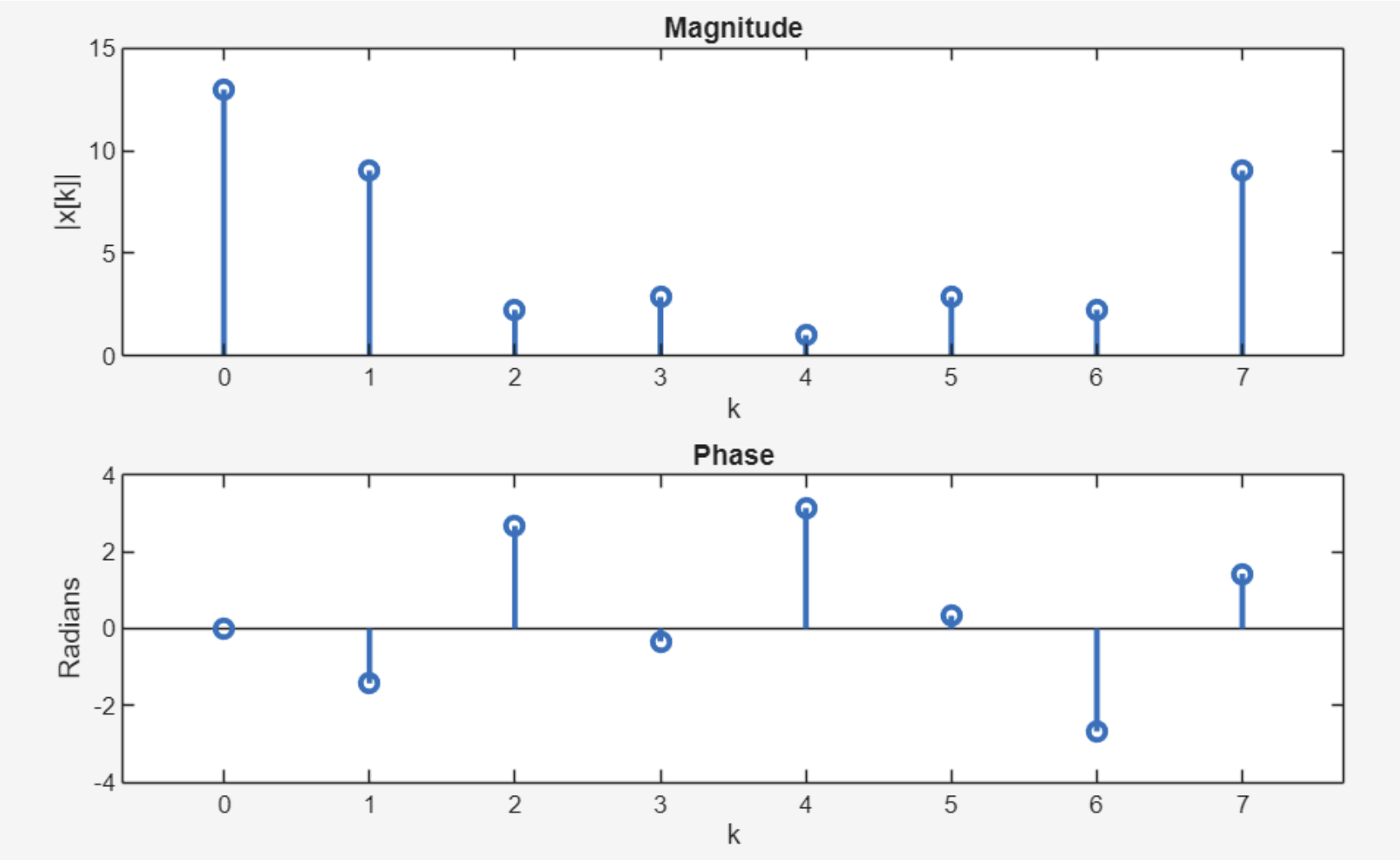
$$= N \log_2 N$$

เปรียบเทียบจำนวนครั้งการคูณ ของ DFT, FFT

N	DFT N^2	FFT $(N \log_2 N)$
2	4	2
4	16	8
8	64	24
:	:	:
256	65,536	2,048
512	262,144	4,608
1,024	1,048,576	10,240

หมายเหตุ ยังมีนักคณิตศาสตร์สามารถ modify butterfly ให้เหลือการคูณเป็น $(N/2)\log_2 N$ ได้อีก

MATLAB code การหา FFT

```
>> x=[2,3,4,4,0,0,0,0];
>> X=fft(x,8);
>> absX = abs(X);
>> Mag = abs(X);
>> Phase = angle(X);
>> N = length(x);
>> subplot(211);
>> stem(0:N-1,Mag,"LineWidth",2);
>> title('Magnitude');
>> ylabel('|x[k]|');
>> xlabel('k')
>> subplot(212);
>> stem(0:N-1,Phase,"LineWidth",2);
>> title('Phase');
>> xlabel('k')
>> ylabel('Radians');
```

MATLAB code การหา FFT