Notas de Cálculo Integral

1. Fórmula de Reducción del Seno

La integral de seno a la potencia n se puede reducir en integrales de menor potencia por medio de la fòrmula del seno, esta es:

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx \tag{1}$$

1.1. Integral definida de seno a la potencia n entre 0 y $\frac{pi}{2}$

Con la fórmula de reducción del seno se puede simplificar la siguiente integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx \tag{2}$$

1.1.1. Demostración

Se utiliza el método de integración por partes de la siguiente manera en la fórmula de integración por partes:

$u = \sin^{n-1} x$
$du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx$
$dv = \sin x dx$
$v = -\cos x$

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{3}$$

$$\int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + \int \cos x (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx \tag{4}$$

$$\int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)(\int \sin^{n-2} x dx - \int \sin^n x dx) \tag{5}$$

$$\int \sin^n x dx + (n-1)\int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx \tag{6}$$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx \tag{7}$$

El primer término evaluado para x = $\frac{pi}{2}$ y x = 0, da 0, QED.

1.2. Integral definida de seno a la potencia de 2n entre 0 y $\frac{pi}{2}$

Con el resultado anterior se puede mostrar:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} \tag{8}$$

1.2.1. Demostración

Se utiliza el método de induccion:
Primero se verifica para n = 1:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(2x) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \tag{9}$$

Ahora se supone que es valido para m y se demuestra para m+1:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{\pi}{2} \cdot ... \cdot \frac{2m-1}{2m} \tag{10}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(m+1)} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2} x dx = \frac{2m+2-1}{2m+2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx \tag{11}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(m+1)} x dx = \frac{2(m+1)-1}{2(m+1)} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot ... \cdot \frac{2m-1}{2m} = \frac{\pi}{2} \cdot ... \cdot \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2(m+1)-1}{2(m+1)} \tag{12}$$

Y así queda demostrado