Movimiento con aceleracion constante

March 15, 2014

1 Ecuaciones

Es el movimiento en el que la velocidad cambia a ritmo constante con el tiempo.Cuando la aceleracion media para cualquier intervalo es la aceleracion. Para encontrar una expresion para la velocidad primero sustituimos aceleracion media por aceleracion:

$$a_x = \frac{v_{2X} - v_{1X}}{t_2 - t_1} \tag{1}$$

Sea t1=0 y t2 cualquier instante posterior t. Simbolizamo von v0x la componete x de la velocidad en el instante inicial t=0; la componente de la velocidad en el instante posterior t es vx. Entonces la ecuacion a se convierte en

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0} \tag{2}$$

Solo con aceleracion constante:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \tag{3}$$

Ahora deducieremos una ecuacion para la posicion x en funcion del tiempo cuando la aceleracion es constante. Para ello, usaremos dos expresiones distintas para la velocidad media a$med - x$ en el intervalo de t=0 a cualquier t posterior.
La primera proviene de la definicion de v$med - x$, que se cumple sea constante o no la aceleracion. La posicion inicial es la posicion en t=0, denotada con x0. La posicion en el t posterior es simplemente x. Asi, para el intervalo

$$\triangle t = t - 0 \tag{4}$$

y el desplazamiento

$$\triangle x = x - x_0 \tag{5}$$

La ecuacion da:

$$v_{med-x} = \frac{x - x_0}{t} \tag{6}$$

Tambien podemos obetener otra expresion para v$med - x$ que sea valida solo si la aceleracion es constante, de mnodo que la grafica vx-t sea una linea recta y la velocidad cambie a ritmo constante. En este caso, la velocidad media en cualquier intervalo es solo el promedio de las velocidades al principio y al final del intervalo. Para el intervalo de 0 a t,

$$v_{med-x} = \frac{v_{ox} + v_x}{2} \tag{7}$$

Tambien sabemos que con aceleracion constante, la velocidad vx en un instante t esta dada por la ecuacion (3). Sustituyendo esa expresion por vx en la ecuacion (7), solo con aceleracion constante:

$$v_{med-x} = (v_{0x} + v_{0x} + a_x t) \div 2 = v_{0x} + a_x t \div 2 \tag{8}$$

Por ultimo, igualamos las ecuaciones (6) y (8) y simplificamos el resultado:

$$\frac{x - x_0}{t} = v_{0x} + a_x t \div 2 \tag{9}$$

o

$$x = x_0 + v_{0x}t + a_x t \wedge 2 \div 2 \tag{10}$$

Esta ecuacion (10) indica que si en el instante t=0, una particula esta en x0 y tiene velocidad v0x, su nueva posicion x en un t posterior es la suma de tres terminos: su posicion inicial x0, mas la distancia v0t que recorreria si su velocidad fuera constante, y una distancia adicional

$$(a_x t \wedge 2) \div 2 \tag{11}$$

causada por el cambio develocidad. Las ecuaciones anteriores se pueden comprobar con el supuesto de aceleracion constante derivando la ecuacion (10). Obtenemos:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} + a_x t \tag{12}$$

que es la ecuacion (10). Diferenciando otra vez, tenemos simplemente

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x \tag{13}$$

que concuerda con la deficion de aceleracion instantanea. Con frecuencia es util tener una relacion entre posicion, velocidad y aceleracion que no incluya el tiempo. Para obetenerla, despejamos t en la ecuacion (3), sustituimos la expresion resultante en la ecuacion (10) y simplificamos:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} \tag{14}$$

$$x = x_0 + v_{0x}(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}) + a_x(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}) \wedge 2 \div 2 \tag{15}$$

Trasnferimos el termino x0 al miembro izquierdo y multiplicamos la ecuacion por 2ax:

$$2a_x(x - x_0) = 2v_{0x}v_x - 2(v_{ox}) \wedge 2 + v_x \wedge 2 - 2v_{0x}v_x + v_0 \wedge 2 \tag{16}$$

Por ultimo, al simplificar obtenemos:

$$v_x \wedge 2 = v_{0x} \wedge 2 + 2a_x(x - x_0) \tag{17}$$

Para obtener una relacion mas util igualando dos expresiones para v$med - x$, y multimplicando por t. Al hacerlo, obtenemos:

$$x - x_0 = \frac{(v_{0x} + v_x)t}{2} \tag{18}$$

Observe que la ecuacion (18) no contiene la aceleracion ax. Esta ecaucion es util cuando ax es constante pero se desconoce su valor. Las ecuaciones (3),(10), (17) y (18) son las ecuaciones del movimiento con aceleracion constante. Con ellas, podemos resulver cualquier problema que implique movimiento rectilineo de una particula con aceleracion constante.

En el caso especifico de movimiento con aceleracion constante, los valores de x0, v0x y ax son positivos. Un caso especial de movimiento con aceleracion constante se da cuando la aceleracion es cero. La velocidad es entonces constante, y las ecuaciones del movimiento se convierten sencillamente en:

$$v_x = v_{0x} = constante \tag{19}$$

$$x = x_0 + v_x t \tag{20}$$