Notas Ecuaciones Diferenciales

Febrero7 de 2014

Nataly Catillo Cod. 201126924

1 Ecuacion de Rikati

Si se tiene una ecuacion de la forma

$$\frac{dy}{dx} = a_1(t) + a_2(t)y + a_3(t)y^2 \tag{1}$$

condiciones:
y es una variable dependiente que NO aparece explicitamnete
t es una variable independiente que NO aparece explicitamente
y posee una solución particular de (1), y_1
Entonces:

$$y = y_1 + \frac{1}{v_{(t)}} \tag{2}$$

$$\dot{y} = \dot{y_1} - \frac{\dot{v}_t}{v^2} \tag{3}$$

si

$$\dot{y_1} - \frac{\dot{v}_t}{v^2} = a_1(t) + a_2(t)[y_1 + \frac{1}{v_{(t)}}] + a_3(t)[y_1^2] \tag{4}$$

Sabemos que $\mathrm{a}_1(t),\ a_2(t)y\ a_3(t)\ sonigualesa\ \dot{y_1}\ yaqueesteultimoessolucionentonces$

$$-\frac{\dot{v}_t}{v^2} = \frac{a_2(t)}{v_{(t)}} + \frac{2a_3(t)y_1}{v_{(t)}} + \frac{a_3(t)}{v^2} \tag{5}$$

Entonces

$$\dot{v}_t = -v(a_2(t) + 2a_3(t)y_1) - a_3(t) \tag{6}$$

La anterior es una ecuacion diferencial lineal de primer orden que se puede resolver por los métodos vistos en clase. Esta formula se puede utilizar siempre y cuando la solucion particular sea evidente o fasil de calcular.

2 reduccion de orden

Si y[variable dependiente] No aparece explicitamente. Entoces se puede hacer un cambio de variable de la forma:

$$v = \dot{y_{(t)}}, \dot{v} = \ddot{y_{(t)}} \tag{7}$$

Y si t[variable dependiente] que No aparece explicitamente

$$\dot{y} = v, \ddot{y} = \frac{dv}{dy} \tag{8}$$

$$\frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy} \tag{9}$$

entonces:
si

$$A_{(t)}\ddot{y} + B_{(t)}\dot{y} + C_{te} = 0 \tag{10}$$

$$A_{(t)}\dot{R} + B_{(t)}R + C_{te} = 0 \tag{11}$$

Ejemplo

si se tiene la siguiente ecuacion de segundo orden

$$t^2\ddot{y} + t\dot{y} - 1 = 0 \tag{12}$$

se puede convertir en primer orden haciendo la sustitución (7) y convertirla en:

$$t^2\dot{y} + ty = 1 \tag{13}$$

si la simplificamos

$$\dot{v} + \frac{v}{t} = \frac{1}{t^2} \tag{14}$$

La ecuación (14) se puede resolver por factor integrante. Donde:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{t}dt} = t$$

se multiplica (14) por $\mu yseresuelve, teniendo$

$$tv = \int \frac{1}{t}dt = \ln(t) + C_{te} \tag{15}$$

$$v = \frac{\ln(t)}{t} + \frac{C_{te}}{t}$$

Como sabemos que por la sustitucion se cumple (7). Entonces

$$y = \int \frac{\ln(t)}{t} + \frac{C_{te}}{t}dt \tag{16}$$

$$y = \int \frac{\ln(t)}{t}dt + \int \frac{C_{te}}{t}dt$$

$$y = \frac{1}{2}(t^2) + C\ln(t)$$