Cálculo Vectorial

1 Funciones vectoriales

El dominio de una función vectorial es la intersección de los dominios de cada variable
Para encontrar el límite de una función vectorial se debe tomar el límite de cada una de sus componentes

1.1 Derivadas de funciones vectoriales

Para encontrar la derivada de una función vectorial se debe encontrar la derivada de cada una de sus componentes

$$u(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)) \tag{1}$$

$$u(t)' = (f_1'(t), f_2'(t), ..., f_n'(t)) \tag{2}$$

1.2 Reglas de derivación entre funciones vectoriales

Dadas unas funciones vectoriales $u(t)$ y $v(t)$

$$(u(t) + v(t))' = u'(t) + v'(t) \tag{3}$$

$$(c \cdot u(t))' = c \cdot u'(t) \tag{4}$$

$$(u(t) \cdot v(t))' = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t) \tag{5}$$

$$(u(t) \times v(t))' = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t) \tag{6}$$

1.3 Integrales de funciones vectoriales

La integral de una función vectorial es la integral de cada una de sus componentes

$$\vec{u}(t) = (f_1(t), f_2(t), ...f_n(t)) \tag{7}$$

$$\int \vec{u}(t)dt = (\int f_1(t)dt, \int f_2(t), ..., \int f_n(t)) \tag{8}$$

1.4 Longitud de arco

La longitud de arco de una función define la distancia de la trayectoria de una curva entre dos puntos que estan en la curva

La longitud de curva se denota s y se define con la ecuación:

$$s = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt \tag{9}$$

en donde $\vec{r}$ es el la función vectorial que define la curva y a y b son los puntos entre los cuales se esta calculando la longitud de curva.

1.5 Función de longitud de arco

La función de longitud de arco es usada como parámetro natural ya que la parametrización es independiente del sistema de coordenadas usado. La función de longitud de arco $s(t)$ está dada por

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(u)\| du \tag{10}$$

en donde t varía en los números reales.

Debido a que s es el parámetro natural, es conveniente reparametrizar una ecuación vectorial para que el parámetro esté dado por la longitud de arco. Para reparametrizar la ecuación desde un parametro t al parámetro natural s se debe calcular la integral de longitud de arco y encontrar una funcion $t(s)$. Habiendo obtenido la funcion $t(s)$, se reemplaza en la función vectorial que tenía como parámetro t.

$$\vec{r}(t) \to \vec{r}(t(s)) \to \vec{r}(s) \tag{11}$$

1.6 Curvatura

La curvatura de una función define la velocidad a la que curva cambia de dirección. Se puede expresar como la magnitud del cambio del vector tangente unitario $U(t)$ con respecto a la longitud de arco.

$$\kappa = \left| \frac{d\vec{U}}{ds} \right| \tag{12}$$

Es más conveniente usar el parámetro t en lugar del parámetro s ya que se puede usar la ecuación

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|} \tag{13}$$