Métodos de diferencias finitas para problemas lineales

Juan Diego Garro
Andrea Valencia Cortés

Los métodos de diferencias finitas para la resolución de problemas con condiciones de frontera, reemplaza cada una de las derivadas en la ecuación diferencial con una aproximación apropiada de diferencia de cocientes.

El tamaño del paso h es elegido para mantener un orden específico de error de truncación. No obstante, h no puede ser un valor muy pequeño, debido a la inestabilidad de las aproximaciones derivadas.

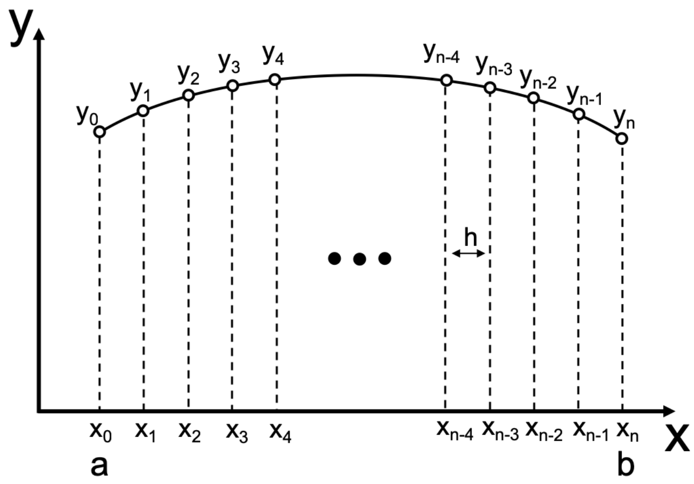
Aproximación discreta

El método de diferencia finita para un problema lineal de segundo orden con condiciones de frontera requiere que la aproximación de diferencia de cociente sea usado para y´ y y´´.

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad \text{for } a \le x \le b, \text{ with } y(a) = \alpha \text{ and } y(b) = \beta,$$

Primero, se divide el intervalo [a,b] en (N+1) subintervalos cuyos puntos finales están en los puntos de la malla xi, para i=0,1,2,3…,N+1

$$h = (b-a)/(N+1) \qquad x_i = a+ih$$



La ecuación diferencial a aproximar se expresa como:

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i)$$

Segundo: Usamos el método de la diferencia centrada para y´´ .

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_1)h^4$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_{-1})h^4,$$

where $x_0 - h < \xi_{-1} < x_0 < \xi_1 < x_0 + h$.

Sumando estas dos ecuaciones obtenemos

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + \frac{1}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})]h^4.$$

Obtenemos el término f’’(x0)

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})].$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi),$$

Fórmula del punto medio de la segunda derivada

Ahora, obtenemos la aproximación de la primera derivada, por medio de la fórmula de (n+1) puntos

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L'_k(x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(x_j - x_k),$$

En este caso, específicamente para 3 puntos tenemos la siguiente expresión

$$f'(x_0 + h) = \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_0 + 2h)\right] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1),$$

En este caso se expande la función y en el tercer polinomio de Taylor sobre xi evaluado en x (i+1) y x (i-1) asumiendo que $y \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^+)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^-)$$

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i), \qquad \xi_i \text{ in } (x_{i-1}, x_{i+1})$$

y para y' obtenemos:

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{6}y'''(\eta_i)$$

Reemplazando los valores de y’ y y’’ en la ecuación (2) obtenemos:

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = p(x_i)\left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}\right] + q(x_i)y(x_i)$$
$$+ r(x_i) - \frac{h^2}{12}\left[2p(x_i)y'''(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)\right]$$

El sistema de ecuaciones lineales se obtiene a partir del método de diferencias finitas con error de truncamiento de orden O(h2). $w_0 = \alpha, \quad w_{N+1} = \beta$

obtenemos

$$\left(\frac{-w_{i+1} + 2w_i - w_{i-1}}{h^2}\right) + p(x_i)\left(\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) + q(x_i)w_i = -r(x_i)$$

$$-\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i-1} + \left(2 + h^2 q(x_i)\right)w_i - \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i+1} = -h^2 r(x_i).$$

$$Aw = b, \quad \text{where} \tag{11.19}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2+h^2q(x_1) & -1+\frac{h}{2}p(x_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1-\frac{h}{2}p(x_2) & 2+h^2q(x_2) & -1+\frac{h}{2}p(x_2) & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1+\frac{h}{2}p(x_{N-1}) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1-\frac{h}{2}p(x_N) & 2+h^2q(x_N) \end{bmatrix},$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad b = \begin{bmatrix} -h^2r(x_1) + \left(1+\frac{h}{2}p(x_1)\right)w_0 \\ -h^2r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2r(x_{N-1}) \\ -h^2r(x_N) + \left(1-\frac{h}{2}p(x_N)\right)w_{N+1} \end{bmatrix}.$$

Para solucionar el sistema de ecuaciones, se desarrolla el método de factorización de la matriz tridiagonal . A=LU

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The multiplication involved with $A = LU$ gives, in addition to the 0 entries

$$a_{11} = l_{11};$$

$$a_{i,i-1} = l_{i,i-1}, \quad \text{for each } i = 2, 3, \ldots, n;$$

$$a_{ii} = l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii}, \quad \text{for each } i = 2, 3, \ldots, n;$$

and

$$a_{i,i+1} = l_{ii}u_{i,i+1}, \quad \text{for each } i = 1, 2, \ldots, n-1.$$