Método de Runge-Kutta de 4

Camacho Guillen Humberto

26 de Noviembre del 2018

1 Método de Runge-Kutta

Los métodos de Taylor tienen la propiedad de un error local de truncamiento de orden superior, pero la desventaja de requerir el cálculo y la evaluación de las derivadas de f(t, y). Esto resulta algo lento y complicado, en la mayoría de los problemas, razón por la cual, en la práctica casi no se utilizan. El método de Euler, lamentablemente requiere de un paso muy pequeño para una precisión razonable.

Los métodos de Runge kutta tienen el error local de truncamiento del mismo orden que los métodos de Taylor, pero prescinden del cálculo y evaluación de las derivadas de la función f(t, y).

Se presenta de nuevo el problema de valor inicial cuya solución se intenta aproximar:

$$\left\{ \frac{dy}{dt} = f(Y,t)a < y < by(a) = \alpha \right. \tag{1}$$

Como en los métodos anteriores, se determina primero la malla t0, t1, ... , tN de paso h, donde t0 = a y tN = b. En estos puntos es donde se va a obtener la aproximación de la solución.

En esencia, los métodos de Runge-Kutta son generalizaciones de la fórmula básica de Euler yi+1 = yi + h f(ti, yi) en los que el valor de la función f se reemplaza por un promedio ponderado de valores de f en el intervalo ti t ti+1, es decir,

$$y_i + 1 = y_i + h(w_1 k_1 + w_2 k_2 + ... + w_m k_m) \tag{2}$$

En esta expresión las ponderaciones wi, i = 1, ..., m son constantes para las que en general se pide que su suma sea igual a 1, es decir, w1 + w2 + ... + wm = 1, y cada kj es la función f evaluada en un punto seleccionado (t, y) para el cual ti t ti+1. Se mostrará que los kj se definen en forma recursiva.

Se define como orden del método al número m, es decir, a la cantidad de términos que se usan en el promedio ponderado.

y como se llama el tema de este ensayo, hablaremos precisamente del metodo de cuarto orden.

Si ahora m = 4, se obtiene, con un desarrollo del tipo del anterior, la siguiente fórmula, para i desde 0 hasta N-1:

$$k_1 = hf(t_1, y_1) \tag{3}$$

$$k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_o + \frac{1}{2}k_1 \tag{4}$$

$$k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_o + \frac{1}{2}k_2 \tag{5}$$

$$k_3 = hf(t_i + h_i y_i + k_3) \tag{6}$$

$$y_i + 1 = y_i + frac16(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{7}$$

Si bien con facilidad se pueden deducir otras fórmulas, el algoritmo expresado en (16) se denomina método de Runge-Kutta de cuarto orden, o método clásico de Runge-Kutta, abreviado como RK4. Este algoritmo es de uso extendido, y reconocido como una valiosa herramienta de cálculo, por la buena aproximación que produce.

Esta fórmula tiene un error de truncamiento local de O(h5), y un error global de O(h4). De nuevo, el precio que se debe pagar por la mejora en el error, es una mayor cantidad de evaluaciones de la función, resultando en un mayor tiempo de cálculo si la función es complicada. Tiene la ventaja, sobre el método de Taylor de orden 4 (cuyo error global es también O(h4), que no requiere el cálculo de las derivadas de f.

1.1 codigo de programa