Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Parabólicas

Camilo Gómez Zapata - Física Computacional II

Ecuación de difusión

Se parte de esta ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

Teniendo estas condiciones de frontera:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0, \qquad u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Tres métodos de solución

- Forward Difference
- Backward Difference
- Crank Nicolson

- División en espacio:

  $m > 0$ paso en x => $h = l/m$

- División en tiempo:

  paso en t => k

Forward Difference

Se definen derivadas usando expansión en Taylor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

Y se reemplazan en difusión where w_{ij} approximates $u(x_i, t_j)$

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

Al despejar j+1:

$$w_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{ij} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}(w_{i+1,j} + w_{i-1,j})$$

De esto sale la solución aproximada:

$$\mathbf{w}^{(j)} = A\mathbf{w}^{(j-1)}, \quad \text{for each } j = 1, 2, \ldots,$$

Con A siendo:

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix}, \quad \text{where } \lambda = \alpha^2(k/h^2)$$

Forward Difference - Estabilidad

Este método es condicionalmente estable. Sea **e** el error:

$$\mathbf{w}^{(1)} = A\left(\mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{e}^{(0)}\right) = A\mathbf{w}^{(0)} + A\mathbf{e}^{(0)}$$

El error crece en cada paso n de la forma:

$$A^n\mathbf{e}^{(0)}$$

Para que siempre en cada paso sea menor se debe cumplir:

$$||A^n|| \leq 1$$

Sacando los autovalores y operando, se puede comprobar que la estabilidad se cumple cuando:

$$\alpha^2 \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Backward Difference

Esta vez se usa esta expresión para la primera derivada:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

Y esto resulta en esta ecuación:

$$\frac{w_{ij} - w_{i,j-1}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

Que resulta en la ecuación:

$$(1 + 2\lambda)w_{ij} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1}$$

De donde se obtiene esta matriz:

$$\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}$$

La cual tiene esta forma:

$$A\mathbf{w}^{(j)} = \mathbf{w}^{(j-1)}$$

Por lo que se vuelve necesario un sistema de solución de ecuaciones lineales para despejar $\mathbf{w}^{(j)}$

Crank-Nicolson

Consiste en promediar el forward con el backward. Es decir, estos:

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0,$$

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} = 0$$

se convierten en esto:

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{k} - \frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2}\right] = 0$$

Esto se puede representar en esta forma matricial:

$$A\mathbf{w}^{(j+1)} = B\mathbf{w}^{(j)}, \quad \text{for each } j = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde las matrices A y B son:

$$A = \begin{bmatrix} (1+\lambda) & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & (1+\lambda) \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} (1-\lambda) & \frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\lambda}{2} & (1-\lambda) \end{bmatrix}$$