Transformaciones euclidianas

Sea E es un plano euclidiano (Un plano euclidiano E es un plano afin A con un producto escalar g sobre una espacio vectorial V)

Transformaciones euclidianas, de espacio vectorial euclidiano(operadores ortogonales)

$A : V \to V$, tal que $g(A\vec{v}, A\vec{w}) = g(\vec{v}, \vec{w}) \forall \vec{v}, \vec{w}$

1) $||A\vec{v}|| = ||\vec{v}||$
2) A conserva los angulos

Teorema
Si $A : V \to V$ tal que $||A\vec{v}|| = ||\vec{v}||$ entonces $A\vec{v} \cdot A\vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}$

Demostracion

$$A(\vec{v}+\vec{w})\cdot A(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{v}+\vec{w})(A\vec{v}+A\vec{w})\cdot(A\vec{v}+A\vec{w}) = \vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{v}+\vec{w}) \quad (1)$$

$$(A\vec{v} + A\vec{w}) \cdot (A\vec{v} + A\vec{w}) = \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \quad (2)$$

$$A\vec{v} \cdot A\vec{v} + 2A\vec{v} \cdot \ A\vec{w} + A\vec{w} \cdot A\vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \ \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w} \quad (3)$$

Teorema

Sea $A : V \to V$ un operador ortogonal y $\{e_1, ..., e_n\}$ una base de un espacio vectorial euclidiano(V,g), luego

Si $G = ||g_i j = e_i \cdot e_j||$ es la matriz de Gram de la base y $M(A)$ es la matriz del operador A, entonces A es una isometria si y solo si

$$M(A)^t G M(A) = G$$

$$(A \cdot \vec{e_i}) \cdot (A \cdot \vec{e_j}) = \vec{e_i} \cdot \vec{j}$$

$$(A_j^k \vec{e_k}) \cdot (A_j^m \vec{e_m}) = \vec{e_i} \cdot \vec{e_j}$$

$$A_i^k A_j^m \vec{e_k} \vec{e_m} = \vec{e_i} \cdot \vec{e_j}$$

$$A_j^m g_k m A_i^k = g_i j$$

$$||A_j^i||^t \cdot ||g_k m|| \cdot ||A_j^i|| = ||g_k m||$$

$$A^t \cdot G \cdot A = G$$