



BOTELLAS OSCILANTES, MEDIO VACÍAS O MEDIO LLENAS: CARACTERIZACIÓN DEL MOVIMIENTO OSCILANTE

Facultad de Ciencias, Escuela de Física

Universidad Industrial de Santander

Realizado por:

Jose Mario Castillo Muñoz

Juan José Camacho Olmos

Omar David Cote Chacón

Resumen

Se presenta un estudio experimental y teórico del movimiento oscilante de una botella parcialmente llena de líquido al rodar sobre una superficie plana. Se utilizó análisis de video con el software Tracker y procesamiento de datos en Python para extraer posiciones y velocidades, identificando oscilaciones reales y cuantificando su número y duración. Paralelamente, se desarrolló un modelo lagrangiano simplificado que incorpora la dinámica acoplada de la botella y el líquido como masa puntual deslizante con amortiguamiento viscoso. Los resultados muestran un buen acuerdo cualitativo: la mayor viscosidad del aceite atenúa las oscilaciones y acelera el retorno al reposo, mientras que el agua, menos viscosa, prolonga el régimen oscilatorio. El porcentaje de llenado también influye en la inercia efectiva y la disipación de energía.

1. Introducción

El estudio del movimiento oscilatorio de líquidos en recipientes en movimiento —conocido comúnmente como *sloshing*— reviste gran importancia en múltiples aplicaciones de ingeniería y física, desde el diseño de tanques de combustible en vehículos aeroespaciales hasta el comportamiento dinámico de bidones y botellas transportados o agitados. Cuando una botella parcialmente llena rueda o vibra, el líquido interno no se comporta como un cuerpo rígido, sino que genera fuerzas internas que pueden amplificar o amortiguar el movimiento global del sistema. Comprender esta interacción fluido-sólido resulta esencial para predecir y controlar fenómenos de inestabilidad, ruido y desgaste mecánico.

En la literatura, se han abordado modelos que van desde descripciones simplificadas de masa puntual acoplada a un resorte viscoso hasta formulaciones completas de mecánica de fluidos con métodos numéricos avanzados (por ejemplo, simulaciones CFD del *sloshing* en tanques)[1][2]. No obstante, para muchos fines educativos y experimentales resulta más accesible y didáctico emplear un modelo lagrangiano unidimensional que capture los efectos de inercia, amortiguamiento interno y acoplamiento entre el líquido y la botella. Este enfoque permite derivar ecuaciones de movimiento de forma analítica y, al mismo tiempo, confrontarlas con resultados experimentales sencillos obtenidos por análisis de vídeo.

En este trabajo proponemos un modelo teórico basado en la formulación lagrangiana con un término efectivo de amortiguamiento interno, y lo validamos mediante un experimento casero: botellas de vidrio llenas parcialmente con agua o aceite rodando sobre una superficie plana. El experimento se registra a alta frecuencia (120 fps) y se analiza con el software *Tracker* para extraer la trayectoria del centro de masa. Finalmente, se procesan los datos en Python para comparar la dinámica real con las predicciones del modelo y evaluar el papel de la viscosidad y el porcentaje de llenado en la amplitud y amortiguamiento de las oscilaciones.

2. Objetivos

2.1. Objetivo general

Estudiar cómo se mueve una botella con líquido cuando rueda sobre una superficie y cómo la fricción interna y la viscosidad afectan ese movimiento.

2.2. Objetivos específicos

- Crear un modelo inicial en el que el líquido se comporte como una masa rígida con fricción interna.
- Diseñar y llevar a cabo un experimento para medir la velocidad de la botella en función del tiempo.
- Analizar cómo cambia la magnitud de las oscilaciones dependiendo de la cantidad de líquido en la botella.
- Refinar el modelo teórico incluyendo efectos más detallados de la viscosidad y otros parámetros físicos del líquido.

3. Marco Teórico

El fenómeno de *sloshing* o batido de fluidos en recipientes móviles se produce cuando el líquido con superficie libre genera ondas internas que intercambian energía con el movimiento del contenedor. Estas oscilaciones libres del fluido pueden describirse, en su forma más general, mediante las ecuaciones de Navier–Stokes con condiciones de contorno dinámicas en la superficie libre y en las paredes del recipiente. Sin embargo, para pequeñas amplitudes y geometrías simples (como un cilindro), es posible capturar las características esenciales del comportamiento mediante modelos linealizados de ondas superficiales[1, 2].

3.1. Frecuencias propias de sloshing en cilindros

En un cilindro de radio R y altura de líquido H , los modos propios de la superficie libre satisfacen

$$\omega_n^2 = \frac{\alpha_n g}{R} \tanh(\alpha_n H/R),$$

donde α_n es la n -ésima raíz de la ecuación de Bessel $J_1'(\alpha) = 0$. El modo fundamental ($n = 1$) domina la dinámica, con un período típico

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \approx 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \tanh(H/R)}}.$$

Este valor da una estimación del “resorte” efectivo que el fluido ejerce contra el contenedor móvil.

3.2. Modelo unidimensional masa–muelle–amortiguador

Para confrontar con un experimento casero, se simplifica el sistema a dos grados de libertad:

- La traslación horizontal de la botella (masa m_b).
- El desplazamiento relativo del líquido (masa m_f) respecto al vaso, sujeto a una fuerza restauradora lineal.

Bajo esta aproximación, la energía potencial asociada al fluido puede escribirse como

$$U_f = \frac{1}{2} k_{\text{eff}} (x_f)^2 \quad \text{con} \quad k_{\text{eff}} \approx \frac{2 m_f g}{H},$$

y la disipación viscosa se modela mediante una fuerza $F_d = c(\dot{x}_f - \dot{x}_b)$, donde c es un coeficiente efectivo proporcional a la viscosidad del fluido.

3.3. Acoplamiento dinámico y amortiguamiento

Aplicando el formalismo lagrangiano más una función de disipación de Rayleigh, se obtienen las ecuaciones acopladas

$$\begin{cases} m_b \ddot{x}_b + c(\dot{x}_b - \dot{x}_f) + k_{\text{eff}}(x_b - x_f) = 0, \\ m_f \ddot{x}_f + c(\dot{x}_f - \dot{x}_b) + k_{\text{eff}}(x_f - x_b) = 0. \end{cases}$$

De allí surgen dos modos normales: uno de movimiento conjunto (frecuencia baja, débil oscilación relativa) y otro de contramovimiento (frecuencia próxima a ω_1). La viscosidad del líquido (μ) influye en c , de modo que líquidos más viscosos (aceite) presentan amortiguamiento más fuerte y oscilaciones reducidas, mientras que fluidos de baja viscosidad (agua) permiten mayor desacoplamiento y oscilaciones prolongadas.

3.4. Efecto del porcentaje de llenado

El porcentaje de llenado modifica simultáneamente m_f , H y la geometría libre, alterando tanto k_{eff} como el momento de inercia efectivo del fluido. Así, un llenado mayor tiende a aumentar la inercia y reducir la frecuencia de oscilación, mientras que el amortiguamiento relativo ($\zeta = c / \sqrt{4 m_{\text{tot}} k_{\text{eff}}}$) puede variar de forma no lineal con la altura del líquido.

4. Materiales

Para llevar a cabo el experimento se emplearon los siguientes elementos:

- **Botellas cilíndricas de plástico (x2):**

- Diámetro interior: 4.5cm
- Altura total: 16.5cm
- Tapón roscado de plástico

- **Líquidos de prueba:**

- Agua destilada
- Aceite vegetal

- **Superficie plana:** tablero de madera lisa

- **Cámara de video:** grabación a 120fps

- **Software:**

- *Tracker* para análisis de posición
- Script en Python para procesamiento de datos



(a) Dos botellas vacías, idénticas (4.5cm × 16.5cm).



(b) Aceite vegetal.

Figura 1: Materiales principales empleados en el experimento.

5. Metodología

El experimento se realizó grabando el desplazamiento de una botella (500 mL) con diferentes porcentajes de llenado (25% y 50%) de agua o aceite, usando una cámara a 120 fps. El análisis de video se llevó a cabo con el software *Tracker* (ver Fig. 2), extrayendo la posición horizontal $x(t)$ del centro de masa. Los datos se exportaron a Python para:

1. Suavizar la señal de posición mediante un filtro de media móvil.
2. Calcular la velocidad $v(t)$ por diferencias finitas:

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2 \Delta t}$$

3. Detectar cruces por cero de $v(t)$ con amplitud mínima para discriminar ruido y contar oscilaciones.
4. Cuantificar el número de oscilaciones y la duración del régimen oscilatorio.

Para el procesamiento de datos se utilizó un script en Python cuyos filtros son totalmente ajustables para identificar las oscilaciones reales. El código completo puede descargarse desde:

[Código de análisis en Python](#)

A continuación se presenta el script utilizado:

```
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# --- AJUSTES DE FILTRO ---
ventana = 5 # ventana de media móvil [muestras]
umbral_amplitud = 0.06 # velocidad mínima para contar oscilación [m/s]
tiempo_minimo = 0.05 # separación mínima entre oscilaciones [s]

def analizar_archivo(nombre_archivo):
    """
    Carga un .txt con columnas t;x,
    aplica suavizado, calcula velocidad,
    detecta oscilaciones y grafica resultados.
    """
    # 1) Carga de datos
    df = pd.read_csv(
        nombre_archivo, sep=';', skiprows=1,
        names=['t', 'x'], usecols=[0,1]
    ).dropna()

    # 2) Suavizado de la posición
    df['x_smooth'] = df['x'].rolling(
        window=ventana, center=True
    ).mean().dropna()
    df = df.dropna(subset=['x_smooth'])

    # 3) Cálculo de la velocidad
    df['v'] = np.gradient(df['x_smooth'], df['t'])

    # 4) Detección de cruces por cero
    signos = np.sign(df['v'])
    cruces = np.where(np.diff(signos) != 0)[0]
    osc_times = []
    last_t = -np.inf
    for idx in cruces:
        t0 = df.iloc[idx]['t']
        amp = abs(df.iloc[idx]['v'])
        if amp >= umbral_amplitud and (t0 - last_t) >= tiempo_minimo:
            osc_times.append(t0)
            last_t = t0

    # 5) Resultados numéricos
    num_osc = len(osc_times)
    duracion = (
        osc_times[-1] - osc_times[0]
        if num_osc >= 2 else 0.0
    )
    print(f"Archivo: {nombre_archivo}")
    print(f"Número de oscilaciones reales: {num_osc}")
    print(f"Duración del régimen oscilatorio: {duracion:.3f} s")

    # 6) Gráficas
    fig, axs = plt.subplots(2, 1, figsize=(8,6), sharex=True)
    # Posición
    axs[0].plot(df['t'], df['x'], alpha=0.4, label='posición cruda')
    axs[0].plot(df['t'], df['x_smooth'], label='posición suavizada')
    axs[0].set_ylabel('x [m]')
    axs[0].legend()
    # Velocidad
    axs[1].plot(df['t'], df['v'], label='velocidad')
    axs[1].axhline(0, color='k', lw=0.5)
    for t0 in osc_times:
        axs[1].axvline(t0, color='r', ls='--', alpha=0.7)
    axs[1].set_ylabel('v [m/s]')
    axs[1].set_xlabel('t [s]')
    axs[1].legend()
    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

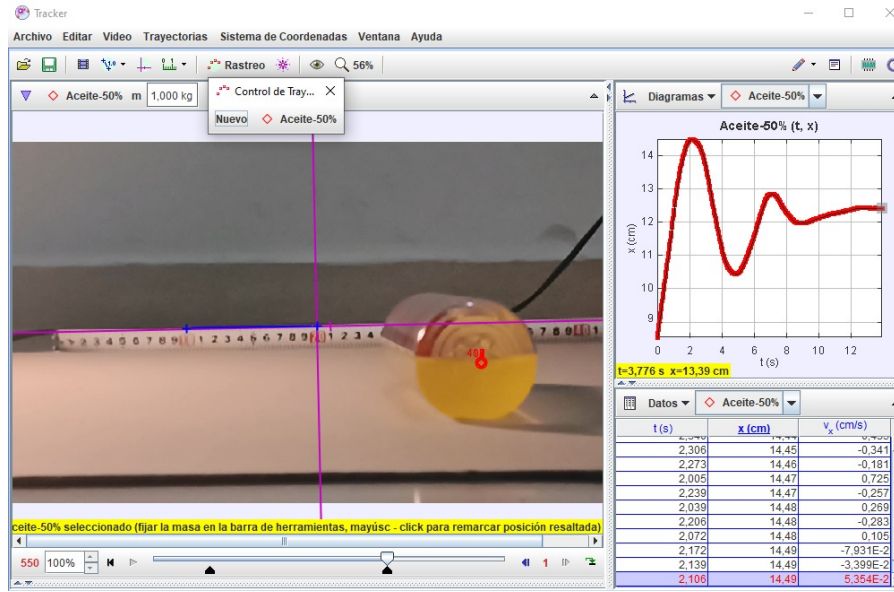


Figura 2: Entorno de Tracker para el análisis de una botella con aceite al 50 % de llenado.

6. Modelo Teórico

A continuación se detalla el modelo lagrangiano simplificado, que considera la botella como un cilindro rígido de masa M y momento de inercia I , y el fluido como una masa puntual m que puede deslizarse con amortiguamiento viscoso b .

6.1. Descripción del modelo

Se define el ángulo θ de rotación de la botella respecto a la vertical y el ángulo relativo δ del fluido con respecto al cuerpo. El radio interno efectivo se denota R . El sistema se ilustra en la Fig. 3.

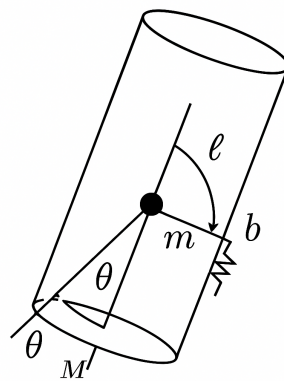


Figura 3: Esquema del modelo simplificado: botella y masa puntual deslizante.

6.2. Lagrangiano del sistema

El Lagrangiano $L = T - V$ se construye con:

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta} + \dot{\delta})^2, \quad V = mgR(1 - \cos(\theta + \delta)).$$

Entonces:

$$L = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta} + \dot{\delta})^2 - mgR(1 - \cos(\theta + \delta)).$$

Aplicando las ecuaciones de Euler–Lagrange y añadiendo términos de amortiguamiento viscoso b_θ y b_δ , se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$(I + mR^2)\ddot{\theta} + mR^2\ddot{\delta} + b_\theta\dot{\theta} = 0,$$

$$mR^2(\ddot{\theta} + \ddot{\delta}) + mgR\sin(\theta + \delta) + b_\delta\dot{\delta} = 0.$$

Para pequeños ángulos, $\sin(\theta + \delta) \approx \theta + \delta$, y el sistema linealizado describe oscilaciones amortiguadas acopladas. Estas ecuaciones se pueden resolver numéricamente con el mismo script en Python mencionado.

7. Análisis de Datos

El análisis del experimento se realizó a partir de videos grabados con una cámara a 120 fps, donde se observaba el movimiento oscilatorio de una botella parcialmente llena de agua o aceite desplazándose sobre una superficie plana. Para obtener las variables físicas relevantes, se utilizó el software *Tracker*, con el cual se extrajeron las posiciones horizontales $x(t)$ del centro de masa del sistema.

Posteriormente, los datos fueron exportados y procesados con Python, donde se recalculó la velocidad $v(t)$ utilizando diferencias finitas a partir de la posición suavizada. La decisión de calcular la velocidad manualmente, en lugar de usar directamente la proporcionada por *Tracker*, se basó en la necesidad de eliminar errores puntuales producidos por el seguimiento manual cuadro a cuadro.

Para identificar las oscilaciones reales, se consideraron únicamente los cruces por cero de la velocidad que cumplan dos condiciones:

1. Un cambio claro de signo.
2. Una amplitud mínima de velocidad y tiempo para evitar contar ruido como oscilación.

Finalmente, se cuantificó:

- El número total de oscilaciones observadas.
- El tiempo transcurrido entre la primera y la última oscilación, es decir, el tiempo desde el comienzo del movimiento oscilatorio, hasta que el sistema quede totalmente quieto (o hasta que el sistema deje de mostrar oscilaciones detectables).

8. Resultados

En la siguiente tabla se resumen los resultados obtenidos para los cuatro casos más representativos, seleccionados por la claridad en la visualización del fenómeno:

Archivo	Líquido	% Llenado	Oscilaciones	Duración [s]	Observaciones
aceite-25	Aceite	25 %	2	5.882	Oscilaciones bien definidas
aceite-25_5	Aceite	25 %	2	8.589	Movimiento suave, regular
aceite-50	Aceite	50 %	3	6.718	Oscilación más lenta y amortiguada
agua-25_2	Agua	25 %	5	12.533	Mayor turbulencia, inestabilidad

Cuadro 1: Resumen de resultados para los casos más representativos

En las Figuras 4 a 7 se presentan las gráficas de posición y velocidad para cada uno de los casos seleccionados. En ellas se puede observar con claridad cómo el tipo de fluido y la cantidad de llenado influyen directamente en la

dinámica oscilatoria. Por ejemplo, el uso de aceite produce un comportamiento más estable, con oscilaciones bien definidas, mientras que el agua introduce irregularidades debido a comportamientos turbulentos internos.

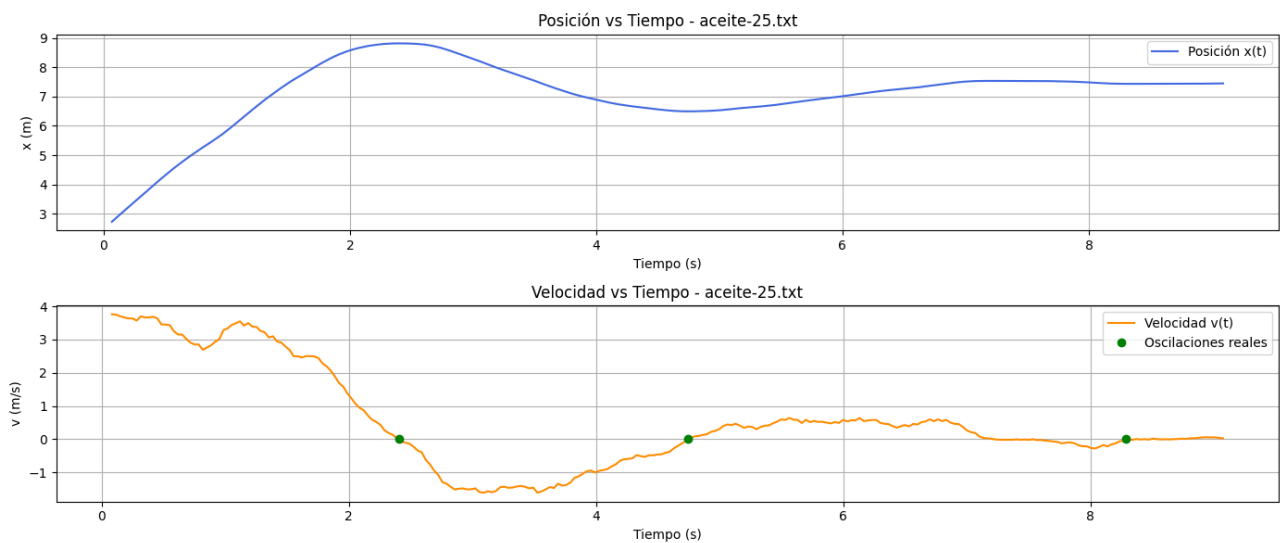


Figura 4: Evolución temporal de la posición y velocidad para el caso de aceite a 25 % de llenado.

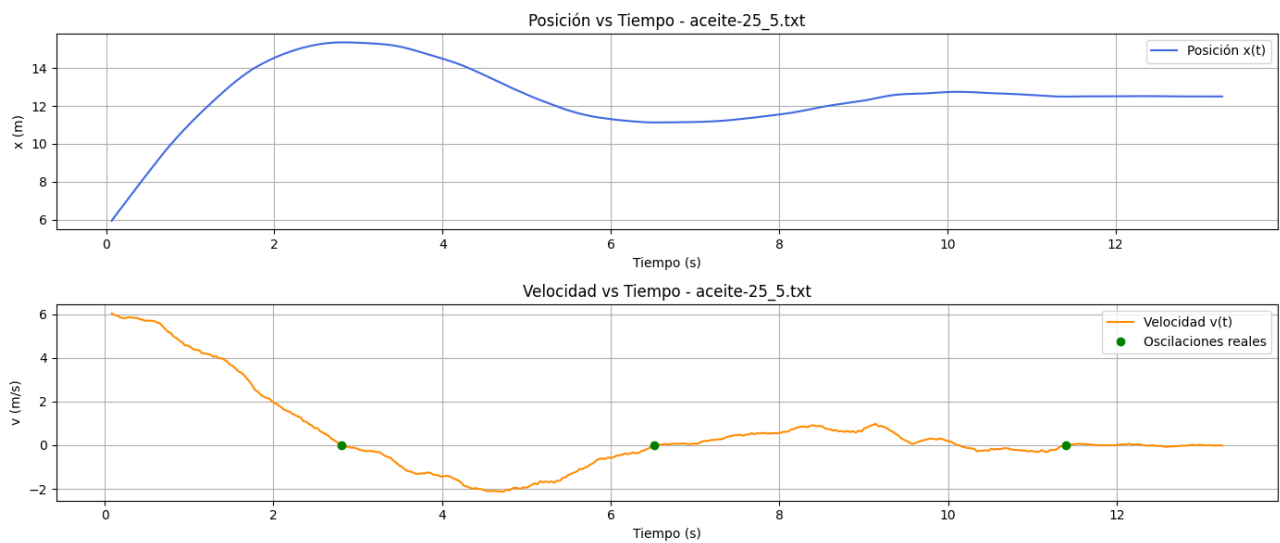


Figura 5: Evolución temporal de la posición y velocidad para el caso de aceite a 25 % de llenado.

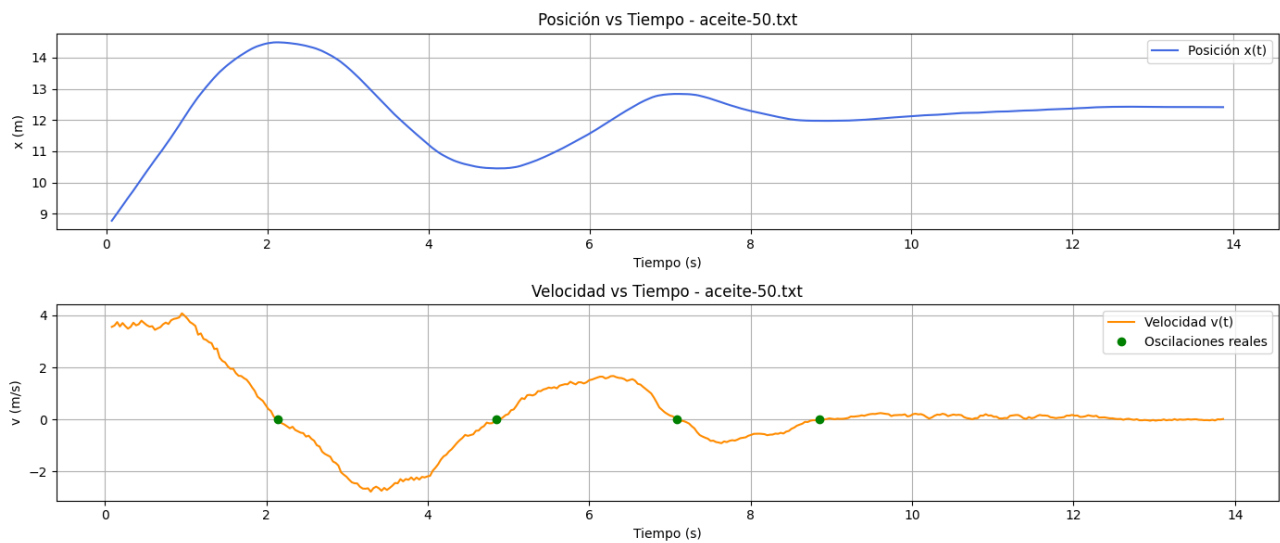


Figura 6: Evolución temporal de la posición y velocidad para el caso de aceite a 50% de llenado.

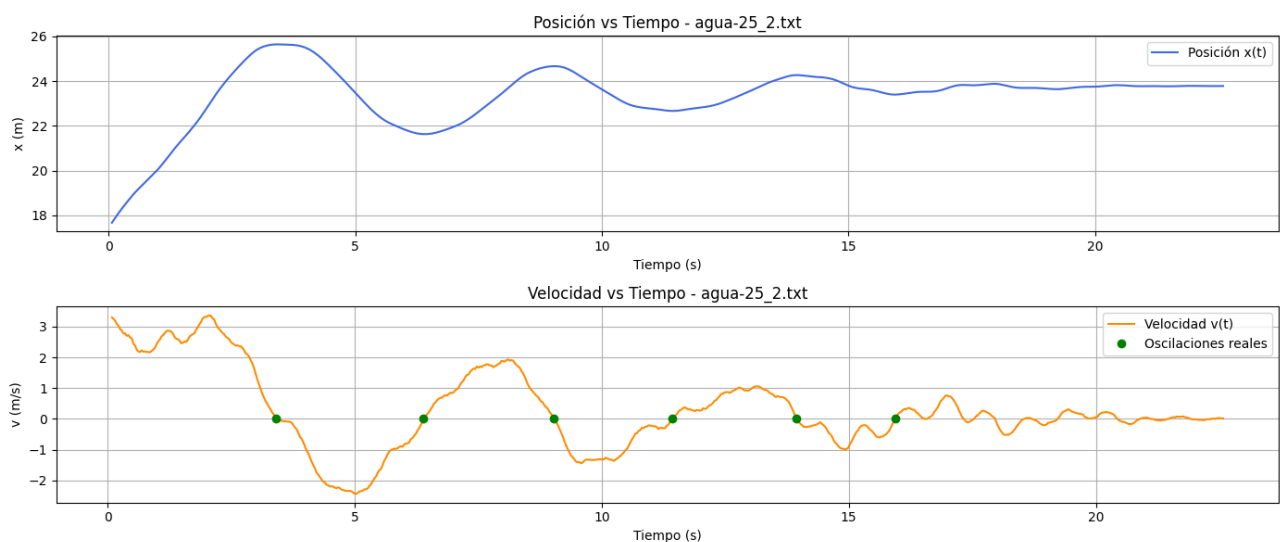


Figura 7: Evolución temporal de la posición y velocidad para el caso de agua a 25% de llenado.

9. Análisis de Resultados

El análisis cuantitativo permitió identificar cómo el tipo de líquido y el porcentaje de llenado afectan el comportamiento oscilatorio del sistema botella-líquido. A partir de los datos extraídos y del procesamiento realizado con Python, se observaron patrones consistentes que reflejan la naturaleza dinámica del sistema.

En general, los casos con aceite mostraron un número reducido de oscilaciones, con trayectorias suaves, bien definidas y un retorno progresivo al reposo. Esto se interpreta como consecuencia de la mayor viscosidad del aceite, la cual produce un acoplamiento más fuerte entre el fluido interno y la botella, reduciendo así las oscilaciones relativas.

Por otro lado, el caso con agua presentó un número mayor de oscilaciones y una mayor duración del régimen oscilatorio. Este comportamiento más prolongado y menos regular puede explicarse por el carácter menos viscoso del agua, lo que facilita la aparición de flujo interno y desacoplamiento dinámico con la botella.

Además, se logró identificar que un mayor porcentaje de llenado incrementa ligeramente la duración del régimen

oscilatorio, aunque no necesariamente el número de oscilaciones. Esto sugiere que el líquido, al ocupar más volumen, responde con más inercia y genera una transición más lenta o suave hacia el reposo, pero sin llegar a oscilar más veces.

En conjunto, estos resultados experimentales están en buena concordancia cualitativa con el modelo dinámico lagrangiano propuesto, donde el sistema puede pasar de un régimen desacoplado (oscilante) a uno acoplado (movimiento conjunto) dependiendo de la energía inicial, la masa del líquido, y la interacción interna.

10. Conclusiones

- Se verificó experimentalmente que el sistema botella-líquido presenta un comportamiento oscilatorio tras una excitación inicial, y que este comportamiento depende fuertemente del tipo de fluido y la cantidad de este.
- Los líquidos más viscosos, como el aceite, reducen la cantidad de oscilaciones y aceleran el retorno al reposo, mientras que líquidos menos viscosos, como el agua, generan oscilaciones más prolongadas y con mayor irregularidad.
- Un mayor porcentaje de llenado incrementa la duración del régimen oscilatorio, aunque no necesariamente el número de oscilaciones. Esto sugiere que la energía se disipa de forma más gradual, pero la dinámica sigue dominada por el tipo de fluido.
- La metodología desarrollada para calcular manualmente la velocidad a partir de posiciones, y detectar oscilaciones mediante el cambio de signo de la velocidad, permitió identificar con precisión las oscilaciones reales del sistema.
- Los resultados obtenidos son coherentes con el modelo teórico propuesto, y permiten concluir que el sistema presenta un acoplamiento dinámico entre el líquido y la botella que puede ser controlado experimentalmente.

Referencias

- Gu, Y., Bai, Y., Xin, Y., Xiao, L., Wang, S., & Sun, H. (2021). *Dynamic Stabilization of Water Bottles*. arXiv preprint arXiv:2112.10585.
- Cosenza, M. (2015). *Mecánica Clásica*. Universidad de los Andes (ULA), Facultad de Ciencias, Departamento de Física. Mérida-Venezuela. Publicación Electrónica, pp. 133–141.
- Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2014). *Physics for Scientists and Engineers* (9th ed.). Cengage Learning.
- Ibrahim, R. A. (2005). *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*. Cambridge University Press.
- Brown, D. (2019). *Tracker Video Analysis and Modeling Tool*. Version 5.1.4. Open Source Physics. Disponible en: <https://physlets.org/tracker/>
- Oliphant, T. E. (2007). Python for Scientific Computing. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 10–20.